Analysis 3, Teil 2

β-Version

Andreas Kriegl

28. November 2004

Dies ist der zweite Teil des Skriptums zu meiner gleichnamigen Vorlesung im Wintersemester 2004/2005. Darin werden wir den Hauptsatz (5.2.2) und (5.6.17) der Analysis zum Stokes'schen Integralsatz und dessen Spezialfälle verallgemeinern und Anwendungen dieser Resultate geben.

Links auf (gif-)Animationen und solche auf interaktive (java-)Animationen sind wieder durch nebenstehende Symbole gekennzeichnet:

Ich habe diejenigen Teile, die über diese Vorlesung hinausgehen, und für jene gedacht sind, die keine Angst haben zeitweilig ein wenig den Boden unter den Füßen zu verlieren und in höhere Sphären aufzusteigen, durch linkseitiges Symbol eines Hängegleiters gekennzeichnet. Insbesonders habe ich mich bemüht, an den adäquaten Stellen einige Ausblicke auf andere mathematische Gebiete zu geben, die eine natürliche Fortsetzung der hier vorgestellten Konzepte bilden.

EXAM Weitere Resultate oder Beweise, die zwar für die Vorlesung relevant sind, aber auf Grund ihrer Komplexität nicht zur Prüfung kommen, habe ich mit linksseitigem Symbol gekennzeichnet.

Sicherlich wird die aufmerksame LeserIn (Tipp-)Fehler finden können. Ich möchte folglich wie immer die Bitte aussprechen, mir diese mitzuteilen (geteiltes Leid ist halbes Leid). Ich werde diese in der redigierten Version natürlich berücksichtigen.

Andreas Kriegl, Wien im November 2004

Inhaltsverzeichnis

8 Integralsätze

8.1 Integralsätze in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

8.1.1 Motivation und Rekapitulation.
Wir wollen für mehrdimensionale Integrale Pendants zum Hauptsatz der Analysis finden, und zwar liegt unser Augenmerk auf dem zweiten Teil, denn dieser war für das berechnen bestimmter Integrale von zentraler Bedeutung. Die in (5.2.2) gegebene Version des Hauptsatzes besagte:
Wenn $B := [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : B \to \mathbb{R}$ C^1 (oder auch nur mit integrierbarer Ableitung) ist, dann ist

$$\int_B f' = \int_a^b f' = [f(x)]_{x=a}^b = f(b) - f(a).$$

Die Verallgemeinerung in (5.3.8) sagte dasselbe für vektorwertige Funktionen $f : B \to \mathbb{R}^m$ und (5.6.17) schließlich für vektorwertige Funktionen $f : B \to F$, wobei F ein beliebiger Banach-Raum sein konnte.

In (6.5.5) haben wir daraus (und der Kettenregel) die Formel

$$\int_c f' := \int_a^b f'\big(c(t)\big)\big(c'(t)\big)\, dt$$

für C^1-Abbildungen $f : E \supseteq U \to F$ und C^1-Kurven $c : [a,b] \to U \subseteq E$ erhalten. Da f' eine Abbildung $E \supseteq U \to L(E,F)$ ist, führte uns das dazu allgemeine Kurvenintegrale

$$\int_c g := \int_a^b g\big(c(t)\big)\big(c'(t)\big)\, dt$$

für stetige 1-Formen $g : E \supseteq U \to L(E,F)$ und C^1-Kurven $c : [a,b] \to U \subseteq E$ zu behandeln. Nach (6.5.7) hängt dieses Integral nicht von der Parametrisierung der Kurve ab sondern nur von deren Bild $B := c([a,b])$ und der Richtung in der dieses durchlaufen wird (also der "Orientierung"). Wir können damit also 1-Formen $g : E \supseteq U \to L(E,F)$ über '1-dimensionale dimensionale' Teilmengen $B \subseteq U$ integrieren. Wenn wir dazu höherdimensionale Pendents angeben wollen, so werden wir dafür erklären müssen, was 'p-dimensionale Teilmengen' des $\mathbb{R}^n$ sein sollen, und welche Art von Abbildungen (nämlich die p-Formen) wir darüber integrieren wollen.

Ein anderes Problem welches sich uns auch stellt, ist Oberfläche (und entsprechende höherdimensionale Pendents) von 2-dimensionalen (p-dimensionalen) Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ zu definieren und bestimmen. Für $p = n$, d.h. p-dimensionale Teilmengen $B \subseteq \mathbb{R}^n$, haben wir die als $|B| := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B$ in (7.2.1) definiert. Für $p = 1 \le n$, also 1-dimensionale (parametrisierte) Teilmengen, haben wir die Länge in (6.5.10) als Supremum der interpolierenden Polygonzüge definiert und in (6.5.11) gezeigt, daß dies für C^1-Kurven $c : [a,b] \to E$ ebenfalls durch ein Integral

$$\int_a^b \|c'(t)\|\, dt$$

berechnet werden kann.

Bemerkung.
Zumindestens für Rotationsflächen, d.h. Flächen B die durch Rotation einer C^1-Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}$ um eine Achse entstehen, also

$$B := \{(t,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^3 : t \in [a,b],\ \|v\| = c(t)\},$$

können wir die Oberfläche interpolierender Kegelstümpfe die dadurch entstehen, daß wir interpolierende Polygonzüge von c entsprechend rotieren, betrachten.

Den Mantel eines Kegels(tumpfes) können wir in der Ebene abrollen und damit seine Mantelfläche berechnen. Denn sei der halbe Öffnungswinkel α und seine Höhe h, also sein Basis-Radius $r := h\ \tan(\alpha)$, so erhalten wir nach Abrollen einen Kreissektor mit Radius $s := \sqrt{h^2+r^2} = h\sqrt{1+\tan(\alpha)^2} = h/\cos(\alpha)$ und Bogen $2r\pi$, also Fläche $s^2\pi \cdot \frac{2r\pi}{2s\pi} = r\,s\,\pi$.

Für den Kegelstumpf zwischen den Höhen h_0 und h_1 mit zugehörigen Radien $r_i := h_i \tan(\alpha)$ und $s_i := h_i/\cos(\alpha)$ erhalten wir somit als Mantelfläche

$$\pi(r_1\,s_1 - r_0\,s_0) = \pi(s_1 - s_0)(r_1 + r_0),$$

denn $s_1\,r_0 - s_0\,r_1 = h_0\,h_1\Big(\tan(\alpha)\cos(\alpha) - \tan(\alpha)\cos(\alpha)\Big) = 0$. Wir können somit die Fläche von B als

$$|B| := \sup\Big\{\sum_{i=1}^{N} \pi\sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (c(t_i) - c(t_{i-1}))^2}\,\Big(c(t_i) + c(t_{i-1})\Big) : a = t_0 < \dots < t_N = b\Big\}$$

definieren. Falls c stetig differenzierbar ist, so sind dies näherungsweise die Riemannsummen von

$$\int_a^b 2\pi c(t)\sqrt{1+c'(t)^2}\,dt.$$

Wie in (6.5.11) kann man zeigen, daß dieses Integral in der Tat die Fläche $|B|$ berechnet.

Falls nun B kein Rotationskörper mehr ist, so könnten wir den Definitionsbereich einer zugehörigen Parametrisierung $f : I \to B$ in Rechtecke zerlegen. Die Bilder der Eckpunkte eines Rechtecks müssen nun aber nicht mehr in einer Ebene liegen, sodaß wir diesen Viereck keine wohldefinierte Fläche zuordnen können, wohl aber den von zwei Seitenvektoren erzeugten Parallelogramm. Wir können also versuchen die Oberfläche von $B = f(I)$ durch die Summe der Flächen der von $f(t_i, s_{i-1}) - f(t_{i-1}, s_{i-1})$ und $f(t_{i-1}, s_i) - f(t_{i-1}, s_{i-1})$ erzeugten Parallelogramme zu approximieren, wobei $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ und $s_0 < s_1 < \dots < s_m$ Zerlegungen der Seiten von I sind und dann schauen was passiert, wenn wir die Zerlegungen feiner machen. Wenn wir aber $f : (t,s) \mapsto (t,s,ts)$ mit Definitionsbereich $I := [-1,1] \times [0,1]$ betrachten, so ist die Fläche des von $f(1,0) - f(-1,0) = (2,0,0)$ und $f(-1,1) - f(-1,0) = (0,1,-1)$ erzeugten Rechtecks $2\sqrt{2}$, wohingegen die zur Zerlegung $-1 < 0 < 1$ und $0 < 1$ gehörende Fläche $1 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot 1 = 1 + \sqrt{2} < 2\sqrt{2}$ ist. Wir können also nicht das Supremum über alle Zerlegungen als Definition der Fläche verwenden.

Auch hilft es uns nichts, wenn wir den Parameterbereich in Dreiecke zerlegen. Denn dann ist zwar die Fläche der von den Bildern der Ecken erzeugten Dreiecke wohldefiniert, aber bei Übergang zu einer Verfeinerung kann die Gesamtfläche dennoch fallen oder wachsen, wie das Beispiel $f : (t,s) \mapsto (t,s,ts^2)$ zeigt. Das Dreieck, welches von den Bildern $(0,0,0)$ und $(a,\pm1,a)$ der Ecken $(0,0)$ und $(a,\pm1)$ erzeugt wird hat Fläche

$$\|(a,1,a) - (a,0,a)\| \cdot \|(a,0,a) - (0,0,0)\| = a^2\sqrt{2}$$

hingegen haben die beiden Bilddreiecke die durch Teilung am Punkt $(a,0)$ entstehen zusammen Fläche

$$\|(a,1,a) - (a,0,0)\| \cdot \|(a,0,0) - (0,0,0)\| = a\sqrt{1+a^2}$$

als kleinere Fläche genau dann wenn $a > 1$ ist.

Geometrische Interpretation des Kurvenintegrals.

Sei $c : I := [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar und $B := c(I)$. Sei weiters $f = (f_1, \dots, f_n) : B \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und $\tilde{f} = \sum_i f_i(x)^i dx^i$ die zugehörige 1-Form $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \supseteq B \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$. Nach (6.5.7) hängt das Kurvenintegral (zumindest für C^1-Kurven) nicht von der Parametrisierung c (sondern nur deren Orientierung) ab, wir können $\int_B \tilde{f} := \int_c \tilde{f}$ (für injektives c) setzen, und brauchen uns bei B

nicht die Parametrisierung sondern nur die Durchlaufungsrichtung merken. Weiters ist

$$\begin{aligned}
\int_B f &:= \int_B \tilde{f} = \int_c \sum_i f_i(x) dx_i = \int_a^b \sum_i f_i(c(t))\, c_i'(t)\, dt \\
&= \int_a^b \langle f(c(t)) | c'(t) \rangle\, dt \overset{c'(t)\neq 0}{=} \int_a^b \Big\langle f(c(t)) \Big| \underbrace{\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}}_{=:\tau_c(t)} \Big\rangle\, \underbrace{\|c'(t)\|\, dt}_{=:\mathrm{vol}_c(t)} \\
&= \int_c \langle f \circ c | \tau_c \rangle\ \mathrm{vol}_c \\
&=: \int_B \langle f | \tau_B \rangle\ \mathrm{vol}_B \text{ falls } c \text{ injektiv ist.}
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\tau_B(c(t)) := \tau_c(t) := \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$ den Einheitstangentialvektor an B im Punkte $c(t)$ und vol_B ist vorläufig nur ein Symbol (wie dt im 1-dimensionalen Riemann-Integral) und heißt des Längenelement oder auch 1-dimensionale Volumselement. Beachte, daß

$$\int_I \|c'(t)\|\, dt = \int_I \mathrm{vol}_c = \int_I \langle \tau_c | \tau_c \rangle\ \mathrm{vol}_c = \int_B \tau_B,$$

die Länge von c ist, wobei τ_B eine stetige Erweiterung von $\tau_B : B \to \mathbb{R}^n \cong L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ zu einer skalarwertigen 1-Form auf einer offenen Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von B ist. Somit ist $\mathrm{vol}_c(t)$ soetwas wie die "Infinitesimale Version der Länge":

$$\mathrm{vol}_c(t_0) = \|c'(t_0)\| = \lim_{|I|\to 0, t_0 \in I} \frac{1}{|I|} \int_I \|c'(t)\|\, dt.$$

Beachte weiters, daß τ_B das Vorzeichen ändert, wenn die Parametrisierung umgekehrt wird.

8.1.2 Der Gauß'sche Integralsatz in der Ebene.
Wir haben nun alle Ingredienzien um ein Pendent des Hauptsatzes für 2-dimensionale Teilmengen $B \subseteq \mathbb{R}^2$ zu formulieren und zu beweisen. Idee dabei ist, daß das Integral der Ableitung einer Abbildung $f : B \to \mathbb{R}$ (eine 1-Form $f' : B \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$) bzw. eines Gradientenfeldes $\operatorname{grad} f : B \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$ durch die Randwerte von f, also $f|_{\partial B}$ bestimmt werden kann. Für eindimensionales $B = [a, b]$ waren dies die Differenz der beiden Randwerte, also der Summe der beiden Längen $-f(a)$ und $f(b)$, die wir uns auch als Integral $\int_{\{-a,b\}} f := f(b) - f(a)$ einer Funktion $f|_{\partial B}$ von der 0-dimensionalen Menge $\{a, b\}$ nach $\mathbb{R}$ denken können, wobei wir auf die Orientierung des Randes achten müssen und den linken Endpunkt "negativ orientiert nehmen müssen". Für 2-dimensionales B können wir also ein Integral von f über den "orientierten" Rand ∂B, also ein Kurvenintegral erwarten.

Es sei $B = M(\varphi_1, \varphi_2)$ mit $\varphi_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Ordinaten-Menge mit C^1-Grenzen φ_1 und φ_2. Es sei (p, q) ein C^1-Vektorfeld auf B und $(x, y) \mapsto p(x, y) + q(x, y)\, dy$ die zugehörige 1-Form. Der Rand von B wird durch folgende 4 Kurven positiv orientiert parametrisiert:

$$\begin{aligned}
c_1(t) &:= \begin{pmatrix} t \\ \varphi_1(t) \end{pmatrix}, \\
c_2(t) &:= \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix}, \\
c_3(t) &:= \begin{pmatrix} t \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \text{ verkehrt durchlaufen,} \\
c_4(t) &:= \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix} \text{ verkehrt durchlaufen.}
\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_{\partial B} p(x,y)\,dx = \int_{c_1} + \underbrace{\int_{c_2}}_{=0} - \int_{c_3} - \underbrace{\int_{c_4}}_{=0} = \int_a^b p(t,\varphi_1(t))\cdot 1\cdot dt - \int_a^b p(t,\varphi_2(t))\cdot 1\cdot dt$$
$$= \int_a^b \Big[p(t,y)\Big]_{y=\varphi_2(t)}^{y=\varphi_1(t)} dt = \int_a^b \int_{\varphi_2(t)}^{\varphi_1(t)} \partial_2 p(t,y)\,dy\,dt = -\int_a^b \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \partial_2 p(t,y)\,dy\,dt$$
$$= -\int_B \partial_2 p.$$

Analog erhalten wir falls B auch Ordinatenmenge bzgl. der anderen Achse ist

$$\int_{\partial B} q(x,y)\,dy = \int_B \partial_1 q$$

Und somit ist

$$\int_{\partial B} p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = \int_B \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)(x,y)\,d(x,y).$$

Das zeigt den

Gauß'scher Integralsatz in der Ebene.
Es sei B eine Ordinatenmenge bezüglich beiden Achsen mit C^1 Rändern. Weiters sei ∂B der positiv orientierte Rand. Das Vektorfeld $(p,q) : B \to \mathbb{R}^2$ sei C^1. Dann ist

$$\int_{\partial B} p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = \int_B \partial_1 q - \partial_2 p. \quad \square$$

Insbesonders erhalten wir mit $p(x,y) := -y$ und $q(x,y) := x$ die

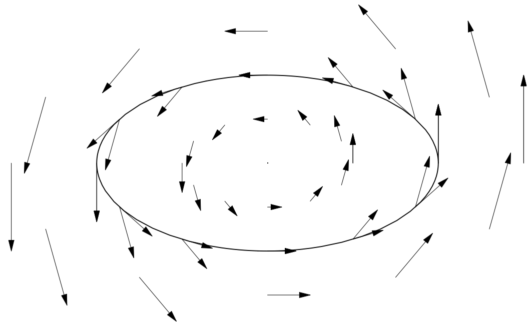
8.1.3 Folgerung. Fläche via Kurvenintegral.
Es sei B eine Ordinatenmenge bezüglich beiden Achsen und C^1-Funktionen (oder auch nur stetigen Funktionen mit beschränkter Variation). Weiters sei ∂B der positiv orientierte Rand. Dann ist

$$|B| = \frac{1}{2}\int_{\partial B} (x\,dy - y\,dx). \quad \square$$

Ist B gegeben durch alle Punkte mit Polarkoordinaten (r,φ) die $0 \le r \le r(\varphi)$ erfüllen, so ist

$$|B| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\varphi)^2\,d\varphi.$$

Beachte, daß also $x\,dy - y\,dx$ eine somit recht nützliche gerade nicht-exakte 1-Form ist.



Beweis. Der Rand ∂B wird in der letztgenannten Situation durch die Kurve $c : t \mapsto (r(t)\ \cos(t), r(t)\ \sin(t))$ mit Ableitung

$$c'(t) = (r'(t)\ \cos(t) - r(t)\ \sin(t), r'(t)\ \sin(t) + r(t)\ \cos(t))$$

beschrieben. Somit ist

$$\begin{aligned}\int_{\partial B} (x\,dy - y) &= \int_0^{2\pi} r(t)\ \cos(t)\Big(r'(t)\ \sin(t) + r(t)\ \cos(t)\Big) \\ &\qquad - r(t)\ \sin(t)\Big(r'(t)\ \cos(t) - r(t)\ \sin(t)\Big)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} r(t)^2\,(\cos(t)^2 + \sin(t)^2)\,dt = \int_0^{2\pi} r(\varphi)^2\,d\varphi. \quad \square\end{aligned}$$

Für die Kreisscheibe B mit Radius r ergibt sich daraus nun sehr einfach

$$|B| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\varphi = r^2\,\pi.$$

Geometrische Interpretation.
Für das Vektorfeld $f = (f_1, f_2) = (p, q) : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R}^2$ definieren wir eine Funktion

$$\operatorname{rot} f := \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R},$$

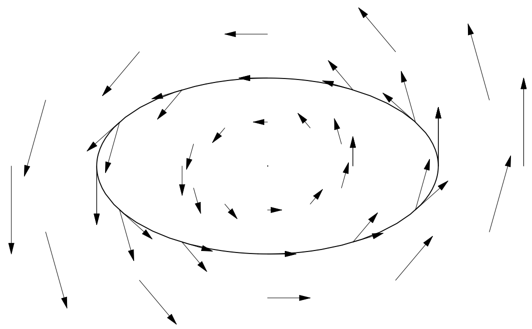
die Rotation von f. Der Gauß'sche Integralsatz ließt sich dann wie folgt:

$$\int_{\partial B} \langle f | \tau_{\partial B}\rangle\ \mathrm{vol}_{\partial B} = \int_B \operatorname{rot} f,$$

wobei $\tau_{\partial B}$ der Einheitstangentialvektor an ∂B und $\mathrm{vol}_{\partial B}$ das 1-dimensionale Volumselement von ∂B ist. Die linke Seite ist die Arbeit von f längs ∂B (das Mittel des Tangentialanteils von f) und somit ist

$$\operatorname{rot} f(x) = \lim_{|B|\to 0, x\in B} \frac{1}{|B|}\int_B \operatorname{rot} f \text{ die Wirbeldichte.}$$

Diese mißt wie sehr der Fluß des Vektorfelds um den Punkt x herumfließt.



Es sei $g := (g_1, g_2) = (q, -p)$, d.h. $f = g^\perp$, der positiv gedrehte Normalvektor. Dann ist

$$\operatorname{rot} f = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 =: \operatorname{div} g,$$

und

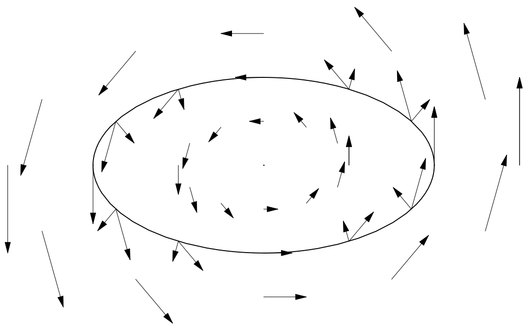
$$\langle f|\tau_{\partial B}\rangle = \langle g^\perp|\tau_{\partial B}\rangle = \langle g^{\perp\perp}|\tau_{\partial B}^\perp\rangle = \langle g| - \tau_{\partial B}^\perp\rangle = \langle g|\nu_{\partial B}\rangle,$$

wobei $\nu_{\partial B}$ der nach außen weisende Einheits-Normalvektor ist. Der Gauß'sche Integralsatz hat nun also die Form

$$\int_{\partial B} \langle g|\nu_{\partial B}\rangle\ \mathrm{vol}_{\partial B} = \int_B \operatorname{div} f.$$

Die linke Seite mißt nun die Durchflußmenge durch ∂B und somit ist

$$\operatorname{div} f(x) = \lim_{B\to 0, x\in B} \frac{1}{|B|}\int_B \operatorname{div} f \text{ die Quelldichte.}$$



Das Vektorfeld f heißt wirbelfrei $:\Leftrightarrow \operatorname{rot} f = 0$. Es heißt quellenfrei $:\Leftrightarrow \operatorname{div} f = 0$.

8.1.4 Definition. Fläche in $\mathbb{R}^3$.
Unter einer Fläche S im $\mathbb{R}^3$ verstehen wir eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ zusammen mit einer surjektiven C^1-Parametrisierung $\Phi = (x, y, z) : K \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $K \subseteq \mathbb{R}^2$ J-meßbar und kompakt. Dies ist ein Spezialfall einer 2-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, siehe Differentialgeometrie.

8.1.5 Der Stokes'sche Integralsatz im Raum.
Es sei $f = (p, q, r)$ ein C^1-Vektorfeld auf $\Phi(K)$, mit Φ C^2 (!) und der Rand ∂K sei durch eine C^1-Kurve $c = (u, v) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert. Mit ∂S bezeichnen wir die durch $\Phi \circ c$ parametrisierte Kurve $\Phi(\partial K)$. Dies ist nicht der topologische Rand von $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} p &= \int_{\Phi\circ c} p(x,y,z) = \int_a^b p(x(c(t)), y(c(t)), z(c(t)))\,(x\circ c)'(t)\,dt \\
&= \int_a^b p\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}\right)dt = \int_c p\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot dv\right) \\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \int_K \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(p\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(p\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right) =
\end{aligned}$$

Für den Integranden erhalten wir, da Φ C^2 ist, nach dem Satz (6.3.10) von Schwarz

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\left(p\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(p\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right) = &= \frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + p\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} - p\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u} \\
&= \left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial v} \\
&\quad - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial u} \\
&= \frac{\partial p}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)}_{-\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} + \frac{\partial p}{\partial z}\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)}_{-\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}
\end{aligned}$$

somit gilt weiter

$$= \int_K \left(\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) d(u,v) =$$

Wir setzen

$$dz\wedge dx := \det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \quad dx\wedge dy := \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \quad \dots$$

und erhalten schließlich

$$= \int_K \frac{\partial p}{\partial z}\, dz \wedge dx - \frac{\partial p}{\partial y}\, dx \wedge dy$$

und analog oder durch zyklisches Vertauschen

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} q\, dy &= \int_K \frac{\partial q}{\partial x}\, dx \wedge dy - \frac{\partial q}{\partial z}\, dy \wedge dz \\ \int_{\partial S} r\, dz &= \int_K \frac{\partial r}{\partial y}\, dy \wedge dz - \frac{\partial r}{\partial x}\, dz \wedge dx \end{aligned}$$

und insgesamt also

$$\int_{\partial S} f = \int_K \left(\tfrac{\partial q}{\partial x} - \tfrac{\partial p}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\tfrac{\partial r}{\partial y} - \tfrac{\partial q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\tfrac{\partial p}{\partial z} - \tfrac{\partial r}{\partial x}\right) dz \wedge dx.$$

Zum C^1-Vektorfeld $f = (p, q, r) : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}^3$ definieren wir nun ein neues Vektorfeld

$$\operatorname{rot} f = \operatorname{rot}(p, q, r) = \Big(\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z}, \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\Big),$$

die Rotation des Vektorfelds. Als Memotechnik ist

$$\operatorname{rot} f = \left(\det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & q \\ \frac{\partial}{\partial z} & r \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & r \\ \frac{\partial}{\partial x} & p \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & p \\ \frac{\partial}{\partial y} & q \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} e_1 & \frac{\partial}{\partial x} & p \\ e_2 & \frac{\partial}{\partial y} & q \\ e_3 & \frac{\partial}{\partial z} & r \end{pmatrix} = \nabla \times f,$$

wobei

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a \times b := \det\begin{pmatrix} e_1 & a_1 & b_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

das Kreuzprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ ist. Dies ist durch folgende Eigenschaften geometrisch charakterisiert: $a \times b \perp a, b$, weiters ist $(a \times b, a, b)$ positiv orientiert, und $|a \times b|$ ist die Fläche des Parallelogramms, das von (a, b) aufgespannt wird: Es ist

$$\begin{aligned} \langle v | a \times b\rangle &= \det(v, a, b) \Rightarrow a \times b \perp a, b \\ \det(a \times b, a, b) &= \det\begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} & a_1 & b_1 \\ -\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} & a_2 & b_2 \\ \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}^2 + \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}^2 + \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^2 \\ &= |a \times b|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \det(a \times b, a, b) &= |a \times b| \cdot \text{Fläche}(a, b) \\ \Rightarrow |a \times b| &= \text{Fläche}(a, b) \end{aligned}$$

Es sei $g = (a, b, c) : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld (wie z.B. $g = \operatorname{rot} F$). Wir definieren ein Integral von g über $\Phi : K \to S$ als

$$\int_\Phi g := \int_K a \circ \Phi \, dy \wedge dz + b \circ \Phi \, dz \wedge dx + c \circ \Phi \, dx \wedge dy$$

$$\text{mit z.B.} \quad dy \wedge dz := \det \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right).$$

Dieses Integral ist Reparametrisierungsinvariant, denn wenn $h : (r, s) \mapsto (u, v)$ eine Orientierungs-erhaltende (d.h. $\det h'(r, s) \geq 0$) Substitutionsfunktion $h : K' \to K$ ist, dann ist wegen der Kettenregel (6.1.5)

$$\det \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(r, s)} \right) = \det \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right) \cdot \det \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)} \right)$$

und somit wegen der Transformationsformel

$$\int_\Phi g = \int_{\Phi \circ h} g$$

und wir können

$$\int_S g := \int_\Phi g$$

setzen, müssen uns dabei aber die "Orientierung" von S merken. Damit erhalten wir schließlich den

Satz von Stokes für Flächen im 3-dimensionalen.
Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Ordinatenmenge bezüglich beider Achsen mit C^1-Grenzen und Rand ∂K der durch eine C^1-Kurve $c : [a, b] \to \partial K$ parametrisiert werden kann. Weiters sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq K \to \mathbb{R}^3$ C^2 und f ein C^1-Vektorfeld auf $S := \Phi(K)$. Dann ist

$$\int_{\partial S} f = \int_S \operatorname{rot} f. \quad \square$$

Geometrische Interpretation.
Nach obigen können wir die linke Seite geometrisch als

$$\int_{\partial S} \langle f | \tau_{\partial S} \rangle \operatorname{vol}_{\partial S}$$

interpretieren. Nun zur rechten Seite: Es ist die zugehörige 2-Form zum Vektorfeld $\operatorname{rot} f$ gerade

$$\begin{aligned}
&\left(\tfrac{\partial q}{\partial x} - \tfrac{\partial p}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\tfrac{\partial r}{\partial y} - \tfrac{\partial q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\tfrac{\partial p}{\partial z} - \tfrac{\partial r}{\partial x} \right) dz \wedge dx = \\
&\qquad = \left(\left(\tfrac{\partial q}{\partial x} - \tfrac{\partial p}{\partial y} \right) \tfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + \left(\tfrac{\partial r}{\partial y} - \tfrac{\partial q}{\partial z} \right) \tfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \left(\tfrac{\partial p}{\partial z} - \tfrac{\partial r}{\partial x} \right) \tfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right) d(u, v) = \\
&\qquad\qquad = \left\langle \operatorname{rot} f \,\middle|\, \tfrac{\partial \Phi}{\partial u} \times \tfrac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle d(u, v),
\end{aligned}$$

denn

$$\Phi'(u, v) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\int_S \operatorname{rot} f = \int_K \langle \operatorname{rot} f | \nu_\Phi \rangle \operatorname{vol}_\Phi,$$

wobei

$$\nu_\Phi(u, v) := \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \|}, \qquad \operatorname{vol}_\Phi(u, v) := \| \tfrac{\partial \Phi}{\partial u} \times \tfrac{\partial \Phi}{\partial v} \| \, d(u, v)$$

die Einheitsnormale an die Fläche und das OberflächenElement- oder 2-dimensionale Volumselement bezeichnet. Dies beiden Objekte sind wohldefiniert, falls $\{\partial_1\Phi(u,v), \partial_2\Phi(u,v)\}$ linear unabhängig ist, d.h. $\Phi'(u,v)$ (maximalen) Rang 2 hat. Beachte, daß für C^1-Parametrisierungen $\Phi : K \to S$ und stetiges $\rho : S \to \mathbb{R}$ folgendes Integral

$$\int_\Phi \rho \circ \Phi \text{ vol}_\Phi := \int_K \rho(\Phi(u,v)) \underbrace{\Big\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \Big\| d(u,v)}_{\text{vol}_\Phi}.$$

reparametrisierungsinvariant ist, denn wenn $g : (r,s) \mapsto (u,v)$ eine (nicht notwendigerweise Orientierungserhaltende) Substitutionsfunktion ist, dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial s} &= \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r}\Big) \times \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\Big) \\
&= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial s} \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u}}_{=0} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \\
&\quad + \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial s} \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial v} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u}}_{-\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}} + \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial s} \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial v} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}_{=0} \\
&= \det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)}\right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right).
\end{aligned}$$

Es macht also Sinn folgende Definition zu geben:

$$\int_S \rho \,\text{vol}_S := \int_\Phi \rho \circ \Phi \text{ vol}_\Phi$$

und dies kann als Masse von S bzgl. der Dichtefunktion ρ aufgefaßt werden, oder im Spezialfall $\rho = 1$ als Oberfläche von S. Dabei ist wieder vol_S nur ein Symbol (das Oberflächenelement einer Fläche von S heißt) und dazu dient, die definierende rechte Seite zu imitieren. In der Tat sind die Riemann-Summen von $\int_K \rho \circ \Phi \text{ vol}_\Phi$ gerade

$$\begin{aligned}
R(\rho \circ \Phi \text{ vol}_\Phi) &= \sum_{I,J} \rho(\Phi(\xi_I, \eta_J)) \cdot \underbrace{\Big\|(\partial_1\Phi \times \partial_2\Phi)(\xi_I,\eta_J)\Big\| \, |I| \, |J|}_{=\text{Fläche des Bildes von } I \times J \text{ unter } \Phi'(\xi_I,\eta_J)} \\
&\approx \sum_{I,J} \rho(\Phi(\xi_I, \eta_J)) \cdot (\text{“Fläche” des Bildes von } I \times J \text{ unter } \Phi) \\
&= \text{“Fläche” des Bildes von } K \text{ unter } \Phi.
\end{aligned}$$

Im Fall, daß Φ injektiv ist (und natürlich noch immer der Rang von Φ' gleich 2 ist) können wir die Einheitsnormale an die Fläche S als

$$\nu_S(\Phi(u,v)) := \nu_\Phi(u,v) := \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\|}$$

definieren. Diese steht normal auf $\partial_1\Phi$ und $\partial_2\Phi$ und somit an jede Richtungsableitung (d.h. Tangentialvektor an die Fläche S) $d_w\Phi$ für $w \in \mathbb{R}^2$. Der Satz von Stokes hat nun folgende geometrische Form:

$$\int_{\partial S} \langle f | \tau_{\partial S}\rangle \text{ vol}_{\partial S} = \int_S \langle \text{rot} f | \nu_S \rangle \text{ vol}_S .$$

Der Anteil der Rotation $\text{rot} f$ in Richtung eines Vektors ν mißt also wieder die Wirbeldichte von f in der Ebene S die normal auf ν steht.

Beispiel.
Die Sphäre wird durch $\Phi : (\varphi, \vartheta) \mapsto (\cos(\varphi)\cos(\vartheta), \sin(\varphi)\cos(\vartheta), \sin(\vartheta))$ mit $K := [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$

parametrisiert. Somit ist die Oberfläche der Sphäre durch

$$\int_K \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \right\| d(\varphi,\vartheta)$$

gegeben. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\Phi'(\varphi,\vartheta) &= \begin{pmatrix} -\cos(\vartheta)\sin(\varphi) & -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\cos(\varphi) & -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 0 & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} &= \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)^2\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)^2\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{pmatrix} = \cos(\vartheta)\cdot\Phi(\varphi,\vartheta)
\end{aligned}$$

Somit ist die Oberfläche

$$\begin{aligned}
\int_K \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \right\| d(\varphi,\vartheta) &= \int_K |\cos(\vartheta)| \overbrace{\|\Phi\|}^{1} d(\varphi,\vartheta) \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi = 2\pi\cdot[\sin(\vartheta)]_{\vartheta=-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi.
\end{aligned}$$

8.1.6 Definition. Normalbereich.
Unter einem C^1-Normalbereich bezüglich der xy-Ebene verstehen wir eine Ordinatenmenge

$$B = \{(x,y,z) : (x,y) \in K, \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\}$$

wobei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt (J-meßbar $\Leftarrow$) ∂K C^1-parametrisierbar und $\varphi_1 \le \varphi_2 : K \to \mathbb{R}$ stetig sind. Die Deckel sind dann durch $S_i := \operatorname{graph}(\varphi_i)$ für $i = 1,2$ gegeben und der Mantel $S_0 := \{(x,y,z) : (x,y) \in \partial K,\ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\}$. Wir benötigen eine C^1-Parametrisierung der Oberfläche $\partial B = S_0 \cup S_1 \cup S_2$. Da in wichtigen Beispielen (Kugel) die φ_i aber nicht überall differenzierbar sind, fordern wir zusätzlich die Existenz von Substitutionsfunktionen $g_i : K_i \to K$, s.d. $\varphi_i \circ g$ C^1 ist. Dann ist $\Phi_i : K_i \to S_i$ eine Parametrisierung von S_i für $i \in \{0,1,2\}$, wobei $K_0 := \{(u,v) : u \in [a,b], \varphi_1(c(u)) \le v \le \varphi_2(c(u))\}$, weiters $c : [a,b] \to \partial K$ eine positiv orientierte C^1-Parametrisierung von ∂K ist, und

$$\Phi_i(u,v) := \begin{cases} (c(u),v) & \text{für } i = 0 \\ (g_i(u,v), \varphi_i(g_i(u,v))) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir benötigen noch, daß die Orientierung dieser Parametrisierungen paßt, d.h. der Normalvektor ν_Φ nach außen weißt. Dafür folgende Rechnung: Es ist

$$\begin{aligned}
\Phi_i'(u,v) &= \begin{cases} \begin{pmatrix} x'(u) & 0 \\ y'(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{für } i = 0 \\ \begin{pmatrix} g_i'(u,v) \\ (\varphi_i \circ g_i)'(u,v) \end{pmatrix} & \text{sonst,} \end{cases} \\
\Rightarrow \nu_{\Phi_i}(u,v) &= \begin{cases} \begin{pmatrix} y'(u) \\ -x'(u) \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} -c'(u)^\perp \\ 0 \end{smallmatrix}\right) & \text{für } i = 0 \\ \begin{pmatrix} * \\ * \\ \det(g_i'(u,v)) \end{pmatrix} & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Also verlangen wir zusätzlich o.B.d.A., daß $\det(g_1'(u,v)) \le 0$ und $\det(g_2'(u,v)) \ge 0$ für alle (u,v) gilt.

Beispiel.
Der Quader $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$: Dabei ist $K = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ und $\varphi_i := c_i$. Hier müssen wir nicht mehr umparametrisieren, d.h. $K_i := K$ und $g_i := \mathrm{id}$.

Die Kugel $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ mit Radius R: Dabei ist $K := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \mathbb{R}^2\}$, $\varphi_2(x, y) := \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$, $\varphi_1(x, y) := -\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$. Die φ_i sind nun auf ∂K nicht mehr differenzierbar. Wir verwenden Kugelkoordinaten zur Umparametrisierung, d.h. $K_1 := [0, 2\pi] \times [-\pi/2, 0]$, $K_2 := [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$ und $g_i(u, v) := R\cos(v)(\cos(u), \sin(u))$. Dann ist $(\varphi_i \circ g_i)(u, v) = \pm\sqrt{R^2(1 - \cos^2 v)} = R\sin(v)$ C^∞ in (u, v).

8.1.7 Der Gauß'sche Integralsatz im Raum.
Für stetiges $r : B \to \mathbb{R}$ ist

$$\int_{\partial B} r \, dx \wedge dy = \sum_{i=1}^{3} \int_{S_i} r(x, y, z) \, dx \wedge dy$$

Weiters ist

$$\int_S r(x, y, z) \wedge dy = \int_K r(\Phi(u, v)) \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \, d(u, v).$$

Wegen

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{cases} (c'(u), 0) & \text{für } i = 0 \\ (g_i'(u, v)) & \text{für } i = 1, 2 \end{cases}$$

ist das Integral 0 für $i = 0$ und für $i = 1, 2$ ist

$$\begin{aligned} \int_{S_i} r(x, y, z) \, dx \wedge dy &= \int_{K_i} r(g_i(u, v), \varphi_i(g_i(u, v))) \det g_i'(u, v) \, d(u, v) \\ &= \mp \int_K r(x, y, \varphi_i(x, y)) \, d(x, y) \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} r \, dx \wedge dy &= \int_K [r(x, y, z)]_{z=\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} d(x, y) \\ &\stackrel{\text{HS}}{=\!=} \int_K \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial}{\partial z} r(x, y, z) \, dz \, d(x, y) \\ &= \int_B \frac{\partial}{\partial z} r(x, y, z) \, d(x, y, z) \end{aligned}$$

Falls B ein C^1-Normalbereich auch bezüglich der anderen Koordinatenebenen ist, so folgt analog

$$\int_B \left(\frac{\partial}{\partial x} p + \frac{\partial}{\partial y} q + \frac{\partial}{\partial z} r \right) = \int_{\partial B} p \; dy \wedge dz + q \; dz \wedge dx + r \; dx \wedge dy$$

Satz von Gauß im 3-dimensionalen.
Es sei B ein C^1-Normalbereich bezüglich aller 3 Koordinatenebenen und $f = (p, q, r)$ ein C^1-Vektorfeld auf B. Dann ist

$$\int_B \left(\frac{\partial}{\partial x} p + \frac{\partial}{\partial y} q + \frac{\partial}{\partial z} r \right) = \int_{\partial B} p \, dy \wedge dz + q \, dz \wedge dx + r \, dx \wedge dy \quad \square$$

Geometrische Bedeutung.

Für ein C^1-Vektorfeld $f = (p, q, r) : \mathbb{R}^3 \supseteq B \to \mathbb{R}^3$ definieren wir eine Funktion $\operatorname{div} f : B \to \mathbb{R}$ durch $\operatorname{div} f := \partial_1 p + \partial_2 q + \partial_3 r$. Dann ist

$$\int_B \operatorname{div} f = \int_{\partial B} \langle f | \nu_{\partial B} \rangle \operatorname{vol}_{\partial B} .$$

Die rechte Seite beschreibt wie im 2-dimensionalen die Quellenergiebigkeit oder auch Quellenstärke des Bereichs B, und somit nennt man $\operatorname{div} f$ die Quellendichte des Vektorfelds f.

Wir wollen nun die erhaltenen Integralsätze zu einem gemeinsamen Satz verallgemeinern. Dazu benötigen wir einerseits die Objekte (Flächen) über die wir integrieren und die einen vernünftig handhabbaren Rand besitzen und andererseits die Objekte die wir integrieren können (Funktion, 1-Formen, Vektorfelder, ...). Wir beginnen mit letzteren. Bei Flächen und Volumsberechnung spielt offensichtlich die Determinante eine große Rolle. Diese ist eine alternierende multi-lineare Form, und deshalb schauen wir uns solche Formen im folgenden Abschnitt genauer an.

Da die meiste mathematische Literatur auf english ist, habe ich den folgenden Abschnitt zwecks Eingewöhnung auf englisch verfaßt.

8.2 Multi-linear Forms

As usual we denote the vector space of all p-linear mappings $\Phi : E_1 \times \ldots \times E_p \to F$ by $L(E_1, \ldots, E_p; F)$ or by $L_p(E_1, \ldots, E_p; F)$. If all E_k are equal to E, we denote this space also by $L_p(E; F)$.

8.2.1 Definition. Tensor product of mappings.
The simplest bilinear mapping is the multiplication $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t, s) \mapsto t \cdot s$. This can also be described as $(t, s) \mapsto \operatorname{pr}^1(t) \cdot \operatorname{pr}^2(s)$, where $\operatorname{pr}^1, \operatorname{pr}^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are the linear coordinate projections $(t, s) \mapsto t$ and $(t, s) \mapsto s$. In order to describe general multi-linear forms via a similar product of linear forms we define now the tensor product of multi-linear forms.

Let $\Phi : E_1 \times \ldots \times E_p \to \mathbb{R}$ be p-linear (we also say: its degree is p) and let $\Psi : F_1 \times \ldots \times F_q \to \mathbb{R}$ be q-linear. Then the tensor product of Φ and Ψ is the $(p+q)$-linear mapping $\Phi \otimes \Psi : E_1 \times \ldots \times E_p \times F_1 \times \ldots \times F_q \to \mathbb{R}$ defined by

$$(\Phi \otimes \Psi)(v_1, \ldots, v_p; w_1, \ldots, w_q) := \Phi(v_1, \ldots, v_p) \cdot \Psi(w_1, \ldots, w_q).$$

Thus we start feeding as many variables as possible into Φ and all the remaining ones into Ψ in the given order and finally multiply the resulting numbers. It is easily shown that this multiplication $(\Phi, \Psi) \mapsto \Phi \times \Psi$ is bi-linear and associative.

In particular, we have the linear functionals $\operatorname{pr}^i \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ defined by $\operatorname{pr}^i : x = (x^1, \ldots, x^n) \mapsto x^i$, for $i = 1, .., n$.

Let now $\Phi \in L_p(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ be arbitrary then we have

$$\Phi(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{i_1=1}^n \ldots \sum_{i_p=1}^n v_1^{i_1} \ldots v_p^{i_p}\ \Phi(e^1_{i_1}, \ldots, e^p_{i_p}) = \sum_{i_1,\ldots,i_p} v_1^{i_1} \ldots v_p^{i_p}\ \Phi_{i_1,\ldots,i_p},$$

where $\Phi_{i_1,\ldots,i_p} := \Phi(e^1_{i_1}, \ldots, e^p_{i_p}) \in \mathbb{R}$.

Since $(pr^{i_1} \otimes \ldots \otimes \operatorname{pr}^{i_p})(v_1, \ldots, v_p) = v_1^{i_1} \ldots v_p^{i_p}$ one can rewrite the above equation as

$$\Phi = \sum_{i_1,\ldots,i_p} \Phi_{i_1,\ldots,i_p} \cdot \operatorname{pr}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \operatorname{pr}^{i_p}$$

Furthermore, the p-linear functionals $\operatorname{pr}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \operatorname{pr}^{i_p}$ are linear independent, since evaluated at $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p})$ they give 1 when $(i_1, \ldots, i_p) = (j_1, \ldots, j_p)$, and 0 otherwise.

So we have shown the following lemma

8.2.2 Lemma. Basis for space of multi-linear functions.
The family $\left\{\mathrm{pr}^{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathrm{pr}^{i_p} : i_1,\ldots,i_p\in\{1,\ldots,n\}\right\}$ *is a basis of the vector space* $L_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. □

8.2.3 Definition. Alternating multi-linear functions.
Since the (oriented) volume of the paralleliped spaned by vectors $v_1,\ldots,v_n$ is alternating, namely the determinante, we consider now mult-linear alternating mappings.

A p-linear mapping $\Phi\in L_p(E,F)$ is called ALTERNATING if Φ changes sign whenever two entries are exchanged, i.e.

$$\Phi(\ldots,v,\ldots,w,\ldots)=-\Phi(\ldots,w,\ldots,v,\ldots).$$

Since every permutation σ of $\{1,\ldots,p\}$ can be decomposed into such transpositions and since the sign of the composite of permutations is the product of the signs of the factors, the condition is equivalent to

$$\Phi(v_1,\ldots,v_p)=\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\Phi\underbrace{(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(p)})}_{=:\sigma^*(v_1,\ldots,v_p)},$$

for every permutation σ of $\{1,\ldots,p\}$. Where we denoted the exchange of variables via σ by $\sigma^*: E\times\ldots\times E\to E\times\ldots\times E$, which is defined by $\sigma^*(v_1,\ldots,v_p):=(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(p)})$. The condition above can be expressed shortly by

$$\Phi=\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\Phi\circ\sigma^*.$$

Note, that if we consider $(v_1,\ldots,v_p)$ as mapping $v:\{1,\ldots,p\}\to E$, then $\sigma^*(v):=v\circ\sigma$. In fact, $\sigma^*(v)(i):=v_{\sigma(i)}=(v\circ\sigma)(i)$. Moreover $\sigma^*(e_i)=e_j\Leftrightarrow\sigma(j)=i$, since obviously $\sigma^*(e_i)$ is a standard unit-vector with 1 at exactly that coordinate j for which $\sigma(j)=i$. Recall that every permutation σ can be written as composition of transpositions, i.e. permutations of the form (i,j), which exchange i and j. The sign $\mathrm{sgn}\,\sigma$ of a permutation is $(-1)^n$, where n is the number of transpositions whose composition is σ.

Let $L_{p,\mathrm{alt}}(E,F)$ denote the set of all alternating p-linear mappings in $L_p(E,F)$. This is easily seen to be a linear subspace of $L_p(E,F)$.

8.2.4 Lemma. Alternator.
The ALTERNATOR $\mathrm{alt}:\Phi\mapsto\frac{1}{p!}\sum_\sigma\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\Phi\circ\sigma^*$, *where the sum is taken over all permutations* σ *of* $\{1,\ldots,p\}$, *defines a projection from* $L_p(E,F)$ *onto* $L_{p,\mathrm{alt}}(E,F)$ *which turns every multi-linear mapping* Φ *into an alternating one* $\mathrm{alt}(\Phi)$. *For any permutation* π *one has* $\mathrm{alt}(\Phi\circ\pi^*)=\mathrm{sgn}(\pi)\,\Phi=\mathrm{alt}(\Phi)\circ\pi^*$. *The kernel* $\ker(\mathrm{alt})$ *of* alt *contains all* p*-linear mappings which are symmetric in at least 2 variables.*

Proof. Obviously $\mathrm{alt}(\Phi)$ is p-linear provided Φ is it.

Now let π be an arbitrary permutation. Then

$$\begin{aligned}\mathrm{alt}(\Phi\circ\pi^*)&=\tfrac{1}{p!}\sum_\sigma\mathrm{sgn}(\sigma)(\Phi\circ\pi^*\circ\sigma^*)=\tfrac{1}{p!}\sum_\sigma\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\pi)^2(\Phi\circ(\sigma\circ\pi)^*)\\&=\tfrac{1}{p!}\sum_\sigma\mathrm{sgn}(\bar\sigma)\,\mathrm{sgn}(\pi)(\Phi\circ\bar\sigma^*)=\mathrm{sgn}(\pi)\cdot\mathrm{alt}(\Phi),\end{aligned}$$

since $\bar\sigma:=\sigma\circ\pi$ runs through all permutations of $\{1,\ldots,p\}$ exactly once while σ runs through them (use that the set of all permutations forms a group under composition, and multiplication by a group element π is a bijection whose inverse is the multiplication with the inverse element π^{-1}) and since $\pi^*\circ\sigma^*=(\sigma\circ\pi)^*$.

On the other hand we have by analogous arguments

$$\begin{aligned}\mathrm{alt}(\Phi)\circ\pi^*&=\tfrac{1}{p!}\sum_\sigma\mathrm{sgn}(\sigma)(\Phi\circ\sigma^*)\circ\pi^*=\tfrac{1}{p!}\sum_\sigma\mathrm{sgn}(\sigma)(\Phi\circ\sigma^*\circ\pi^*)\\&=\tfrac{1}{p!}\sum_\sigma\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\pi)^2(\Phi\circ(\pi\circ\sigma)^*)=\tfrac{1}{p!}\sum_{\bar\sigma}\mathrm{sgn}(\pi)\,\mathrm{sgn}(\bar\sigma)(\Phi\circ\bar\sigma^*)\\&=\mathrm{sgn}(\pi)\cdot\mathrm{alt}(\Phi),\end{aligned}$$

where $\bar\sigma := \pi \circ \sigma$.

So we have proved that $\operatorname{alt}(\Phi)$ is alternating and that the claimed formula holds.

The operator alt is a projection from $L_p(E,F)$ onto $L_{p,\mathrm{alt}}(E,F)$, since the alternating mappings Φ are invariant under alt:

$$\operatorname{alt}(\Phi) = \tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)(\Phi\circ\sigma^*) = \tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma)\Phi = \tfrac{p!}{p!}\Phi = \Phi.$$

Furthermore $\operatorname{alt}(\Phi) = 0$ for any p-linear mapping Φ, which is symmetric in some variables: Symmetry in some variables implies that there is some transposition π (hence $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$), such that $\Phi\circ\pi^* = \Phi$. Applying alt gives $\operatorname{alt}(\Phi) = \operatorname{alt}(\Phi\circ\pi^*) = (-1)\operatorname{alt}(\Phi)$, hence $\operatorname{alt}(\Phi) = 0$. □

8.2.5 Definition. Wedge product.
Since the tensor product of two alternating multi-linear mappings is no longer alternating, we need a new kind of product the so called wegde product.

Let $\omega \in L_{p,\mathrm{alt}}(E,\mathbb{R})$ and $\eta \in L_{q,\mathrm{alt}}(E,\mathbb{R})$ be two alternating multi-linear functions. Then the wedge product of ω and η is the alternating multi-linear function

$$\omega\wedge\eta := \tfrac{(p+q)!}{p!q!}\cdot\operatorname{alt}(\omega\otimes\eta).$$

The factor $\frac{(p+q)!}{p!q!}$ is chosen in such a way, that this product can be used to calculate the appropriate volumes, see the definition of $\det^{i_1,\dots,i_p}$.

8.2.6 Lemma.
The multiplication $(\omega,\eta)\mapsto\omega\wedge\eta$ is bi-linear, associative and graded commutative, i.e. $\omega\wedge\eta = (-1)^{pq}\eta\wedge\omega$, where p and q are the grades of ω and η.

Proof. That the multiplication is bi-linear follows immediately from the corresponding statement for the tensor product, and from the linearity of the alternator.

Claim. The wedge product is graded commutative:
Using the permutation

$$\pi : j \mapsto \begin{cases} j+p & \text{for } j\in\{1,\dots,p\}\\ j-p & \text{for } j\in\{p+1,\dots,p+q\}\end{cases}$$

which exchanges the block of the first p variables with that of the last q variables, with $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{pq}$, we calculate as follows.

$$\begin{aligned}\omega\wedge\eta &= \tfrac{(p+q)!}{p!q!}\operatorname{alt}(\omega\otimes\eta) = \tfrac{(p+q)!}{p!q!}\operatorname{alt}((\eta\otimes\omega)\circ\pi^*)\\ &= \operatorname{sgn}(\pi)\cdot\tfrac{(p+q)!}{p!q!}\operatorname{alt}(\eta\otimes\omega) = (-1)^{pq}\,\eta\wedge\omega.\end{aligned}$$

Claim. The wedge product is associative:

$$(\operatorname{alt}\Phi)\otimes\Psi = \tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)(\Phi\circ\sigma^*)\otimes\Psi = \tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\bar\sigma)(\Phi\otimes\Psi)\circ\bar\sigma^*,$$

where $\bar\sigma$ is the permutation of $\{1,\dots,p+q\}$, which agrees with σ on $\{1,\dots,p\}$ and keeps $\{p+1,\dots,p+q\}$ fixed. Obviously $\operatorname{sgn}(\bar\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)$. Hence

$$\begin{aligned}\operatorname{alt}\big((\operatorname{alt}\Phi)\otimes\Psi\big) &= \operatorname{alt}\Big(\tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\bar\sigma)(\Phi\otimes\Psi)\circ\bar\sigma^*\Big)\\ &= \tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\bar\sigma)\operatorname{alt}((\Phi\otimes\Psi)\circ\bar\sigma^*) = \tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{alt}(\Phi\otimes\Psi)\\ &= \operatorname{alt}(\Phi\otimes\Psi).\end{aligned}$$

Remark that this shows that the kernel of alt is an ideal, since $\mathrm{alt}(\Phi) = 0$ implies that $\mathrm{alt}(\Phi \otimes \Psi) = \mathrm{alt}(\mathrm{alt}(\Phi) \otimes \Psi) = \mathrm{alt}(0 \otimes \Phi) = \mathrm{alt}(0) = 0$.

So we obtain finally:

$$\begin{aligned}(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma &= \tfrac{(a+b+c)!}{(a+b)!c!} \,\mathrm{alt}\Big((\alpha \wedge \beta) \otimes \gamma\Big) \\ &= \tfrac{(a+b+c)!}{(a+b)!c!} \,\mathrm{alt}\left(\tfrac{(a+b)!}{a!b!} \,\mathrm{alt}(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma\right) \\ &= \tfrac{(a+b+c)!}{a!b!c!} \,\mathrm{alt}\Big(\mathrm{alt}(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma\Big) \\ &= \tfrac{(a+b+c)!}{a!b!c!} \,\mathrm{alt}\Big((\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma\Big).\end{aligned}$$

And by symmetry

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = \tfrac{(a+b+c)!}{a!b!c!} \,\mathrm{alt}\Big(\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)\Big).$$

Since the tensor product is associative, the result follows. □

8.2.7 Definition. Subdeterminants.
For $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ let $\det^{i_1,\dots,i_p} := \mathrm{pr}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{pr}^{i_p} \in L_{p,\mathrm{alt}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Then we have

$$\begin{aligned}\det{}^{i_1,\dots,i_p}(v_1, \dots, v_p) &= (\mathrm{pr}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{pr}^{i_p})(v_1, \dots, v_p) \\ &= p! \,\mathrm{alt}(\mathrm{pr}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathrm{pr}^{i_p})(v_1, \dots, v_p) \\ &= \tfrac{p!}{p!} \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma)(\mathrm{pr}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathrm{pr}^{i_p})(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \\ &= \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) \,\mathrm{pr}^{i_1}(v_{\sigma(1)}) \dots \mathrm{pr}^{i_p}(v_{\sigma(p)}) \\ &= \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) v^{i_1}_{\sigma(1)} \dots v^{i_p}_{\sigma(p)} \\ &= \det \begin{pmatrix} v^{i_1}_1 & \dots & v^{i_1}_p \\ \vdots & & \vdots \\ v^{i_p}_1 & \dots & v^{i_p}_p \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

So $\det^{i_1,\dots,i_p}$ is in fact the determinant of the submatrix of the $(n \times p)$-matrix

$$(v_1, \dots, v_p) = \begin{pmatrix} v^1_1 & \dots & v^1_p \\ \vdots & & \vdots \\ v^n_1 & \dots & v^n_p \end{pmatrix}.$$

formed by the lines $i_1, \dots, i_p$.

8.2.8 Corollary.
Let $i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q \in \{1, \dots, n\}$ and let σ be any permutation of $\{1, \dots, n\}$. Then $\det^{i_1,\dots,i_p} \wedge \det^{j_1,\dots,j_q} = \det^{i_1,\dots,i_p;j_1,\dots,j_q}$ and $\det^{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(p)}} = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \det^{i_1,\dots,i_p}$. If two of the indices $i_1, \dots, i_p$ are the same then $\det^{i_1,\dots,i_p} = 0$.

Proof. The first equation follows directly from the associativity of the wedge product, the second one follows from the graded commutativity. The last one is a consequence of $\omega \wedge \omega = 0$ for every $\omega \in L(E; \mathbb{R})$ of degree 1, since $\omega \wedge \omega = (-1)^{1 \cdot 1} \,\omega \wedge \omega$. □

Similar to (8.2.2) the wedge-products of coordinate projections form a basis for all multi-linear alternating forms.

8.2.9 Lemma. Basis for alternating multi-linear functions.

The family $\{\det^{i_1,\dots,i_p} : i_1 < \dots < i_p,$ *and* $i_1,\dots,i_p \in \{1,\dots,n\}\}$ *is a basis of the vector space* $L_{p,\mathrm{alt}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$

Proof. Since $\mathrm{alt} : L_p(E,F) \to L_{p,\mathrm{alt}}(E,F)$ is a linear surjection, and $\{\mathrm{pr}^{i_1}\otimes\dots\otimes\mathrm{pr}^{i_p} : i_1,\dots,i_p \in \{1,\dots,n\}\}$ is a basis of $L_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ their image $\{\det^{i_1,\dots,i_p} = p!\,\mathrm{alt}(\{\mathrm{pr}^{i_1}\otimes\dots\otimes\mathrm{pr}^{i_p}) : i_1,\dots,i_p \in \{1,\dots,n\}\}$ under alt generates the image $L_{p,\mathrm{alt}}(E,F)$. By the previous corollary these elements are zero whenever the indices are not pairwise different, and they are equal up to a sign when their indices are just a permutation of each other. So we conclude that even the family $\{\det^{i_1,\dots,i_p} : i_1 < \dots < i_p,$ and $i_1,\dots,i_p \in \{1,\dots,n\}\}$ generates $L_{p,\mathrm{alt}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

That they are linear independent can be seen as follows: Assume that some linear combination $\sum_{i_1<\dots<i_p}\omega_{i_1,\dots,i_p}\cdot\det^{i_1,\dots,i_p} = 0$. Now evaluate this p-linear map at $(e_{j_1},\dots,e_{j_p})$, where $j_1 < \dots < j_p$. This yields $0 = \sum_{i_1<\dots<i_p}\omega_{i_1,\dots,i_p}\cdot\det^{i_1,\dots,i_p}(e_{j_1},\dots,e_{j_p}) = \omega_{j_1,\dots,j_p}$, hence all coefficients $\omega_{j_1,\dots,j_p}$ are zero. □

8.2.10 Remark.
This description of alternating p-linear mappings ω as a linear combination $\sum_{i_1<\dots<i_p}\omega_{i_1,\dots,i_p}\cdot\det^{i_1,\dots,i_p}$ can be used to define the wedge product and give a different proof of its basic properties (8.2.6), see [19, 1986, Satz 211.2].

8.2.11 Corollary. Dimension of $L_{p,\mathrm{alt}}$.
The dimension of $L_{p,\mathrm{alt}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ *equals* $\binom{n}{p}$. *In particular* $L_{p,\mathrm{alt}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = \{0\}$ *for* $p > n$, *and* $L_{n,\mathrm{alt}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = \{t\cdot\det : t \in \mathbb{R}\}$.

Proof. The set of indices in (8.2.9) corresponds exactly to the subsets $\{i_1,\dots,i_p\}$ of $\{1,\dots,n\}$ of p elements. There are $\binom{n}{p}$ many such subsets. □

8.2.12 Definition. $L_{0,\mathrm{alt}}$.
We extend the definition of the considered function spaces by setting $L_0(E,F) := \mathbb{F}$ and $L_{0,\mathrm{alt}}(E,F) := \mathbb{F}$. The tensor product and the wedge product are extended by $t\otimes\Phi := t\cdot\Phi$ and $t\wedge\omega := t\cdot\omega$. Then the properties given in (8.2.6) are valid in this situation as well.

8.2.13 Lemma. Wedge product of linear functionals.
Let $\omega^i = \sum_{j=1}^n \omega^i_j\,\mathrm{pr}^j$ *of degree 1 be given, i.e.* $\omega_i \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, *for* $i = 1,\dots,n$. *Then*

$$\omega^1\wedge\dots\wedge\omega^n = \det((\omega^i_j)_{i,j=1,\dots,n})\cdot\mathrm{pr}^1\wedge\dots\wedge\mathrm{pr}^n = \det((\omega^i_j)_{i,j=1,\dots,n})\cdot\det$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\omega^1\wedge\dots\wedge\omega^n &= \sum_{i_1,\dots,i_n}\omega^1_{i_1}\dots\omega^n_{i_n}\cdot\mathrm{pr}^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{pr}^{i_n}\\
&= \sum_{\sigma}\omega^1_{\sigma_1}\dots\omega^n_{\sigma_n}\cdot\mathrm{pr}^{\sigma_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{pr}^{\sigma_n}\\
&= \sum_{\sigma}\omega^1_{\sigma_1}\dots\omega^n_{\sigma_n}\cdot\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\mathrm{pr}^1\wedge\dots\wedge\mathrm{pr}^n\\
&= \det((\omega^i_j)_{i,j=1,\dots,n})\cdot\mathrm{pr}^1\wedge\dots\wedge\mathrm{pr}^n,
\end{aligned}$$

where σ is the map $\sigma(j) = i_j$ for all $j = 1,\dots,n$; and we may assume that σ is a permutation, since $\mathrm{pr}^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{pr}^{i_n} = 0$ whenever two of the indices coincide. □

8.3 Differential Forms

8.3.1 Definition. Differential forms.
Let X be a subset in $\mathbb{R}^n$. A p-form (differential form of order p) on X is a mapping $\omega : X \to L_{p,\mathrm{alt}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. More generally a p-tensor field on X is a mapping $\Phi : X \to L_p(\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

The space of all p-tensor fields on X turns into a vector space, by defining the operations pointwise:

$$(\Phi + \Psi)(x) := \Phi(x) + \Psi(x); \quad (\lambda \cdot \Phi)(x) := \lambda \cdot (\Phi(x))$$

Moreover, tensor fields can be multiplied with real valued functions on X by: $(f \cdot \Phi)(x) := f(x) \cdot \Phi(x)$. And, more generally, a p-tensor field and a q-tensor field can be multiplied to give a $p+q$-tensor field:

$$(\Phi \otimes \Psi)(x) := \Phi(x) \otimes \Psi(x)$$

The space of p-forms is a linear subspace of that of p-tensor fields, and one has a projection $\mathrm{alt}_* : \Phi \mapsto alt \circ \Phi$ onto it.

So one can multiply differential forms:

$$(\omega \wedge \eta)(x) := \omega(x) \wedge \eta(x) = \tfrac{(p+q)!}{p!q!} \,\mathrm{alt}(\omega(x) \otimes \eta(x)).$$

This multiplication is obviously by (8.2.6) associative, bi-linear and graded commutative. Recall that $L_0(E, \mathbb{R}) = L_{0,\mathrm{alt}}(E, \mathbb{R}) := \mathbb{R}$. Hence the 0-tensor fields and the 0-forms are exactly the real-valued functions on X. In this case we write $f \cdot \omega := f \wedge \omega$ and $f \cdot \Phi := f \otimes \Phi$.

8.3.2 The exterior derivative of 1-forms Recall that the derivative of a C^1-function $f : X \to \mathbb{R}$ is a map $f' : X \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, hence can be considered as a 1-tensor field or a 1-form denoted by df.

Consider in particular the function $\mathrm{pr}^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ defined by $x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$. Being linear its derivative is the constant function $d\,\mathrm{pr}^i = (\mathrm{pr}^i)' : x \mapsto \mathrm{pr}^i$. For obvious reasons this 1-form will be denoted dx^i. If $f : X \to \mathbb{R}$ is a C^1-function then $df(x) = \sum_{i=1}^n (\frac{\partial}{\partial x^i} f(x)) \cdot dx^i$ or shorter $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot dx^i$.

Using that a basis of $L_{p,\mathrm{alt}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ is given by $\{\det^{i_1,\dots,i_p} = \mathrm{pr}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{pr}^{i_p} : i_1 < \dots < i_p\}$ we see that every p-form ω on X can be written as $\omega(x) = \sum_{i_1<\dots<i_p} (\omega(x))_{i_1,\dots,i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ and if we set $\omega_{i_1,\dots,i_p}(x) := (\omega(x))_{i_1,\dots,i_p}$ we can express this shortly by

$$\omega = \sum_{i_1<\dots<i_p} \omega_{i_1,\dots,i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

The derivative of a p-tensor field $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq X \to L_p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ wich is C^1 can be considered as mapping $\Phi' : \mathbb{R}^n \supseteq X \to L(\mathbb{R}^n, L_p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})) \cong L_{p+1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. If Φ is a p-form, i.e. $\Phi(x)$ is in addition alternating for all $x \in X$, then we can not expect Φ' to be a $p+1$-form, hence modify the derivative to get the so-called exterior derivative:

8.3.3 Definition. Exterior derivative.
The differential (or exterior derivative) $d\omega$ of a differentiable p-form ω is a $(p+1)$-form defined by: $d\omega(x) := {\scriptstyle (p+1)}\ \mathrm{alt}(\widetilde{\omega'(x)})$, where $\Phi \mapsto \tilde{\Phi}$ is the isomorphism $L(E, L_p(E, \dots, E; F)) \cong L_{p+1}(E, \dots, E; F)$. Thus

$$d\omega(x)(v_0, v_1, \dots, v_p) = {\scriptstyle (p+1)}\ \mathrm{alt}_{v_0,v_1,\dots,v_p}\big(\omega'(x)(v_0)(v_1, \dots, v_p)\big),$$

where $\mathrm{alt}_{v_0,v_1,\dots,v_p}$ is the alternator with respect to the variables $v_0, v_1, \dots, v_p$. We can write this shorter as

$$d\omega(x) = (p+1) \cdot \mathrm{alt}(\widetilde{\omega'(x)})$$
$$d\omega = (p+1) \cdot \mathrm{alt} \circ (\widetilde{\quad}) \circ \omega'.$$

Since $\omega'(x)(v_0)(v_1,\dots,v_p)$ is already alternating in v_1,..,v_p this formula can be simplified as follows:

8.3.4 Lemma.

$$d\omega(x)(v_0,\dots,v_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \omega'(x)(v_i)(v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_p),$$

where $\widehat{\dots}$ means that the corresponding term is removed.

This formula is one reason for the choice of the factor $(p+1)$ in the definition of $d\omega$.

Proof.

$$\begin{aligned} d\omega(x)(v_0,\dots,v_p) &= \tfrac{p+1}{(p+1)!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega'(x)(v_{\sigma(0)})(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)}) \\ &= \tfrac{1}{p!} \sum_{i=0}^{p} \sum_{\sigma(0)=i} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega'(x)(v_i)(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)}) \\ &= \tfrac{1}{p!} \sum_{i=0}^{p} \sum_{\tilde\sigma(i)=i} \operatorname{sgn}(\tilde\sigma)(-1)^i(\omega'(x)(v_i)(v_{\tilde\sigma(0)},\dots,\widehat{v_{\tilde\sigma(i)}},\dots,v_{\tilde\sigma(p)}) \\ &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \omega'(x)(v_i)(v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_p). \end{aligned}$$

Where $\tilde\sigma$ is the unique permutation of $\{0,\dots,p\}$ satisfying $\tilde\sigma(j) = \sigma(j+1)$ for $j < i$, $\tilde\sigma(i) = i$, and $\tilde\sigma(j) = \sigma(j)$ for $j > i$. I.e. $\tilde\sigma = \sigma \circ \pi_\sigma$, where

$$\pi_\sigma : j \mapsto \begin{cases} j+1 & \text{for } j < \sigma(0) \\ 0 & \text{for } j = \sigma(0) \\ j & \text{for } j > \sigma(0) \end{cases}$$

with sign $(-1)^i$. Thus $\operatorname{sgn}(\tilde\sigma) = (-1)^i \operatorname{sgn}(\sigma)$. Note that $\sigma \mapsto (\sigma(0), \tilde\sigma)$ is a bijection between permutations of $\{0,\dots,p\}$ and pairs of $i \in \{0,\dots,p\}$ and permutations of $\{0,\dots,p\}$, which keep i fixed. □

Next we check how d and $\wedge$ fit together, so we search for some kind of Leibniz-rule.

8.3.5 Lemma. d as graded derivation.
d is a graded derivation, i.e.

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{pq}\omega \wedge d\eta,$$

for every differentiable p-form ω and q-form η.

Proof. Obviously d is linear. By the generalized Leibniz rule

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \eta)'(x)(v) &= \omega'(x)(v) \wedge \eta(x) + \omega(x) \wedge \eta'(x)(v) \\ &= \omega'(x)(v) \wedge \eta(x) + (-1)^{pq}\eta'(x)(v) \wedge \omega(x) \\ &= \tfrac{(p+q)!}{p!q!} \operatorname{alt}\Big(\omega'(x)(v) \otimes \eta(x) + (-1)^{pq}\eta'(x)(v) \otimes \omega(x)\Big), \end{aligned}$$

since $(\omega,\eta)\mapsto\omega\wedge\eta$ is bi-linear and graded commutative.

$$\begin{aligned}
d(\omega\wedge\eta)(x) &= {}_{(p+q+1)}\ \operatorname{alt}(\widetilde{(\omega\wedge\eta)'(x)}) = {}_{(p+q+1)}\ \operatorname{alt}(\widetilde{(\omega\wedge\eta)'(x)}(.,\dots))\\
&= \tfrac{(p+q+1)(p+q)!}{p!q!}\operatorname{alt}\Big(\Big(\omega'(x)(.)\otimes\eta(x)+(-1)^{pq}\eta'(x)(.)\otimes\omega(x)\Big)(\dots)\Big)\\
&= \tfrac{(p+q+1)!}{p!q!}\operatorname{alt}\Big(\Big(\widetilde{\omega'(x)}\otimes\eta(x)+(-1)^{pq}\widetilde{\eta'(x)}\otimes\omega(x)\Big)(.,\dots)\Big)\\
&= \tfrac{(p+q+1)!}{p!q!}\operatorname{alt}\Big(\operatorname{alt}(\widetilde{\omega'(x)})\otimes\eta(x)+(-1)^{pq}\operatorname{alt}(\widetilde{\eta'(x)})\otimes\omega(x)\Big)\\
&= \tfrac{(p+q+1)!}{p!q!}\operatorname{alt}\Big(\tfrac{1}{p+1}\,d\omega(x)\otimes\eta(x)+(-1)^{pq}\tfrac{1}{q+1}\,d\eta(x)\otimes\omega(x)\Big)\\
&= d\omega(x)\wedge\eta(x)+(-1)^{pq}d\eta(x)\wedge\omega(x)\\
&= d\omega(x)\wedge\eta(x)+(-1)^{pq}(-1)^{(q+1)p}\omega(x)\wedge d\eta(x)\\
&= d\omega(x)\wedge\eta(x)+(-1)^{p}\omega(x)\wedge d\eta(x). \qquad \square
\end{aligned}$$

8.3.6 Lemma.
$d^2=0$, i.e. $d(d\omega)=0$ for all p-forms ω, which are C^2.

Proof. The idea behind this result and its proof is, that $w''(x)$ is symmetric and $d^2\omega$ is obtained from making $w''(x)$ skewsymmetric in all its entries.

$$\begin{aligned}
&\widetilde{(d\omega)'(x)}(u,v,w_1,\dots,w_p) =\\
&\qquad = (d\omega)'(x)(u)(v,w_1,\dots,w_p)\\
&\qquad = \big({}_{(p+1)}\ \operatorname{alt}\circ\widetilde{(\quad)}\circ\omega'\big)'(x)(u)(v,w_1,\dots,w_p)\\
&\qquad = {}_{(p+1)}\ \Big(\operatorname{alt}\circ\widetilde{(\quad)}\Big)\Big((\omega')'(x)(u)\Big)(v,w_1,\dots,w_p)\\
&\qquad = {}_{(p+1)}\ \operatorname{alt}\big(\widetilde{(\omega')'(x)}(u)\big)(v,w_1,\dots,w_p)\\
&\qquad = {}_{(p+1)}\ \operatorname{alt}_{v,w_1,\dots,w_p}\big(\omega''(x)(u,v)(w_1,\dots,w_p)\big),\\
&\qquad \text{since}\quad \big(\widetilde{(\omega')'(x)}(u)\big)(v,w_1,\dots,w_p) =\\
&\qquad\qquad = (\omega')'(x)(u)(v)(w_1,\dots,w_p)\\
&\qquad\qquad = \omega''(x)(u,v)(w_1,\dots,w_p).
\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}
&(d^2\omega)(x)(u,v,w_1,\dots,w_p) =\\
&\qquad = {}_{(p+2)}\ \operatorname{alt}_{u,v,w_1,\dots,w_p}(\widetilde{(d\omega)'(x)}(u,v,w_1,\dots,w_p))\\
&\qquad = {}_{(p+2)}\ \operatorname{alt}_{u,v,w_1,\dots,w_p}({}_{(p+1)}\ \operatorname{alt}_{v,w_1,\dots,w_p}(\omega''(x)(u,v)(w_1,\dots,w_p)))\\
&\qquad = {}_{(p+2)(p+1)}\ \operatorname{alt}_{u,v,w_1,\dots,w_p}(\omega''(x)(u,v)(w_1,\dots,w_p)),
\end{aligned}$$

which is zero by the property of the kernel, since $\omega''(x)(u,v)$ is symmetric. $\square$

8.3.7 The coordinate expression for dw.

For $\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1,\ldots,i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ we can calculate $d\omega$ as follows:

$$
\begin{aligned}
d(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) &= d^2 x^{i_1} \wedge (dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) + dx^{i_1} \wedge d(dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = 0 \\
d\omega = d\Big(\sum_{i_1<\ldots<i_p} & \omega_{i_1,\ldots,i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \Big) \\
&= \sum_{i_1<\ldots<i_p} d(\omega_{i_1,\ldots,i_p}) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \\
&\quad + \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1,\ldots,i_p} d(dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}) \\
&= \sum_{i_1<\ldots<i_p} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x^k} \cdot dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} + 0 \\
&= \sum_{j_0<\ldots<j_p} \sum_{l=0}^{p} (-1)^l \frac{\partial \omega_{j_0,\ldots,\widehat{j_l},\ldots,j_p}}{\partial x^{j_l}} \, dx^{j_0} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p},
\end{aligned}
$$

where $\{i_1,\ldots,i_p,k\} = \{j_0 < \ldots < i_p\}$ and $j_l = k$, i.e. $j_0 = i_1, \ldots, j_{l-1} = i_l, j_l = k, j_{k+1} = i_{l+1}, \ldots, j_p = i_p$.

Second proof without using that $d^2 = 0$ and that d is a graded derivation: Since the $(i_1,\ldots,i_p)$-th component of the derivative of ω at x is just the derivative of the $(i_1,\ldots,i_p)$-th component of ω at x we have:

$$
\begin{aligned}
& d\Big(\omega_{i_1,\ldots,i_p} \cdot dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\Big)(x)(v_0,\ldots,v_p) = \\
&= {\scriptstyle (p+1)}\ \mathrm{alt}_{v_0,\ldots,v_p} \Big(\omega_{i_1,\ldots,i_p} \cdot dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\Big)'(x)(v_0)(v_1,\ldots,v_p) \\
&= {\scriptstyle (p+1)}\ \mathrm{alt}_{v_0,\ldots,v_p} (\omega_{i_1,\ldots,i_p})'(x)(v_0) \cdot (dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p})(v_1,\ldots,v_p) \\
&= {\scriptstyle (p+1)}\ \mathrm{alt}\Bigg(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x^i}(x)(dx^i \otimes dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p})\Bigg)(v_0; v_1,\ldots,v_p) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x^i}(x)(dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p})(v_0; v_1,\ldots,v_p)
\end{aligned}
$$

Now the rest follows as above.

This coordinate-formula for $d\omega$ can be utilized to give a second proof of the properties of d, see [19, 1985, Satz 212.2 und 212.3].

Since we have to use substition for integrals, we need a formula how differential forms transform:

8.3.8 Definition. Pullback of tensors.
Let $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \to \mathbb{R}^m$ be a C^1-map, and let Φ be a p-tensor field on $f(X)$, then the pullback $f^*(\Phi)$ of Φ along f is the p-tensor field defined by $f^*(\Phi)(x)(v_1,\ldots,v_p) := \Phi(f(x))(f'(x) \cdot v_1, \ldots, f'(x) \cdot v_p)$. If Φ is a p-form then so is $f^*(\Phi)$. Note, that in [19] $f^*(\Phi)$ is denoted in a non-standard way by Φ_f.

Compatibility with products is given by:

8.3.9 Lemma.
f^* is an algebra-homomorphism, i.e. f^* is linear and

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta \quad \textit{resp.} \quad f^*(\Phi \otimes \Psi) = f^*\Phi \otimes f^*\Psi,$$

moreover $f^*(\mathrm{alt} \circ \Phi) = \mathrm{alt} \circ f^*(\Phi)$.

Proof. Obviously f^* is linear.

$f^*(\omega \otimes \eta) = f^*\omega \otimes f^*\eta$, since

$$\begin{aligned}
&f^*(\omega \otimes \eta)(x)(v_1, \ldots, v_p; w_1, \ldots, w_q) = \\
&\quad = (\omega \otimes \eta)(fx)(f'x \cdot v_1, \ldots, f'x \cdot v_p; f'x \cdot w_1, \ldots, f'x \cdot w_q) \\
&\quad = (\omega(fx) \otimes \eta(fx))(f'x \cdot v_1, \ldots, f'x \cdot v_p; f'x \cdot w_1, \ldots, f'x \cdot w_q) \\
&\quad = \omega(fx)(f'x \cdot v_1, \ldots, f'x \cdot v_p) \cdot \eta(fx)(f'x \cdot w_1, \ldots, f'x \cdot w_q) \\
&\quad = f^*(\omega)(x)(v_1, \ldots, v_p) \cdot f^*(\eta)(x)(w_1, \ldots, w_q) \\
&\quad = (f^*(\omega)(x) \otimes f^*(\eta)(x))(v_1, \ldots, v_p; w_1, \ldots, w_q) \\
&\quad = (f^*(\omega) \otimes f^*(\eta))(x)(v_1, \ldots, v_p; w_1, \ldots, w_q)
\end{aligned}$$

$f^*(\operatorname{alt} \circ \Phi) = \operatorname{alt} \circ f^*(\Phi)$, since

$$\begin{aligned}
&(f^*(\operatorname{alt} \circ \Phi))(x)(v_1, \ldots, v_p) = (\operatorname{alt} \circ \Phi))(fx)(f'x \cdot v_1, \ldots, f'x \cdot v_p) \\
&\quad = \operatorname{alt}(\Phi(fx))(f'x \cdot v_1, \ldots, f'x \cdot v_p) \\
&\quad = \tfrac{1}{p!} \sum_\sigma \operatorname{sgn} \sigma (\Phi(fx) \circ \sigma^*)(f'x \cdot v_1, \ldots, f'x \cdot v_p) \\
&\quad = \tfrac{1}{p!} \sum_\sigma \operatorname{sgn} \sigma (f^*(\Phi)(x))(\sigma^*(v_1, \ldots, v_p)) \\
&\quad = \operatorname{alt}(f^*(\Phi)(x)(v_1, \ldots, v_p)).
\end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}
&f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\tfrac{(p+q)!}{p!q!} \operatorname{alt} \circ (\omega \otimes \eta)) \\
&\quad = \tfrac{(p+q)!}{p!q!} \operatorname{alt} \circ f^*(\omega \otimes \eta) \\
&\quad = \tfrac{(p+q)!}{p!q!} \operatorname{alt} \circ (f^*\omega \otimes f^*\eta) \\
&\quad = f^*\omega \wedge f^*\eta. \qquad \square
\end{aligned}$$

Compatibility with the exterior derivative is given by:

8.3.10 Lemma.
d and f^* commute, i.e. $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$ for every C^2-function f. Furthermore $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$.

Proof. Let first $\omega = g$ be a 0-form, then

$$\begin{aligned}
f^*(dg)(x)(v) &= dg(f(x))(f'(x)v) = g'(f(x))(f'(x)v) \\
&= (g \circ f)'(x)(v) = d(g \circ f)(x)(v).
\end{aligned}$$

The general case is proved as follows:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{p+1}\Big(d(f^*\omega) - f^*(d\omega)\Big) = \operatorname{alt} \circ \widetilde{(_)} \circ (f^*\omega)' - \underbrace{f^*(\operatorname{alt} \circ \widetilde{(_)} \circ \omega')}_{\operatorname{alt} \circ f^*(\widetilde{(_)} \circ \omega')} \\
&\quad = \operatorname{alt} \circ \Big(\widetilde{(_)} \circ (f^*\omega)' - f^*(\widetilde{(_)} \circ \omega')\Big) = 0,
\end{aligned}$$

since

$$
\begin{aligned}
\Big(\widetilde{(\_)} \circ (f^*\omega)' - f^*(\widetilde{(\_)} \circ \omega')\Big)(x)(v_0,\dots,v_p) = \\
&= (\widetilde{f^*\omega)'}(x)(v_0,\dots,v_p) - f^*(\widetilde{(\_)} \circ \omega')(x)(v_0,\dots,v_p) \\
&= (f^*\omega)'(x)(v_0)(v_1,\dots,v_p) - (\widetilde{(\_)} \circ \omega')(f(x))(f'(x)v_0,\dots,f'(x)v_p) \\
&= \mathrm{ev}_{v_1,\dots,v_p}\Big((f^*\omega)'(x)(v_0)\Big) - \widetilde{\omega'(f(x))}(f'(x)v_0,\dots,f'(x)v_p) \\
&= \Big(\mathrm{ev}_{v_1,\dots,v_p} \circ f^*\omega\Big)'(x)(v_0) - \omega'(f(x))(f'(x)v_0)(f'(x)v_1,\dots,f'(x)v_p) \\
&= \Big(\omega(f(\_))(f'(\_)v_1,\dots,f'(\_)v_p)\Big)'(x)(v_0) \\
&\quad - \omega'(f(x))(f'(x)v_0)(f'(x)v_1,\dots,f'(x)v_p) \\
&= (\omega\circ f)'(x)(v_0)(f'(x)v_1,\dots,f'(x)v_p) \\
&\quad + \sum_{i=1}^p \omega(f(x))(f'(x))(f'(x)v_1,\dots,(f'(\_))'(x)(v_0)(v_i),\dots,f'(x)v_p) \\
&\quad - (\omega\circ f)'(x)(v_0)(f'(x)v_1,\dots,f'(x)v_p) \\
&= \sum_{i=1}^p \omega(f(x))(f'(x))(f'(x)v_1,\dots,f''(x)(v_0,v_i),\dots,f'(x)v_p),
\end{aligned}
$$

where the i-th summand is symmetric in (v_0, v_i) and hence lies in the kernel of alt.

Remains to show that $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$. But this follows immediately from the chainrule $(g\circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$. □

8.3.11 Coordinate expression for $f^*(\omega)$.
Let $\omega := \sum_{i_1<\dots<i_p} \omega_{i_1,\dots,i_p} dy^{i_1}\wedge\dots\wedge dy^{i_p}$. Using the previous two lemmas we may calculate as follows:

$$
\begin{aligned}
f^*(\omega) &= f^*\Big(\sum_{i_1<\dots<i_p} \omega_{i_1,\dots,i_p}\, dy^{i_1}\wedge\dots\wedge dy^{i_p}\Big) \\
&= \sum_{i_1<\dots<i_p} f^*(\omega_{i_1,\dots,i_p})\, f^*(dy^{i_1})\wedge\dots\wedge f^*(dy^{i_p}).
\end{aligned}
$$

Using that for a function $g : f(X) \to \mathbb{R}$ we have $f^*(g) = g \circ f$, and if g is C^1 then $f^*(dg) = d(g\circ f)$ we finally obtain:

$$
f^*(\omega) = \sum_{i_1<\dots<i_p} (\omega_{i_1,\dots,i_p} \circ f)\, df^{i_1}\wedge\dots\wedge df^{i_p}.
$$

This deduction does not make use of the full strength of lemma (8.3.10), one only needs the formula $f^*(dy^i) = df^i$. This coordinate formula for $f^*(\omega)$ can be utilized to give a second proof for (8.3.10), see [19, 1985, Satz 212.5 + 212.6].

8.3.12 Corollary.
Let $f = (f^1,\dots,f^m) : \mathbb{R}^m \supseteq X \to \mathbb{R}^m$ be a C^1-mapping. Then we have

$$
f^*(dy^1\wedge\dots\wedge dy^m) = df^1\wedge\dots\wedge df^m = \det\Big(\frac{\partial(f^1,\dots,f^m)}{\partial(x^1,\dots,x^m)}\Big)\, dx^1\wedge\dots\wedge dx^m
$$

More generally, for any C^1-function $f : \mathbb{R}^m \supseteq X \to \mathbb{R}^n$ and arbitrary m-form $\omega = \sum_{i_1<\dots<i_m} \omega_{i_1,\dots,i_m}\, dy^{i_1}\wedge \dots\wedge dy^{i_m}$ we have

$$
f^*(\omega) = \Big(\sum_{i_1<\dots<i_n} f^*(\omega_{i_1,\dots,i_n}) \det\Big(\frac{\partial(f^{i_1},\dots,f^{i_m})}{\partial(x^1,\dots,x^m)}\Big)\Big)\, dx^1\wedge\dots\wedge dx^m
$$

Proof. The first equation follows immediately from (8.2.13) together with $df^i = \sum_j \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j$. The second equation is a consequence of

$$f^*(dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_m}) = \det\left(\frac{\partial(f^{i_1}, \ldots, f^{i_m})}{\partial(x^1, \ldots, x^m)}\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m,$$

which in turn follows from the first equation. $\square$

8.4 Integration von Differentialformen

Definition.
Für eine stetige r-Form $\omega = \omega_{1,\ldots,r}\, du^1 \wedge \cdots \wedge du^r$ auf einer kompakten J-meßbaren Menge $K \subseteq \mathbb{R}^r$ definieren wir

$$\int_K \omega = \int_K \omega_{1,\ldots,r}\, du^1 \wedge \cdots \wedge du^r := \int_K \omega_{1,\ldots,r}\, d(u^1, \ldots, u^r).$$

Unter einer parametrisierten r-Fläche verstehen wir eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^p$ zusammen mit einer surjektiven C^1-Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^r \supseteq K \to S$ auf einer kompakten J-meßbaren Menge K. Für eine stetige r-Form ω auf S definieren wir

$$\int_\Phi \omega := \int_K \Phi^*(\omega).$$

Falls $\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \omega_{i_1,\ldots,i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$ ist, so ist nach (8.3.12)

$$\begin{aligned}\int_\Phi \omega &= \int_\Phi \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \omega_{i_1,\ldots,i_r}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \int_K \omega(\Phi(u))\ \det \frac{\partial(\Phi^{i_1}, \ldots, \Phi^{i_r})}{\partial(u^1, \ldots, u^r)}\ du^1 \wedge \cdots \wedge du^r = \int_K \Phi^*(\omega).\end{aligned}$$

Diese Definition stimmt für $r = 1$ mit jener aus (6.5.6) von Kurvenintegrale von 1-Formen überein. In der Tat für $r = 1$ und $K := [a, b]$ ist $\Phi : K \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve und $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$ eine 1-Form auf $\Phi(K)$. Nach (8.3.9) und (8.3.10) ist

$$\Phi^*(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i \circ \Phi \cdot d\Phi^i$$

und somit

$$\int_\Phi \omega = \int_K \Phi^*(\omega) = \int_K \sum_{i=1}^n \omega_i \circ \Phi\ d\Phi^i = \int_a^b \sum_{i=1}^n \omega_i(\Phi(t))\, (\Phi^i)'(t)\, dt,$$

die Definition aus (6.5.6) des Kurvenintegrals.

Für $r = 2$ und $n = 3$ stimmt die Definition mit jener für 2-Formen aus (8.1.5) überein, denn dann ist $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3) : K \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ und $\omega = p\ dy \wedge dz + q\ dz \wedge dx + r\ dx \wedge dy$ eine allgemeine 2-Form. Nach (8.3.12) ist

$$\Phi^*(\omega) = \Big(p \circ \Phi\ \det(\tfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}) + q \circ \Phi\ \det(\tfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}) + r \circ \Phi\ \det(\tfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})\Big)\ du \wedge dv,$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_\Phi \omega &= \int_K \Phi^*(\omega) \\ &= \int_K \Big(p \circ \Phi\ \det(\tfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}) + q \circ \Phi\ \det(\tfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}) + r \circ \Phi\ \det, (\tfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})\Big)\ d(u, v)\end{aligned}$$

die Definition aus (6.5.6) des Integrals des Vektorfelds $f = (p, q, r)$ über eine Fläche im $\mathbb{R}^3$.

8.4.1 Proposition.
Es sei $\Phi : \mathbb{R}^p \supseteq K \to S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^1-Parametrisierung der r-Fläche S und $g : \mathbb{R}^p \supseteq K' \to K$ eine surjektive Substitutionsfunktion. Dann ist für jede stetige p-Form ω auf S:

$$\operatorname{sgn}(\det(g')) \cdot \int_\Phi \omega = \int_{\Phi\circ g} \omega.$$

Also können wir definieren: $\int_S \omega := \int_\Phi \omega$.

Beachte, daß $\operatorname{sgn}(\det(g'))$ für eine Substitionsfunktion als konstant vorausgesetzt werden kann.

Beweis.

$$\begin{aligned}\int_{\Phi\circ g} \omega &= \int_{K'} (\Phi\circ g)^*(\omega) = \int_{K'} g^*(\underbrace{\Phi^*(\omega)}_{f\,dy^1\wedge\dots\wedge dy^p})\\ &= \int_{K'} f\circ g \det \frac{\partial(g^1,\dots,g^p)}{\partial(x^1,\dots,x^p)}\, dx^1\wedge\dots\wedge dx^p\\ &= \operatorname{sgn}(\det(g')) \int_{K'} f\circ g\,|\det g'| = \operatorname{sgn}(\det g') \int_{g(K')} f\\ &= \int_{g(K')} f\,dy^1\wedge\dots\wedge dy^p = \int_K \Phi^*(\omega),\end{aligned}$$

wegen der Transformationsformel und $g^*(dy^1\wedge\dots\wedge dy^r) = \det g'(x)\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^r$ nach (8.3.12). $\square$

8.4.2 Transformationssatz.
Es sei $\Phi : \mathbb{R}^r \supseteq K \to S$ eine C^1-Parametrisierung der r-Fläche S und $T : S \to \mathbb{R}^p$ C^1 und ω eine stetige p-Form auf $T(S)$. Dann ist

$$\int_{T\circ\Phi} \omega = \int_\Phi T^*(\omega).$$

Beweis.

$$\int_{T\circ\Phi} \omega = \int_K (T\circ\Phi)^*(\omega) = \int_K \Phi^*(T^*(\omega)) = \int_\Phi T^*(\omega) \quad \square$$

8.5 Ketten

Wir wenden uns nun der Frage zu, welche Integrationsbereiche genügend vernünftig handhabbaren Rand haben. Es gäbe da durchaus verschiedene brauchbare Ansätze (berandete Mannigfaltigkeiten, Quader, ...), wir entscheiden uns für den Folgenden.

Definition. Simplex.
Der von $\{a_0,\dots,a_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ erzeugte p-Simplex (oder Hyper-Detraeder) ist die konvexe Hülle

$$\langle a_0,\dots,a_p\rangle := \Big\{\sum_{i=0}^p t^i a_i : \sum_i t^i = 1, t^0 \geq 0,\dots,t^p \geq 0\Big\}.$$

Beachte, daß $\sum_{i=0}^p t^i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i - a_0$ ein Punkt in dem affinen p-dimensionalen Teilraum durch a_0 mit Richtungsvektoren $a_1 - a_0,\dots,a_p - a_0$ ist. Falls also $\{a_i - a_0 : i = 1,\dots,p\}$ linear unabhängig ist (d.h. $\langle a_0,\dots,a_p\rangle$ nicht in einer affinen Ebene der Dimension $< p$ liegt), so sind die t^i eindeutig bestimmt.
Der standard r-Simplex sei $\Delta_r := \langle e_0,\dots,e_r\rangle \subseteq \mathbb{R}^{r+1}$.
Für jeden r-Simplex $\langle a_0,\dots,a_r\rangle$ existiert genau eine lineare surjektive Abbildung $\mathbb{R}^{r+1} \supseteq \Delta_r \to$

$\langle a_0, \dots, a_r\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$, mit $e_i \mapsto a_i$ für $0 \le i \le r$. Diese ist durch $\sum_i t^i e_i \mapsto \sum_i t^i a_i$ gegeben. Es genügt also den Standard-Simplex zu behandeln.

Unter der i-ten SEITE von $\langle a_0, \dots, a_p\rangle$ verstehen wir den $p-1$-Simplex

$$\langle a_0, \dots, a_{i-1}, \widehat{a_i}, a_{i+1}, \dots, a_p\rangle.$$

Für die Integration benötigen wir eine Orientierung auf den Simplexen, d.h. eine fixe Auswahl der Reihenfolge der Ecken. Zwei Anordnungen sollen dabei gleich-orientiert heißen, wenn sie durch eine gerade Permutation (d.h. mit positives Signum) auseinander hervorgehen.

Unter einem SINGULÄREN p-SIMPLEX in einer Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ verstehen wir eine C^2-Abbildung $\varphi : \Delta_p \to X$. Die Eigenschaft C^2 ist deshalb vorausgesetzt, damit $f^*(\omega)$ C^1 ist für jede C^1-Form ω.

Die i-te Seite (d.h. der i-ten Ecke gegenüberliegende Seite) des standard p-Simplex ist der $p-1$-Simplex $\langle e_1, \dots, e_{i-1}, \widehat{e_i}, e_{i+1}, \dots, e_p\rangle$. Sie kann mittels

$$\begin{aligned}
\varepsilon^i : \Delta_{p-1} = \langle e_0, \dots, e_{p-1}\rangle \to \langle e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_p\rangle \subseteq \langle e_0, \dots, e_p\rangle = \Delta_p\\
e_j \mapsto \begin{cases} e_j & \text{für } j < i\\ e_{j+1} & \text{andernfalls}\end{cases}\\
(u^0, \dots, u^{p-1}) \mapsto (u^0, \dots, u^{i-1}, 0, u^i, \dots, u^{p-1})
\end{aligned}$$

durch den standard $p-1$-Simplex parametrisiert werden.
Entsprechend ist die i-te SEITE eines singulären p-Simplex $\varphi : \Delta_p \to X$ der singuläre $p-1$-Simplex $\varphi \circ \varepsilon^i : \Delta_{p-1} \to X$.

Der Rand eines singulären Simplex ist also eine Vereinigung von singulären Simplexen, die wir allerdings noch richtig orientieren sollte, denn z.B. besteht der Rand von $\langle a_0, a_1, a_2\rangle$ aus: $\langle a_1, a_2\rangle$, $\langle a_0, a_2\rangle$ (falsch orientiert) und $\langle a_0, a_1\rangle$. Für den Rand benötigen wir den Begriff der singulären Kette: Mit $C_p(X)$ bezeichnen wir die freie Abelsche Gruppe mit der Menge $\mathcal{S}_p$ aller singulären p-Simplexen als Erzeuger, d.h. die Menge aller formalen endlichen Linearkombination $\sum_i \lambda^i \cdot \varphi_i$ mit Koeffizienten $\lambda^i \in \mathbb{Z}$ oder genauer aller Abbildungen $\lambda : \mathcal{S}_p \to \mathbb{Z}$ die fast überall den Wert 0 haben (so eine Abbildung schreiben wir auch als $\sum_{\varphi \in \mathcal{S}_p} \lambda(\varphi) \cdot \varphi$, oder, wenn $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} := \{\varphi : \lambda(\varphi) \ne 0\}$ und $\lambda^i := \lambda(\varphi_i)$, auch als $\sum_i \lambda^i\ \varphi_i$). Also ist

$$\begin{aligned}
C_p(X) &:= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda^i \varphi_i : n \in \mathbb{N}, \lambda^i \in \mathbb{Z}, \varphi_i \text{ ist singulärer } p\text{-Simplex}\right\}\\
&= \Big\{\lambda : \mathcal{S}_p \to \mathbb{Z}, \lambda(\varphi) = 0 \text{ bis auf endlich viele } \varphi \in \mathcal{S}_p\Big\}.
\end{aligned}$$

Die Elemente von $C_p(X)$ heißen SINGULÄRE p-KETTEN. Solche Ketten können wir addieren, mit Zahlen aus $\mathbb{Z}$ multiplizieren, und somit auch subtrahieren. Dem entspricht gerade die formale Addition, skalar-Multiplikation und Subtraktion der formalen endlichen Summen.

Für einen singulären p-Simplex $\varphi : \Delta_p \to X$ ist der Rand einer singulären Kette als

$$\partial\varphi := \sum_{i=0}^p (-1)^i (\varphi \circ \varepsilon^i) \in C_{p-1}(X)$$

definiert, und für eine singuläre p-Kette $\sum_j \lambda^j \varphi_j$ als

$$\partial\Big(\sum_j \lambda^j \varphi_j\Big) = \sum_j \lambda^j \partial(\varphi_j) \in C_{p-1}(X).$$

Analog zu $d^2\omega = 0$ für alle p-Formen ω gilt nur das folgende in dieser Vorlesung nicht benötigte

Lemma.
$\partial^2\varphi = 0$ für alle p-Ketten φ.

Beweis. O.B.d.A. sei $\varphi : \Delta_p \to X$ ein singulärer Simplex. Dann ist

$$\begin{aligned}
\partial^2\varphi &= \partial\Big(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\varphi\circ\varepsilon^i\Big) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j\varphi\circ\varepsilon^i\circ\varepsilon^j \\
&= \sum_{i=0}^{p}\sum_{0\le j<i}(-1)^{i+j}\varphi\circ\varepsilon^i\circ\varepsilon^j + \sum_{i=0}^{p}\sum_{i\le j<p}(-1)^{i+j}\varphi\circ\varepsilon^i\circ\varepsilon^j \\
&= \sum_{i=0}^{p}\sum_{0\le j<i}(-1)^{i+j}\varphi\circ\varepsilon^i\circ\varepsilon^j + \sum_{i=0}^{p}\sum_{i<k=j+1\le p}(-1)^{i+k-1}\varphi\circ\varepsilon^i\circ\varepsilon^{k-1} \\
&= \sum_{0\le j<i\le p}(-1)^{i+j}\varphi\circ\varepsilon^i\circ\varepsilon^j - \sum_{0\le j<i\le p}(-1)^{j+i}\varphi\circ\varepsilon^j\circ\varepsilon^{i-1} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

da $\varepsilon^i\circ\varepsilon^j = \varepsilon^j\circ\varepsilon^{i-1}$ für $i>j$. In der Tat

$$\begin{tikzcd}
\langle e_0,\dots,e_{p-2}\rangle \arrow[r, "\cong", "\varepsilon^j"'] \arrow[d, "\varepsilon^{i-1}"', "\cong"] & \langle e_0,\dots,\widehat{e_j},\dots,e_{p-1}\rangle \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"] & \langle e_0,\dots,e_{p-1}\rangle \arrow[d, "\varepsilon^i"', "\cong"] \\
\langle e_0,\dots,\widehat{e_{i-1}},\dots,e_{p-1}\rangle \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, hook] & \langle e_0,\dots,\widehat{e_j},\dots,\widehat{e_i},\dots,e_p\rangle \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \langle e_0,\dots,\widehat{e_i},\dots,e_p\rangle \arrow[d, hook] \\
\langle e_0,\dots,e_{p-1}\rangle \arrow[r, "\cong", "\varepsilon^j"'] & \langle e_0,\dots,\widehat{e_j},\dots,e_p\rangle \arrow[r, hook] & \langle e_0,\dots,e_p\rangle
\end{tikzcd}$$

oder expliziter

$$\varepsilon^j(e_k) := \begin{cases} e_k & \text{für } k<j \\ e_{k+1} & \text{für } j\le k \end{cases}$$

$$\varepsilon^i(\varepsilon^j(e_k)) = \begin{cases} e_k & \text{für } k<j<i,\ \text{ i.e. } k+1\le j<i \\ e_{k+1} & \text{für } j\le k,\ k+1<i,\ \text{ i.e. } j<k+1<i \\ e_{k+2} & \text{für } j\le k,\ i\le k+1 \text{ i.e. } j<i\le k+1 \end{cases}$$

$$\varepsilon^{i-1}(e_k) := \begin{cases} e_k & \text{für } k<i-1 \\ e_{k+1} & \text{für } i-1\le k \end{cases}$$

$$\varepsilon^j(\varepsilon^{i-1}(e_k)) = \begin{cases} e_k & \text{für } k<j\le i-1,\ \text{ i.e. } k+1\le j<i \\ e_{k+1} & \text{für } j\le k<i-1,\ \text{ i.e. } j<k+1<i \\ e_{k+1} & \text{für } i-1\le k,\ k+1<j,\ \text{ i.e. } i\le k+1<j \\ e_{k+2} & \text{für } i-1\le k,\ j\le k+1,\ \text{ i.e. } j<i\le k+1 \end{cases} \qquad \square$$

8.6 Integration über Ketten

Wir wollen über singuläre p-Ketten integrieren, und dafür benötigen wir Parametrisierungen der Simplexen als p-Flächen. Es sei

$$\begin{aligned}
\Phi_p : \mathbb{R}^p \supseteq \langle 0, e_1,\dots,e_p\rangle &\xrightarrow{\cong} \langle e_0,\dots,e_p\rangle \subseteq \mathbb{R}^{p+1} \\
(u^1,\dots,u^p) &\mapsto (1-\sum_i u^i, u^1,\dots,u^p)
\end{aligned}$$

die standard-Parametrisierung von Δ_p, d.h. $\Phi_p(0) := e_0$ und $\Phi_p(e_i) := e_i$. Der Parameterbereich ist dabei $K_p := \langle 0, e_1, \dots, e_p\rangle \subseteq \mathbb{R}^p$.

Für eine stetige p-Form ω auf einem singulären p-Simplex $\varphi : \Delta_p \to X$ ist dann

$$\int_\varphi \omega := \int_{\varphi\circ\Phi_p} \omega = \int_{K_p} (\varphi\circ\Phi_p)^*(\omega),$$

und für eine singuläre p-Kette $\sum_i \lambda^i \varphi_i$ in X und eine stetige p-Form auf X ist

$$\int_{\sum_i \lambda^i\varphi_i} \omega := \sum_i \lambda^i \int_{\varphi_i} \omega.$$

8.6.1 Proposition.
Es sei ω eine stetige p-Form auf einem p-Simplex $\langle a_0, \dots, a_p\rangle$ und τ eine Permutation von $\{0, \dots, p\}$. Dann ist

$$\int_{\langle a_{\tau(0)},\dots,a_{\tau(p)}\rangle} \omega = \operatorname{sgn}(\tau) \int_{\langle a_0,\dots,a_p\rangle} \omega.$$

Beweis. Es sei $\varphi : \Delta_p := \langle e_0, \dots, e_p\rangle \to \langle a_0, \dots, a_p\rangle$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, die e_i auf a_i abbildet für alle i und $\varphi_\tau : \Delta_p \to \langle a_{\tau(0)}, \dots, a_{\tau(p)}\rangle$ jene, die e_i auf a_{τ_i} abbildet. Dann ist $\varphi_\tau = \varphi \circ (\tau^{-1})^*$, bzw. $\varphi = \varphi_\tau \circ \tau^*$, wobei $\tau^* : \mathbb{R}^{p+1} \to \mathbb{R}^{p+1}$ jene lineare Abbildung, welche die Koordinaten entsprechend τ vertauscht, d.h. $\tau^*(x^1, \dots, x^p) := (x^{\tau(1)}, \dots, x^{\tau(p)})$ bzw. $\tau(e_{\tau(i)}) := e_i$ erfüllt. Somit ist

$$\int_{\langle a_0,\dots,a_p\rangle} \omega := \int_{\Delta_p} \varphi^*\omega = \int_{\Delta_p} (\tau^*)^*\varphi_\tau^*\omega$$
$$\int_{\langle a_{\tau(0)},\dots,a_{\tau(p)}\rangle} \omega := \int_{\Delta_p} \varphi_\tau^*\omega.$$

Um die Integrale auszurechnen, müssen wir die Integranden mittels Φ_p auf K_p zurückziehen. Sei dazu $\tilde\tau^*$ die eindeutig bestimmte affine Abbildung, die die Ecken von K_p entsprechend vertauscht, d.h. folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
K_p \arrow[r, "\Phi_p", "\cong"'] \arrow[d, "\tilde\tau^*"', "\cong"] & \Delta_p \arrow[d, "\tau^*"', "\cong"] \\
K_p \arrow[r, "\Phi_p", "\cong"'] & \Delta_p
\end{tikzcd}$$

Dann ist

$$\int_{\langle a_0,\dots,a_p\rangle} \omega := \int_{\Delta_p} (\tau^*)^*\varphi_\tau^*\omega = \int_{K_p} \Phi^*(\tau^*)^*\varphi_\tau^*\omega = \int_{K_p} (\tilde\tau^*)^*\Phi^*\varphi_\tau^*\omega$$
$$\int_{\langle a_{\tau(0)},\dots,a_{\tau(p)}\rangle} \omega := \int_{\Delta_p} \varphi_\tau^*\omega = \int_{K_p} \Phi^*\varphi_\tau^*\omega.$$

Es ist $\Phi^*\varphi_\tau^*\omega = f\, du^1\wedge\dots\wedge du^p$ mit einer Funktion f, und $(\tilde\tau^*)^*(\Phi^*\varphi_\tau^*\omega) = f\circ(\tilde\tau^*)\, \det(\tilde\tau^*)'\, du^1\wedge\dots\wedge du^p$ nach (8.3.12). Es genügt wegen der Substitutionsformel (7.4.7) also zu zeigen, daß die Determinante des linearen Anteils von $\tilde\tau^*$ gerade $\operatorname{sgn}(\tau)$ ist.

Falls τ eine Vertauschung von $\{1, \dots, p\}$ ist, die 0 fixhält, so ist $\tilde\tau^*$ die lineare Abbildung des $\mathbb{R}^p$, welche die entsprechenden Koordinaten vertauscht

$$\begin{tikzcd}
K_p = \langle 0, e_{\tau(1)}, \dots, e_{\tau(p)}\rangle \arrow[r, "\Phi_p"] \arrow[d, "\tilde\tau^*"'] & \langle 0, e_{\tau(1)}, \dots, e_{\tau(p)}\rangle = \Delta_p \arrow[d, "\tau^*"'] \\
K_p = \langle 0, e_1, \dots, e_p\rangle \arrow[r, "\Phi_p"] & \langle e_0, e_1, \dots, e_p\rangle = \Delta_p
\end{tikzcd}$$

Diese hat somit Determinante $\operatorname{sgn}(\tau)$. In der Tat, $\tilde\tau^*(e_{\tau(i)}) = e_i$, also steht in der $\tau(i)$-ten Spalte der Matrixdarstellung von $\tilde\tau^*$ der i-te Einheitsvektor, d.h. die Spalten von $\tilde\tau^*$ sind jene der Einheitsmatix aber mit τ vertauscht und somit ist $\det(\tilde\tau^*) = \operatorname{sgn}(\tau)\,\det(\mathrm{id}) = \operatorname{sgn}(\tau)$.

Jede andere Permutation können wir als Zusammensetzung von Transpositionen $(0,i)$ und solchen die 0 festhalten schreiben. Weiters ist $(0,i) = (0,1)(1,i)(0,1)$, also genügt es $\tau = (0,1)$ zu betrachten. Dann vertauscht $\tilde\tau^*$ gerade die Ecke 0 mit e_1 und hält die anderen fix.

$$\begin{tikzcd}
K_p = \langle 0, e_1, e_2, \dots, e_p\rangle \arrow[r, "\Phi_p"] \arrow[d, "\tilde\tau^*"'] & \langle e_0, e_1, e_2, \dots, e_p\rangle = \Delta_p \arrow[d, "\tau^*"'] \\
K_p = \langle e_1, 0, e_2, \dots, e_p\rangle \arrow[r, "\Phi_p"] & \langle e_1, e_0, e_2, \dots, e_p\rangle = \Delta_p
\end{tikzcd}$$

Der lineare Anteil $(\tilde\tau^*)' = \tilde\tau^* - \tau(0)$ ist also durch $e_1 \mapsto 0 - e_1$, $e_k \mapsto e_k - e_1$ gegeben, d.h. in Koordinaten $(u^1, \dots, u^k) \mapsto (-\sum_i u^i, u^2, \dots, u^k)$ mit Determinante

$$\det\begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = -1 = \operatorname{sgn}(\tau)$$

und es ist $\tilde\tau^*(u^1, \dots, u^p) = (1 - \sum_i u^i, u^2, \dots, u^p)$. □

8.7 Der Satz von Stokes über p-Ketten

Die Parametrisierung $\bar\varepsilon^i : K_{p-1} \to K_p$ der i-ten Seite von K_p ist durch folgendes Diagramm gegeben:

$$\begin{tikzcd}
K_p := \langle 0, e_1, \dots, e_p\rangle \arrow[r, "\Phi_p"] & \langle e_0, e_1, \dots, e_p\rangle =: \Delta_p \\
\langle 0, e_1, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_p\rangle \arrow[u, hook] & \langle e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_p\rangle \arrow[u, hook] \\
K_{p-1} := \langle 0, e_1, \dots, e_{p-1}\rangle \arrow[u, "\bar\varepsilon^j"] \arrow[r, "\Phi_{p-1}"] & \langle e_0, \dots, e_{p-1}\rangle =: \Delta_{p-1} \arrow[u, "\varepsilon^j"']
\end{tikzcd}$$

d.h. ε^0 ist die eindeutig bestimmte affine Abbildung mit

$$\bar\varepsilon^0 : \begin{cases} 0 \mapsto e_1 & \\ e_i \mapsto e_{i+1} & \text{für } 1 \le i < p, \end{cases}$$

und für $j > 0$ ist ε^j die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit

$$\bar\varepsilon^j : \begin{cases} 0 \mapsto 0 & \\ e_i \mapsto e_i & \text{für } 1 \le i < j \\ e_i \mapsto e_{i+1} & \text{für } p > i \ge j. \end{cases}$$

In Koordinaten bedeutet dies, daß die i-te Seite $\bar\varepsilon^j : K_{p-1} \to K_p$ des standard Parameterbereichs wie folgt definiert ist:

$$\bar\varepsilon^j(u^1, \dots, u^{p-1}) := \begin{cases} (1 - \sum_i u^i, u^1, \dots, u^{p-1}) & \text{für } j = 0 \qquad \text{(affin)} \\ (u^1, \dots, u^{j-1}, 0, u^j, \dots, u^{p-1}) & \text{für } j > 0 \qquad \text{(linear)} \end{cases}.$$

8.7.1 Lemma.
Es sei ω eine stetig differenzierbare $p-1$-Form auf K_p. Dann ist

$$\int_{K_p} d\omega = \int_{\partial K_p} \omega := \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \int_{\bar\varepsilon^j} \omega.$$

Beweis. Es sei $\omega = \omega_1\, du^2 \wedge \dots \wedge du^p$ eine stetig differenzierbare $p-1$-Form auf K_p. Dann ist

$$\begin{aligned}
d\omega &= \Big(\sum_i \frac{\partial \omega_1}{\partial u^i}\, du^i\Big) \wedge \dots \wedge du^p = \frac{\partial \omega_1}{\partial u^1}\, du^1 \wedge \dots \wedge du^r \\
\int_{K_p} d\omega &= \int_{K_p} \frac{\partial \omega_1}{\partial u^1}(u^1,\dots,u^p)\, d(u^1,\dots,u^p) \\
&= \int_{K_{p-1}} \int_0^{1-\sum_{j>1} u^j} \frac{\partial \omega_1}{\partial u^1}(u^1,\dots,u^p)\, du^1\, d(u^2,\dots,u^p) \\
&= \int_{K_{p-1}} \Big(\omega_1(1-\sum_{j>1} u^j, u^2,\dots,u^p) - \omega_1(0,u^2,\dots,u^p)\Big)\, d(u^2,\dots,u^p) \\
&= \int_{K_{p-1}} \Big(\omega_1(1-\sum_{j>0} v^j, v^1,\dots,v^{p-1}) - \omega_1(0,v^1,\dots,v^{p-1})\Big)\, d(v^1,\dots,v^{p-1}) \\
\int_{\partial K_p} \omega &= \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \int_{\bar\varepsilon^j} \omega = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \int_{K_{p-1}} (\varepsilon^j)^*(\omega) \\
&= \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \int_{K_{p-1}} \omega_1(\bar\varepsilon^j(v^1,\dots,v^{p-1}))\, \det \frac{\partial(u^2,\dots,u^p)}{\partial(v^1,\dots,v^{p-1})}\, d(v^1,\dots,v^{p-1}) \\
&= \int_{K_{p-1}} \omega_1(1-\sum_{i>0} v^i, v^1,\dots,v^{p-1})\, d(v^1,\dots,v^{p-1}) \\
&\quad - \int_{K_{p-1}} \omega_1(0,v^1,\dots,v^{p-1})\, d(v^1,\dots,v^{p-1}) + \sum_{j=2}^{r} 0,
\end{aligned}$$

Für $\omega = \omega_i\, du^1 \wedge \dots \wedge du^{i-1} \wedge du^{i+1} \wedge \dots \wedge du^p$ und die Permutation $\sigma = (1,2,\dots,i)$ die i an die 1-te Stelle verschiebt mit $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{i-1}$, ist

$$\begin{aligned}
(\sigma^*)^*(\omega) &= (\omega_i \circ \sigma^*)\, d(\sigma^*)^* u^1 \wedge \dots \wedge d(\sigma^*)^* u^{i-1} \wedge d(\sigma^*)^* u^{i+1} \wedge \dots \wedge d(\sigma^*)^* u^p \\
&= (\omega_i \circ \sigma^*)\, du^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge du^{\sigma(i-1)} \wedge du^{\sigma(i+1)} \wedge \dots \wedge du^{\sigma(p)} \\
&= (\omega_i \circ \sigma^*)\, du^2 \wedge \dots \wedge du^i \wedge du^{i+1} \wedge \dots \wedge du^p,
\end{aligned}$$

denn $(\sigma^*)^*(\mathrm{pr}^i) = \mathrm{pr}^i \circ \sigma^* = \mathrm{pr}^{\sigma(i)}$. Somit ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(\sigma) \int_{K_p} d\omega &\overset{(8.4.1)}{=} \int_{K_p} (\sigma^*)^*(d\omega) \overset{(8.3.10)}{=} \int_{K_p} d((\sigma^*)^*(\omega)) \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} \int_{\partial K_p} (\sigma^*)^*(\omega) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \int_{K_{p-1}} (\bar\varepsilon^j)^*(\sigma^*)^*(\omega) \\
&= \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \int_{K_{p-1}} (\bar\varepsilon^j)^*(\sigma^*)^*(\omega) \\
&= \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \int_{K_{p-1}} (\sigma_j^*)^*(\bar\varepsilon^{\sigma^{-1}(j)})^*(\omega)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \operatorname{sgn}(\sigma_j) \int_{K_{p-1}} (\bar\varepsilon^{\sigma^{-1}(j)})^*(\omega) \\
&= \sum_{j=0}^{r} (-1)^{\sigma^{-1}(j)} \operatorname{sgn}(\sigma) \int_{K_{p-1}} (\bar\varepsilon^{\sigma^{-1}(j)})^*(\omega) \\
&= \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \int_{\bar\varepsilon^l} \omega =: \operatorname{sgn}(\sigma) \int_{\partial K_p} \omega,
\end{aligned}
$$

dabei ist σ_j wie folgt definiert: Es bildet σ^* die j-te Ecke von K_p auf die $k := \sigma^{-1}(j)$-te Ecke ab, also induziert σ^* eine Permutation σ_j der Ecken von K_{p-1} vermöge

$$
\begin{tikzcd}
K_p \arrow[r, "\sigma^*", "\cong"'] & K_p \\
\langle 0, e_1, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_p\rangle \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sigma^*", "\cong"'] & \langle 0, e_1, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_p\rangle \arrow[u, hook] \\
K_{p-1} \arrow[u, "\varepsilon^j"] \arrow[r, "\sigma_j^*"] & K_{p-1} \arrow[u, "\varepsilon^k"']
\end{tikzcd}
$$

Für $j = 0$ ist $k = 0$ und $\sigma_0 = (0, \dots, i-1)$ mit $\operatorname{sgn}(\sigma_0) = (-1)^{i-1} = \operatorname{sgn}(\sigma)$, denn

$$
\begin{tikzcd}
\langle 0, e_1, e_2, \dots, e_i, e_{i+1}, \dots, e_p\rangle \arrow[r, "\sigma^*"] & \langle 0, e_i, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p\rangle \\
\langle e_1, e_2, \dots, e_i, e_{i+1}, \dots, e_p\rangle \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sigma^*"] & \langle e_i, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p\rangle \arrow[u, hook] \\
\langle 0, e_1, \dots, e_{i-1}, e_i, \dots, e_{p-1}\rangle \arrow[u, "\varepsilon^0"] \arrow[r, "\sigma_0^*"] & \langle e_{i-1}, 0, \dots, e_{i-2}, e_i, \dots, e_{p-1}\rangle \arrow[u, "\varepsilon^0"]
\end{tikzcd}
$$

Und für $j > 0$ und $k := \sigma^{-1}(j)$ ist $\sigma_j = (j, j+1, \dots, p)^{-1} \circ \sigma \circ (k, k+1, \dots, p)$, denn $\varepsilon^j : \mathbb{R}^{p-1} \to \mathbb{R}^p$ können wir als Einschränkung von $(j, j+1, \dots, p)^*$ auf $\mathbb{R}^{p-1} \subset \mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^p$ auffassen und analog für ε^k. In der Tat läßt ε^j gerade die j-te Ecke im Bild aus, und wenn wir den Definitionsbereich um eine Dimension mit $\mathbb{R} \cdot e_p$ erweitern, und gerade die Ecke e_p auf e_j abbilden, so ist diese lineare Abbildung von die Permutation $(j, j+1, \dots, p)^{-1}$ induziert. Also ist

$$
\begin{aligned}
\sigma^* \circ \varepsilon^j &= \sigma^* \circ ((j, j+1, \dots, p)^{-1})^*|_{\mathbb{R}^{p-1}} = ((j, j+1, \dots, p)^{-1} \circ \sigma)^*|_{\mathbb{R}^{p-1}} \\
&= (\sigma_j \circ (k, k+1, \dots, p)^{-1})^*|_{\mathbb{R}^{p-1}} = ((k, k+1, \dots, p)^{-1})^* \circ \sigma_j^* = \varepsilon^k \circ \sigma_j^*.
\end{aligned}
$$

Für das Vorzeichen erhalten wir somit $(-1)^{p-j} \operatorname{sgn}(\sigma_j) = \operatorname{sgn}(\sigma)\,(-1)^{p-k}$, d.h. $(-1)^{\sigma^{-1}(j)} \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^j \operatorname{sgn}(\sigma_j)$. □

8.7.2 Satz von Stokes für Ketten.
Es sei λ eine p-Kette in $X \subseteq \mathbb{R}^n$ welche C^2 ist, und ω eine $p-1$-Form auf X welche C^1 ist. Dann ist

$$\int_\lambda d\omega = \int_{\partial\lambda} \omega.$$

Beweis. Es ist $\lambda = \sum_i \lambda_i \, \varphi_i$ und $\partial\lambda = \sum_i \lambda_i \, d\varphi_i$. Wegen (8.7.1) ist

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_i} d\omega &:= \int_{K_p} (\varphi_i \circ \Phi_p)^* d\omega \overset{(8.3.10)}{=} \int_{\partial K_p} d(\varphi_i \circ \Phi_p)^* \omega \\
&\overset{(8.7.1)}{=} \int_{\partial K_p} (\varphi_i \circ \Phi_p)^* \omega := \sum_j (-1)^j \int_{K_{p-1}} (\bar\varepsilon^j)^* (\varphi_i \circ \Phi_p)^* \omega \\
&= \sum_j (-1)^j \int_{K_{p-1}} (\varphi_i \circ \Phi_p \circ \bar\varepsilon^j)^* \omega = \sum_j (-1)^j \int_{K_{p-1}} (\varphi_i \circ \varepsilon^j \circ \Phi_{p-1})^* \omega \\
&= \sum_j (-1)^j \int_{\varphi_i \circ \varepsilon^j} \omega := \int_{\partial\varphi_i} \omega.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\int_\lambda d\omega = \sum_i \lambda_i \int_{\varphi_i} d\omega = \sum_i \lambda_i \int_{\partial\varphi_i} \omega = \int_{\partial\lambda} \omega \quad \square$$

8.8 Spezialfälle des Satzes von Stokes

Im $\mathbb{R}^3$.
Die Formen können wie folgt beschrieben werden

$$\begin{array}{lcllcc}
\text{0-Formen} & = & \text{Fkt} & & & \\
\text{1-Formen} & \cong & \text{VF}, & \sum_i \xi_i dx^i & \leftarrow\!\shortmid & (\xi_i)_{i=1}^3 \\
\text{2-Formen} & \cong & \text{VF}, & \xi_1 \, dx^2 \wedge dx^3 + \xi_2 \, dx^3 \wedge dx^1 + \xi_3 \, dx^1 \wedge dx^2 & \leftarrow\!\shortmid & (\xi_i)_{i=1}^3 \\
\text{3-Formen} & \cong & \text{Fkt}, & f \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 & \leftarrow\!\shortmid & f
\end{array}$$

Das Hackprodukt sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{tikzcd}
\text{0-Formen} \times \text{k-Formen} \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, equal] & \text{k-Formen} \arrow[d, equal] \\
\text{Fkt} \times \begin{cases}\text{Fkt}\\ \text{VF}\end{cases} \arrow[r, "\cdot"] & \begin{cases}\text{Fkt}\\ \text{VF}\end{cases}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{1-Formen} \times \text{1-Formen} \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, equal] & \text{2-Formen} \arrow[d, equal] \\
\text{VF} \times \text{VF} \arrow[r, "\times"] & \text{VF}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{1-Formen} \times \text{2-Formen} \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, equal] & \text{3-Formen} \arrow[d, equal] \\
\text{VF} \times \text{VF} \arrow[r, "\langle _, _ \rangle"] & \text{Fkt}
\end{tikzcd}$$

Die äußere Ableitung ist

$$\begin{tikzcd}
\text{0-Formen} \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \text{1-Formen} \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \text{2-Formen} \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \text{3-Formen} \arrow[d, equal] \\
\text{Fkt} \arrow[r, "\nabla", "\text{grad}"'] & \text{VF} \arrow[r, "\nabla \times _", "\text{rot}"'] & \text{VF} \arrow[r, "\langle \nabla, _ \rangle", "\text{div}"'] & \text{Fkt}
\end{tikzcd}$$

Z.B. ist

$$\begin{aligned}
d\Big(\sum_i f_i\,dx^i\Big) &= \\
&= \sum_i \sum_j \tfrac{\partial f_i}{\partial x^j}\,dx^j \wedge dx^i \\
&= \Big(\tfrac{\partial f_3}{\partial x^2} - \tfrac{\partial f_2}{\partial x^3}\Big)\,dx^2 \wedge dx^3 + \Big(\tfrac{\partial f_1}{\partial x^3} - \tfrac{\partial f_3}{\partial x^1}\Big)\,dx^3 \wedge dx^1 + \Big(\tfrac{\partial f_2}{\partial x^1} - \tfrac{\partial f_1}{\partial x^2}\Big)\,dx^1 \wedge dx^2.
\end{aligned}$$

$p = 1, n = 1$:. Hauptsatz, (5.2.2).

$p = 1, n > 1$:. Kurvenintegrale, (6.5.5).

$p = 2, n = 2$:. Gauß im $\mathbb{R}^2$. Sei $f = (p, q)$ ein Vektorfeld auf einer singulären 2-Kette φ und ω die zugehörige 1-Form. Dann ist $d\omega$ die 2-Form zum Vektorfeld $\operatorname{div} f$, und somit

$$\int_{\partial\varphi} f := \int_{\partial\varphi} \langle f, \nu_{\partial\varphi}\rangle \operatorname{vol}_\varphi = \int_{\partial\varphi} \omega = \int_\varphi d\omega = \int_\varphi \operatorname{div} f.$$

Für das zu f normale Vektorfeld $G := -f^\perp = (q, -p)$ gilt

$$\int_{\partial\varphi} \langle G, \tau_{\partial\varphi}\rangle \operatorname{vol}_\varphi = \int_{\partial\varphi} \omega = \int_\varphi d\omega = \int_\varphi \operatorname{div} f = \int_\varphi \operatorname{rot} G.$$

$p = 2, n = 3$:. Stokes im $\mathbb{R}^3$. Sei $f = (p, q, r)$ ein Vektorfeld auf einer singulären 2-Kette φ und ω die zugehörige 1-Form. Dann ist $d\omega$ die 2-Form zum Vektorfeld $\operatorname{rot} f$, und somit

$$\int_{\partial\varphi} f := \int_{\partial\varphi} \langle f, \tau_{\partial\varphi}\rangle \operatorname{vol}_{\partial\varphi} = \int_{\partial\varphi} \omega = \int_\varphi d\omega = \int_\varphi \langle \operatorname{rot} f, \nu_\varphi\rangle \operatorname{vol}_\varphi =: \int_\varphi \operatorname{rot} f.$$

$p = 3, n = 3$:. Gauß im $\mathbb{R}^3$. Sei $f = (p, q, r)$ ein Vektorfeld auf einer singulären 3-Kette φ und ω die zugehörige 2-Form. Dann ist $d\omega$ die 3-Form zum Vektorfeld $\operatorname{div} f$, und somit

$$\int_{\partial\varphi} f := \int_{\partial\varphi} \langle f, \nu_{\partial\varphi}\rangle \operatorname{vol}_{\partial\varphi} = \int_{\partial\varphi} \omega = \int_\varphi d\omega = \int_\varphi \operatorname{div} f.$$

9 Anwendungen

9.1 Physikalische Bedeutung des Gauß'schen Integralsatzes

9.1.1 Strömende Flüssigkeiten.
Eine Flüssigkeit ströme in einem Raumbereich. Die Geschwindigkeit an der Stelle x zum Zeitpunkt t sei $V(x;t)$. Die Bahn eines Partikels, der zum Zeitpunkt t_0 am Ort (x_0, y_0, z_0) war, ist durch $t \mapsto x(t)$ mit $x(t_0) = x_0$ und $\frac{d}{dt}(x(t)) = V(x(t);t)$ gegeben (das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 1.ter Ordnung). Die Strömung heißt stationär, falls V von t unabhängig ist, und das wollen wir der Einfachheit halber in Folgenden voraussetzen. Es sei Fl_t der Fluß zu V zum Zeitpunkt t, d.h. $t \mapsto \mathrm{Fl}_t(x_0)$ ist die Lösungskurve x der Differentialgleichung mit Anfangswerte x_0 zum Zeitpunkt $t = 0$, und somit ist $\mathrm{Fl}_0(x) = x$ und $\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{Fl}_t(x) = V(\mathrm{Fl}_t(x))$.

Die Dichte der Flüssigkeit zum Zeitpunkt t an der Stelle x sei $\rho(x) > 0$. Die Flußdichte ist dann $F(x) = \rho(x)\, V(x)$.

Da die Masse beim Fliesen erhalten bleibt ist für alle J-meßbaren Mengen B

$$\int_B \rho \text{ vol} = \int_{\mathrm{Fl}_t(B)} \rho \text{ vol} = \int_B \mathrm{Fl}_t^*(\rho \text{ vol})$$

d.h. $\rho \cdot \mathrm{vol} = \mathrm{Fl}_t^*(\rho \cdot \mathrm{vol})$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und somit

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{Fl}_t^*(\rho \cdot \mathrm{vol})(x) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho(\mathrm{Fl}_t(x)) \cdot \mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{vol})\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathrm{Fl}_t(x)) \cdot \mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{vol}) + \rho(\mathrm{Fl}_t(x)) \cdot \mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{div}(V) \text{ vol}) \\
&= \Big(\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathrm{Fl}_t(x)) + \rho(\mathrm{Fl}_t(x)) \cdot \mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{div}(V))\Big) \cdot \mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{vol})),
\end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial t}|_{t=0} \mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{vol}) &= \tfrac{\partial}{\partial t}|_{t=0} \mathrm{Fl}_t^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) \\
&= \tfrac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\Big(d\,\mathrm{Fl}_t^*(x^1) \wedge \cdots \wedge d\,\mathrm{Fl}_t^*(x^n)\Big) \\
&= d\Big(\tfrac{\partial}{\partial t}|_{t=0} \mathrm{Fl}_t^*(x^1)\Big) \wedge \cdots \wedge d\,\mathrm{Fl}_t^*(x^n) + \ldots \\
&\qquad \cdots + d\,\mathrm{Fl}_t^*(x^1) \wedge \cdots \wedge d\Big(\tfrac{\partial}{\partial t}|_{t=0} \mathrm{Fl}_t^*\, x^n\Big)) \\
&= dV^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n + \cdots + dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} \wedge dV^2 \\
&= \sum_i \tfrac{\partial V^1}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n + \ldots \\
&\qquad \cdots + dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} \wedge \sum_i \tfrac{\partial V^n}{\partial x^i}\, dx^i \\
&= \mathrm{div}(V)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \mathrm{div}(V) \text{ vol}.
\end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{vol}) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} &\det(\mathrm{Fl}_t)'(x) \text{ vol} \\
&= \det{}'(\mathrm{id}) \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \mathrm{Fl}_t'(x)\Big) \text{ vol} \\
&= \mathrm{spur}\Big(V'(x)\Big) \text{ vol},
\end{aligned}$$

also

$$\operatorname{div}(V)(x) = \operatorname{spur}(V'(x)), \text{ die Summe der Eigenwerte von } V'(x).$$

Hier haben wir einerseits $\mathrm{Fl}_0 = \mathrm{id}$, weiters die Formel $\det{}'(\mathrm{id})(A) = \operatorname{spur}(A)$ aus der Analysis 2, sowie $\frac{d}{dt}|_{t=0} \mathrm{Fl}_t(x) = V(\mathrm{Fl}_0(x)) = V(x)$ verwendet. Somit gilt für $\rho_x(t) := \rho(\mathrm{Fl}_t(x))$:

$$\frac{d}{dt}\rho_x(t) = \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathrm{Fl}_t(x)) = -\rho_x(t) \cdot \mathrm{Fl}_t^*(\operatorname{div}(V)),$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung 1-ter Ordnung für die Dichte ρ_x, die sogenannte Formel von Liouville. Die Lösung erhalten wird dann aus $\frac{d\rho}{\rho} = -\operatorname{div}(V)\, dt$, d.h. $\rho(x(t)) = \rho(x(0)) \cdot e^{-\int_0^t \operatorname{div}(V(x(s)))}\, ds$.

Die Flüssigkeit heißt inkompressibel falls ρ konstant ist, oder äquivalent, falls $\operatorname{div}(V) = 0$ ist.

Sei nun S ein Flächenstück und ν_S der normierte Normalvektor zu S. Dann ist $\langle F, \nu_S\rangle$ die Komponente von F in Richtung ν_S und $\int_S \langle F, \nu_S\rangle \operatorname{vol}_S$ die Masse, die pro Zeiteinheit in Richtung ν durch S fließt und $\int_S \langle V, \nu_S\rangle \operatorname{vol}_S$ das Volumen, welches pro Zeiteinheit in Richtung ν durch S fließt. Es sei $f = (p, q, r)$. Dann ist die Masse, die aus den kompakten Intervallen I mit Seitenlängen Δx, Δy und Δz in x-Richtung fließt

$$\Big(p(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - p(x_0, y_0, z_0)\Big)\, \Delta y\, \Delta z \approx \frac{\partial p}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z,$$

und jene die aus I fließt (d.h. die Quellstärke) also

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}\right)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z = \operatorname{div}(f)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$$

und die Ergiebigkeit des Bereichs B ist einerseits

$$\int_B \operatorname{div} f$$

und nach dem zuvorgesagten andererseits

$$\int_{\partial B} \langle f, \nu_{\partial S}\rangle \operatorname{vol}_{\partial S}.$$

Dies ist also ein physikalische Indiz für die Gültigkeit des Divergenzsatzes.

9.1.2 Wärmeleitungsgleichung.
Es ist

$$\Delta Q = c\, m\, \Delta\vartheta \approx c\, \rho\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \Delta\vartheta,$$

wobei ΔQ die zuzuführende Wärmemenge ist um in einem Körper mit Masse m und spezifischer Wärme c eine Temperaturänderung $\Delta\vartheta$ hervorzurufen. Für die durch ein kleines Rechteck mit Fläche ΔA und Normale ν in der Zeitspanne Δt fließende Wärmemenge gilt

$$\Delta Q \approx \lambda\, \langle \operatorname{grad}\vartheta, \nu\rangle\, \Delta A\, \Delta t,$$

wobei λ die Wärmeleitfähigkeit des Körpers ist. Analog zu (9.1), aber jetzt mit dem Vektorfeld $F = \lambda \operatorname{grad}\vartheta$, ist also

$$\Delta Q \approx \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}\vartheta)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z,$$

die Wärmemenge die durch ein kleines kompaktes Intervall fließt. Also ist

$$c\, \rho\, \Delta\vartheta \approx \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}\vartheta)\, \Delta t = \lambda\, \operatorname{div}(\operatorname{grad}\vartheta)\, \Delta t =: \lambda\, \Delta(\vartheta)\, \Delta_t,$$

wobei $\Delta(\vartheta) := \operatorname{div}(\operatorname{grad}\vartheta) = \sum_i \frac{\partial^2\vartheta}{(\partial x^i)^2}$ den Laplace-Operator angewandt auf ϑ bezeichnet. Die Wärmeleitungsgleichung ist also

$$\Delta(\vartheta) = \frac{c\,\rho}{\lambda}\frac{\partial\vartheta}{\partial t},$$

eine partielle Differentialgleichung 2-ter Ordnung. Eine Gleichgewicht (nach hinreichend langer Zeit $t \to \infty$) bedeutet $\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = 0$, also $\Delta(\vartheta) = 0$, d.h. ϑ ist harmonisch. Z.Bist das Newton-Potential $U(x) := -G\, m \int_B \frac{\rho(x)}{|x - x_0|}\, dx_0$ nach Aufgabe (6.20) harmonisch.

9.2 Die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung

9.2.1 Zentralkräfte.
Wenn ein Kraftfeld F auf einem fixen Punkt $r_0 \in \mathbb{R}^3$ (o.B.d.A. der Nullpunkt) weist, d.h. $F(r) = (r - r_0)\, f(r)$ mit einer skalaren Funktion f ist, dann spricht man von einer Zentralkraft. Nach dem Newtonschen Kraftgesetz ist $F = m\,\ddot{r}$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f\, r = m\,\ddot{r} \\ &\Rightarrow r \times \ddot{r} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(r \times \dot{r}\Big) = \dot{r} \times \dot{r} + r \times \ddot{r} = 0 + 0 = 0 \\ &\Rightarrow C := r \times \dot{r} \text{ ist konstant} \end{aligned}$$

Man nennt $m\,C$ den Drehimpuls. Falls $C = 0$ ist, so ist r und $\dot{r}$ linear abhängig, d.h. r bleibt auf einer Geraden. Für $C \neq 0$ ist $\langle r, C\rangle = \langle r, r \times \dot{r}\rangle = \det(r, r, \dot{r}) = 0$, d.h. r bleibt in der Ebene $C^\perp$. O.B.d.A. sei $C = (0, 0, c)$, d.h. $r = (x, y, 0)$. Dann ist $r \times \dot{r} = (0, 0, x\dot{y} - y\dot{x})$, also $x\dot{y} - y\dot{x} = c$ konstant. Für die durch r überstrichene Fläche ist

$$|B| = \frac{1}{2}\int_{\partial B} x\, dy - y\, dx = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\,\dot{y} - y\dot{x})\, dt + 0 = \frac{c}{2}(t_2 - t_1),$$

denn für radiale Kurven γ gilt $\int_\gamma x\, dy - y\, dx = \int \langle \gamma^\perp, \gamma'\rangle = 0$.
Dies zeigt das

9.2.2 Zweites Keplersches Gesetz.
Bei der Bewegung unter einer Zentralkraft werden in gleicher Zeit gleiche Flächen überstrichen. □

9.2.3 Erstes Keplersches Gesetz.
Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen mit der Sonne in einem Brennpunkt.

Beweis. Es sei M die Masse der Sonne und m die eines Planeten. Die Kraft ist eine auf die Sonne weisende Zentralkraft, und somit bewegt sich nach (9.2.1) der Planet in einer Ebene um die Sonne. Es sei $(x(t), y(t))$ seine Ortskoordinaten, beziehungsweise in Polarkoordinaten $(r(t), \varphi(t))$, d.h.

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos\varphi; & \dot{x} &= \dot{r}\,\cos\varphi - r\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi; \\ y &= r\,\sin\varphi; & \dot{y} &= \dot{r}\,\sin\varphi + r\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi; \end{aligned}$$

Für seine skalare Geschwindigkeit v gilt

$$v(t)^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2.$$

Nach (9.2.1) ist $c = x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\varphi}^2$ und nach (9.3) sind Gravitationsfelder Gradientenfelder, also gilt der Energieerhaltungssatz (kinetische plus potentielle Energie ist konstant):

$$\frac{1}{2}m\gamma := \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{|r|} \text{ ist konstant.}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \frac{2GM}{r} + \gamma = v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 &= \left(\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right)\dot{\varphi}^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\frac{c^2}{r^4} + \frac{c^2}{r^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{\gamma}{c^2} + \frac{2GM}{c^2}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \quad (c \neq 0, \text{ da Bahn nicht auf einer Geraden}) \\ \Rightarrow \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{\gamma}{c^2} + \frac{2GM}{c^2}u - u^2 = \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 + \frac{\gamma}{c^2} - (u - \frac{GM}{c^2})^2 \\ &= \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2\left(1 + \frac{\gamma c^2}{G^2M^2}\right) - \left(u - \frac{GM}{c^2}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2, \end{aligned}$$

mit $u := \frac{1}{r} > 0$, $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$, $p := \frac{c^2}{GM} > 0$ und $\varepsilon^2 := 1 + \frac{\gamma c^2}{G^2M^2} \geq 0$, da $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 \geq 0$. Die Lösung erhalten wir nun wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\varphi} &= \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - (u - \frac{1}{p})^2}\\ \varphi + C &= \int \frac{du}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - (u-\frac{1}{p})^2}} = \int \frac{dw}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - w^2}} = \int \frac{p}{\varepsilon}\,\frac{dw}{\sqrt{1-(\frac{p}{\varepsilon}w)^2}}\\ &= \arcsin\left(\frac{p}{\varepsilon}w\right) = \arcsin\frac{pu-1}{\varepsilon},\end{aligned}$$

mit $w := u - \frac{1}{p}$. Also ist

$$u = \frac{1+\varepsilon\sin(\varphi+C)}{p} \quad \text{oder auch } r = \frac{p}{1+\sin(\varphi+C)}.$$

Wir wählen $r(0)$ minimal, d.h. $\sin C := 1$. Dann ist $\sin(\varphi+C) = \sin\varphi\cos C + \cos\varphi\sin C = \cos\varphi$, also

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi},$$

die Gleichung einer allgemeinen Kegelschnittlinie. Diese beschreibt für $\varepsilon < 1$ eine Ellipse, für $\varepsilon = 1$ eine Parabel und für $\varepsilon > 1$ einen Ast einer Hyperbel. Für Planetenbahnen kommt nur der Fall $\varepsilon < 1$ in Frage. Der Halbparameter $p = \frac{b^2}{a}$ und die numerischer Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ sind auf diese Art durch die Halbachsenlängen a und b bestimmt, oder umgekehrt

$$a := \frac{p}{1-\varepsilon^2}, \qquad b := \sqrt{a\,p} = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

In der Tat ist liegt $(x,y) := r\,(\cos\varphi, \sin\varphi)$ auf folgender Ellipse

$$\begin{aligned}\frac{(x+\varepsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \frac{1}{a^2}\Big(\varepsilon a + \frac{p\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}\Big)^2 + \frac{1}{ap}\Big(\frac{p\sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}\Big)^2\\ &= \frac{\frac{1}{a^2}(\varepsilon a + \cos\varphi(p+\varepsilon^2 a))^2 + \frac{1}{ap}(p\sin\varphi)^2}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}\\ &= \frac{(\varepsilon+\cos\varphi)^2 + (1-\varepsilon^2)\,(1-\cos^2\varphi)}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = 1 \quad \square\end{aligned}$$

9.2.4 Drittes Keplersches Gesetz.

Das Verhältnis der Quadrate der Umlaufzeiten zu den Kuben der großen Halbachsen ist konstant.

Beweis. Die Fläche der Ellipse ist $\pi ab = \frac{cT}{2}$ nach (9.2.1). Also ist

$$\begin{aligned}\frac{cT}{2} &= \pi ab = \pi a\sqrt{a}\frac{b}{\sqrt{a}} = \pi a^{3/2}\sqrt{p} = \pi a^{3/2}\frac{c}{\sqrt{GM}}\\ \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} &= \frac{(2\pi)^2}{GM}. \quad \square\end{aligned}$$

9.2.5 Entfernungen und Massen im Sonnensystem.

Die Gravitationskonstante G ist experimentell bestimmbar (Erstmals 1798). Aus $G\frac{m\mu}{R^2} = \mu g$ mit Erdmasse m, Masse μ eines Körpers auf der Erdoberfläche (d.h. Abstand R) und Erdbeschleunigung $g \Rightarrow$ Erdmasse $m \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg.

Aus dem 3.ten Keplerschen Gesetz und den Abstand von der Sonne a (Trigonometrie) $\Rightarrow$ Sonnemasse $M \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg.

Aus dem 3.ten Keplerschen Gesetz und der Umlaufszeit eines Planeten $\Rightarrow$ Sonnenentfernung des Planeten.

Aus dem 3.ten Keplerschen Gesetz, der Umlaufszeit eines Mondes und seiner mittlere Entfernung (Trigonometrie) $\Rightarrow$ Masse des Planeten.

Literatur

[1] Hans Wilhelm Alt. *Lineare Funktionalanalysis.* Springer, 1985. Hochschultext.

[2] Herbert Amann and Joachim Escher. *Analysis II.* Grundstudium Mathematik. Birkhäuser, Basel - Boston - Berlin, 1999.

[3] Herbert Amann and Joachim Escher. *Analysis I-III.* Grundstudium Mathematik. Birkhäuser, Basel - Boston - Berlin, 2001.

[4] Herbert Amann and Joachim Escher. *Analysis III.* Grundstudium Mathematik. Birkhäuser, Basel - Boston - Berlin, 2001.

[5] Herbert Amann and Joachim Escher. *Analysis I.* Grundstudium Mathematik. Birkhäuser, Basel - Boston - Berlin, 2002.

[6] Christian Blatter. *Analysis 1*, volume 151 of *Heidelberger Taschenbücher.* Springer, Berline - Heidelberg - New York, 1974.

[7] Christian Blatter. *Analysis 2*, volume 152 of *Heidelberger Taschenbücher.* Springer, Berline - Heidelberg - New York, 1974.

[8] Christian Blatter. *Analysis 3*, volume 153 of *Heidelberger Taschenbücher.* Springer, Berline - Heidelberg - New York, 1974.

[9] Theodor Bröcker and Klaus Jänich. *Einführung in die Differentialtopologie*, volume 143 of *Heidelberger Taschenbücher.* Springer, Berline - Heidelberg - New York, 1970.

[10] C. O. Christenson and W. L. Voxman. *Aspects of Topology.* BCS Asociate, Moscow, Idaho, USA, 1998. ISBN: 0-914351-08-07

[11] Richard Courant. *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung 1.* Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 4 edition, 1971.

[12] Richard Courant. *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung 2.* Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 4 edition, 1971.

[13] Jean Dieudonné. *Foundations of modern analysis, I.* Academic Press, New York – London, 1960.

[14] J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk. *Multidimensional Real Analysis II: Integration.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004. ISBN 0 521 82925 9.

[15] Ryszard Engelking. *General Topology.* Heldermann, Berlin, 1989. ISBN: 3-88538-006-4

[16] Alberto Guzman. *Derivatives and Integrals of Multivariable Functions.* Birkhäuser, Boston, 2003. ISBN 0-8176-4274-9.

[17] F. Hausdorff. Beweis eines satzes von arzelà. *Math. Z.*, 26:135–137, 1927.

[18] Ernst Henze. *Einführung in die Maßtheorie*, volume 505 of *B.I.Hochschultaschenbücher.* Bibliographisches Institut, Mannheim, 1971.

[19] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis, 1+2.* Mathematische Leitfäden. Teubner, Stuttgart, 1980. 18, 22, 24

[20] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis, Teil 1.* Mathematische Leitfäden. Teubner, Stuttgart, 1980.

[21] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis, Teil 2.* Mathematische Leitfäden. Teubner, Stuttgart, 1981.

[22] Morris W. Hirsch. *Differential topology.* Springer-Verlag, New York, 1976. GTM 33.

[23] Andreas Kriegl. *Differentialgeometrie.* Universität Wien, 1996.

[24] Andreas Kriegl. *Topologie 1*. Universität Wien, 2000.

[25] Andreas Kriegl. *Funktionalanalysis 1*. Universität Wien, 2002.

[26] Andreas Kriegl. *Funktionalanalysis 2*. Universität Wien, 2002.

[27] Andreas Kriegl, Mark Losik, and Peter W. Michor. Choosing roots of polynomials smoothly, II. *Israel J.M.*, 139:183–188, 2004.

[28] W. A. J. Luxemburg. Arzelaà's dominated convergence theorem for the Riemann integral. *Am. Math. Monthly*, pages 970–979, 78 1971.

[29] John C. Oxtoby. *Maß und Kategorie*. Hochschultext. Springer, Berline - Heidelberg - New York, 1971.

[30] Ernst Peschl. *Funktionentheorie*, volume 131 of *B.I.Hochschultaschenbücher*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967.

[31] Lang Serge. *Differentiable Manifolds*. Addison-Wesley, 1962.

[32] Ralph Stöcker and Heiner Zieschang. *Algebraische Topologie*. Mathematische Leitfäden. Teubner, Stuttgart, 1988.

[33] Elconin V. and Michal A.D. Completely integrable differential equations in abstract spaces. *Acta Mathematica*, 68:71–107, 1937.

[34] Hassler Whitney. A function not constant on a connected set of critical points. *Duke Math. J.*, 1:514–517, 1935.

[35] Lee Peng Yee and Rudolf Výborný. *The integral: An Easy Approach after Kurzweil and Henstock*, volume 14 of *Australian Mathematical Society Lecture Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[36] J. Zemánek. A simple proof of the Weierstrass-stone theorem. *Comment. Math.*, 20:495–497, 1977.

Liste der Symbole

alt	Alternator, Seite 15
$\partial\varphi$	Rand einer singulären Kette, Seite 27
$\det^{i_1,\dots,i_p}$	Subdeterminante, Seite 17
$\operatorname{div} f$	Divergenz oder Quelldichte des Vektorfelds f, Seite 8
$\operatorname{div} f$	Quellendichte oder Divergenz des Vektorfelds f, Seite 14
$\int_\Phi g$	Integral eines Vektorfelds g längs einer durch Φ parametrisierten Fläche, Seite 10
$\int_\Phi \omega$	Integral einer r-Form ω über eine Parametrisierung Φ einer p-dimensionale Fläche, Seite 25
$\int_K \omega$	Integral einer r-Form ω über J-meßbare $K \subseteq \mathbb{R}^p$, Seite 25
$\int_K \omega$	Integral einer r-Form ω über eine p-dimensionale Fläche S, Seite 26
$\int_S \rho \operatorname{vol}_S$	Integral einer (Dichte)funktion ρ über eine Fläche S, Seite 11
$\int_S g$	Integral eines Vektorfelds g längs einer Fläche S, Seite 10
$\langle a_0, \dots, a_p \rangle$	Simplex mit Ecken $A_1, \dots, a_p$, Seite 26
$\langle a_0, \dots, a_p \rangle$	standard r-Simplex, Seite 26
ν_Φ	Einheitsnormale an die durch Φ parametrisierte Fläche, Seite 11
ν_S	Einheitsnormale an die Fläche S, Seite 11
$\nu_{\partial B}$	nach außen weisende Einheitsnormalvektor am Rand des Bereichs B, Seite 7
$\omega \wedge \eta$	hack-Produkt von Formen, Seite 16
vol_Φ	Oberflächenelement der durch Φ parametrisierten Fläche, Seite 11
$\Phi \otimes \Psi$	Tensor-Produkt von multi-linearen Formen, Seite 14
$\Phi_p : K_p \to \Delta_p$	standard-Parametrisierung des standard p-Simplex, Seite 29
$\operatorname{rot} f$	Rotation eines Vektorfelds f, Seite 9
$\operatorname{rot} f$	Rotation oder auch Wirbeldichte eines Vektorfelds f, Seite 7
τ_B	Einheitstangentialvektor an B, Seite 5
τ_c	Einheitstangentialvektor an die Kurve c, Seite 5
vol_c	Längenelement der Kurve c, Seite 5
vol_S	Oberflächenelement, Seite 11
$C_p(X)$	Raum der singulärer p-Ketten, Seite 27
$d\omega$	äußere Ableitung der Differential-Form ω, Seite 19
$f^*(\Omega)$	Pullback eines Tensorfelds / einer Differential-Form, Seite 22
$L(E_1, \dots, E_p; F)$	Raum aller p-linearen Abbildungen, Seite 14
$L_0(E, F)$	Raum der 0-Formen, Seite 18

Liste der Symbole

$L_p(E;F)$	Raum aller p-linearen Abbilduneg, Seite 14
$L_p(E_1,\dots,E_p;F)$	Raum aller p-linearen Abbildungen, Seite 14
$L_{0,\mathrm{alt}}(E,F)$	Raum der alternierenden 0-Formen, Seite 18
$L_{p,\mathrm{alt}}(E,F)$	Raum aller alternierenden multi-linearen Abbildungen, Seite 15

Index