

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studienkennzahl(en):

1	/12
2	/10
3	/12
4	/10
5	/13
6	/10
7	/13
G	/80

Note:

Analysis 1, 803772

Andreas Kriegl, Wintersemester 2003/04

4. Prüfungstermin (2004.07.02, 9h, HS1)

1. Zeige, daß jede Folge in $\mathbb{R}$ eine monotone Teilfolge besitzt. Gib weiters ein Beispiel einer beschränkten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ an mit

$$\inf_n x_n = \underline{\lim}_n x_n < \overline{\lim}_n x_n < \sup_n x_n$$

(12 Punkte)

2. Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei Folgen in $\mathbb{R}$, wobei $(a_n)_n$ beschränkt und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ sei. Folgt daraus, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = +\infty$ ist? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. (10 Punkte)
3. Ist die Reihe $\sum_k \frac{k}{k^2+1} (-1)^k$ konvergent? Ist sie absolut konvergent? Gib auch eine genaue Beschreibung der verwendeten Sätze an. (12 Punkte)
4. Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion für welche sowohl $\alpha_- := \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ als auch $\alpha_+ := \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ existiert. Formuliere möglichst einfache Bedingungen die zusammen zur Stetigkeit von f bei 0 äquivalent sind. Zeige, daß aus Deinen Bedingungen diese Stetigkeit folgt und gib Beispiele solcher f 's an, die jeweils genau eine Deiner Bedingungen nicht erfüllen. (10 Punkte)
5. Erweitere $x \mapsto (1+x^2)^{1/x}$ zu einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und bestimme deren Ableitung. (13 Punkte)
6. Es sei $f : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem offenen Intervall I mit Ableitung $f' = 0$. Zeige, daß f konstant sein muß. Gilt dies auch, wenn I kein Intervall ist? (Argument oder Gegenbeispiel) (10 Punkte)
7. Entwickle die Ableitung von $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$ in eine Potenzreihe und bestimme damit die Taylor-Reihe von f bei 0. Bestimme jene $x \in \mathbb{R}$, für welche diese Taylor-Reihe $f(x)$ als Summe besitzt. (13 Punkte)

Lösungen

1. Es sei x eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir nennen einen Index N Gipfelstelle von x , wenn $x_n \leq x_N$ für alle $n > N$. Falls x unendlich viele Gipfelstellen $g_1 < g_2 < \dots$ besitzt, so ist $k \mapsto x_{g_k}$ eine monoton fallende Teilfolge. Anderenfalls existiert eine letzte Gipfelstelle g und damit können wir rekursiv eine Teilfolge x_{n_k} durch $n_0 := g + 1$ und $n_{k+1} := \min\{n > n_k : x_n > x_{n_k}\}$ definieren welche wachsend ist. (Siehe Satz von Bolzano und Weierstraß)

Die Folge $x_n := (-1)^n + \frac{1}{n+1}$ hat genau die beiden Häufungswerte $\pm 1 + 0$ also ist $\underline{\lim}_n x_n = -1 < 1 = \overline{\lim}_n x_n$. Da $\frac{1}{n+1}$ monoton fallend ist, ist $\sup_n x_n = x_0 = 2 > \liminf_n x_n$ und $\inf_n x_n = \liminf_n x_n$.

2. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = +\infty \Leftrightarrow \forall L \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n + b_n \geq L.$$

Sei also $L \in \mathbb{R}$ beliebig.

$(a_n)_n$ beschränkt $\Rightarrow \exists K \geq 0 \forall n \in \mathbb{N} : -K \leq a_n \leq K$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : b_n \geq L + K$.

Also ist $a_n + b_n \geq -K + (L + K) = L$ für alle $n \geq N$. (Siehe (2.3.16))

3. Es ist $(-1)^k \frac{k}{k^2+1}$ alternierend, $k \mapsto \frac{k}{k^2+1}$ monoton fallend, denn

$$\begin{aligned} \frac{k}{k^2+1} \geq \frac{k+1}{(k+1)^2+1} &\Leftrightarrow k((k+1)^2+1) \geq (k+1)(k^2+1) \\ &\Leftrightarrow k(k+1)((k+1)-k) \geq ((k+1)-k) \cdot 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow k \geq 1, \end{aligned}$$

und hat Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k^2+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{1}{k^2}} = 0.$$

Auf Grund des Leibniz-Tests ist wegen den zuvor genannten Bedingungen die letzte Aussage äquivalent zur Konvergenz der Reihe $\sum_k (-1)^k \frac{k}{k^2+1}$.

Für große k ist $\frac{k}{k^2+1} \sim \frac{1}{k}$, also vermutet man Divergenz der Reihe. Zwar ist $\frac{1}{k}$ keine Minorante von $\frac{k}{k^2+1}$, denn $\frac{1}{k} < \frac{k}{k^2+1}$, aber $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k}$ schon, denn $\frac{k}{k^2+1} \geq \frac{1}{2k}$ ist äquivalent zu $2k^2 \geq k^2+1$, also $k \geq 1$.

Da die harmonische Reihe divergent ist, gilt gleiches auch für die Majorante $\sum_k \frac{k}{k^2+1}$ nach dem Majoranten-Kriterium.

Also ist $\sum_k (-1)^k \frac{k}{k^2+1}$ nicht absolut konvergent.

4. Unter den genannten Voraussetzungen ist f genau dann stetig bei 0, wenn $\alpha_- = f(0) = \alpha_+$ ist.

Die Bedingung $\alpha_+ = f(0)$ bzw. $\alpha_- = f(0)$ bedeutet:

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_+ > 0 \forall 0 < x < \delta_+ : |f(x) - f(0)| < \varepsilon \\ \text{bzw.} \quad & \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_- > 0 \forall -\delta_- < x < 0 : |f(x) - f(0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Wenn wir $\delta := \min\{\delta_+, \delta_-\}$ setzen so folgt $|f(x) - f(0)| > \varepsilon$ für alle x mit $|x| < \delta$, also existiert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ und ist $f(0)$, d.h. f ist stetig bei 0.

Die Funktion $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = -1$ für $x < 0$ und $f_1(x) = 1$ für $x \geq 0$ erfüllt zwar $\alpha_+ = f(0)$ nicht aber die andere Bedingung $\alpha_- = f(0)$.

Die Funktion $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = -1$ für $x \leq 0$ und $f_2(x) = 1$ für $x > 0$ erfüllt zwar $\alpha_- = f(0)$ nicht aber die andere Bedingung $\alpha_+ = f(0)$.

5. Die Funktion $f : x \mapsto (1+x^2)^{1/x} = (e^{\log(1+x^2)})^{1/x} = e^{\log(1+x^2)/x}$ ist definiert für $x \neq 0$.

Nach der Regel von L'Hospital ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = 0,$$

und da $x \mapsto e^x$ stetig ist, ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{x}} = e^0 = 1,$$

also definiert $f(0) := 1$ die stetige Erweiterung von f .

Für $x \neq 0$ liefert Produkt- und Kettenregel:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{\log(1+x^2)/x} = e^{\log(1+x^2)/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \log(1+x^2) + \frac{1}{x} \cdot \frac{2x}{1+x^2} \right).$$

Um die Ableitung bei 0 zu bestimmen, genügt es die Existenz von $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ nachzuweisen:

$$f'(x) = \underbrace{f(x)}_{\rightarrow 1} \cdot \left(\underbrace{\frac{2}{1+x^2}}_{\rightarrow 2} - \underbrace{\frac{1}{x^2} \log(1+x^2)}_{\rightarrow 1} \right) \rightarrow 1,$$

denn nach L'Hospital ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1.$$

Damit ist die stetige Funktion f auch bei 0 differenzierbar mit Ableitung $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 1$.

6. Es sei $a, b \in I$ mit $a < b$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) = 0$, also ist $f(b) - f(a) = 0$, und da a, b beliebig waren ist f konstant.

Falls I kein Intervall ist, so stimmt dies nicht mehr, denn $f : I := \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = -1$ für $x < 0$ und $f(x) = +1$ für $x > 0$ ist nicht konstant erfüllt aber $f' = 0$.

7. Die Ableitung von $f(x) := \ln(1 + x^2)$ ist $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Nach der Summenformel $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für die geometrische Reihe ist für $-x^2 = q$ mit $|q| < 1$, also mit $|x| < 1$, $f'(x) = 2x \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2x^{2k+1}$. Somit ist die Stammfunktion gegeben durch $f(x) = C + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2 \frac{x^{2k+2}}{2k+2} = C + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{x^{2j}}{j}$ für $|x| < 1$. Wegen $f(0) = 0$ ist $C = 0$.

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $1/\lim_j \sqrt[2]{j} = 1/\sqrt{1} = 1$. Da die Funktion f auch in den Randpunkten $x = \pm 1$ stetig ist, stellt sie nach dem Grenzwertsatz von Abel genau für $|x| \leq 1$ die Summe ihrer Taylor-Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{x^{2j}}{j}$ dar.