1. Lemma. *Siehe* [**Eng89**, 3.2.13]. *In* $\underline{\text{Komp}}$ *ist der projektive Limes nicht-leerer Räume ebenfalls nicht leer (und insbesonders gilt das für projektive Limiten in* $\underline{\text{Set}}$ *von nicht-leeren endlichen Mengen).*

Falls zusätzlich die verbindenden Abbildungen alle surjektiv sind, so auch die Projektionen $\mathrm{pr}_i : \varprojlim F \to F(i)$.

Beweis. Für $i \in I$ sei $A_i := \{(x_j)_j \in \prod_j F(j) : F(i \succeq j)(x_i) = x_j \text{ für alle } j \preceq i\}$. Dann ist $A_i \neq \emptyset$ (wähle $x_j \in F(j)$ für $j \not\preceq i$ beliebig und sonst $x_j := F(i \succeq j)(x_i)$) und kompakt (da abgeschlossen). Für $i \preceq i'$ ist $A_i \supseteq A_{i'}$ und somit hat $\{A_i : i \in I\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft, also nicht leeren Durchschnitt $\bigcap_{i\in I} A_i = \varprojlim_j F(j)$ im kompakten Raum $\prod_j F(j)$.

Angenommen die zweite Aussage ist falsch, d.h. es existiert $x_0 \in F(i_0) \setminus \mathrm{pr}_{i_0}(\varprojlim F)$. Für $i \succeq i_0$ sei $A(i) := F(i \succeq i_0)^{-1}(x_{i_0})$. Nach obigen existiert ein $(x_i)_i \in \varprojlim_{i\succeq i_0} A(i)$. Wir erweitern dies auf alle i durch $x_i := F(i' \succeq i)(x_{i'})$ nach Wahl eines $i' \succeq i, i_0$. Wegen der Gerichtetheit hängt x_i nicht von i' ab und definiert ein Element $x \in \varprojlim F$ mit $\mathrm{pr}_{i_0}(x) = x_0$, ein Widerspruch. □

2. Theorem. Freudenthal Kompaktifizierung durch Enden. [**Fre31**] *Zu jedem lokalkompakten, zusammenhängenden, lokal zusammenhängenden Hausdorff-Raum* X *existiert ein kompakter, zusammenhängender, lokal zusammenhängender Hausdorff-Raum* εX *mit folgenden Eigenschaften:*

(1) εX *enthält* X *als dichten offenen Teilraum.*
(2) *Der Teilraum* $\varepsilon X \setminus X$ *der Enden von* X *ist total unzusammenhängend.*
(3) *Für alle offenen zusammenhängenden* $O \subseteq \varepsilon X$ *ist* $O \cap X$ *zusammenhängend.*

Man kann zeigen, das εX bis auf Homöomorphie durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist.

Beweis nach [**Ray60**]**.** Sei $\mathcal{K} := \{U \subseteq X : U \text{ ist offen, relativ-kompakt und nicht leer}\}$ geordnet durch $V \succ U :\Leftrightarrow V \supseteq \overline{U}$. Für $U \in \mathcal{K}$ sei $\pi(U)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten von $X \setminus \overline{U}$ und für $V \succ U$ sei $\pi(V \succ U) : \pi(V) \to \pi(U)$ die Abbildung, die jeder Zusammenhangskomponente $Z \in \pi(V)$ die eindeutig bestimmte Zusammenhangskomponente $Z' \in \pi(U)$ mit $Z \subseteq Z'$ zuordnet.

Es sei $V \succ U$. Dann treffen nur endlich viele Zusammenhangskomponenten $Z \in \pi(U)$ die Menge $X \setminus \overline{V}$, denn jedes solche Z trifft auch $\overline{V}$ (andernfalls wäre $Z \subseteq X \setminus \overline{V} \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus \overline{U}$ abgeschlossen in $X \setminus \overline{U}$ also auch in $X \setminus V$ und damit in X, und auch offen in $X \setminus \overline{U}$ also auch in X, ein Widerspruch zu X zusammenhängend) und somit auch ∂V (da Z zusammenhängend ist). Da $X \setminus \overline{U}$ die disjunkte Vereinigung der $Z \in \pi(U)$ ist, bilden diese Z somit eine offene disjunkte Überdeckung von $\partial V = \overline{V} \setminus V \subseteq X \setminus \overline{U}$ und weil ∂V kompakt ist, ist $Z \cap \partial V \neq \emptyset$ für nur endlich viele $Z \in \pi(U)$.

Jedes (sogenannte Ende) $e = (e_U)_U \in \varprojlim_{U\in\mathcal{K}} \pi(U)$ muß für $V \succ U$ die Gleichung $\pi(V \succ U)(e_V) = e_U$, also $e_V \subseteq e_U$ erfüllen, d.h. e_U ist eine jener Komponenten die $X \setminus \overline{V}$ trifft. Also kann e_U nicht relativ-kompakt sein (sonst wäre es in einem $\overline{V}$ enthalten). Umgekehrt trifft jede nicht relativ-kompakte Komponente $Z \in \pi(U)$ jedes $X \setminus \overline{V}$ und somit ist $\varprojlim_{U\in\mathcal{Z}} \pi(U) = \varprojlim_{U\in\mathcal{Z}} \pi_0(U) =: \varepsilon(X)$, wobei $\pi_0(U)$ die (endliche) Teilmenge von $\pi(U)$ der nicht relativ-kompakten Komponenten bezeichnet. Es ist $\varepsilon(X)$ somit als abgeschlossener Teilraum eines Produktes endlicher Räume kompakt.

Sei nun $\varepsilon X = X \cup \varepsilon(X)$ mit X als offenen Teilraum und den Mengen $N_{e,U} := e_U \cup \{e' \in \varepsilon(X) : e'_U = e_U\}$ für $U \in \mathcal{K}$ als Umgebungsbasis von $e \in \varepsilon(X)$.

Es ist $\varepsilon(X)$ ein topologischer Teilraum von εX, denn

$$N_{e,U} \cap \varepsilon(X) = \{e' \in \varepsilon(X) : e'_U = e_U\} = \mathrm{pr}_U^{-1}(e_U).$$

(2) Weiters ist $\varepsilon(X)$ total unzusammenhängend, denn sei $e \neq e'$ in $\varepsilon(X)$. Dann existiert ein U mit $e_U \neq e'_U$. Es ist $\mathrm{pr}_U^{-1}(e_U) := \{e'' \in \varepsilon(X) : e''_U = e_U\}$ offen und abgeschlossen in $\varepsilon(X)$ und trennt e von e'.

(1) Offensichtlich ist εX Hausdorff und X dicht und offen in εX (nach Konstruktion).

Es ist εX zusammenhängend, denn X ist es und somit auch $\overline{X}^{\varepsilon X} = \varepsilon X$.

Es ist εX lokalzusammenhängend, denn für $x \in X$ existieren nach Voraussetzung offene Umgebungen in X und X ist offen in εX und für $e \in \varepsilon(X)$ ist $N_{e,U} = e_U \cup \{e' \in \varepsilon(X) : e'_U = e_U\}$ zusammenhängend (da e_U es ist und $e' \in \overline{e_U}^{\varepsilon X}$ wegen $e'_V \subseteq e'_U = e_U$ für $V \succ U$)

Es ist εX kompakt: Sei $\mathcal{W}$ eine offene Überdeckung von εX. Jedes Ende $e \in \varepsilon(X)$ liegt somit in einem $W_e \in \mathcal{W}$ und somit existiert ein $U \in \mathcal{K}$ mit $N_{e,U} \subseteq W_e$. Diese $N_{e,U}$ bilden also eine offene Überdeckung von $\varepsilon(X)$ und da $\varepsilon(X)$ kompakt ist reichen endlich viele N_{e_i,U_i} aus. Es genügt zu zeigen, daß die abgeschlossene Menge $X \setminus \bigcup_i N_{e_i,U_i}$ kompakt ist. Angenommen dies wäre nicht der Fall, d.h. für jedes $V \in \mathcal{K}$ existiert ein $x_V \notin V$ mit $x_V \in X \setminus \bigcup_i N_{e_i,U_i} = X \setminus \bigcup_i e_i(U_i) \supseteq X \setminus \bigcup_i e_i(U)$ mit gewählten $U \succ U_i$ für alle i. Sei $U' \succ U$. Dann treffen nur endlich viele Zusammenhangskomponenten von $X \setminus \overline{U}$ die Menge $X \setminus \overline{U'}$ und somit liegt jedes $x_V \in X \setminus V$ in einer dieser Komponenten für $V \succ U'$, also o.B.d.A. alle in der gleichen nicht relativ kompakten Komponente Z die nicht in $e_i(U_i)$ enthalten ist für alle i. Da nach dem Lemma 1 der projektive Limes $\varepsilon(Z)$ endlicher nicht leerer Mengen nicht leer ist existiert ein Ende $e \in \varepsilon(Z) \subseteq \varepsilon(X)$, welches in keinem N_{e_i,U_i} enthalten ist. Das ist ein Widerspruch.

(3) Sei schließlich $O \subseteq \varepsilon X$ offen und zusammenhängend. Angenommen $O \cap X$ besitzt eine Partition in zwei disjunkte offenen Teilmengen O_1 und O_2. Für jedes $e \in O \cap^(X)$ wähle ein $U_e \in \mathcal{K}$ mit $N_{e,U_e} \subseteq O$. Betrachte nun $\tilde{O}_i := O_i \cup \{e \in O \cap ep(X) : e(U_e) \subseteq O_i\}$. Offensichtlich ist $\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2 = \emptyset$ und weiters ist $\tilde{O}_1 \cup \tilde{O}_2 = O$, denn für $e \in O \cap \varepsilon(X)$ ist $e(U_e) \subseteq O$ zusammenhängend also ganz in einem O_i enthalten, d.h. $e \in \tilde{O}_i$. Da O zusammenhängend ist $\tilde{O}_i = \emptyset$ für ein i sein, und somit auch $O_i = \emptyset$, d.h. $O \cap X$ ist zusammenhängend. $\square$

Bibliography

[Eng89] Ryszard Engelking. *General Topology*. Heldermann-Verlag, Berlin, 1989. revised and completed edition. 1

[Fre31] Hans Freudenthal. Über die Enden topologischer Räume und Gruppen. *Math. Z.*, 33(1):692–713, 1931. 1

[Ray60] Frank Raymond. The end point compactification of manifolds. *Pacific J. Math.*, 10:947–963, 1960. 1