Aufgabensammlung zur Analysis 2

SS 2004

Andreas Kriegl

email:andreas.kriegl@univie.ac.at

5 Integralrechnung

5.1. Zeige, daß jede Treppenfunktion, d.h. linear-Kombination von charakteristischen Funktionen von Intervallen, D-integrierbar ist und bestimme deren Integral.

5.2. Zeige, daß die einzige stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$ und $\int_a^b f = 0$ die Funktion $f = 0$ ist. Gilt das auch für nicht-stetige aber D-integrierbare Funktionen?

5.3. Es seien $f, g \in R[a, b]$ mit $\int |f - g| = 0$. Zeige, daß dann $f = g$ fast überall ist.
Hinweis: Vgl. Aufgabe (5.2) und verwende [2, 5.1.7].

5.4. Zeige, daß die Zusammensetzung D-integrierbarer Funktionen nicht D-integrierbar zu sein braucht.
Hinweis: Verwende als innere Funktion f aus [2, 5.1.9] und versuche als Zusammensetzung die Dirichlet'sche Sprungfunktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ zu erhalten.

5.5. Es sei $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ über jedes kompakte Intervall integrierbar und $\eta := \lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\frac{1}{x}\int_0^x f \to \eta \text{ für } x \to +\infty$$

Hinweis: Zerlege den Integrationsbereich in zwei geeignete Teilintervalle.

5.6. Beweise den Satz von Dini: Es sei X kompakt, $f_n : X \to \mathbb{R}$ stetig, und $(f_n)_n$ strebe punktweise monoton fallend gegen 0. Dann ist die Konvergenz sogar gleichmäßig.
Hinweis: Wende den Satz von Heine-Borel auf eine Überdeckung mit offenen Bällen an, auf welchen jeweils mindestens eine der Funktionen f_n kleiner als ε ist.

5.7. Es sei X kompakt und $f_n : X \to \mathbb{R}$ seien stetig und konvergieren gleichmäßig gegen f_∞. Jedes f_n habe eine Nullstelle. Dann besitzt auch f_∞ eine Nullstelle.

5.8. Finde eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deren Ableitung auf keinen Intervall $[0, b]$ D-integrierbar ist.
Hinweis: Es genügt eine differenzierbare Funktion mit unbeschränkter Ableitung zu finden.

5.9. (Zwischenwertsatz für Ableitungen) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann nimmt f' jeden Wert η zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an.
Hinweis: Es genügt dies für $f'(a) > \eta = 0 > f'(b)$ zu zeigen.

5.10. Finde eine D-integrierbaren Funktion die keine Stammfunktion besitzt.
Hinweis: Aufgabe (5.9).

5.11. Bestimme folgende Integrale:

1. $\int \cos(x)^2\,dx$
2. $\int x^2\,e^x$
3. $\int \ln(x)\,dx$ (**Hinweis:** $1 \cdot \ln(x)$)
4. $\int_0^1 \arctan(x)\,dx$ (**Hinweis:** $1 \cdot \arctan(x)$)

5.12. Bestimme folgende Integrale:

- $\int \tan(x)\,dx$ (**Hinweis:** $y := \cos(x)$)

- $\int \frac{1}{a^2+b^2x^2}\,dx$ (**Hinweis:** $y := \frac{b}{a}\,x$)
- $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$
- $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)}\,dx$ (**Hinweis:** $x := 2\arctan(t)$ und somit $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$)

5.13. Bestimme die komplexe Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{z^3-i\,z^2-z+i}$ und von $\frac{z-1}{z^4+z^2}$.

5.14. Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{x^3-2x^2+x}$, $\frac{x^2+1}{x^5+2x^4+2x^3+x^2}$ und von $\frac{x+2}{x^6+x^4-x^2-1}$

5.15. Bestimme folgendes Integral

$$\int_2^3 \frac{x^3}{x^3-x^2-x+1}\,dx$$

5.16. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\alpha, \beta : [a_0, b_0] \to [a,b]$ differenzierbar, dann ist

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(s)\,ds = f(\beta(t))\,\beta'(t) - f(\alpha(t))\,\alpha'(t) \text{ für } t \in [a_0, b_0].$$

5.17. Es sei $f(t) := \int_1^t \frac{1}{s}\,ds$. Zeige ohne Verwendung des Logarithmus: $f(xy) = f(x)\,f(y)$ und $f(e^x) = x$ für alle $x, y > 0$.

5.18. Bestimme folgende uneigentliche Integrale:

$$\int_0^{+\infty} x^2\,e^{-x}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

5.19. Es sei $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend und $f \geq 0$. dann existiert $\int_0^\infty f \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_k f(k)$ konvergiert.
Hinweis: Majorante.

5.20. Zeige, daß Produkte uneigentlich integrierbarer Funktionen nicht uneigentlich integrierbar zu sein brauchen.

Beispiele für den Mathematica-Teil, Abgabetermin 1./2. April

5.21. Versuche möglichst viel über folgende Potenzreihe unter (teilweiser) Verwendung von Mathematica herauszufinden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

Hinweis: Versuche Konvergenzbereich (inklusive Randpunkte) zu bestimmen, sowie die Summenfunktion und deren Taylorreihe als Probe, die Ableitung, eine Stammfunktion, ihr Quadrat,....

5.22. Versuche das Integral

$$\int_{-1}^{1} e^{1/x}\, dx$$

zu bestimmen, und, falls dieses (im eigentlichen Sinn) nicht existiert, finde eine möglichst großes Teilintervall $[a, b]$ von $[-1, 1]$ auf welchem

$$\int_{a}^{b} e^{1/x}\, dx$$

doch existiert (Mit Begründungen!).

Weitere Tafelbeispiele zu Kapitel 5

5.23. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Für jede Zerlegung Z gegeben durch $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ definieren wir $V(f, Z) := \sum_{i=1}^n \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$ und damit die Variation von f als

$$V(f) := \sup\Big\{V(f, Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a, b]\Big\} \in [0, +\infty].$$

Zeige, daß dies eine Norm auf dem Raum aller Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation (d.h. mit $V(f) < \infty$) und $f(a) = 0$ definiert.

5.24. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit D-integrierbarer Ableitung. Zeige, daß dann die Variation $V(f)$ aus Aufgabe (5.23) gerade $\int_a^b |f'(t)|\,dt$ ist
Hinweis: Verwende den Mittelwertsatz um $U(|f'|, Z) \le V(f, Z) \le O(|f'|, Z)$ zu zeigen.

5.25. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation (siehe Aufgabe (5.23)). Zeige, daß $f_\uparrow : x \mapsto V(f|_{[a,x]})$ eine monoton wachsende Funktion ist und $f_\downarrow := f - f_\uparrow$ eine monoton fallende Funktion mit $f = f_\uparrow + f_\downarrow$.
Hinweis: Für $a \le x_1 \le x_2 \le b$ ist $f_\uparrow(x_2) = f_\uparrow(x_1) + V(f|_{[x_1,x_2]})$ und $V(f|_{[x_1,x_2]}) \ge f(x_2) - f(x_1)$.

5.26. Um das Volumen V eines Körpers der bei Rotation einer Abbildung $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ um die x-Achse entsteht von innen und außen zu approximieren betrachte das Volumen jenes Körpers der durch Rotation einer Untersumme bzw. einer Obersumme von f entsteht. Definiere dazu das Volumen eines Zylinders als Höhe mal Grundfläche. Folgere, daß V durch das Integral $\pi \int_a^b f(x)^2\,dx$ berechnet werden kann.

5.27. In Analogie zur 1-Norm $\|\_\|_1$ auf $\mathbb{R}^n$ bzw. auf ℓ^1 definiere

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx \text{ für alle } f \in R([a, b], \mathbb{R}).$$

Ist dies eine Norm am Raum $R([a, b], \mathbb{R})$ der D-integrierbaren Funktionen am Intervall $[a, b]$?

5.28. Es sei $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $R([0, 1], \mathbb{R})$ bzgl. der 1-Norm $\|\_\|_1$ aus Beispiel (5.27). Folgt daraus die Konvergenz gegen eine Funktion $f_\infty \in R([0, 1], \mathbb{R})$ bzgl. der 1-Norm?
Hinweis: Finde eine Reihe von Treppenfunktionen die bzgl. der 1-Norm absolut summierbar ist, aber punktweise gegen eine unbeschränkte Funktion konvergiert. Zeige jede hypothetische Summe dieser Reihe bzgl. der 1-Norm muß ebenfalls unbeschränkt sein, kann also keine D-integrierbare Funktion sein.

5.29. Ist der Raum der (stetig) differenzierbaren Funktionen bzgl. der Supremumsnorm $\|\_\|_\infty$ vollständig?
Hinweis: Betrachte $f_n : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$.

5.30. Verwende [1, 4.2.11] um zu zeigen, daß der Raum $C^1([a, b], \mathbb{R})$ der stetig differenzierbaren Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$ bzgl. der Norm $f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ vollständig ist.

5.31. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $a \in X$ fix. Für $x \in X$ definiere eine Abbildung $f_x : X \to \mathbb{R}$ durch $f_x(y) := d(x, y) - d(a, y)$. Zeige, daß $x \mapsto f_x$ eine distanzbewahrende injektive Abbildung $X \to B(X, \mathbb{R})$ definiert.
Hinweis: Es ist $\|f_x\|_\infty \le d(x, a)$ und $\|f_{x_1} - f_{x_2}\|_\infty = \sup\{|d(x_1, y) - d(x_2, y)| : y \in X\} \le d(x_1, x_2)$.

5.32. Es seien X und Y Mengen und E ein Banach-Raum (oder der einfachheithalber $E = \mathbb{R}$). Für jede beschränkte Funktion $f : X \times Y \to E$ und fixes $x \in X$ sei $\check{f}(x) : Y \to E$ gegeben durch $\check{f}(x)(y) := f(x, y)$. Zeige:

1. $\check{f}(x)$ ist beschränkt, also $\check{f}(x) \in B(Y,E)$.
2. Die Abbildung $\check{f} : x \mapsto \check{f}(x)$ ist ebenfalls eine beschränkte Abbildung $X \to B(Y,E)$, also $\check{f} \in B(X, B(Y,E))$.
3. Die Zuordnung $f \mapsto \check{f}$ ist bijektiv von $B(X \times Y, Z)$ nach $B(X, B(Y,Z))$ und Normbewahrend, d.h. $\|\check{f}\|_\infty = \|f\|_\infty$.

○ **5.33.** Betrachte den Teilraum E der endlichen Folgen, d.h. aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die schließlich 0 sind, also $a_n \neq 0$ für nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ erfüllen. Zeige, daß dieser in ℓ^1 dicht liegt, also zu jedem $a \in \ell^1$ und $\varepsilon > 0$ ein $b \in E$ existiert mit $\|a - b\|_1 < \varepsilon$.

5.34. Es sei E der Vektorraum aller Potenzreihen $\sum_k a_k\, x^k$ für welche $\sum_{k=0}^\infty |a_k| < \infty$ ist (also z.B. alle mit Konvergenzradius > 1). Definiere die Norm von solchen Potenzreihen durch $\sum_{k=0}^\infty \|a_k\|$. Zeige, daß dies ein Banach-Raum, ja sogar eine Banach-Algebra ist. Zeige weiters, daß die Menge aller Polynome ein linearer Teilraum ist, der in E dicht liegt, d.h. zu jeder Potenzreihe f und $\varepsilon > 0$ existiert ein Polynom p mit $\|f - p\| < \varepsilon$.

○ **5.35.** Es sei A eine Matrix (oder der Einfachheit halber eine 2×2-Matrix). Bestimme die Operatornorm wenn man am Definitions- und am Wertebereich die 1-Norm verwendet.

5.36. Hölder-Ungleichung: Es sei $p > 1$ und $1/p + 1/q = 1$. Falls die Reihen $\sum_k |a_k|^p$ und $\sum_k |b_k|^q$ konvergieren, so auch $\sum_k |a_k b_k|$ und es gilt:

$$\sum_k |a_k b_k| \leq \Big(\sum_k |a_k|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_k |b_k|^q\Big)^{1/q}.$$

Hinweis: Betrachte zuerst endliche Folgen und setze $A := \sum_{k=1}^n |a_k|^p$ und $B := \sum_{k=1}^n |b_k|^p$. Da ln konkav ist ($\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$) gilt $a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{1}{p}\, a + \frac{1}{q}\, b$ und somit $(\frac{|a_k|^p}{A})^{1/p} (\frac{|b_k|^q}{B})^{1/q} \leq \frac{1}{p} \frac{|a_k|^p}{A} + \frac{1}{q} \frac{|b_k|^q}{B}$ woraus das Gewünschte durch Summation folgt. Für Reihen folgt dies nun durch Grenzübergang.

5.37. Minkowski-Ungleichung: Es sei $p \geq 1$. Falls die Reihen $\sum_k |a_k|^p$ und $\sum_k |b_k|^p$ konvergieren, so auch $\sum_k |a_k + b_k|^p$ und es gilt:

$$\Big(\sum_k |a_k + b_k|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_k |a_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_k |b_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Hinweis: Betrachte zuerst wieder endliche Folgen und setze $A := \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p = \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|\, |a_k + b_k|^{p-1} \leq \sum_{k=1}^n |a_k|\, |a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |b_k|\, |a_k + b_k|^{p-1}$ und wende darauf die Hölder-Ungleichung an.

5.38. Zeige, daß $x \mapsto \|x\|_p := (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

5.39. Zeige, daß $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$ für $x \in \mathbb{R}^n$ ist, was die Bezeichnung ∞-Norm für die Maximumsnorm gerechtfertigt.

5.40. Es sei $\ell^p := \{(x_k)_k \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < \infty\}$. Dann ist $x \mapsto (\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p)^{1/p}$ eine Norm auf ℓ^p.

5.41. Jensen-Ungleichung: Es sei $0 < q < p$. Dann ist

$$\Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^q\Big)^{1/q} \leq \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Hinweis: Betrachte zuerst wieder endliche Folgen und setze $A^p := \sum_{k=1}^n |a_k|^p$. Dann ist $\sum_k (\frac{|a_k|}{A})^q \leq \sum_k (\frac{|a_k|}{A})^p = 1$.

○ **5.42.** Es sei $t \in [a,b]$. Dann ist $\mathrm{ev}_t : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(t)$ nicht stetig, wenn wir den Raum $C([a,b])$ der stetigen Abbildungen $[a,b] \to \mathbb{R}$ mit der 1-Norm $\|f\| := \int_a^b |f(t)|\,dt$ versehen.
Hinweis: Finde stetige Funktionen f_n mit $f_n(0) = 1$ und $\|f_n\|_1 \to 0$.

5.43. Zeige, daß $C(X,\mathbb{R})$ für kompaktes X eine Banach-Algebra bezüglich der ∞-Norm ist.
Hinweis: Dies ist ein abgeschlossener Teilraum der Banach-Algebra $B(X,\mathbb{R})$.

○ **5.44.** Ist der Raum aus Aufgabe (5.30) eine Banach-Algebra?
Hinweis: Aufgabe (5.43)

5.45. Für D-integierbare Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiere $\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,dt}$ sowie $\langle f|g\rangle := \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$. Zeige, daß $\|\_\|_2$ eine Norm ist, $\langle \_|\_\rangle : R[a,b] \times R[a,b] \to \mathbb{R}$ bilinear ist und $(\|f\|_2)^2 = \langle f|f\rangle$ gilt.
Hinweis: Verallgemeinere [1, 2.2.5] durch Übergang zu Riemann-Summen und folgere die Verallgemeinerung von [1, 2.2.3] daraus.

○ **5.46.** Es sei $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $f \mapsto (t \mapsto \int_0^1 k(t,s)\,f(s)\,ds$, $C[0,1] \to C[0,1]$ stetig.
Hinweis: Operatornorm.

○ **5.47.** Berechne die Ableitung der Kurve $t \mapsto (\sin(t), \sin(2t))$ sowie ihr Integral von 0 bis $\pi/2$. Versuche Dir auch ein 3-dimensionales bzw. 2-dimensionales Bild der Kurve zu machen.

○ **5.48.** Betrachte die Kurve $c : t \mapsto (t^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat diese Werte in in ℓ^1, ℓ^2, ℓ^∞. Ist sie in diesen Punkten stetig (oder sogar differenzierbar)?
Hinweis: Mittelwertsatz

○ **5.49.** Es sei $a = (a_k) \in \ell^2$ und $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f_k(0) = 0$ und $|f_k'(x)| \le a_k$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeige, daß dann die Kurve $t \mapsto f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots)$ (gleichmäßig) stetig von $\mathbb{R}$ nach ℓ^2 ist.
Hinweis: Mittelwertsatz

○ **5.50.** Es sei f wie im vorigen Beispiel. Zeige, daß f (an der Stelle 0) differenzierbar ist (mit Ableitung) $(f_k'(0))_k$.
Hinweis: Nach dem Mittelwertsatz ist $|\frac{f_k(t)-f_k(0)}{t} - f_k'(t)| = |f_k'(\xi_k) - f_k'(t)| \le 2\,a_k$ und für $\varepsilon > 0$ existiert ein N mit $\sum_{k\ge N} a_k^2 < \varepsilon$. Somit muß man nur noch die ersten N Koordinaten kontrollieren.

○ **5.51.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Betrachte dann die Kurve $c : \mathbb{R} \to B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gegeben durch $c(t)(s) := f(t+s)$. Welche Vorraussetzungen an f sind notwendig, damit c stetig bei 0 bzgl. der ∞-Norm auf $B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist.

5.52. Es seien a und b $n \times n$-Matrizen (oder Operatoren in $A := L(E,E)$). Nach [2, 5.4.15] ist $e^a := \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} a^k$ wohldefiniert. Zeige, daß $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ falls $a \cdot b = b \cdot a$ gilt.
Hinweis: Auch in jeder Banach-Algebra konvergiert das Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen, siehe [Heuser, 110.2]

○ **5.53.** Es sei a eine $n \times n$-Matrix (oder ein Operator in $A := L(E,E)$). Nach [2, 5.4.15] existiert $e^{t\,a} = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}\, a^n$. Zeige, daß die Kurve $t \mapsto e^{t\,a}$ differenzierbar ist bei 0 mit Ableitung a. Unter Verwendung von Aufgabe (5.52) folgt $\frac{d}{dt} e^{t\,a} = a\, e^{t\,a}$.

5.54. Bestimme die Richtungsableitung $\frac{d}{dt}|_{t=0} \det(a + t\,b)$ der Determinantenfunktion det an der Stelle $a = \mathrm{id} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ in Richtung $b \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Hinweis: Der zweithöchste Koeffizient des charakteristischen Polynoms ist die Spur $\operatorname{tr}(a) = \sum_i a_{i,i}$. Somit ist

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{id} + t\,b) = t^n \det(\frac{1}{t}\,\mathrm{id} + b) &= t^n \Big(\frac{1}{t^n} + \frac{1}{t^{n-1}} \operatorname{tr}(b) + \dots + \det(b)\Big) \\ &= 1 + t\,\operatorname{tr}(b) + \dots + t^n \det(b).\end{aligned}$$

○ **5.55.** Betrachte die Inversion $i : a \mapsto a^{-1}$ für Matrizen (oder Elemente einer Banach-Algebra) und bestimme deren Richtungsableitung $\frac{d}{dt}|_{t=0}(a + t\,b)^{-1}$ an der Stelle $a = \mathrm{id}$ (oder eines allgemeinen invertierbaren a) in Richtung von b.
Hinweis: [2, 5.4.16]

Beispiele für den Mathematica-Teil, 2. Abgabetermin

Untersuche die stetigen Erweiterungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folgender Funktionen auf Differenzierbarkeit an der Stelle $(0, 0)$.

Mache Dir dazu ein aussagekräftiges Bild von f um eine Idee zu bekommen. Bestimme die partiellen Ableitungen $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ und die Richtungsableitungen $d_{v,w} f(0, 0)$ als Grenzwert. Versuche herauszubekommen, ob diese die Ableitung $f'(0, 0)$ beschreiben. Betrachte die Kurve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^3, t)$ und kontrolliere die Kettenregel für $f \circ g$ an der Stelle 0.

Benutze zu all diesem die Methoden aus den Notebooks "Mehrdimensionale Funktionen und ihre Differentiation" sowie "Plots".

5.56.

$$f(x, y) := \frac{x^4\, y^2}{x^4 + y^4}$$

5.57.

$$f(x, y) := \frac{x^2\, y}{x^2 + y^4}$$

5.58.

$$f(x, y) := \frac{x^2\, y^2}{x^2 + y^4}$$

5.59.

$$f(x, y) := \frac{x\, y^4}{x^2 + y^6}$$

5.60. Beweise [2, 5.5.25], also für kompaktes I und Banach-Räume E und F die Wohldefiniertheit, Linearität und Stetigkeit des Variablen-Vertauschens: $C(I, L(E,F)) \to L(E, C(I,F))$, $g \mapsto \tilde{g}$ wobei $\tilde{g}(x)(t) := g(t)(x)$ ist.
Hinweis: [2, 5.5.22], [2, 5.5.23] und [2, 5.4.13].

5.61. Interpretiere $t \mapsto \sin t$ bzw. $t \mapsto \sin t^2$ als Abbildung $\mathbb{R} \to C([0,1], \mathbb{R})$ und bestimme deren Ableitung. Überprüfe das Ergebnis mittels Mathematica!
Hinweis: Die Angabe lautet nicht $\sin(t)$ bzw. $\sin(t^2)$!

5.62. In Analogie zu $\sin^{-1} := \arcsin$ setzen wir $\sin^2 := \sin \circ \sin$. Berechne die Ableitung von $\sin^2$ und vergleiche dies mit der Ableitung von $x \mapsto \sin(x)^2$.

5.63. Berechne die Ableitung von $\sin \cdot \cos$, $\sin \circ \cos$ und $\cos \circ \sin$.

6 Differentiation im Mehrdimensionalen

6.1. Ist $f : (x,y) \mapsto xy \sin(1/(x^2+y^2))$ zu einer bei $(0,0)$ differenzierbaren Abbildung erweiterbar?

6.2. Ist $f : (x,y) \mapsto x^2y^2 \sin(1/(x^2+y^2))$ zu einer bei $(0,0)$ differenzierbaren Abbildung erweiterbar?

6.3. Zeige, daß die Ableitung $f' : E := E_1 \times E_2 \to L(E,F)$ für jede bilineare Abbildung $f : E_1 \times E_2 \to F$ linear ist. Gilt etwas entsprechendes für 3-lineare Abbildungen, wie z.B. $(t,r,s) \mapsto t\,r\,s$?

6.4. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar und $\|f(t)\|_2 = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeige, daß $x(t)$ und $x'(t)$ aufeinander normal stehen.
Hinweis: Es ist $\|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle$.

6.5. Es seien f und g differenzierbar $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Berechne die Ableitung von $t \mapsto f(t) \times g(t)$, wobei $\times$ das Kreuzprodukt von 3-dimensionalen Vektoren bezeichnet, also

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2\,y_3 - x_3\,y_2, x_3\,y_1 - x_1\,y_3, x_1\,y_2 - x_2\,y_1).$$

Hinweis: Es ist $\times$ bilinear.

6.6. Bestimme die Ableitung der Division $h : (x,y) \mapsto x/y$ und folgere daraus die Quotientenregel.
Hinweis: $\frac{f}{g} := h \circ (f,g)$.

6.7. Es sei $f : (r,\varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\,\sin(\varphi))$ die Abbildung die Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten umrechnet. Bestimme die Ableitung $f'(r,\varphi)$ sowie deren Determinante.

6.8. Druck P, Volumen V und Temperatur T eines idealen Gases stehen in folgender Beziehung zueinander: $P\,V = c\,T$ mit einer Konstante c. Berechne $\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V}$, wobei jeweils eine Variable als Funktion der beiden übrigen aufgefaßt wird.

6.9. Es sei $f : E \to F$ differenzierbar und $\mathbb{R}^+$-homogen vom Grad $1 \le p \in \mathbb{N}$, d.h. $f(t\,x) = t^p f(x)$ für alle $x \in E$ und $t > 0$. Zeige $f'(x)(x) = p\,f(x)$ für alle $x \in E$
Hinweis: Betrachte $c(t) := f(t\,x)$ und berechne $c'(1)$ auf zwei Arten.

○ **6.10.** Es seien $f, g : E \supseteq U \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$, f stetig bei x_0 und g differenzierbar bei x_0 mit $g(x_0) = 0$. Zeige $f \cdot g$ ist differenzierbar bei x_0 und bestimme deren Ableitung.

○ **6.11.** Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $g(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) := x\,z - \frac{y}{z}$. Bestimme die Ableitung von $f \circ g$ an allen Stellen.
was sich stetig zu 0 erweitert.

○ **6.12.** Es sei

$$A(t) := \begin{pmatrix} t & t^2 & t^3 - 1 \\ \sin(t) & \cos(t) & \tan(t) \\ e^t & \log(1+t) & \log(1-t) \end{pmatrix}.$$

Berechne die Ableitung von $t \mapsto A(t)^2$ an der Stelle 0 (sowie jene von $t \mapsto \det(A(t))$).
Hinweis: Die Matrizenmultiplikation ist bilinear (sowie Aufgabe (5.54))

○ **6.13.** Bestimme die Ableitung von $z \mapsto z^3$ (oder $z \mapsto z^n$) für $z \in \mathbb{C}$ aufgefaßt als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Diskutiere die Invertierbarkeit dieser Abbildung.
Hinweis: Vgl. mit [2, 6.2.2.1].

6.14. Bestimme die Ableitung von $z \mapsto e^z$ für $z \in \mathbb{C}$ aufgefaßt als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Diskutiere die Invertierbarkeit dieser Abbildung.
Hinweis: $e^{x+i\,y} = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$, vgl. mit [2, 6.2.2.2].

6.15. Bestimme die Ableitung von $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ aufgefaßt als Abbildung $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$.

○ **6.16.** Berechne die Ableitung von $x \mapsto \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2 + 2\,x\,y)\,dy$ an der Stelle 0.

○ **6.17.** Es sei $f(x, y) := \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}$. Ist $x \mapsto \int_0^1 f(x, y)\,dy$ differenzierbar mit Ableitung $\int_0^1 \partial_1 f(0, y)\,dy$?

6.18. Es sei $g(y) := \frac{y}{y^2+1}$ und $h(y) := |y \ln(y)|$ für $y > 0$ und $h(0) = 0$. Sei schließlich $f(x, y) := \sqrt{x} g(h(\frac{y}{\sqrt{x}}))$ für $x > 0$. Zeige, daß f stetig erweiterbar zu einer Funktion $[0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ ist, $\partial_1 f(0, y)$ existiert und 0 ist, aber $x \mapsto \int_0^1 f(x, y)\,dy$ nicht differenzierbar bei 0 ist.

○ **6.19.** Es sei $f(x, y) := \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$. Berechne $((\partial_1)^2 + (\partial_2)^2)f := (\partial_1)^2 f + (\partial_2)^2 f$.

6.20. Es sei $f(x, y, z) := \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Berechne $((\partial_1)^2 + (\partial_2)^2 + (\partial_3)^2)f := (\partial_1)^2 f + (\partial_2)^2 f + (\partial_3)^2 f$.

6.21. Es sei $(f, g) : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^2$ C^2 mit $\partial_1 f = \partial_2 g$ und $\partial_2 f = -\partial_1 g$. Dann ist $((\partial_1)^2 + (\partial_2)^2)f := (\partial_1)^2 f + (\partial_2)^2 f = 0$ und ebenso für g.
Hinweis: Satz von Schwarz.

6.22. Es sei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $h(x, y) := f(x - \alpha y) + g(x + \alpha y)$. Dann ist $(\partial_2)^2 h = \alpha^2\,(\partial_1)^2 h$.

[2, 6.2] Lösung von Gleichungen

6.23. Es sei A eine Banach-Algebra, $x_0 \in A$ invertierbar und $x \in A$ derart, daß $|x - x_0| < 1/|x_0^{-1}|$. Dann ist x invertierbar und $|x^{-1} - x_0^{-1}| < \frac{|x_0 - x|}{1 - |x_0^{-1}|\,|x_0 - x|} |x_0^{-1}|^2$.
Hinweis: $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ und die geometrische Reihe

6.24. Betrachte die Funktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^3 - 1$. Berechne ihre Ableitung als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + i\,y)^3 = z^3 \mapsto (\mathfrak{Re}(z^3), \mathfrak{Im}(z^3))$ und zeige, daß diese lokal um jeden Punkt $z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ außer für $z = 0$ invertierbar ist.

○ **6.25.** Zeige, daß $(x, y) \mapsto (x + \frac{1}{1+y^2}, y + \frac{1}{1+x^2})$ lokal um jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ein Diffeomorphismus ist.

○ **6.26.** Zeige, daß $(x, y) \mapsto (x + \cos(y)/2, y + \cos(x))$ lokal um jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ein Diffeomorphismus ist. Gilt dies auch für $(x, y) \mapsto (x + \cos(y), y + \sin(x))$?

6.27. Lokal bei welchen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist $(x, y) \mapsto (x + y\,x^2, y + x\,y^2)$ ein Diffeomorphismus?

6.28. Zeige, daß $(x, y) \mapsto (x/3 + \log(8 + y^2), y/3 + \log(11 + x^2))$ lokal um jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ein Diffeomorphismus ist. Stimmt das auch für $(x, y) \mapsto (x/2 + \log(3 + y^2), y/2 + \log(5 + x^2))$?

○ **6.30.** Berechne die Ableitung folgender implizit gegebener Kurven:

$$\text{Lemniskate: } (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$
$$\text{Kardioide: } (x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$$

6.31. Finde eine Lösung von $e^{2x-y} + 3x - 2y = 1$ und zeige daß sich die in der Nähe dieser Lösung befindlichen Lösungen als differenzierbare Kurve $x \mapsto y$ beschreiben lassen. Bestimme deren Ableitung im Punkte der speziellen Lösung.

○ **6.32.** Zeige, daß die Gleichung $z^4 + 2z\cos(y) + \sin(x) = 0$ für (x, y, z) nahe 0 nach z aufgelöst werden kann.

○ **6.33.** Zeige, daß das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2z^2 &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 &= 4 \end{aligned}$$

für kleine $|x|$ aufgelöst werden kann. Bestimme die Ableitung der Lösung.

6.34. Zeige, daß das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - u^2 + v^2 &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v^2 &= 1 \end{aligned}$$

für kleine $\|(x, y)\|$ in u und v aufgelöst werden kann. Bestimme die Ableitung der Lösung.

○ **6.35.** Zeige, daß die Gleichung $\int_0^y e^{tx(t+x)}\,dt = 1$ für kleine x eine Lösung y hat die differenzierbar von x abhängt. Bestimme deren Ableitung bei 0. Existiert ein Lösung y für alle $x \in \mathbb{R}$?

6.36. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1 und $\partial_2 f(0,0) \neq 0$ und $f(0,0) = 0$. Zeige, daß die lokale Lösung der impliziten Gleichung auch als Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $x'(t) = -\frac{\partial_1 f(t,x)}{\partial_2 f(t,x)}$ mit Anfangswert $x(0) = 0$ erhalten werden kann.

6.37. Es sei $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $\alpha \in \mathbb{R}$ und es gelte $f'(x) = \frac{\alpha}{x} f(x)$ für alle $x > 0$. Zeige, daß es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = C\, x^\alpha$ für alle $x > 0$.
Hinweis: Separation der Variablen.

6.38. Löse die Differentialgleichung $x'(t) = \sin(t)\, e^{x(t)}$.
Hinweis: Separation der Variablen.

6.39. Löse die Differentialgleichung $x'(t) = \frac{x(t)}{t} - \frac{t^2}{x(t)^2}$ mit $x(1) = 1$.
Hinweis: Für Diff.glg. der Form $x' = f(x/t)$ liefert der Ansatz $z = x/t$ eine mittels Separation der Variablen lösbare Gleichung.

6.40. Löse die homogene lineare Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Hinweis: Finde zuerst y und danach x mittels Variation der Konstanten.

6.41. Löse die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0$.
Hinweis: Durch den Ansatz $y_1(t) := x(t)$, $y_2(t) := x'(t)$ erhält man die äquivalente 2-dimensionale Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

mit charakteristischen Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ und Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Seien v_1 und v_2 entsprechende Eigenvektoren. Dann sind $e^{\lambda_i}\, v_i$ Lösungen der 2-dimensionalen Gleichung und daraus erhält man eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

6.42. Untersuche die Differentialgleichung $x'(t) = \sqrt{|x(t)|}$ mit Anfangsbedingung $x(0) = 0$. Kannst Du neben der trivialen Lösung $x = 0$ noch eine weitere finden? (**Hinweis:** Separation der Variablen und Fallunterscheidung). Warum steht dies nicht im Widerspruch zum Existenz und Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen?

6.43. Versuche die Lösungen der Differentialgleichung $x'(t) = (t + x(t))^2$ zu finden. **Hinweis:** Bei Gleichungen der Form $x'(t) = f(a\,t + b\,x(t) + c)$ führt die Substitution $y(t) := a\,t + b\,x(t) + c$ auf eine zeitunabhängige Differentialgleichung, die mittels Separation der Variablen gelöst werden kann.

6.45. Wähle die Koeffizienten a, b, c, d einer linearen Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

so, daß die beiden Eigenwerte λ und μ verschieden und beide reell und nicht 0 sind. Bestimme zugehörige Eigenvektoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ und daraus die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{\lambda t} \cdot u + \beta e^{\mu t} \cdot v$$

mit aus den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $y(0) = y_0$ berechenbaren Konstanten α und β.

6.46. Untersuche das nicht-lineare Gleichungssystem

$$x' = x(6 - 2x - y)$$
$$y' = y(6 - 2y - x)$$

indem Du zuerst die (vier) stationären Punkte bestimmst, und in der Folge die Jacobimatrix in diesen Punkten und deren Eigenwerte und Eigenvektoren. Was kannst Du daraus über die Form der Lösungskurven schließen?

6.47. Löse die inhomogene lineare Differentialgleichung $x'(t) = -2x(t) + g(t)$ sowohl für $g(t) := e^t$ als auch für $g(t) := t$, indem Du zuerst die zugehörige homogene Gleichung $y'(t) = -2y(t)$ löst, und danach Variation der Konstanten, d.h. den Ansatz $x(t) := c(t)\,y(t)$, für die Lösung der inhomogenen Gleichung machst und daraus c bestimmst.

○ **6.48.** Formuliere Bedingungen die garantieren, daß die Differentialgleichung $x'(t) = f(t, x(t))$ mit $x(0) = 0$ vermöge Hauptsatz äquivalent zur Integralgleichung $x(t) = \int_0^t f(s, x(s))\,ds$ ist. Man kann zeigen, daß auf diese Fixpunktgleichung $x = i(x)$ mit $i(x)(t) := \int_0^t f(s, x(s))\,ds$ unter geeigneten Voraussetzungen der Banach'sche Fixpunktsatz anwendbar ist. Führe diese Rekursion für $f(t, x) := 1 + x$ mit der konstanten Kurve $x = x_0$ als Anfangspunkt durch.

[2, 6.3] Höhere Ableitungen

6.49. Bestimme die zweite Ableitung der Zusammensetzung zweier 2-mal differenzierbarer Abbildungen.
Hinweis: Füttere alle Variablen auf, d.h. bestimme $(f \circ g)''(x)(v, w)$.

6.50. Bestimme die zweite Ableitung von $(x, y) \mapsto xy(x + y)$, von $(x, y) \mapsto \sin(x)\sin(y)$, von $(x, y, z) \mapsto xy - z^2$, und von $(x, y, z) \mapsto xyz$

6.51. Bestimme die Glieder der Taylor-Reihe von $f(x, y) := \sin(x)\,\tan(y)$ an der Stelle $(0, 0)$ bis zur 3.ten Ordnung.

6.52. Es sei $f : E \to F$ homogen (d.h. $f(\lambda\, x) = \lambda\, f(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in E$) und differenzierbar. Dann ist f linear.
Hinweis: Bestimme die Ableitung an der Stelle 0.

6.53. Es sei $p \in \mathbb{N}$ und $f : E \to F$ p-homogen (d.h. $f(\lambda\, x) = \lambda^p\, f(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in E$) und p-mal differenzierbar. Dann existiert eine symmetrische p-lineare stetige Abbildung $g : E \times \ldots \times E \to F$ mit $f(x) = g(x, \ldots, x)$. Eine Abbildung f die sich so schreiben läßt heißt homogenes Polynom vom Grad p.
Hinweis: Vergleiche mit Aufgabe (6.52).

6.54. Zeige: Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann ein homogenes Polynom vom Grad p wenn sie eine Linearkombination von p-fachen Produkten der Koordinaten(-Funktionen) $x_1, \ldots, x_n$ ist.

6.55. Zeige: Eine Abbildung $f : E \to F$ ist genau dann ein Polynom (d.h. eine endliche Summe homogener Polynome), wenn sie unendlich oft differenzierbar ist, und eine Ableitung identisch 0 ist.

[2, 6.4] Lokale Extrema

6.56. Bestimme alle kritischen Punkte von $(x, y) \mapsto x^5 + y^5 - 5xy$ und stelle fest bei welchen es sich um Extrema handelt.

6.57. Bestimme alle kritischen Punkte von $(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - xy$ und stelle fest bei welchen es sich um Extrema handelt.

6.58. Finde Lage und Art aller Extrema von $(x, y) \mapsto x^3y^2(1 - x - y)$.

6.59. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) := -2x + x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 - 2y$.

6.60. Es sei $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann besitzt $f(x) = \sum_{k=0}^n |x - a_i|^2$ eine Minimum bei $x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$.

6.61. Ist $(0, 0)$ ein Extremum von $(x, y) \mapsto (2y - x^2)(3y - x^2)$?
Hinweis: Die zweite Ableitung hilft hier nichts, darum untersuche das Vorzeichen von f nahe 0.

6.62. Bestimme die lokalen Extrema von $(x, y) \mapsto x^2y/(1 + x^4 + y^4)$ und stelle nummerisch (mittels Mathematica) fest an welcher Stelle sein Gefälle maximal ist.

6.63. An welcher Stelle hat $(x, y) \mapsto x/(1 + x^2 + y^2)$ sein größtes Gefälle und in welche Richtung geht dieses?

6.64. An welchen Stellen hat $(x, y) \mapsto xy/(1+x^2+y^2)$ sein größtes Gefälle und in welche Richtung geht dieses?

6.65. Bestimme 3 positive Zahlen a, b, c mit $a+b+c=3$ und $a \cdot b \cdot c$ maximal.

6.66. Bestimme 3 positive Zahlen a, b, c mit $a+b+c=3$ und $a^2+b^2+c^2$ minimal.

6.67. Bestimme die lokalen Extrema von $(x, y) \mapsto x+y$ unter der Nebenbedingung $1/x^2+1/y^2=1$.

6.68. Bestimme das größtmögliche Volumen $a \cdot b \cdot c$ eines Quaders mit gegebener Oberfläche $2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) = 1$.

6.69. Bestimme die Punkte (x, y, z) am Schnitt der Zylinder $x^2+(z-1)^2=4$ und $y^2+(z+1)^2=4$ die maximalen bzw. minimalen Abstand von 0 besitzen.

6.70. Bestimme die maximale Fläche eines Dreiecks mit Umfang 1.
Hinweis: Die Heron'sche Flächenformel: $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ mit $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Literatur

[1] Andreas Kriegl. *Analysis 1*. Vorlesung, Univ. Wien, 2003/04. 4, 6

[2] Andreas Kriegl. *Analysis 2*. Vorlesung, Univ. Wien, 2004. 1, 6, 7, 9, 10, 11, 14