Aufgabensammlung zur Analysis 3

WS 2004/2005

Andreas Kriegl

email:andreas.kriegl@univie.ac.at

7 Integration

Integrale über kompakte Intervalle

7.1. Zeige: $\int_I 1 = |I|$.

7.2. Es sei f integrierbar. Dann ist $|\int_I f| \leq \|f\|_\infty \cdot |I|$.

7.3. Eine beschränkte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion falls eine Zerlegung Z von I existiert, s.d. f am Inneren jenes Intervalls $J \in Z$ konstant (sagen wir c_J) ist. Zeige f ist integrierbar mit

$$\int_I f = \sum_{J\in Z} c_J \cdot |J|,$$

wobei c_J der konstante Wert von f am Inneren von J ist.

7.4. Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar, $f \geq 0$ und f im Punkt ξ stetig mit $f(\xi) > 0$. Dann ist $\int_I f > 0$. Folgere weiters, daß jede überall positive integrierbare Funktion positives Integral besitzt.

7.5. Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist genau dann f fast überall gleich g, d.h. $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ ist eine Nullmenge, wenn $\int_I |f - g| = 0$ ist. **Hinweis:** Aufgabe (7.4).

7.6. Berechne:

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} x^2 + x\,y\,d(x,y) \quad \text{und} \quad \int_{[1,2]\times[1,2]} e^{x+y}\,d(x,y)$$

7.7. Berechne

$$\int_{[1,2]\times[2,3]\times[0,2]} \frac{2z}{(x+y)^2}\,d(x,y,z) \quad \text{und} \quad \int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} \frac{x^2 z^3}{1+y^2}\,d(x,y,z)$$

7.8. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist $(x,y) \mapsto f(x)\,g(y)$ integrierbar auf $[a,b] \times [c,d]$ und

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x)\,g(y)\,d(x,y) = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_c^d g(y)\,dy.$$

7.9. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und überall positiv. Dann ist

$$\Big(\int_a^b f(x)\,dx\Big) \cdot \Big(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx\Big) \geq (b-a)^2$$

Die linke Seite ist nach der vorigen Aufgabe $\int_{[a,b]^2} \frac{f(x)}{f(y)}\,d(x,y) = \int_{[a,b]^2} \frac{f(y)}{f(x)}\,d(x,y)$ also auch $\frac{1}{2}\int_{[a,b]^2} \Big(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\Big)\,d(x,y)$.

7.10. Es sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y \in \mathbb{Q}, \\ 2x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige $\int_0^1 f(x,y)\,dx = 1$ für alle y, $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = 1$ aber $\int_{[0,1]^2} f(x,y)\,d(x,y)$ existiert nicht. **Hinweis:** Bestimme $\Delta(f)$.

Integrale über beschränkte Teilmengen

7.11. Es seien $f, g : B \to \mathbb{R}$ integrierbar mit B J-meßbar. Weiters sei $g \geq 0$. Zeige die Existenz eines $\varphi \in [\inf(f), \sup(f)]$ mit

$$\int_B f\, g = \varphi \int_B g.$$

Falls B kompakt und wegzusammenhängend und f stetig ist so ist $\varphi = f(\xi)$ für ein $\xi \in B$.

7.12. Es seien $f_n : B \to \mathbb{R}$ integrierbar und B J-meßbar. Es konvergieren f_n gleichmäßig gegen f. Dann ist f R-integrierbar und $\int_B f = \lim_{n\to\infty} \int_B f_n$.

7.13. Schwarz'sche Ungleichung: Es seien $f, g : B \to \mathbb{R}$ integrierbar auf der J-meßbaren Menge B. Dann ist

$$\Big|\int_B f\, g\Big| \leq \sqrt{\int_B f^2} \cdot \sqrt{\int_B g^2}.$$

Hinweis: O.B.d.A. $B = I$ ein Intervall und [1, 2.2.3].

7.14. Es sei B J-meßbar und $f : \overline{B} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar. Gilt dies auch falls nur $f : B \to \mathbb{R}$ stetig ist?

7.15. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ beschränkt und habe nur endlich viele Häufungspunkte. Zeige, daß B eine J-Nullmenge ist.

7.16. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ J-meßbar und $r > 0$ und $x \in \mathbb{R}^p$. Dann ist auch $x + r \cdot B$ J-meßbar und $|x + r \cdot B| = r^p \cdot |B|$.

7.17. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ eine beschränkte Teilmenge einer Hyperebene. Dann ist B eine J-Nullmenge in $\mathbb{R}^p$.

7.18. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ beschränkt, $q > p$ und $g : B \to \mathbb{R}^q$ Lipschitz. Dann ist $g(B) \subseteq \mathbb{R}^q$ eine J-Nullmenge. **Hinweis:** Verwenden die vorige Aufgabe für $B \subseteq \mathbb{R}^p \subseteq \mathbb{R}^q$.

7.19. Es sei $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ und $\varepsilon > 0$. Sei $I_n := (a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$, $A := \bigcup_n I_n$ und $K := [0, 1] \setminus A$. Zeige:

- Der innere Inhalt von A ist $\leq \varepsilon$.
- A ist dicht in $[0, 1]$ und somit der äußere Inhalt $= 1$, also A und K nicht J-meßbar
- A ist offen.
- K ist kompakt.

7.20. Es sei I ein kompaktes Intervall, $f = 0$ am Inneren und f beschränkt am Rand ∂I. Dann ist f integrierbar mit $\int_I f = 0$

7.21. Falls der innere Inhalt 0 ist, so ist das Innere leer. Beschränkte Mengen mit leeren Inneren müssen keine J-Nullmengen sein. J-meßbare Mengen mit leeren Inneren sind J-Nullmengen.

7.22. Zwei meßbare Menge A und B erfüllen $|A \cap B| = 0 \Leftrightarrow$ das Innere von $A \cap B$ ist leer.

7.23. Zeige: Jede beschränkte Nullmenge hat inneren Inhalt 0. Jede J-meßbare Nullmenge ist eine J-Nullmenge.

7.24. Es sei $f : B \to \mathbb{R}$ integrierbar und $|B| > 0$. Dann ist

$$\|f\|_1 := \frac{1}{|B|} \int_B |f| \le \Big(\frac{1}{|B|} \int_B f^2 \Big)^{1/2} =: \|f\|_2.$$

Hinweis: [1, 2.2.3]

Integrationsmethoden

7.25. Berechne das Volumen von $\{(x, y, z) : (x, y) \in [0, 1] \times [1, 2], 0 \le z \le x + y\}$.

7.26. Berechne das Volumen von $\{(x, y, z) : (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], 0 \le z \le x^2 + y^2\}$.

7.27. Berechne das Volumen von $\{(x, y, z) : (x, y) \in [0, 2] \times [0, 2], 0 \le z \le x\, y^2 + y^3\}$.

7.28. Bestimme den Flächeninhalt der Ellipse $\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$.

7.29. Bestimme das Volumen des Ellipsoids $\{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}$.

7.30. Zeige daß das Volumen der p-dimensionalen Einheitskugel $K_p := \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\|_2 \le 1\}$ durch

$$|K_p| = \frac{2\sqrt{\pi^p}}{p\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}.$$

Hinweis: Induktionsbeweis mittels Satz von Cavalieri, Funktionalgleichung der Gammafunktion sowie die mittels Substitution beweisbare Formel

$$\int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dt = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \sqrt{\pi}.$$

7.31. Zeige $\lim_{p\to\infty} |K_p| = 0$, wobei K_p die p-dimensionale Einheitskugel bezeichnet. **Hinweis:** Fallunterscheidung nach dem Rest von p modulo 2, für gerades $p = 2q$ die Formel $q\,\Gamma(q) = q!$ und für ungerades [Heuser, 150.4].

7.32. Vertausche die Reihenfolge der Integration:

$$\int_0^1 \int_0^x f(x, y)\, dy\, dx$$
$$\int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y)\, dy\, dx$$
$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$
$$\int_0^1 \int_{1-y^2}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy$$

7.33. Berechne $\int_B x^2\, y\, d(x, y)$, wobei B die obere Hälfte der Kreisscheibe mit Radius 2 und Mittelpunkt 0 ist.

7.34. Berechne $\int_B (x + y^2)\, d(x, y)$, wobei B das Dreieck mit Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ ist.

7.35. Berechne $\int_B (x^2+y^2)\, d(x,y)$, wobei B das Dreieck mit Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ist.

7.36. Berechne $\int_B x\,y\, d(x,y)$, wobei $B := \{(x,y) : x,y \geq 0, y \leq \sqrt{x}, y \geq x^2\}$ ist.

7.37. Berechne $\int_B \sqrt{x}\,y\, d(x,y)$, wobei $B := \{(x,y) : x,y \geq 0, y \leq x, y \geq x^2\}$ ist.

7.38. Berechne $\int_B \frac{\sin(x)}{x}\, d(x,y)$, wobei B das Dreieck mit Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$ ist indem Du zuerst nach y und dann nach x integrierst. Geht es auch umgekehrt?

7.39. Es sei $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$. Zeige $\int_B x^n y^m\, d(x,y) = \frac{n!\,m!}{(n+m+2)!}$.
Hinweis: Zeige mittels Induktion:

$$\int_0^1 x^n (1-x)^p\, dx = \frac{n!\,p!}{(n+p+1)!}.$$

7.40. Verwende den Hinweis des vorigen Beispiels um

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n+1+k}\binom{n}{k} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

zu zeigen. **Hinweis:** Siehe Hinweis zu Aufgabe (7.39).

7.41. Berechne $\int_B \frac{1}{\|x\|_2}\, d(x,y)$ für $B := \{(x,y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

7.42. Es sei $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ und $B := \{(x_1,\dots,x_n) : a \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq b\}$. Dann ist

$$\int_B \prod_{j=1}^{n} f(x_j)\, d(x_1,\dots x_n) = \frac{1}{n!}\Big(\int_a^b f\Big)^n.$$

7.43. Theorem von Archimedes: Die Volumina des eingeschrieben Kegels in einer Halbkugel, der Halbkugel und des umschriebenen Zylinders verhalten sich wie 1 : 2 : 3.

7.44. Zwei aufeinanderstehende Zylinder mit der z-Achse also Achse seien in die Einheitshalbkugel eingeschrieben. Wie müssen ihre Höhen gewählt werden, daß sie zusammen maximales Volumen haben.

7.45. Volumen und Euler und Bernoulli-Zahlen: Es sei $A_n := \{(x_1,\dots,x_n) : x_j + x_{j+1} \leq 1$ für $1 \leq j < n\}$. Zeige:

- $|A_n| = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \dots \int_0^{1-x_{n-1}} dx_n \dots dx_1$.
- Es sei $p_0 = 1$ und $p_k(x) := \int_0^{1-x} p_{k-1}$. Zeige $p_n(0) = |A_n|$, $p_k(1) = 0$ für $k \geq 1$ und $p_k'(x) = -p_{k-1}(x-1)$.
- Es sei $f(x,y) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) y^k$ als formale Potenzreihe. Zeige $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\, f(1-x,y) = 0$ und $f(1,y) = 1$, also $f(x,y) = a(y)\cos(x\,y) + b(y)\sin(x\,y)$.
- Setze $x = 0$ und folgere $b = -1$ und $a(y) = \tan(y) + \frac{1}{\cos(y)}$. Und somit ist

$$\tan(y) + \frac{1}{\cos(y)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|\, y^n$$

- Folgere, daß $|A_{2n-1} = (-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)\frac{B_{2n}}{(2n)!}$, wobei B_k die Bernoulli-Zahlen bezeichnet und $|A_{2n}| = \frac{E_n}{(2n)!}$, wobei E_k die Eulerzahlen, d.h. die Koeffizienten von
$$\frac{1}{\cos(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k}{(2k)!} y^{2k}$$
bezeichnet.

7.46. (Urysohn Lemma) Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^p$ kompakt und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $K \subseteq U$. Zeige die Existenz einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit $f|_K = 1$ und $\operatorname{trg}(f) \subseteq U$.

7.47. (Tietze Erweiterunsgsatz) Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to [0,1]$ stetig. Dann existiert eine stetige Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^p \to [0,1]$ mit $\tilde{f}|_K = f$. Konstruiere eine Folge stetiger Funktionen $f_k : \mathbb{R}^p \to [0, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1}]$ mit $0 \le f - \sum_{j\le k} f_j \le (\frac{2}{3})^k$. Die Funktion $\tilde{f} := \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ist dann die gewünschte Erweiterung.

Substitutionsformel

7.48. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ kompakt und J-meßbar und $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ affin, d.h. $g(x) = A \cdot x + b$ mit einer $p \times p$-Matrix A und $b \in \mathbb{R}^p$. Dann ist $|g(B)| = |\det(A)| \cdot |B|$.

7.49. Ein Kreissektor mit Radius r und Öffnungswinkel φ hat Fläche $\frac{1}{2}r^2\varphi$.

7.50. Berechne den Inhalt des Bereichs B der durch die Archimedische Spirale $r = a\,\varphi$ für $0 \le \varphi \le 2\pi$ (in Polarkoordinaten) und der Strecke von 0 nach $(0, 2a\pi)$ begrenzt wird.

7.51. Berechne den Inhalt des Bereichs B der in Polarkoordinaten durch die Kardioide $r = a(1+\cos(\varphi))$ begrenzt wird.

7.52. Berechne den Inhalt des Bereichs B der in Polarkoordinaten durch die Lemniskate $r^2 = 2a^2\cos(2\varphi)$ mit $|\varphi| \le \frac{\pi}{4}$ begrenzt wird.

7.53. Berechne das Volumen der Kugel durch Übergang zu Kugelkoordinaten.

7.54. Berechne Fläche der Ellipse und Volumen des Ellipsoids durch 'elliptische' Polar- bzw. Kugelkoordinaten

7.55. Zeige $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

7.56. Berechne $\int_B z\,d(x,y,z)$, wobei B die obere Hälfte der Einheitskugel ist.

7.57. Berechne das Volumen des Durchschnitts der Kugel $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4R^2\}$ und des Kreiszylinders $\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le R^2\}$.

7.58. Es sei B_ρ die Kugelschale $\{(x,y,z) : \rho^2 \le x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$. Bestimme $\lim_{\rho\to 0+} \int_{B_\rho} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,d(x,y,z)$.

7.59. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ J-meßbar und von variabler Dichte $\rho : B \to \mathbb{R}$. Die Masse ist dann durch $\int_B \rho$ definiert. Bestimme die Masse einer Kugelschale, wobei die Dichte proportional zum Quadrat des Abstands vom Mittelpunkt ist und ebenso, wenn sie verkehrt proportional zum Abstand ist.

7.60. Es sei $B := \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x, 0 \le z \le x+y\}$ und $\rho(x,y,z) = x+y+2z$. Berechne die Masse des Körpers B mit Dichte ρ.

7.61. Der Schwerpunkt eines Körpers B mit Dichtefunktion $\rho : B \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\Big(\int_B x\,\rho(x,y,z)\,d(x,y,z)\Big/\int_B \rho, \int_B y\,\rho(x,y,z)\,d(x,y,z)\Big/\int_B \rho, \int_B z\,\rho(x,y,z)\,d(x,y,z)\Big/\int_B \rho\Big)$$

Berechne den Schwerpunkt des Kugeloktanten $B := \{(x,y,z) : x,y,z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ bei konstanter Dichte 1. Ebenso für die Halbkugel.

7.62. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen konvex und nicht-leer. Bezüglich der euklidischen Distanz existiert für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ein eindeutig bestimmter Punkt $a_x \in A$ mit $d(x,a_x) = d(x,A)$ und $x \mapsto a_x$ ist stetig. **Hinweis:** Betrachte eine Folge $a_n \in A$ mit $d(x,a_n) \to d(x,A)$. Verwende die Parallelogramgleichung $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ mit $u = x - a_n$ und $v = x - a_m$ und die Konvexität von A um a_n als Cauchy-Folge zu erkennen. Die Eindeutigkeit folgt ebenfalls aus der Parallelogramgleichung. Die Stetigkeit von $x \mapsto a_x$ folgt aus $|d(x,A) - d(x',A)| \leq d(x,x')$

7.63. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex und nicht leer, sowie $f : A \to A$ stetig. Dann existiert ein Fixpunkt von f. **Hinweis:** Wähle eine kompakte Kugel $K \supseteq A$ und wende den Brouwer'schen Fixpunktsatz auf $g = f \circ p : K \to K$ an, wobei $p : x \mapsto a_x$ die stetige Abbildung $\mathbb{R}^n \to A$ aus Aufgabe (7.62) ist.

7.64. Es sei E ein normierter Raum und $\{x_1,\dots,x_n\} \subseteq E$. Dann ist die konvexe Hülle

$$K := \langle\{x_1,\dots,x_n\}\rangle = \Big\{\sum_{i=1}^n \lambda_i\,x_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\Big\}$$

kompakt. **Hinweis:** $\{(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$ ist kompakt.

7.65. 1. Formulierung des Fixpunktsatzes von Schauder:
Es sei E ein normierter Raum, $A \subseteq E$ konvex und $K \subseteq A$ kompakt und nicht leer. Dann besitzt jede stetige Abbildung $f : A \to K$ mindestens einen Fixpunkt. **Hinweis:** Es sei $\varepsilon > 0$. Betrachte eine endliche Überdeckung mit ε-Kugeln $U_\varepsilon(x_i)$ von K und eine untergeordnete Partition $\{g_i : i \in \{1,\dots,n\}\}$ von 1. Setze $g = \sum_{i=1}^n g_i\,x_i$ dann besitzt $g \circ f$ nach Aufgabe (7.63) einen Fixpunkt z_ε in der konvexen Hülle K_0 von $\{x_1,\dots,x_n\}$. Nun betrachte einen Häufungswert z_∞ von $z_{1/k}$ für $k \to \infty$.

7.66. 2. Formulierung des Fixpunktsatz von Schauder:
Es sei K eine konvexe abgeschlossene nicht-leere Teilmenge eines normierten Raumes E und $f : K \to K$ stetig. Dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt falls K kompakt oder falls zumindestens $f(K)$ kompakt ist. **Hinweis:** Aufgabe (7.65)

7.67. Igelsatz (Hairy Ball Theorem)
Kein ungerade dimensionaler Igel läßt sich stetig kämmen, d.h. sei n ungerade und $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Dann existiert ein $x \in S^{n-1}$ mit $f(x) \in \mathbb{R}\cdot x$. **Hinweis:** Andernfalls verschwindet der Normalanteil $g(x) := f(x) - \langle f(x)|x\rangle\, x$ auf S^{n-1} nicht. Nach [3, 7.6.3] können wir g als C^1 voraussetzen und somit ist $\langle g(x)|x\rangle \neq 0$. Wenn wir $g(x)$ durch $\|x\|\,g(x/\|x\|)$ ersetzen so erhalten wir zusätzlich $\|g(x)\| = \|x\|$. Nun betrachte die Abbildung $f_t : x \mapsto x - t\,g(x)$. Es sei $B := \{x : 1/2 \leq \|x\| \leq 3/2\}$. Man kann zeigen, daß diese für kleine $|t|$ eine bijektive Substitutionsfunktion $B \to \sqrt{1+t^2}B$ mit $\det(f_t'(x)) = 1 + \sum_{i=1}^n t^i\,\rho_i(x)$ für gewisse stetige Funktionen $\rho_i : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ist. Injektivität folgt aus der Beschränktheit von f' und Surjektivität von $f : S^{n-1} \to \sqrt{1+t^2}S^{n-1}$ aus dem Banach'schen Fixpunktsatz angewendet auf $x \mapsto x_0 + t f(x)$ für fixes $x_0 \in S^{n-1}$. Folglich ist

$$(1+t^2)^{n/2}\,|B| = |f_t(B)| = |B| + \sum_{i=1}^n t^i \int_B \rho_i,$$

wobei die rechte Seite ein Polynom in t ist.

7.68. Zeige: Jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Nullstellenmenge $f^{-1}(0)$ einer C^∞-Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. **Hinweis:** Zeige, daß es abzählbar viele Funktionen $f_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])$ gibt, s.d. $A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}(0)$. Es ist $K_n := \max\{\|f_n^{(j)}\|_\infty : 0 \le j \le n\} < \infty$ und somit die Reihe

$$f := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n K_n} f_n$$

gleichmäßig konvergent und auch jede ihrer gliedweisen Ableitungen und somit die gesuchte C^∞-Abbildung nach [1, 4.2.11] und [1, 4.2.8].

7.69. Es sei $\zeta : t \mapsto \sum_{k=1}^\infty k^{-t}$ für $t > 1$ die Zeta-Funktion. Zeige:

- $\frac{3\zeta(2)}{2} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^\infty \Big(\int_0^1 x^{2k}\,dx\Big)^2 = \int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-x_1^2x_2^2}\, d(x_1,x_2) = \frac{\pi^2}{8}$
- $\int_0^1 \frac{1}{x}\log(\frac{1+x}{1-x}) = \frac{\pi^2}{4}$.
- $\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = \int_{[0,1]^2} \frac{1}{1+x_1^2x_2^2} d(x_1,x_2) = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x}\,dx$, die Catalan'sche Konstante
- $\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-x_1x_2} d(x_1,x_2) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \zeta(2)$.

Hinweis:

- Verwende die Substitutionsfunktion $(t_1,t_2) \mapsto (\frac{\sin(t_1)}{\cos(t_2)}, \frac{\sin(t_2)}{\cos(t_1)})$ mit $0 \le t_1, t_2$ und $t_1 + t_2 \le \frac{\pi}{2}$.
- Wende Fubini und Partialbruchzerlegung auf das mehrdimensionale Integral in 1.
- Gehe ähnlich wie in 1 und 2 vor.

7.70. Für $r \in \mathbb{R}$ sei $f_r : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_2^r$. Bestimme jene r für welche f_r auch $U := \{x : 0 < \|x\| < 1\}$ bzw. auf $V := \{x : \|x\| > 1\}$ absolut integrierbar ist und bestimme diese Integrale.

7.71. Es sei $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$ für $x > 0$ die Gamma-Funktion und $B(x_1,x_2) := \frac{\Gamma(x_1)\Gamma(x_2)}{\Gamma(x_1+x_2)}$ für $x_1, x_2 > 0$ die Beta-Funktion. Zeige:

(1) $\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-s^2} s^{2x-1}\,ds$ und somit $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

(2) $B(x_1,x_2) = 2\int_0^{\pi/2} \cos(t)^{2x_1-1}\sin(t)^{2x_2-1}\,dt$

(3) $B(x_1,x_2) = \int_0^1 t^{x_1-1}(1-t)^{x_2-1}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{s^{x_1-1}}{(1+s)^{x_1+x_2}}\,ds = 2\int_0^{+\infty} \frac{r^{2x_1-1}}{(1+r^2)^{x_1+x_2}}\,dr$ für $x_1, x_2 > 0$. Hinweis: Substitution $t = \frac{s}{1+s}$

1. $\int_0^1 \frac{s^{m-1}}{\sqrt{1-s^n}}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{m}{n})}{n\Gamma(\frac{m}{n}+\frac{1}{2})}$ für $0 < n, m \in \mathbb{N}$. Hinweis: $x_1 = \frac{m}{n}$ und $x_2 = \frac{1}{2}$ und Substitution $t = s^n$.

(4) $B(x,x) = 2^{1-2x}B(x, \frac{1}{2})$.

(5) $\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\pi^{-1/2}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$ für $x > 0$.

(6) $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(7) $|\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \le 1\}| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$

7.72. Stirling Formel: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{e^{-x}x^{x-1/2}} = \sqrt{2\pi}$. **Hinweis:** Es sei $a < 0 < b$ und $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $h(t) \geq c\,t^2$ für ein $c > 0$ und alle $t \in [a, b]$, weiters existiere $\lim_{t\to 0} \frac{h(t)}{t^2} =: \frac{H}{2} > 0$. Dann ist

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} \int_a^b g(t)\, e^{-xh(t)}\, dt = g(0)\sqrt{\frac{2\pi}{H}}.$$

Substituiere $t = \frac{s}{\sqrt{x}}$ um

$$\sqrt{x} \int_a^b g(t)\, e^{-xh(t)}\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(x, s)\, ds$$

mit $f(x, s) := \chi_{[\sqrt{x}a, \sqrt{x}b]}\, g(s/\sqrt{x}) e^{-xh(s/\sqrt{x})}$ zu erhalten. Es ist $|f(x, s)| \leq \|g\|_\infty e^{-cs^2}$ und die rechte Seite integrierbar über $\mathbb{R}$ und $\lim_{x\to+\infty} f(x, s) = g(0)e^{-\frac{1}{2}Hs^2}$. Nun substituiere $t = xe^s$ in der Definition von Γ und wende obiges für $g(t) := 1$ und $h(t) := e^t - 1 - t$ an.

7.73. Zeige die Produktdarstellung der Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Hinweis: Zeige der Reihe nach:

1. Zeige $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n t^{x-1}(1 - \frac{t}{n})^n\, dt$ indem Du

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^n t^{x-1} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt\Big| &\leq \int_0^n t^{x-1}\, e^{-t}\Big(1 - (1 - \frac{t^2}{n^2})^n\Big)\, dt \\ &\leq \frac{1}{n}\int_0^n t^{x+1} e^{-t}\, dt \leq \frac{1}{n}\Gamma(x+2)\end{aligned}$$

   mittels Bernoulli-Ungleichung zeigst.

2. Nun wende Arzelà's Satz über dominierte Konvergenz auf $f_n(t) := \chi_{[0,n]}(1 - \frac{t}{n})^n \to e^{-t}$ an.
3. Substituiere schließlich $t = n\,s$ und verwende Aufgabe (7.71.3) um die gewünsche Produktdarstellung zu erhalten.

7.74. Eindeutigkeit der Gammafunktion.
Zeige: Γ ist C^∞ mit Ableitungen

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, \ln(t)^p\, dt.$$

Zeige, daß die Gamma-Funktion die einzige logarithmisch konvexe Funktion ist, d.h. $\ln\circ f$ ist konvex, welche $f(1) = 1$ und $f(x+1) = x\,f(x)$ erfüllt.
Hinweis: Zeige der Reihe nach:

1. Die Ableitungen von Γ.
2. $(\ln\circ\Gamma)''(x) = \Big(\Gamma(x)\Gamma''(x) - \Gamma'(x)^2\Big)/\Gamma(x)^2 \geq 0$.
3. $f(x+n) = f(x)\prod_{j=0}^{n-1}(x+j)$ und $f(n) = n!$ für $0 < n \in \mathbb{N}$.
4. Es sei g konvex und x_0, x, y verschiedene Punkte mit $x < y$, dann ist

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} < \frac{g(y) - g(x_0)}{y - x_0}.$$

5. Für $0 < x \le 1$ und $n \ge 2$ ist

$$\frac{\ln(f(n-1)) - \ln(f(n))}{(n-1)-n} \le \frac{\ln(f(n+x)) - \ln(f(n))}{(n+x)-n} \le \frac{\ln(f(n+1)) - \ln(f(n))}{(n+1)-n}$$

und somit

$$\begin{aligned} \ln(n-1) &\le \frac{\ln(f(n+x)) - \ln((n-1)!)}{x} \le \ln(n) \\ \Rightarrow \quad & (n-1)^x (n-1)! \le f(n+x) \le n^x\,(n-1)! \\ \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} \quad & \frac{(n-1)^x (n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \le f(x) \le \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\dots(x+n)}\,\frac{x+n}{n}. \end{aligned}$$

6. Für $0 < x \le 1$ ist

$$f(x)\frac{n}{x+n} \le \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \le f(x)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x$$

7.75. Zeige die Reflexionsformel für die Gammafunktion: $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$ für $0 < x < 1$.
Hinweis:

- Betrachte $f(x) := \Gamma(x)\,\Gamma(1-x)\,\sin(\pi x)$ für $0 < x < 1$. Zeige, daß durch $f(x) := \Gamma(1+x)\,\Gamma(1-x)\,\frac{\sin(\pi x)}{x}$ für $|x| < 1$ eine C^∞ Erweiterung von f auf $(-1,1)$ gegeben ist, welche $f(x) = f(x+1)$ für $-1 < x < 0$ erfüllt und somit 1-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann.
- Es ist $f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \pi f(x)$ für $0 < x < 1$.
- Nun betrachte die beschränkte Funktion $g := (\ln \circ f)''$. Zeige, daß $g(x/2) + g((x+1)/2) = 4g(x)$ erfüllt und folgere daraus $g = 0$, also $\log \circ f$ linear und periodisch und somit konstant $\ln(f(x)) = \ln(f(0)) = \ln(\pi)$, also $f(x) = \pi$ für alle x.

7.76. Zeige: $\int_0^{+\infty} \frac{s_2^{x-1}}{s_2+1}\, ds_2 = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$. **Hinweis:** Mittels Substitution $(s_1, s_2) = (t_1 + t_2, \frac{t_1}{t_2})$ ist

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(t_1+t_2)} \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^x \frac{1}{t_1}\, d(t_1,t_2) = \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-s_1} \frac{s_2^{x-1}}{s_2+1}\, d(s_1,s_2) = \int_0^{+\infty} \frac{s_2^{x-1}}{s_2+1}\, ds_2.$$

7.77. Es sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ C^∞. Zeige, daß es eine Richtung $v \in S^1$ gibt, s.d. $c'(t)$ nicht parallel zu v in allen Punkten $c(t) \in \mathbb{R}_+ \cdot v$ ist. **Hinweis:** Es sei $c(t) = (x(t), y(t))$. Wende den Satz von Sard auf $f : t \mapsto y(t)/x(t)$ für $t \in \mathbb{R} \setminus x^{-1}(0)$ an.

7.78. Berechne das Volumen des durch das Paraboloid $x^2 + y^2 - z = 0$, den Zylinder $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ mit $R > 0$ und die Ebene $z = 0$ begrenzten beschränkten Körper.

7.79. Zeige

$$\int_{[-1,1]^2} \frac{1}{\|x\|_2}\, dx = 4\ln(1+\sqrt{2}).$$

7.80. Es sei $B := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \le R\}$ mit $R > 0$. Zeige:

$$\int_B \|x\|_2\, dx = \frac{2\pi R s}{3} \quad \text{und} \quad \int_B e^{-\|x\|_2^2}\, dx = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

7.81. Es sei B das Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Zeige:

$$\int_B e^{(x-y)/(x+y)}\, d(x,y) = \frac{\sinh(1)}{2}.$$

Hinweis: Verwende die Substitution $(t,s) = (x-y, x+y)$.

7.82. Es sei $0 < a < b$ und B der Kreisring $\{x \in \mathbb{R}^2 : a \leq \|x\| \leq b\}$. Zeige

$$\int_B \frac{1}{\|x\|_2^3}\, dx = 4\pi \ln(b/a).$$

7.83. Es sei Q eine positiv definite quadratische Matrix. Dann gilt für das Ellipsoid $E := \{x \in \mathbb{R}^p : \langle Qx|x\rangle \leq 1\}$ und die Einheitskugel $K := \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\|_2 \leq 1\}$:

$$|K| = \sqrt{\det(Q)}\,|E|.$$

Hinweis: Es existiert eine positiv definite symmetrische Matrix P mit $P^2 = Q$.

7.84. Es sei $A := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq a\}$ mit $a > 0$, weiters $B := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 \leq R\}$ mit $R > a$ und $C := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 \geq 1\}$. Bestimme

$$\int_{A\cap B} \frac{1}{\|x\|_2^6}\, dx, \quad \int_A \frac{1}{\|x\|_2^6}\, dx, \quad \text{und} \quad \int_C \frac{1}{\|x\|_2^6}\, dx$$

Hinweis: Aus $\int_A$ läßt sich $\int_C$ berechnen.

7.85. Es sei $\zeta(s) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$ die Riemann'sche Zeta-Funktion. Zeige:

1. $$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx = \Gamma(s)\,\zeta(s)$$

2. $$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x + 1}\, dx = (1 - 2^{1-s})\Gamma(s)\,\zeta(s)$$

3. $$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^x - 1}\, dx = \int_0^1 \frac{\ln(x)^{2n-1}}{x-1}\, dx = (-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}\frac{B_{2n}}{4n}$$
   Dieses Integral für $n = 2$ tritt bei der Strahlung eines schwarzen Körpers auf.

4. $$\int_0^{+\infty} \frac{x^s e^x}{(e^x - 1)^2}\, dx = \Gamma(s+1)\,\zeta(s) \text{ für } s > 1.$$

Hinweis:

1. $\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{k=1}^\infty e^{-kx}$, vertausche nun Summation und Integration und zeige
   $$\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-kx}\, dx = \Gamma(s)/k^s.$$

2. Ersetze x durch ax für $a > 0$ und differenziere nach a.

7.86. Berechne Fresnel's Integral für $0 < p < 2$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^p}\,dx = \frac{\Gamma(p/2)\,\Gamma(1-p/2)}{2\,\Gamma(p)} = \frac{\pi}{2\,\Gamma(p)\,\sin(p\pi/2)}$$

Hinweis: Zeige

$$\frac{1}{x^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} t^{p-1}\,e^{-st}\,dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^p}\,dx = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} t^{p-1} \int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(x)\,dx\,dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^p}\,dx = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t^2}\,dt$$

und verwende Aufgabe (7.71.3).

7.87. Es sei $U := \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| > 1\}$ und $V := \{x \in \mathbb{R}^p : 0 < \|x\|_2 < 1\}$. Zeige die Existenz von

$$\int_U \frac{1}{\|x\|_2^q}\,dx \text{ für } q > p \quad \text{und} \quad \int_V \frac{1}{\|x\|_2^q}\,dx \text{ für } q < p.$$

7.88. Berechne

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+\|x\|_2)^p}\,dx \text{ für } p > 2 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\|x\|_2^p}\,dx \text{ für } p < 2.$$

7.89. Zeige, daß folgende Integrale nicht existieren:

$$\int_{\mathbb{R}^p} \frac{1}{(1+\|x\|_2)^q} \text{ für } q \le p \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^p} \frac{1}{\|x\|_2^q} \text{ für } q \ge p.$$

7.90. Frullani's Integral: Es sei $0 < a < b$ und $f : I := [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := x^y$. Versuche $\int_I f$ mittels Fubini auf zwei Arten zu berechnen. Die eine Art führt auf $\int_0^1 \frac{b-x^a}{\ln(x)}\,dx$ und mittels Substitution $x = e^{-t}$ zu

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \ln(b/a).$$

7.91. Es sei $f : (s,t) \mapsto se^{-st}$. Zeige: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig und $\int_0^{+\infty} f(s,t)\,dt$ existiert für jedes $t \ge 0$, aber $s \mapsto \int_0^{+\infty} s\,e^{-st}\,dt$ ist nicht stetig bei 0.

7.92. Zeige, daß $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin(t)}{t}|\,dt$ nicht konvergiert, aber das uneigentliche Integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^p}\,dt \text{ für } 0 < p \le 1$$

schon. Zeige weiters:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Hinweis: Zerlege $\mathbb{R}_+$ in Intervalle der Länge π. Für die zweite Aussage betrachte $f_p(s,t) := e^{-st}\,\frac{\sin(t)}{t^p}\,dt$ und zeige, daß $\frac{\partial}{\partial t} g_0(s,t) = f_0(s,t)$ für $g_0(s,t) = -\frac{e^{-st}}{1+s^2}(\cos(t) + s\sin(t))$. Weiters ist $|g(s,t)| \le 2$ und nun f stetig bei 0. Partielle Integration liefert nun die Konvergenz des Integrals

$$\int_0^{+\infty} f_p(s,t)\,dt \text{ für } s \ge 0.$$

Da $F_1(x) := \int_0^{+\infty} f_1(s,t)\,dt$ gleichmäßig bzgl. $x \in [0,1]$ konvergiert, ist F_1 stetig und wegen $|\partial_1 f_1(x,t)| \le e^{-at}$ für $x > a$ ist F_1 differenzierbar auf $(a,+\infty)$ mit Ableitung $F_1'(s) = -\int_0^{+\infty} e^{-st}\,\sin(t)\,dt = -\frac{1}{1+s^2}$. Also ist $F_1(s) = c - \arctan(s)$ für alle $s > 0$ und Substitution liefert $F_1(s/p) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\sin(pt)}{t}\,dt$, also ist $c - \frac{\pi}{2} = \lim_{p\to 0+} F_1(\frac{s}{p}) = 0$ für $s > 0$. Und Stetigkeit von F_1 bei 0 liefert die gewünschte Gleichheit.

8 Volumina

Gauß in der Ebene, Kurvenintegral

8.1. Berechne folgende Kurvenintegrale $\int_c f$, wobei

- $c(t) := (t^2, t^3)$ für $t \in [0,1]$ und $f(x,y) := (xy^2, x^2 y)$.
- $c(t) := (t^2, t^3)$ für $t \in [0,1]$ und $f(x,y) := (xy, x^2 + y^2)$.
- $c(t) := (\sin(t), \cos(t))$ für $t \in [0, \pi/4]$ und $f(x,y) := (xy, x^2)$.

8.2. Berechne die Länge folgender Kurven:

- Die NEIL'SCHE PARABEL $c(t) := (t^2, t^3)$ für $t \in [-a, a]$.
- Die KETTENLINIE $c(t) := (t, \cosh(t))$ für $t \in [-a, a]$.
- Gelingt dies auch für die ELLIPSE $c(t) := (a\cos(t), b\sin(t))$ für $t \in [0, 2\pi]$?

8.3. Versuche die Mantelfläche eines Zylinder zu verkleinern, indem Du in einschnürst, also durch zwei Kegelstümpfe ersetzt. Wie hängt das auftretende Minimum von der Dimensionen des urspünglichen Zylinders ab?

Wer die Herausforderung liebt, der möge dies auch mit einen Kegelstumpf als Ausgangskörper machen.

○ **8.4.** Verifiziere den Gauß'schen Integralsatz an folgendem Beispiel indem Du beide Seiten getrennt berechnest: $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$ und $f(x,y) := (x^2, xy)$.

○ Eines aus (8.5)–(8.8)

8.5. Berechne die von der Kurve $t \mapsto (\sin(2t), \sin(t))$ eingeschlossene Fläche. **Hinweis:** Zeichnung.

8.6. Berechne die Fläche zwischen den ZISSOIDE $t \mapsto (\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2})$ und ihrer Asymptote $x = 1$.

8.7. Berechne die Fläche zwischen der STROPHOIDE $t \mapsto \frac{t^2-1}{t^2+1}(1,t)$ und ihrer Asymptote $x = 1$.

8.8. Das KARTESISCHE BLATT wird durch $t \mapsto \frac{3t}{t^3+1}(1,t)$ parametrisiert. Bestimme die Fläche der Schleife, sowie die Fläche zwischen Kurve und Asymptote $x + y = -1$.

○ Eines aus (8.9)–(8.12)

8.9. Die LEMNISKATE ist in Polarkoordinaten durch $r(\varphi) = \sqrt{2\cos(2\varphi)}$ gegeben. Berechne die Fläche des von ihr eingeschlossenen Bereichs.

8.10. Die PASCAL'SCHE SCHNECKE (die KONCHOIDE DES KREISES) ist in Polarkoordinaten durch $r(\varphi) = \cos(\varphi) + d$ für fixes $d > 0$ gegeben. Berechne die Fläche des von ihr eingeschlossenen Bereichs.

8.11. Die Kardioide (eine Pascal'sche Schnecke für $d = 1$) ist in Polarkoordinaten durch $r(\varphi) = \cos(\varphi) + 1$ gegeben. Berechne die Fläche des von ihr eingeschlossenen Bereichs sowie deren Umfang.

8.12. Die Epizykloide bzw. Hypozykloide ist (für $d > 0$ bzw. $d < 0$) durch die Parametrisierung

$$t \mapsto \left((1+d)\cos(t) - d\cos\left(\frac{1+d}{d}t\right), (1+d)\sin(t) - d\sin\left(\frac{1+d}{d}t\right)\right)$$

gegeben. Bestimme im Fall $d = \pm 1/m$ mit $0 \neq m \in \mathbb{N}$ die durch sie begrenzte Fläche sowie deren Länge. Im Fall $d = -1/4$ ist diese Kurve die sogenannte Astroide.

8.13. Kurvenintegral und Windungszahl. Es sei $z : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $(r, \varphi) \mapsto r\, e^{i\varphi}$ die Abbildung die Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten $x + i\, y = z$ umrechnet. Bestimme die Ableitung dz und zeige

$$\frac{dz}{z} = d(\ln(r)) + i\, d\varphi = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} + i\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

Nun fasse letzteres als 1-Formen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ auf und berechne damit für Kurven $c : I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in kartesischen Koordinaten eine zugehörige Kurve in Polarkoordinaten mit $\varphi(t) := \varphi(0) + \int_c \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$. Falls c geschlossen ist, also $c(a) = c(b)$, so muß daß für $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ nicht mehr gelten und $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ zählt wie oft c um 0 herumläuft.

8.14. Berechne $(\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad})(f)$ und $(\mathrm{div} \circ \mathrm{grad})(f)$ für jede C^2-Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = \nabla \times (\nabla f) = \det\begin{pmatrix} e_1 & \partial_1 & \partial_1 f \\ e_2 & \partial_2 & \partial_2 f \\ e_3 & \partial_3 & \partial_3 f \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} e_1 & \partial_1 & \partial_1 \\ e_2 & \partial_2 & \partial_2 \\ e_3 & \partial_3 & \partial_3 \end{pmatrix} f = 0\, f = 0$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) = \langle \nabla | \nabla f \rangle = \langle \nabla | \nabla \rangle f = \Delta\, f$$

○ **8.15.** Vergleiche die Wirbelfreiheit eines Vektorfelds mit der Geschlossenheit der zugehörigen 1-Form und für diese vergleiche weiters die Aussage des Gauß'schen Integralsatzes mit den Sätzen [2, 6.5.4] (bzw. [2, 6.5.8]).

○ **8.16.** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein lineares Vektorfeld, d.h. $f(x) = A \cdot x$ für eine 2×2-Matrix A. Bestimme $\mathrm{div}(f)$ und $\mathrm{rot}(f)$. Was bedeutet es (für die Eigenwerte von A), daß f quellenfrei oder wirbelfrei ist. **Hinweis:** Siehe die Bemerkungen nach [2, 6.2.18].

○ **8.17.** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^2$ ein C^1-Vektorfeld. Zerlege für $z \in U$ die Ableitung $A := f'(z) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ in ihren symmetrischen Teil $A_g := \frac{1}{2}(A + A^t)$ und schiefsymmetrischen $A_u := \frac{1}{2}(A - A^t)$. Zeige, daß f genau dann wirbelfrei ist, wenn $f'(z)_u = 0$ für alle $z \in U$. Mehr noch, $\mathrm{div}(f)(z)$ ist der charakterisierende Eintrag in der linken unteren Ecke des schiefsymmetrischen Teils von $f'(z)$.

○ **8.18.** Was bedeutet $\mathrm{rot}(f) = 0$ und/oder $\mathrm{div}(f) = 0$ für komplex differenzierbare $f : \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}$ (siehe [2, 6.6.2]). **Hinweis:** Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichung(en).

○ **8.19.** Bestimme Rotation und Divergenz folgender Vektorfelder und überprüfe ob diese quellenfrei bzw. wirbelfrei sind:

- $f(x, y) := \left(\frac{y}{1+x^2y^4}, \frac{2xy}{1+x^2y^4}\right)$.
- $f(x, y) := \left(\frac{y^2}{1+x^2y^4}, \frac{2xy}{1+x^2y^4}\right)$.
- $f(x, y) := \left(\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}, \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\right)$.

Stokes im Raum, Oberflächenintegral, Rotation

8.20. Berechne folgende Integrale des Vektorfelds $f : (x, y, z) \mapsto (x, y^2, zx)$ am $\mathbb{R}^3$:

- $c(t) := (t, t^2, t^3)$ für $t \in [0, 1]$.
- $\Phi(u, v) := (u, v, u\,v)$ für $(u, v) \in [0, 1]^2$.

8.21. Bestimme den Einheitsnormalvektor folgender Flächen:

- $\Phi(u, v) := (\sin(v)\sin(u)\cos(u), \cos(v)/2, \sin(v)\sin(u)^2 - \sin(v)/2)$.
- $\Phi(u, v) := (u^2\,v, v^2\,u, u - v)$.

8.22. Bestimme die Rotation folgenden Vektorfelds und überprüfe ob dieses wirbelfrei ist: $f : (x, y, z) \mapsto (y\,z^2, x(z^2 - x^2y^2), 2\,x\,y\,z)$.

○ **8.23.** Verifiziere den Stokes'schen Integralsatz an folgendem Beispiel indem Du beide Seiten getrennt berechnest: Es sei K eine Kreisscheibe in Mittelpunktslage, die Fläche $\Phi : K \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $(u, v) \mapsto (u, v, u^2 - v^2)$ und das Vektorfeld $f : (x, y, z) \mapsto (z, x, y)$.

○ **8.24.** Zeige, daß die Oberfläche einer Fläche, die durch Rotation einer Abbildung $f : \mathbb{R} \supseteq [a, b] \to \mathbb{R}^+$ entsteht, gegeben ist durch $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$.

○ **8.25.** Es rotiere eine C^1-Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ um die x-Achse. Zeige, daß die Fläche der zu Zerlegungen Z von $[a, b]$ gehörenden approximierenden Kegelstümpfe gegen $2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2}\,dt$ konvergiert. **Hinweis:** Benutze den Mittelwertsatz um diese Summe mit einer geeignet gewählten Riemannsumme zu vergleichen.

8.26. Es sei $f : K \to \mathbb{R}^3$ C^1. Zeige, daß für Zerlegungen Z von K in Dreiecke die Gesamtfläche der Bilddreiecke bzgl. f gegen die Oberfläche von $B := f(K)$ konvergiert. **Hinweis:** Parametrisiere die Dreiecke Δ mit Ecken a, b, c von Z durch die affine Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ auf diese Ecken abbildet. Nun verwende die Invarianz der Fläche von $f(\Delta)$ unter Reparametrisierung und vergleiche diese mit der Fläche $\frac{1}{2}\|(f(c) - f(a)) \times (f(b) - f(a))\|$ des Dreiecks mit Ecken $f(a), f(b), f(c)$.

8.27. Berechne jenen Teil der Oberfläche eines Paraboloids $x^2 + y^2 = z$ welcher über der Kreisscheibe $\{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \le R^2\}$ liegt.

○ **8.28.** Berechne die Oberfläche jenes Teils eines einschaligen Hyperboloids $(x^2+y^2-z^2-1 = 0)$ und auch eines zweischalige Hyperboloids $(x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0)$, der durch $z = -R$ und $z = R$ begrenzt wird.

8.29. Bestimme Volumen und Oberfläche (als uneigentliche Integrale) des Körpers, der durch Rotation von $x \mapsto 1/x$ entsteht in den Grenzen $0 < x \le 1$ und auch in den Grenzen $1 \le x < +\infty$.

8.30. Die Kettenlinie ist der Graph von cosh. Bestimme die Oberfläche des durch Rotation um die x-Achse entstehenden Körpers zwischen den Grenzen $-R \le x \le R$. Bestimme auch die Länge des Bogens der Kettenlinie zwischen diesen Grenzen.

8.31. Die Traktrix oder Schleppkurve entsteht durch Rotation von $x = \operatorname{Arcosh}(1/y) + \sqrt{1 - y^2}$ um die x-Achse. Berechne deren Oberfläche in den Grenzen $0 \le x < +\infty$. **Hinweis:** Achtung: Es ist nicht y als Funktion von x gegeben.

○ **8.32 ✵.** Zeige, daß die Oberfläche eines Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supseteq K \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$\int_K \sqrt{1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2}.$$

Wende dies auf $f : (x, y) \mapsto xy$ definiert auf $[-1, 1]^2$ an.

○ **8.33 ✵.** Zeige, daß $\int_K \sqrt{r^2(1 + (\frac{\partial}{\partial r} f)^2) + (\frac{\partial}{\partial \varphi} f)^2} d(r, \varphi)$ die Oberfläche des Graphen einer Funktion f ist, welche in Polarkoordinaten $(r, \varphi) \mapsto f(r, \varphi)$ gegeben ist. Wende dies auf $f(r, \varphi) := r^2 \sin(2\varphi)$ im Bereich $0 \le r \le R$ an. **Hinweis:** Substitutionsformel und Aufgabe (8.32).

8.34. Oberfläche als Grenzwert von Volumina. Es sei $\varphi : K \to \varphi(K) \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte Fläche. Definiere

$$\Phi : K \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (t; u, v) \mapsto \varphi(u, v) + t\nu_\varphi(u, v).$$

Zeige:

$$|\varphi(K)| = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon} |\Phi(K \times [0, \varepsilon])|$$

Hinweis: Berechne $\Phi(K \times [0, \varepsilon])$ mittels Substitutionsfunktion Φ und schreibe die auftretende Determinante als Polynom in t.

○ **8.35.** Es seien $f, g : \mathbb{R}^3 \supseteq U \to \mathbb{R}^3$ differenzierbare Vektorfelder und $\rho : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeige:

$$\mathrm{rot}(f + g) = \mathrm{rot}(f) + \mathrm{rot}(g) \quad \text{und} \quad \mathrm{rot}(\rho \cdot f) = \rho \cdot \mathrm{rot}(f) + \mathrm{grad}(\rho) \times f$$

○ **8.36.** Es sei $f : \mathbb{R}^3 \supseteq U \to \mathbb{R}$ C^2. Zeige, daß $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$.

8.37. Es sei S eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ und $f : S \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige:

$$\inf(f(S))\,|S| \le \int_S f \; \mathrm{vol}_S \le \sup(f(S))\,|S|$$

Gauß im Raum, Normalbereiche, Divergenz

8.38 ✵. Bestimme die Divergenz folgendes Vektorfelds und überprüfe ob dieses quellenfrei ist: $f : (x, y, z) \mapsto (x\, y^2\, z, \cos(x)\, \sin(y), e^{z-x})$.

○ **8.39 ✵.** Verifiziere den Gauß'schen Integralsatz an folgenden Beispielen indem Du beide Seiten getrennt berechnest: $K := \{(x, y, z) : 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\}$ bzw. $K := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le 9, 0 \le z \le 5\}$ und Vektorfeld $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, y + z, z + x)$.

8.40. Es seien $f, g : \mathbb{R}^3 \supseteq U \to \mathbb{R}^3$ differenzierbare Vektorfelder und $\rho : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeige:

$$\mathrm{div}(f + g) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g),\ \mathrm{div}(\rho \cdot f) = \rho \cdot \mathrm{div}(f) + \langle \mathrm{grad}(\rho) | f \rangle \text{ und } \mathrm{div}(f \times g) = \langle \mathrm{rot}(f) | g \rangle - \langle f | \mathrm{rot}(g) \rangle$$

○ **8.41.** Es sei $f : \mathbb{R}^3 \supseteq U \to \mathbb{R}^3$ C^2. Zeige, daß $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(f)) = 0$.

○ **8.42.** Es $f : \mathbb{R}^3 \supseteq U \to \mathbb{R}$ C^2. Der Laplace-Operator Δ ist definiert durch

$$\Delta(f) = (\partial_1)^2 f + (\partial_2)^2 f + (\partial_3)^2 f.$$

Zeige: $\Delta(f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$.

8.43. Für C^2-Vektorfelder $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \supseteq U \to \mathbb{R}^3$ ist der Laplace-Operator Δ komponentenweise definiert, also $\Delta(f) = (\Delta(f_1), \Delta(f_2), \Delta(f_3))$. Zeige: $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} f) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(f)) - \Delta(f)$.

8.44. Es sei B ein C^1-Normalbereich bezüglich aller 3 Achsen und $f, g : B \to \mathbb{R}$ C^1. Zeige die erste Green'sche Formel:

$$\int_B \langle \operatorname{grad}(f) | \operatorname{grad}(g)\rangle + \int_B f\,\Delta(g) = \int_{\partial B} f\,\langle \operatorname{grad} g | \nu_{\partial B}\rangle \operatorname{vol}_{\partial B}$$

Hinweis: Wende den Gauß'schen Integralsatz auf $f \cdot \operatorname{grad}(g)$ an.

8.45. Zeige unter den gleichen Voraussetzungen wie in Aufgabe (8.44) die zweite Green'sche Formel:

$$\int_B (f\,\Delta(g) - g\,\Delta(f)) = \int_{\partial B} (f\,\langle \operatorname{grad} g | \nu_{\partial B}\rangle - g\,\langle \operatorname{grad} f | \nu_{\partial B}\rangle) \operatorname{vol}_{\partial B}$$

8.46. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein C^1-Normalbereich und $f : \mathbb{R}^3 \supseteq B \to \mathbb{R}$ harmonisch, d.h. $\Delta(f) = 0$. Zeige

$$\int_{\partial B} \langle \operatorname{grad} f | \nu_{\partial B}\rangle \operatorname{vol}_{\partial B} = 0$$

Hinweis: Aufgabe (8.44).

8.47. Zeige unter den gleichen Voraussetzungen wie in Aufgabe (8.46):

$$\int_{\partial B} f\,\langle \operatorname{grad} f | \nu_{\partial B}\rangle \operatorname{vol}_{\partial B} = \int_B \| \operatorname{grad}(f)\|^2.$$

Hinweis: Aufgabe (8.44).

○ **8.48.** Seien $f = (f_1, f_2, f_3)$ und $g = (g_1, g_2, g_3)$ zwei Vektorfelder am $\mathbb{R}^3$. Sei $\alpha = f_1\, dx^1 + f_2\, dx^2 + f_3\, dx^3$ die zu f gehörende 1-Form, $\beta = g_1\, dx^2 \wedge dx^3 + g_2\, dx^3 \wedge dx^1 + g_3\, dx^1 \wedge dx^2$ die zu g gehörende 2-Form und $\gamma = \langle f|g\rangle\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ die zum Produkt $\langle f|g\rangle$ gehörende 3-Form. Zeige $\alpha \wedge \beta = \gamma$.

○ **8.49.** Seien $f = (f_1, f_2, f_3)$ und $g = (g_1, g_2, g_3)$ Vektorfelder am $\mathbb{R}^3$ und $\alpha = f_1\, dx^1 + f_2\, dx^2 + f_3\, dx^3$ sowie $\beta = g_1\, dx^1 + g_2\, dx^2 + g_3\, dx^3$ die dazugehörenden 1-Formen. Dann ist das zur 2-Form $\alpha \wedge \beta$ gehörende Vektorfeld durch $f \times g$ gegeben.

○ **8.50.** Sei $f = (f_1, f_2, f_3)$ ein Vektorfeld am $\mathbb{R}^3$ und $\alpha = f_1\, dx^1 + f_2\, dx^2 + f_3\, dx^3$ die zu f gehörende 1-Form und $\beta = f_1\, dx^2 \wedge dx^3 + f_2\, dx^3 \wedge dx^1 + f_3\, dx^1 \wedge dx^2$ die zu f gehörende 2-Form. Zeige, daß das zu $d\alpha$ gehörende Vektorfeld gerade $\operatorname{rot}(f)$ ist und die zu $d\beta$ gehörende Funktion $\operatorname{div}(f)$ ist.

○ **8.51.** Es sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq K \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche, dann ist $dx \wedge dy$ aus [3, 8.1.5] gerade die vermöge $\Phi*$ zurückgezogende Form von $dx \wedge dy$ aus [3, 8.2.5].

8.52. Poincaré Lemma: Jede geschlossene Differentialform ω (d.h. $d\omega = 0$) auf einer sternförmigen Menge ist exakt (d.h. es gibt eine Differentialform $\bar\omega$ mit $d(\bar\omega) = \omega$).
Hinweis: Für eine $(p+1)$-Form ω sei eine p-Form $\bar\omega$ definiert durch:

$$\bar\omega(x)(v_1, \dots, v_p) := \int_0^1 t^p \omega(tx)(x, v_1, \dots, v_p)\, dt.$$

Zeige nun $\omega(x)(v_0, \dots, v_p) == \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t^{p+1}\omega(tx)(v_0, \dots, v_p)\right)\, dt = (d\bar\omega + \overline{d\omega})(x)(v_0, \dots, v_p)$.

Die Volums-Form. In den restlichen Aufgaben (8.53)–(8.60) werden für eine p-Fläche $\Phi : K \to \mathbb{R}^m$, $(u^1, \dots, u^p) \mapsto (x^1, \dots, x^m)$ folgende Definitionen benötigt:
Sei $g_\Phi : K \to \mathbb{R}$ definiert durch $g_\Phi = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \det\left(\frac{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_p})}{\partial(u^1, \dots, u^p)}\right)^2$. Beachte, daß

$$\det\left(\frac{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_p})}{\partial(u^1, \dots, u^p)}(u)\right) = \det{}^{i_1, \dots, i_p}(\Phi'(u))$$

Falls $g_\Phi \neq 0$ ist für jeden multi-Index $(i_1, \dots, i_p)$ der entsprechende *Richtungs-Kosinus*

$$\rho_\Phi^{i_1, \dots, i_p} := \frac{1}{\sqrt{g_\Phi}} \det\left(\frac{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_p})}{\partial(u^1, \dots, u^p)}\right) : K \to \mathbb{R}.$$

Schließlich ist $\operatorname{vol}_\Phi := \sqrt{g_\Phi}\, du^1 \wedge \dots \wedge du^p$ eine p-Form auf K, die sogenannte *Volums-Form* oder auch das *Volums-Element*.

○ **8.53.** Zeige, daß sich g, ρ und vol unter einem Parameter-Wechsel $\varphi : K' \to K$ (eine Substitutions-Funktion) wie folgt transformieren :

$$\begin{aligned} g_{\Phi\circ\varphi} &= \varphi^*(g_\Phi) \cdot \det(\varphi'(.))^2 \\ \rho_{\Phi\circ\varphi}^{i_1, \dots, i_p} &= \varphi^*\left(\rho_\Phi^{i_1, \dots, i_p}\right) \\ \operatorname{vol}_{\Phi\circ\varphi} &= \varphi^*(\operatorname{vol}_\Phi) \end{aligned}$$

Von nun an nehmen wir an, daß Φ injektiv ist und für jedes $u \in K$ auch die Ableitung $\Phi'(x)$ injektiv ist (Φ heißt dann *injektive Immersion*).

○ **8.54.** Zeige: Für eine p-Form $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ am $\mathbb{R}^m$ ist

$$\Phi^*(\omega) = \sqrt{g_\Phi} \sum_{i_1 < \dots < i_p} \rho_\Phi^{i_1, \dots, i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} du^1 \wedge \dots \wedge du^p.$$

Folgere daraus, daß durch

$$\mathrm{vol}_S(\Phi(u)) := \sum_{i_1<\ldots<i_p} \rho_\Phi^{i_1,\ldots,i_p}(u) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

eine p-Form auf $S = \Phi(K)$ gegeben ist, welche $\Phi^*(\mathrm{vol}_S) = \mathrm{vol}_\Phi$ erfüllt. Zeige, daß vol_S nicht von der Parametrisierung abhängt. Zeige auch, daß durch $\rho_S^{i_1,\ldots,i_p}(\Phi(u)) := \rho_\Phi^{i_1,\ldots,i_p}(u)$ für jeden multi-Index $(i_1,\ldots,i_p)$ eine Funktion auf S gegeben ist, welche nicht von der Parametrisierung abhängt.

8.55. Beweise den Produkt-Satz für rechteckige Matrizen: Seien A und B zwei $n\times m$-Matrizen so gilt:

$$\det(A^t B) = \sum_{i_1<\ldots<i_m} \det{}^{i_1,\ldots,i_m}(A) \det{}^{i_1,\ldots,i_m}(B).$$

Hinweis: Fasse $B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $A^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ als lineare Abbildungen auf und berechne $(A^tB)^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m)$ auf zwei Arten. Zeige dazu: $(A^t)^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m) = \sum_{i_1<\ldots<i_m} \det^{i_1,\ldots,i_m}(A)\; dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_m}$.

8.56. Es seien $g_{ij} := \langle \frac{\partial\Phi}{\partial u^i} | \frac{\partial\Phi}{\partial u^j} \rangle$, die Koeffizienten der sogenannten *ersten Fundamentalform der Fläche*. Zeige, daß $g_\Phi = \det\big((g_{ij})_{i,j=1\ldots p}\big)$. Diese Determinante gebildet aus allen Produkten der p Vektoren $\frac{\partial\Phi}{\partial u^i}$ für $i = 1\ldots,p$ heißt *Gram'sche Determinante.* **Hinweis:** Benütze Aufgabe (8.55).

8.57. Der Tangentialraum T_xS der Fläche S im Punkte $x \in S$ ist definiert als das Bild von $\Phi'(u)$ für $\Phi(u) = x$, d.h. $T_xS := \{\Phi'(u)(v) : v \in \mathbb{R}^p\}$. Zeige daß T_xS nicht von der Parametrisierung Φ abhängt, und ein p-dimensionaler Teilvektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

8.58. Beweise folgende geometrische Interpretation von vol_S:
$\mathrm{vol}_S(x)(w^1,\ldots,w^p)$ mißt das p-dimensionale Volumen der Normal-Projektion auf T_xS des von $w^1,\ldots,w^p$ aufgespannten Parallelepipeds.
Hinweis: Zeige zuerst, daß $\mathrm{vol}_S(x)(w^1,\ldots,w^p) = 0$ falls mindestens ein w^i normal auf T_xS steht. Verwende dabei Aufgabe (8.55) und die Formel $\mathrm{Bild}(A)^\perp = \mathrm{Kern}(A^t)$. Nun wähle in T_xS eine orthonormal-Basis $(w^1,\ldots,w^p)$, entwickle $\frac{\partial\Phi}{\partial u^j} = \sum_{i=1}^p a_i^j\; w^i$ in dieser Basis, und zeige mittels Aufgabe (8.56), daß für die Matrix A der Koeffizienten $\det(A)^2 = g$ gilt. Nun berechne man wie folgt:

$$\det(A)\;\; \mathrm{vol}_S(w^1,\ldots,w^p) = \mathrm{vol}_S(\tfrac{\partial\Phi}{\partial u^1},\ldots,\tfrac{\partial\Phi}{\partial u^p}) = \sqrt{g}$$

8.59. Gib eine geometrische Interpretation von ρ_S für eine 1-Fläche S (d.h. Kurve) sowie für eine $(n-1)$-Fläche S im $\mathbb{R}^n$ (eine sogenannte *Hyperfläche*).

Hinweis: Für Hyperflächen definiere einen Vektor ν_S durch $\nu_S^i := (-1)^{i-1}\rho_S^{1,\ldots,\widehat{i},\ldots,n}$ und berechne $\langle \nu_S | \frac{\partial\Phi}{\partial u^i} \rangle$ für alle $i = 1,\ldots,n-1$. Berechne außerdem das Vorzeichen der Determinante $\det\Big(\nu_S, \frac{\partial\Phi}{\partial u^1},\ldots,\frac{\partial\Phi}{\partial u^n}\Big)$

8.60. Beweise den Divergenz-Satz für einen n-Simplex V im $\mathbb{R}^n$: Sei f ein C^1-Vektorfeld auf V so gilt:

$$\int_V \mathrm{div}(f)\;\; \mathrm{vol}_V = \int_{\partial V} \langle f | \nu_{\partial V} \rangle\;\; \mathrm{vol}_{\partial V}$$

wo $\nu_{\partial V}$ der nach außen weisende Einheitsnormalvektor an ∂V ist.
Hinweis: Wende den Satz von Stokes auf die zu f gehörende $(n-1)$-Form

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f^i\; dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n$$

an. Für die Bestimmung von $\nu_{\partial V}$ verwende Aufgabe (8.57).

Literatur

[1] Andreas Kriegl. *Analysis 1*. Vorlesung, Univ. Wien, 2003/04. 2, 3, 7

[2] Andreas Kriegl. *Analysis 2*. Vorlesung, Univ. Wien, 2004. 13

[3] Andreas Kriegl. *Analysis 3*. Vorlesung, Univ. Wien, 2004/05. 6, 17