Differentialgeometrie

Andreas Kriegl

Author address:

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
Nordbergstr. 14, 1090 Wien
E-mail address: andreas.kriegl@univie.ac.at

Die ist das Skriptum zu meiner gleichnamigen Vorlesung im Sommersemester 2005. Es besteht aus ausgewählten Teilen des viel umfassenderen Skriptums, welches als PDF-Datei unter http://www.mat.univie.ac.at/kriegl/Skripten/diffgeom.pdf downloadbar ist. Natürlich werden wir in den 3 Semesterstunden nur einen Teil selbst dieser Auswahl behandeln können und ich werde am Ende des Semesters eine Liste der gemachten Abschnitte unter http://www.mat.univie.ac.at/kriegl/LVA-SS205.html auflegen.

Bei der Auswahl des Inhalts habe ich mich von folgenden Ideen leiten lassen: Wir beginnen mit den 1-dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten der Ebene, den Kurven, die bereits zur Zeit Eulers sehr untersucht waren. Besonderes Augenmerk legen wir dabei auf das Studium der Krümmung, welches sich als roter Faden durch das ganze Skriptum zieht. Im Kapitel 2 führen wir Mannigfaltigkeiten zuerst als Teilmengen eines Euklidischen Raums und erst danach als abstrakte Objekte, welche durch Verkleben von Euklidischen Räumen entstehen, ein. Dieses Methode, alle Begriffe zuerst für Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ zu entwickeln und sie in der Folge auf abstrakte Mannigfaltigkeiten zu übertragen, wurde im ganzen Skriptum durchgezogen, und wird dem Leser hoffentlich helfen, die geometrische Anschauung nicht zu verlieren. Im Kapitel 3 wird das Konzept der Ableitung auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Das führt zu Tangentialraum und Tangentialabbildung und wird benutzt, um einen Begriff von Teil- und Quotientenobjekten von Mannigfaltigkeiten zu bekommen. Gewöhnliche Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten werden im Kapitel 4 eingeführt. Dazu werden die Tangentialräume zum Tangentialbündel vereinigt und Vektorfelder als Schnitte dieses Bündels untersucht. Es folgt ein Kapitel über Hyperflächen. Insbesondere werden hier Drehflächen, Regelflächen und Minimalflächen behandelt. Geodäten, Paralleltransport und kovariante Ableitung werden für Hyperflächen und dann allgemein für Riemann-Mannigfaltigkeiten besprochen.

Da man in der Differentialgeometrie auf den zu untersuchenden Objekten eine sehr reichhaltige Struktur zu Verfügung hat, fließen aus den diversesten Gebieten der Mathematik Methoden in sie ein. Voraussetzung zur erfolgreichen Bewältigung des dargebotenen Stoffes ist eine gründliche Kenntnis der Grundvorlesungen aus Analysis und der (dazu bereits benötigten) (multi)linearen Algebra. Natürlich wird der aufmerksame Leser (Tipp-)Fehler finden können. Ich möchte hier gleich die Bitte aussprechen, mir diese mitzuteilen (Geteiltes Leid ist halbes Leid). Zukünftige Generationen von Studenten werden es zu schätzen wissen.

Andreas Kriegl, Wien im Februar 2005

Inhaltsverzeichnis

I. Kurven

In den Grundvorlesungen über Analysis behandelt man Funktionen, die auf offenen Teilmengen eines $\mathbb{R}^n$ definiert sind. An manchen Stellen hatten sich aber schon Definitionsbereiche eingeschlichen, die allgemeiner waren. So z.B. bei der Methode der Lagrange-Multiplikatoren, wo man versucht, Extremwerte von reellwertigen Funktionen zu finden, welche auf Mengen der Gestalt $g^{-1}(0)$ definiert sind. Auch bei den Integralsätzen von Gauß und Stokes kamen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ vor, die als Kurven und Flächen bezeichnet wurden. Mengen dieser Art heißen Mannigfaltigkeiten. Auf ihnen wollen wir in dieser Vorlesung die Analysis entwickeln. In diesem Kapitel werden wir uns mit den einfachsten, nämlich den 1-dimensionalen, Mannigfaltigkeiten (kurz Kurven) beschäftigen.

Wir wollen uns aber zuerst nochmals jene Räume in Erinnerung rufen, auf denen dies alles aufbaut und in denen sich der größte Teil abspielen wird, nämlich die

1. Euklidische Räume

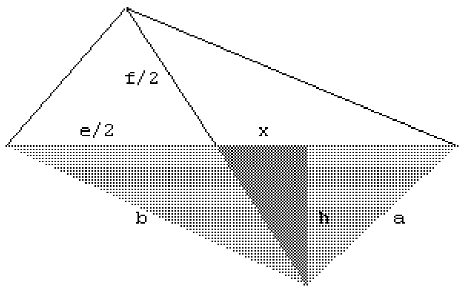
1.1 Definition (Euklidische Räume)

Zum Begriff des Euklidischen Raums gelangt man, wenn man die Eigenschaften der Räume, in denen man (Euklidische) Geometrie treiben kann, zusammenfaßt. Natürlich bestehen diese Räume aus Punkten. Man kann orientierte Strecken zwischen je zwei Punkten betrachten und parallele, gleich lange und gleich orientierte Strecken zu Vektoren $\overrightarrow{ab}$ zusammenfassen. Vektoren kann man mit reellen Skalaren strecken und man kann sie addieren, indem man ihre Repräsentanten aneinanderhängt. Vektoren bilden also einen Vektorraum E. Nach Wahl eines Ursprungs 0, können wir Punkte a mit ihren Ortsvektoren $\overrightarrow{0a}$ identifizieren. Wir wollen aber auch die Länge von Strecken messen können und benötigen dafür eine Norm $|x|$ für Vektoren $x \in E$. Da diese Norm geometrisch relevant sein soll, sollte der Satz von Pythagoras gelten, und allgemeiner die Parallelogramm-Gleichung $|a-b|^2+|a+b|^2 = 2(|a|^2+|b|^2)$ für die Diagonalen $a+b$ und $a-b$ eines Parallelogramms mit erzeugenden Seiten-Vektoren a und b gelten. Daß der Satz von Pythagoras diese Gleichung impliziert sieht man wie folgt: Seien e und f die beiden Diagonalen des Parallelogramms und h die Höhe einer Ecke auf die Diagonale e und x der Abstand des Höhenfußpunktes zum Schnittpunkt der Diagonalen. Dann gilt nach Pythagoras

$$a^2 = \left(\frac{e}{2} - x\right)^2 + h^2, \quad b^2 = \left(\frac{e}{2} + x\right)^2 + h^2, \quad \text{und } \left(\frac{f}{2}\right)^2 = h^2 + x^2,$$

und somit nach Addition und Einsetzen

$$a^2 + b^2 = 2\Big(\frac{e}{2}\Big)^2 + 2(x^2 + h^2) = 2\Big(\frac{e}{2}\Big)^2 + 2\Big(\frac{f}{2}\Big)^2.$$



Die Parallelogramm-Gleichung gewährleistet, daß die Polarisierungsformel

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{2}(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2) \quad \text{oder auch} \quad \langle x, y\rangle := \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2 - |x-y|^2)$$

eine Bilinearform, das sogenannte skalare Produkt $\langle \_, \_ \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, definiert. Mit deren Hilfe können wir nicht nur die Länge $|x| \geq 0$ eines Vektors x durch $|x|^2 = \langle x, x\rangle$ berechnen, sondern auch Winkel $\sphericalangle xy$ mittels $\cos(\sphericalangle xy) = \langle x, y\rangle/(|x||y|)$. Insbesondere gilt: $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$ und $x \parallel y \Leftrightarrow |\langle x, y\rangle| = |x||y|$.

Da wir uns in dieser Vorlesung auf endlich dimensionale Geometrie beschränken wollen, setzen wir voraus, daß der Vektorraum E endlich dimensional ist.

Es sei eine (geordnete) Basis $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ von E gewählt. Dann läßt sich jeder Vektor $x \in E$ als $x = \sum_{j=1}^n x^j e_j$ mit eindeutigen Koeffizienten $x^j \in \mathbb{R}$ (seinen Koordinaten) schreiben. Wir setzen

$$[x]_{\mathcal{E}} := \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

dann ist $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ ein linearer Isomorphismus von E mit dem $\mathbb{R}^n$. Ist die Basis zusätzlich orthonormal gewählt (i.e. $|e_i| = 1$ und $e_i \perp e_j$ für $i \neq j$), so gilt für die Koordinaten $x^k = \langle x, e_k\rangle$ (denn $\langle x, e_k\rangle = \langle \sum_i x^i e_i, e_k\rangle = \sum_i x^i \langle e_i, e_k\rangle = x^k$) und $|x|^2 = \sum_{k=1}^n (x^k)^2$ und das skalare Produkt hat die Form $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^n x^k y^k$.

Es sei $A : E \to F$ eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ eine geordnete Basis von E und $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ eine geordnete Basis von F. Dann ist A durch seine Werte Ae_j eindeutig bestimmt, und diese ihrerseits durch ihre Koeffizienten a_j^k bzgl. der Basis $\mathcal{F}$, i.e. $Ae_j = \sum_{k=1}^m a_j^k f_k$. Für ein allgemeines $x = \sum_{j=1}^n x^j e_j$ ist

$$A(x) = A\Big(\sum_j x^j e_j\Big) = \sum_j x^j A(e_j) = \sum_j x^j \sum_k a_j^k f_k = \sum_j \Big(\sum_k a_j^k x^j\Big) f_k,$$

d.h.

$$[Ax]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} =: [A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \cdot [x]_{\mathcal{E}}.$$

Wir bezeichnen also die Matrix-Darstellung einer linearen Abbildung $A : E \to F$ bezüglich Basen $\mathcal{E} := (e_1, \dots, e_n)$ von E und $\mathcal{F} := (f_1, \dots, f_m)$ von F mit $[A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$.

Die Abbildung $A \mapsto [A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ liefert dann einen Isomorphismus des Raums $L(E, F)$ aller linearer Abbildungen von E nach F mit den Raum der $n \times m$-Matrizen $L(n, m)$. Ist insbesonders $E = F$ und $A = \mathrm{id}_E$, dann ist $[A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ die Matrix, die als j-te Spalte die Koeffizienten von e_j bzgl. der Basis $(f_j)_j$ besitzt.

Ist zusätzlich $B : F \to G$ linear und $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_k)$ eine Basis von G, dann gilt:

$$[B \circ A]_{\mathcal{E},\mathcal{G}}[x]_{\mathcal{E}} = [BAx] = [B]_{\mathcal{F},\mathcal{G}}[Ax]_{\mathcal{F}} = [B]_{\mathcal{F},\mathcal{G}}[A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}[x]_{\mathcal{E}},$$

also

$$[B \circ A]_{\mathcal{E},\mathcal{G}} = [B]_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \cdot [A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}.$$

Setzt man insbesonders $A = \mathrm{id}$ oder $B = \mathrm{id}$ so erhält man:

$$[A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = [1]_{\bar{\mathcal{F}},\mathcal{F}} \cdot [A]_{\bar{\mathcal{E}},\bar{\mathcal{F}}} \cdot [1]_{\mathcal{E},\bar{\mathcal{E}}}.$$

Ist also R die Abbildung von $e_j \mapsto \bar{e}_j$, dann ist $[R]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = [1]_{\bar{\mathcal{E}},\mathcal{E}}$ und $[R]^{-1}_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = [1]_{\mathcal{E},\bar{\mathcal{E}}}$ und somit

$$[A]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = [1]_{\bar{\mathcal{E}},\mathcal{E}} \cdot [A]_{\bar{\mathcal{E}},\bar{\mathcal{E}}} \cdot [1]_{\mathcal{E},\bar{\mathcal{E}}} = [R]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \cdot [A]_{\bar{\mathcal{E}},\bar{\mathcal{E}}} \cdot [R]^{-1}_{\mathcal{E},\mathcal{E}},$$

also

$$[A]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \cdot [R]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = [R]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \cdot [A]_{\bar{\mathcal{E}},\bar{\mathcal{E}}}.$$

1.2 Bewegungen

Da wir im allgemeinen weder einen Ursprung noch ausgezeichnete Basis-Richtungen gegeben haben, sollten alle Konzepte, die wir in der (Differential-)Geometrie entwickeln werden, invariant unter Bewegungen sein. Als Bewegungen kennen wir Translationen und Drehungen (sowie deren Zusammensetzungen). Diese sind alle längenbewahrend. Ist umgekehrt eine längenbewahrende Abbildung (eine sogenannte Isometrie) $f : E \to E$ gegeben und ist die Abbildung $R : E \to E$ durch $R(x) := f(x) - f(0)$ definiert, dann ist $R(0) = 0$ und für alle x, y ist

$$|R(x) - R(y)|^2 = |f(x) - f(y)|^2 = |x - y|^2$$

Insbesondere ist $|R(x)| = |x|$ (für $y = 0$) und somit gilt:

$$\begin{aligned} 2\langle R(x), R(y)\rangle &= |R(x)|^2 + |R(y)|^2 - |R(x) - R(y)|^2 \\ &= |x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2 = 2\langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

Sei nun $(e_k)_{k=1,\dots,n}$ eine Orthonormalbasis von E. Es ist dann auch $(R(e_k))_{k=1,\dots,n}$ eine Orthonormalbasis, und für $x = \sum_{k=1}^n x^k\, e_k$ ist

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{k=1}^n \langle R(x), R(e_k)\rangle \cdot R(e_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle \cdot R(e_k) = \sum_{k=1}^n x^k R(e_k) \end{aligned}$$

Also ist R linear, i.e.

$$R \in L(E, E) := \Big\{T : T \text{ ist eine lineare Abbildung von E nach E}\Big\}.$$

Weiters folgt aus $\langle R(x), R(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, daß $R^t \circ R = \mathrm{id}_E$ und somit $1 = \det(\mathrm{id}_E) = \det(R^t \circ R) = \det(R)^2$. Also liegt R in der ALLGEMEINEN LINEAREN GRUPPE

$$\begin{aligned} GL(E) &:= \{T \in L(E,E) : T \text{ ist invertierbar}\} \\ &= \{T \in L(E,E) : \det(T) \neq 0\} \end{aligned}$$

und sogar in der ORTHOGONALEN LINEAREN GRUPPE

$$\begin{aligned} O(E) &:= \{T \in GL(E) : T^t \circ T = \mathrm{id}_E\} \\ &= \{T \in L(E,E) : \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \text{ für alle } x \text{ und } y\}. \end{aligned}$$

Auch alle Spiegelungen gehören zu $O(E)$. Eigentliche Bewegungen sollten solche sein, wo man die Punkte im Laufe der Zeit t von der Anfangstellung für $t = 0$ in die Endstellung für $t = 1$ bewegen kann. Wir suchen also nicht nur eine Abbildung f, sondern eine "stetig" durch $t \in [0,1]$ parametrisierte Familie von Bewegungen $f_t : E \to E$ mit $f_0 = \mathrm{id}_E$ und f_1 der gegebene Endwert. Für Translationen $f_b : x \mapsto x + b$ erhalten wir eine stetige Kurve von Bewegungen durch $f_{tb} : x \mapsto x + tb$ und für Drehungen R_φ um den Winkel φ durch $R_{t\varphi}$. Allgemein sollte der translationsfreie Teil $R_t : x \mapsto f_t(x) - f_t(0)$ eine stetige Kurve in $O(E)$ sein. Da die Determinantenfunktion als Polynom stetig ist auf $O(E) \subset L(E,E)$ und Werte in $\{\pm 1\}$ hat, muß sie konstant sein, d.h. $\det(R_1) = \det(R_0) = \det(\mathrm{id}_E) = 1$. Die Abbildung $R \in O(E)$ ist in diesem Fall also sogar ein Element der SPEZIELLEN LINEAREN GRUPPE

$$SO(E) := \{T \in O(E) : \det(T) > 0\},$$

d.h. eine Drehung ist.

$$\begin{tikzcd} & L(E,E) \arrow[r, two heads, "\det"] & \mathbb{R} \\ SL(E) \arrow[r, hook] & GL(E) \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\det"] & \mathbb{R}\setminus\{0\} \arrow[u, hook] \\ SO(E) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & O(E) \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\det"] & \mathbb{Z}_2 \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Für $E := \mathbb{R}^n$ mit der standard-Bilinearform bezeichnet man $SO(E)$ auch als $SO(n)$ und analog für die anderen oben erwähnten Gruppen. Um hingegen z.B. eine Spiegelung an einer Achse in der Ebene zu realisieren können wir die Ebene an dieser Achse im Raum um 180^o drehen, z.B. ist die Spiegelung an der e_1-Achse die Einschränkung von:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & -\sin\pi \\ 0 & \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$$

Dazu müssen wir allerdings den zugrundeliegenden Raum (in diesem Fall die Ebene) verlassen. Bewegungen, bei denen das nicht notwendig ist, sind also die sogenannten ORIENTIERUNGSERHALTENDEN Abbildung, d.h. der linearen Anteil R hat positive Determinante. Zwei geordnete Basen (e_k) und (f_k) heißen gleich orientiert, falls der Basiswechsel (das ist jene lineare Abbildung, welche e_k auf f_k für alle k abbildet) orientierungserhaltend ist. Eine ORIENTIERUNG auf E ist eine Äquivalenzklasse von gleich orientierten Basen. Es gibt also genau zwei Orientierungen auf E, und diese sind durch Angabe einer Basis festgelegt.

Umgekehrt werden wir weiter unten (siehe auch (24.45)) zeigen, daß jedes $R \in SO(n)$ sich durch eine glatte Kurve in $SO(n)$ mit id_E verbinden läßt, d.h. $SO(n)$ wegzusammenhängend ist. Wir haben damit gezeigt, daß die Bewegungen genau die Kompositionen von je einer Translation und einer Drehung sind.

Unter einer eigentlichen Bewegung wollen wir also eine orientierungs- und längenerhaltende Abbildung verstehen. Diese ist von der Form $f : x \mapsto Ax + b$ mit $x \in E$ und $A \in SO(E)$. Die zugehörige Gruppe wird auch als $Ax + b$-Gruppe bezeichnet, siehe (14.2).

Jede Bewegung erhält also abgesehen von einer additiven Konstante:

1. Längen (nach Definition);
2. das innere Produkt (wegen der Polarisierungsformel);
3. Winkel (wegen der Cosinusformel);
4. Linearkombinationen (d.h. ist linear);
5. Volumen (d.h. die Determinante);
6. Orientierung (wegen der Determinante).

1.3 Drehungen. Wie sieht die $SO(n)$ nun aus:

$O(1) = \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2$, $SO(1) = \{1\}$.

$O(2)$: (Siehe auch (14.19)). Sei $A \in SO(2)$, dann ist $A = (Ae_1, Ae_2)$ und $(Ae_i)_{i=1}^n$ ist eine orthonormal Basis. Es ist also $Ae_j \in S^1 := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\}$ und $Ae_1 \perp Ae_2$, d.h. wenn wir $Ae_1 = (a, b)$ setzen, so ist $Ae_2 = \lambda(-b, a)$ und wegen $|Ae_2| = 1 = |Ae_1|$ ist $\lambda = \pm 1$. Schließlich ist $1 = \det(A) = \lambda(a^2 + b^2) = \lambda$. Wir bezeichnen mit $v^\perp$ denjenigen Normalvektor auf v der gleichen Länge wie v, und zwar jenen so daß $(v, v^\perp)$ eine positiv orientierte Basis ist.

Bekanntlich können wir S^1 durch $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$ parametrisieren. Wir wollen nun zeigen, daß die Matrix

$$R_\varphi := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

eine Drehung der Punkte der Ebene um den Winkel φ beschreibt. Anstatt den Punkt zu drehen und dann die Koordinaten des Bild-Punktes im Bezug auf die gegeben Basis zu bestimmen, können wir aber auch die Basis um den Winkel $-t$ drehen, und die Koordinaten des ursprünglichen Punktes bezüglich dieser neuen Basis zu bestimmen. Es ist

(1) (1) $x = x_1 + x_2$

(2) (2) $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$

(3) (3) $y = \bar{y}_2 \cos\varphi$

(4) (4) $x_2 = \bar{y}_2 \sin\varphi$

(5) (5) $\bar{x} = x_1 \cos\varphi$

(6) (6) $\bar{y}_1 = x_1 \sin\varphi$

(7)

und somit sukzessive

$$\begin{aligned}
(3) &\Rightarrow \bar{y}_2 = y\frac{1}{\cos\varphi} \\
(4) &\Rightarrow x_2 = \bar{y}_2 \sin\varphi = y\tan\varphi \\
(5),(1) &\Rightarrow \bar{x} \ \ = x_1\cos\varphi = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\
(6),(1) &\Rightarrow \bar{y}_1 = x_1\sin\varphi = x\sin\varphi - y\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} \\
(2) &\Rightarrow \bar{y} \ \ = x\sin\varphi + y\frac{1-\sin^2\varphi}{\cos\varphi} = x\sin\varphi + y\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Beachte, daß daraus die Additionstheoreme der Winkelfunktionen folgen, denn $R_\varphi \circ R_\psi = R_{\varphi+\psi}$. Man beachte, daß obiger Isomorphismus S^1 zu einer Gruppe macht. Kennen wir diese Gruppenmultiplikation? Ja es ist die Einschränkung der Multiplikation von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Da die Drehungen genau die Zusammensetzungen von je zwei Spiegelungen sind (Die Zusammensetzung zweier Spiegelungen ist die Drehung um den doppelten Winkel der Spiegelungsachsen), wird die Gruppe $O(2)$ der orthogonalen Abbildungen durch die Spiegelungen erzeugt. Genauer gesagt ist jedes $A \in O(2)$ Zusammensetzung von höchstens zwei Spiegelungen, und zwar ist jede Zusammensetzung einer geraden Anzahl von Spiegelungen ein Drehung und für jede ungerade Anzahl eine Spiegelung.

Nun zu $O(3)$. Für jedes $A \in O(E)$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Fix}(A) := \{x \in E : Ax = x\}$ die Menge der Fixpunkte, oder auch den Eigenraum zum Eigenwert 1. Wenn $F := \mathrm{Fix}(A) = E$ ist, dann ist $A = \mathrm{id}_E$. Sei nun $\dim(\mathrm{Fix}(A)) = \dim E - 1$, d.h. es existiert ein $0 \neq v \in E$ mit $F = \{v\}^\perp$. O.B.d.A. dürfen wir $|v| = 1$ annehmen. Da F invariant ist unter A, ist es auch $F^\perp$ und somit ist $Av = \pm v$. Wegen $v \notin F$ ist folglich $Av = -v$, und damit $x - \langle x, v\rangle v \in F$ für alle $x \in E$, denn

$$\langle x - \langle x, v\rangle v, v\rangle = \langle x, v\rangle - \langle x, v\rangle \cdot \langle v, v\rangle = 0.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
Ax &= A\Big((x - \langle x, v\rangle v, v) + \langle x, v\rangle v\Big) = x - \langle x, v\rangle v + \langle x, v\rangle(-v) \\
&= x - 2\langle x, v\rangle v.
\end{aligned}$$

Dies ist also eine Spiegelung um die $F = \{v\}^\perp$-Ebene.

Sei nun $A \in SO(3)$ beliebig und sei $p(\lambda) := \det(\lambda - A)$ das charakteristische Polynom zu A. Es gilt:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(\lambda - A) = \det((\lambda - A)^t) = \det(\lambda - A^t) = \det(\lambda - A^{-1}) \\
&= \det(-\lambda(\frac{1}{\lambda} - A)A^{-1}) = \det(-\lambda) \cdot \det(\frac{1}{\lambda} - A) \cdot \det A^{-1} \\
&= (-\lambda)^n p(\frac{1}{\lambda}),
\end{aligned}$$

d.h. p ist ein reziprokes Polynom und für $\lambda = 1$ und $n = 3$ erhalten wir $2p(1) = 0$. Somit ist 1 immer ein Eigenwert, d.h. $F \neq \{0\}$. Falls also $\dim F = 1$, d.h. $F = \langle v\rangle$ für einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist, dann ist auch die Ebene $\{v\}^\perp$ invariant, und A auf dieser eine Drehung, also ist A eine Drehung um die v-Achse.

Wir erhalten also auch für die Gruppe $O(3)$, daß sie von den Spiegelungen erzeugt wird, und zwar benötigen wir jeweils höchstens 3 Stück.

Man kann allgemein zeigen, daß $O(n)$ von den Spiegelungen erzeugt wird (siehe (14.10)), und das allgemein höchstens n viele benötigt werden. Man kann obige Überlegungen über die Fixpunktmengen auch dazu verwenden das Zentrum der $O(n)$ zu bestimmen, siehe (24.28).

Insbesonders folgt, daß die $SO(n)$ wegzusamenhängend ist, denn jede Drehung läßt sich mit der Identität verbinden.

Jeder Einheitsvektor $v \in S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ zusammen mit $z \in S^1$ bestimmt eine eindeutige Drehung mit Achse v und Winkel z. Also erhalten wir eine surjektive Abbildung $S^2 \times S^1 \to SO(3)$. Diese Abbildung ist nicht injektiv, denn (v, z) und $(-v, -z)$ beschreibt die gleiche Drehung und alle $(v, 1)$ wirken als Identität. Die Zusammensetzung dieser Abbildung mit $\mathrm{id} \times e^{i\pi -} : S^2 \times [-1, 1] \to S^2 \times S^1$ faktorisiert über $S^2 \times [-1, 1] \to \mathbb{D}^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \le 1\}$, $(x, t) \mapsto tx$:

$$\begin{array}{ccc} S^2 \times [-1,1] & \twoheadrightarrow & S^2 \times S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}^3 & \twoheadrightarrow & SO(3) \end{array}$$

Die untere Zeile ist bis auf die Identifizierung $z \sim -z$ für $z \in S^2 = \partial\mathbb{D}^3$ injektiv und ist eine Quotientenabbildung, die den projektiven Raum $\mathbb{P}^3$, den wir in (16.12.5) und (11.9) kennenlernen werden, als Bild hat. Also ist $SO(3) \cong \mathbb{P}^3$.

Die Euler-Winkel, eine Parametrisierung von $SO(3)$ durch $S^1 \times S^1 \times S^1$:
Es sei $R \in SO(3)$ beliebig und $f_j := R(e_j)$ das Bild der Standard-Basis in $\mathbb{R}^3$. Wir wollen nun R als Komposition von 3-Drehungen, die jede eine Koordinaten-Achse fix lassen, darstellen. Es genügt die Werte der Drehungen auf e_1 und e_2 zu beschreiben, denn $e_3 = e_1 \times e_2$ ist der eindeutig bestimmte Vektor, der normal auf e_1 und e_2 steht und zwar so, daß (e_1, e_2, e_3) positiv orientiert ist.

Um e_1 in f_1 zu drehen, müssen wir um eine Achse $k \in \{e_1\}^\perp \cap \{f_1\}^\perp = \langle\{e_2, e_3\}\rangle \cap \langle\{f_2, f_3\}\rangle$ drehen. Um nun noch e_2 in f_2 zu drehen, und dabei die Zuordnung $e_1 \mapsto f_1$ nicht zu zerstören, können wir zuerst um e_1 den Vektor e_2 nach k drehen und zuletzt um f_1 den Vektor k nach f_2 zu drehen.

$$\begin{array}{ccccccc} e_1 & \mapsto & e_1 & \mapsto & f_1 & \mapsto & f_1 \\ e_2 & \mapsto & k & \mapsto & k & \mapsto & f_2 \end{array}$$

Es seien also $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die sogenannten Eulerwinkel von R, welche gegeben sind durch

$$\varphi_1 := \measuredangle e_2 k; \quad \varphi_2 := \measuredangle e_1 f_1; \quad \varphi_3 := \measuredangle k f_2.$$

Dann sehen die Matrizen-Darstellungen der zugehörigen Drehungen R_1, R_2 und R_3 wie folgt aus:

$$[R_1]_{e_1,e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ 0 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$[R_2]_{e_1,k} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & 0 & -\sin\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$[R_1]_{f_1,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 \\ 0 & \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{pmatrix}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} &[R_3 \circ R_2 \circ R_1]_{e_1,e_2,e_3} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ 0 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & 0 & -\sin\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 \\ 0 & \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gibt noch eine schönere Parametrisierung der $SO(3)$, und zwar mittels eines Gruppen-Homomorphismuses $S^3 \to SO(3)$ mit Kern $\mathbb{Z}_2$, siehe (14.19) und (24.40).

2. Grundlegendes über Kurven in der Ebene

In diesem Abschnitt klären wir den Begriff der Kurve und behandeln die ausgezeichneten Parametrisierungen nach der Bogenlänge.

Im folgenden Lemma müssen wir das skalare Produkt $\langle \_, \_ \rangle$ differenzieren. Dazu rufen wir aus der Analysis das folgende Lemma in Erinnerung:

2.1 Lemma (Produktregel). *Es sei $l : E \to F$ eine lineare Abbildung und $b : E_1 \times E_2 \to E$ eine bilineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen. Dann ist die Ableitung von l und die von b gegeben durch*

$$l'(x)(v) = l(v) \quad \textit{und} \quad b'(x_1, x_2)(v_1, v_2) = b(x_1, v_2) + b(v_1, x_2).$$

Beweis. In der Tat ist die (Richtungs-)Ableitung

$$\begin{aligned} l'(x)(v) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} l(x + t \cdot v) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} (l(x) + t \cdot l(v)) = l(v) \qquad \text{und} \\ b'(x_1, x_2)(v_1, v_2) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} b((x_1, x_2) + t\,(v_1, v_2)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} b(x_1, x_2) + t\,(b(x_1, v_2) + b(v_1, x_2)) + t^2\, b(v_1, v_2) \\ &= 0 + b(x_1, v_2) + b(v_1, x_2) + 0 \quad \square \end{aligned}$$

2.2 Definition (Kurven)

Eine parametrisierte Kurve in einem Euklidischen Raum E ist eine Abbildung $c : I \to E$, wobei I ein (zumeist) offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und c genügend oft differenzierbar ist (wir wollen der Einfachheit halber immer unendlich oft differenzierbar voraussetzen) und $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ ist (c heißt dann auch regulär).

Da wir aber im wesentlichen nicht an der Parametrisierung der Kurve, sondern mehr an ihrer geometrischen Gestalt interessiert sind, geben wir noch folgende Definition: Eine geometrische Kurve Γ ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven, wobei $c_0 : I_0 \to E$ und $c_1 : I_1 \to E$ äquivalent heißen, falls ein Diffeomorphismus $\varphi : I_0 \to I_1$ (d.h. φ bijektiv und sowohl φ als auch φ^{-1} glatt sind) existiert, mit $c_1 \circ \varphi = c_0$.

$$\begin{tikzcd} & E & \\ I_0 \arrow[ur, "c_0"] \arrow[rr, dotted, "\varphi"] & & I_1 \arrow[ul, "c_1"'] \end{tikzcd}$$

Eine orientierte geometrische Kurve ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven, wobei c_1 und c_2 äquivalent heißen, falls ein φ wie oben existiert, welches zusätzlich $\varphi'(t) > 0$ für alle t erfüllt (d.h. streng monoton wachsend ist).

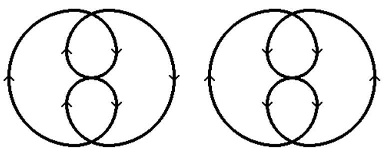
Also ist eine (orientierte) geometrische Kurve durch Angabe einer Parametrisierung, d.h. einer parametrisierten Kurve in dieser Klasse, bereits festgelegt. Wir können uns im folgenden also darauf beschränken, Konzepte für parametrisierte Kurven zu entwickeln, sollten aber immer darauf achten, daß diese Konzepte wirklich geometrischer Natur sind, d.h. nicht von der Auswahl der Repräsentanten (= Parametrisierungen) abhängen und auch invariant unter Bewegungen sind.

Unter dem Bild einer geometrischen Kurve versteht man das Bild einer (jeder) Parametrisierung.

2.3 Bemerkungen

Verschiedene geometrische Kurven können sehr wohl das gleiche Bild besitzen:

1. Der Kreis: $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ wobei man jedes (offene) Intervall der Länge größer als 2π als Parameter Intervall verwenden kann, z.B. also $I_1 := \mathbb{R}$ oder $I_2 :=]0, 3\pi[$.
2. Ein weniger triviales Beispiel ist:



Wir können aber zeigen, daß der Parameter einer parametrisierten Kurve $c : I \to E$ lokal aus den Bildpunkten berechnet werden kann:

Sei dazu $0 \in I$ und $c'(0) \neq 0$. Wir definieren eine glatten Funktion $\Psi : I \times c'(0)^\perp \to E$ durch $\Psi(t, x) := c(t) + x$. Für die partiellen Ableitungen von Ψ erhalten wir $\partial_1\Psi(0, 0) = c'(0)$ und $\partial_2\Psi(0, 0) \cdot v = v$. Bezüglich des linearen Isomorphismuses

$\mathbb{R} \times c'(0)^\perp \cong E$, $(t,x) \mapsto t\,c'(0) + x$, ist die Komponenten-Darstellung der Ableitung von $\Psi'(0,0)$ gegeben durch

$$\Psi'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{c'(0)^\perp} \end{pmatrix},$$

und somit invertierbar. Nach dem inversen Funktionensatz (siehe (10.2)) ist Ψ ein lokaler Diffeomorphismus, d.h. es gibt eine offene Umgebung von 0 (o.B.d.A. der Form $I_1 \times V$ mit $I_1 \subseteq \mathbb{R}$ und $V \subseteq c'(0)^\perp$ offen) und eine offene Umgebung U von $c(0)$, so daß $\Psi : I_1 \times V \to U$ ein Diffeomorphismus ist. Da $\Psi(t,0) = c(t)$ ist, gilt $\Psi^{-1}(c(t)) = (t,0)$ für alle $t \in I_1$. Die Zusammensetzung $p := \mathrm{pr}_1 \circ \Psi^{-1} : U \to I_1 \times V \to I_1$ ist dann eine lokale Linksinverse zu c.

Dies zeigt auch, daß wir den Parameterwechsel in der Definition geometrischer Kurven bloß als Homöomorphismus voraussetzen brauchen, denn er ist dann automatisch ein Diffeomorphismus. In der Tat, wenn für zwei parametrisierte Kurven $c_j : I_j \to E$ mit $(j \in \{0,1\})$ ein Homöomorphismus $\varphi : I_0 \to I_1$ mit $c_1 \circ \varphi = c_0$ gegeben ist, dann finden wir für jedes $t_0 \in I_0$ eine Umgebung U von $c_0(t_0) = c_1(\varphi(t_0))$ und V von $\varphi(t_0)$ und ein glattes linksinverses p zu $c_1 : V \to U$. Somit ist aber $\varphi = p \circ c_1 \circ \varphi = p \circ c_0$ auf $\varphi^{-1}(V)$ und somit glatt auf der (wegen der Stetigkeit von φ) offenen Umgebung $\varphi^{-1}(V)$ von t_0.

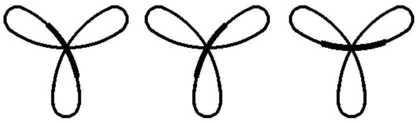
$$\begin{tikzcd}
 & & E & & \\
 & & U \arrow[u, hook] \arrow[d, "p"] & & \\
 & & V & & \\
 & \varphi^{-1}(V) \arrow[uur] \arrow[ur, "\varphi|_{\varphi^{-1}V}"] \arrow[rr, "\varphi|_{\varphi^{-1}V}"'] \arrow[dl, hook] & & V \arrow[ul, equal] \arrow[uul] \arrow[dr, hook] & \\
I_0 \arrow[uuuurr, "c_0"] \arrow[rrrr, "\varphi"'] & & & & I_1 \arrow[uuuull, "c_1"']
\end{tikzcd}$$

2.4 Definition (Punkte geometrischer Kurven)

Ein Punkt auf einer geometrischen Kurve Γ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (c,t) mit $c \in \Gamma$ (d.h. $c : I \to E$ ist eine Parametrisierung von Γ) und $t \in I$, wobei $(c_1,t_1) \sim (c_2,t_2) :\Leftrightarrow$ es existiert ein Diffeomorphismus $\varphi : I_2 \to I_1$ mit $c_2 = c_1 \circ \varphi$ und $\varphi(t_2) = t_1$.

Unter der Vielfachheit eines Punktes versteht man die Kardinalität der Menge $\{t' : c(t') = c(t)\}$ für einen (jeden) Repräsentanten (c,t). Ein Punkt mit Vielfachheit $1, 2, \ldots$ heißt einfacher Punkt, Doppelpunkt,….

Ein Punkt läßt sich am besten als ein Zweig der Kurve durch einen Bildpunkt vorstellen:



Die TANGENTE an eine parametrisierte Kurve c im Punkt t ist die affine Gerade $c(t) + \mathbb{R} \cdot c'(t)$.

2.5 Lemma. *Die Tangente ist ein geometrisches Konzept, d.h. reparametrisierungsinvariant und auch invariant unter Bewegungen.*

Beweis. Zuerst zeigen wir die Invarianz unter Reparametrisierungen. Seien (c, t) und $(\bar{c}, \bar{t})$ zwei Repräsentanten des gleichen Punktes einer geometrischen Kurve, und φ ein zugehöriger Parameterwechsel, d.h. $\bar{c} = c \circ \varphi$ und $t = \varphi(\bar{t})$. Die Tangente von $\bar{c}$ in $\bar{t}$ ist die von c in t, denn $\bar{c}(\bar{t}) + \mathbb{R} \cdot \bar{c}'(\bar{t}) = c(\varphi(\bar{t})) + \mathbb{R} \cdot (c \circ \varphi)'(\bar{t}) = c(t) + \mathbb{R} \cdot c'(\varphi(\bar{t})) \cdot \varphi'(\bar{t}) = c(t) + \mathbb{R} \cdot c'(t)$ (man verwende $\mathbb{R} \cdot \varphi'(\bar{t}) = \mathbb{R}$).

Nun zur Bewegungs-Invarianz: Sei $x \mapsto R(x) + a$ eine Bewegung und (c, t) ein Punkt einer Kurve. Die bewegte Kurve ist dann $\bar{c} : t \mapsto R(c(t)) + a$. Die bewegte Tangente von c in t ist die Tangente der bewegten Kurve $\bar{c}$, denn

$$\begin{aligned} R(c(t) + \mathbb{R} \cdot c'(t)) + a = R(c(t)) + a + \mathbb{R} \cdot R(c'(t)) &= \\ = (R(c(t)) + a) + \mathbb{R} \cdot (R \circ c)'(t) &= \bar{c}(t) + \mathbb{R} \cdot \bar{c}'(t) \end{aligned}$$

(man verwende die Kettenregel und $R'(x)(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} R(x + t \cdot v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (R(x) + t \cdot R(v)) = R(v)$, da R linear ist). □

2.6 Definition (Tangentialvektor und Länge)

Der EINHEITSTANGENTIALVEKTOR $\tau(t)$ im Punkt einer parametrisierten Kurve ist definiert durch $\tau(t) := \frac{c'(t)}{|c'(t)|}$. Für die Wohldefiniertheit verwenden wir die Regularität der Kurve, d.h. $c'(t) \neq 0$. Man beachte, daß auch dieser ein geometrisches Konzept für orientierte geometrische Kurven darstellt, dazu muß man allerdings beachten, daß $c(t)$ zum Euklidischen Raum und $c'(t)$ hingegen zum zugehörigen Vektorraum gehört.

Sei $c : I \to E$ eine Kurve, $[a, b] \subset I$ ein abgeschlossenes Teilintervall, und $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < \cdots < t_m = b\}$ eine Zerlegung, dann ist $L_a^b(c, \mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^m |c(t_i) - c(t_{i-1})|$ die Länge des Polygonzuges durch die Punkte $c(t_i)$. Die LÄNGE der Kurve von a bis b ist definiert als $L_a^b(c) := \sup_{\mathcal{Z}} L_a^b(c, \mathcal{Z})$. Für $a > b$ ist $L_a^b(c) := -L_b^a(c)$ und es gilt: $L_{a_1}^{a_3}(c) = L_{a_1}^{a_2}(c) + L_{a_2}^{a_3}(c)$.

2.7 Lemma (Länge als Integral). *Sei $c : I \to E$ eine Kurve (C^1 würde genügen) und $[a, b] \subset I$, dann gilt: $L_a^b(c) < \infty$, $L_a^b(c) = \int_a^b |c'(t)| dt$ und $\frac{\partial}{\partial t} L_a^t(c) = |c'(t)|$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß die Länge endlich ist:

$$\begin{aligned} L_a^b(c,\mathcal{Z}) &= \sum_{i=1}^m |c(t_i)-c(t_{i-1})| \overset{\text{1.HS}}{=\!=} \sum_{i=1}^m \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} c'(t)dt \right| \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \\ &\leq \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(t)|dt = \int_a^b |c'(t)|dt \\ \Rightarrow L_a^b(c) &\leq \int_a^b |c'(t)|dt < \infty. \end{aligned}$$

Nun zur Ableitung:

$$\left|\frac{c(t+h)-c(t)}{h}\right| \leq \left|\frac{L_t^{t+h}(c)}{h}\right| = \left|\frac{L_a^{t+h}(c)-L_a^t(c)}{h}\right| \leq \left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} |c'(t)|dt\right|$$

Beide Seiten dieser Ungleichung konvergieren gegen $|c'(t)|$ für $h \to 0$, also auch der mittlere Term, d.h. $\frac{\partial}{\partial t}L_a^t(c) = |c'(t)|$.

Weiters gilt wiederum wegen des ersten Hauptsatzes $L_a^b(c) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}L_a^t(c)dt = \int_a^b |c'(t)|dt$. □

Da die Bogenlänge unter Reparametrisierungen und Bewegungen invariant ist, ist sie ebenfalls geometrisches Konzept.

2.8 Definition (Parametrisierung nach der Bogenlänge)

Eine Parametrisierung c einer Kurve heißt PARAMETRISIERUNG NACH DER BOGENLÄNGE falls $|c'(t)| = 1$ für alle t. Für die Länge bezüglich solcher Parametrisierungen gilt also $L_a^b(c) = b - a$.

2.9 Satz (Bogenlängenparametrisierung).
Jede geometrische Kurve besitzt eine solche Parametrisierung. Je zwei Parametrisierungen nach der Bogenlänge der gleichen Kurve sind über einen Parameterwechsel der Form $t \longmapsto \pm t + a$ äquivalent.

Beweis. Zur Existenz: Sei $c : I \to E$ eine Parametrisierung einer Kurve, a ein Punkt im Intervall I. Dann definiert $s(t) := L_a^t(c)$ die differenzierbare Längenfunktion $s : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, mit $s'(t) = |c'(t)| > 0$. Insbesonders ist $s(I)$ zusammenhängend und somit wieder ein Intervall. Die Umkehrfunktion $\varphi : s(I) \to I$, $s \longmapsto t(s)$ ist C^∞, da die Norm C^∞ auf $E \setminus \{0\}$ ist. Die Parametrisierung $\bar{c} := c \circ \varphi$ ist die gesuchte Parametrisierung nach der Bogenlänge, da

$$\frac{d\bar{c}}{ds} = \frac{dc}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{dc}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{dc}{dt}\cdot\frac{1}{|c'(t)|} = \frac{dc}{dt}\cdot\frac{1}{|\frac{dc}{dt}|}.$$

Zur Eindeutigkeit: Seien c, $c\circ\varphi$ zwei Parametrisierungen nach der Bogenlänge, dann gilt:

$$1 = |(c\circ\varphi)'(t)| = |c'(\varphi(t))|\cdot|\varphi'(t)| = |\varphi'(t)|,$$

da $|(c\circ\varphi)'(t)| = 1 = |c'(\varphi(t))|$. Es folgt: $|\varphi'(t)| = 1$ für alle t, also $\varphi' = \pm 1$. Wir erhalten schließlich $\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi'(r)dr = \varphi(0) \pm t$ □

Beispiel

Betrachten wir einen Kreis $c : t \mapsto r(\cos t, \sin t) + M$. Für $s(t) := L_0^t(c)$ erhalten wir mit $|c'(t)| = r$ nach kurzer Rechnung $s(t) = \int_0^t |c'(x)|dx = t \cdot r$. Also ist die Umkehrfunktion $s \mapsto t(s) = \frac{s}{r}$, und eine Bogenlängenparametrisierung ist $s \mapsto c(t(s)) = r(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r}) + M$. Der Einheitstangentialvektor ist $\tau(s) = (-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r})$.

2.10 Lemma. *Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve c gilt $c''(s) \perp c'(s)$ für alle s.*

Beweis. Wir differenzieren die Gleichung $1 = |c'(s)|^2 = \langle c'(s), c'(s)\rangle$ und erhalten $0 = \langle c''(s), c'(s)\rangle + \langle c'(s), c''(s)\rangle = 2\langle c'(s), c''(s)\rangle$. Also gilt $c''(s) \perp c'(s)$ für alle s. □

3. Krümmung von Kurven in der Ebene

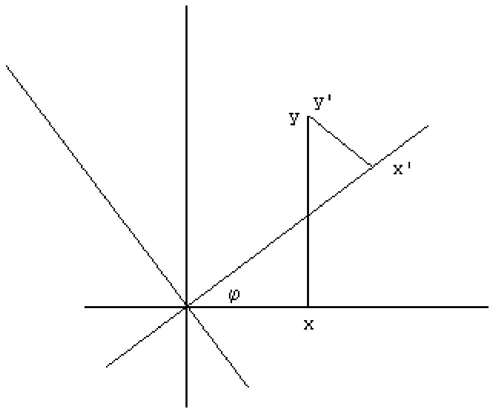
In diesem Abschnitt wird der zentrale Begriff der Krümmung für ebene Kurven studiert.

3.1 Normalvektor

Sei $R \in SO(\mathbb{R}^2) = \{T \in GL(E) : \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle x, y und $\det(T) > 0\}$. Da die Matrix-Eintragungen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ von R gerade die Komponenten von $R(e_1)$ und $R(e_2)$ bezüglich der Basis (e_1, e_2) sind, muß $a^2 + c^2 = |R(e_1)|^2 = 1$, $b^2 + d^2 = |R(e_2)|^2 = 1$ und $ab + cd = \langle R(e_1), R(e_2)\rangle = 0$ gelten. Also ist (a, c) ein Einheits-Vektor und (b, d) einer der beiden Einheits-Normalvektoren $\pm(-c, a)$ an (a, c), und zwar jener mit $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) > 0$, d.h. $(b, d) = (-c, a)$. Die Abbildung $R \in SO(\mathbb{R}^2)$ läßt sich also in der Form

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

schreiben, mit einem eindeutig bestimmten $\varphi \in [0, 2\pi[$. Dies ist genau die Drehung der Punkte der Ebene um den Winkel φ (oder des Achsenkreuzes (d.h. der Basis) um den Winkel $-\varphi$), wie sofort aus den Additionstheorem für die Winkelfunktionen folgt:



So eine Drehung bildet die Polarkoordinaten (r, ψ) auf $(r, \psi + \varphi)$ ab, und somit gilt für die kartesischen Koordinaten $x = r\cos\psi$, $y = r\sin\psi$ folgendes:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}r\cos(\psi+\varphi)\\ r\sin(\varphi+\varphi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cdot r\cdot\cos\psi - \sin\varphi\cdot r\cdot\sin\psi\\ \sin\varphi\cdot r\cdot\cos\psi + \cos\varphi\cdot r\cdot\sin\psi\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\varphi\cdot x - \sin\varphi\cdot y\\ \sin\varphi\cdot x + \cos\varphi\cdot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Insbesonders erhalten wir für jedem Vektor $x \neq 0$ im $\mathbb{R}^2$ den eindeutig bestimmten Vektor $x^\perp$, welcher normal auf x steht, gleiche Länge wie x hat und links von x liegt (d.h. $(x, x^\perp)$ ist positiv orientiert), durch eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ von x:

$$x^\perp = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x^2\\ x^1\end{pmatrix}.$$

Definition

Unter dem Einheitsnormalvektor ν an eine parametrisierte Kurve c in Punkte t versteht man $\nu(t) := \tau(t)^\perp$. Wie der Tangentialvektor ist auch der Einheitsnormalvektor ein geometrisches Konzept für orientierte Kurven.

3.2 Definition (Krümmung)

Da ein Kreis umso stärker gekrümmt ist, je kleiner der Radius r ist, wollen wir als Maß für die Krümmung K des Kreises den Kehrwert $\frac{1}{r}$ verwenden. Falls der Kreis positiv orientiert ist, also eine Linkskurve beschreibt, sei seine Krümmung positiv, andernfalls negativ. Eine Gerade kann man als Grenzfall eines Kreises für $r \to \infty$ betrachten, und die entsprechende Definition für ihre Krümmung als $K := \frac{1}{\infty} = 0$ stimmt auch mit der Anschauung der nicht-Gekrümmtheit überein.

Wir können den Mittelpunkt M eines Kreises aus den ersten paar Ableitungen beim Punkt s einer Bogenlängenparametrisierung $k(s) = r(\cos\frac{\pm s}{r}, \sin\frac{\pm s}{r}) + M$ errechnen:

$$\begin{aligned}&k'(s) = \pm(-\sin\tfrac{\pm s}{r}, \cos\tfrac{\pm s}{r}) = \tau(s), \quad k''(s) = -\tfrac{1}{r}(\cos\tfrac{\pm s}{r}, \sin\tfrac{\pm s}{r}) \quad \Rightarrow\\ \Rightarrow \quad &|k''(s)| = \tfrac{1}{r} = \pm K \quad \text{und}\\ &M = k(s) - r(\cos\tfrac{\pm s}{r}, \sin\tfrac{\pm s}{r}) = k(s) + k''(s)\cdot r^2 = k(s) + \frac{k''(s)}{|k''(s)|^2}.\end{aligned}$$

Sei allgemeiner c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c''(s) \neq 0$. Unter dem Krümmungskreis im Punkt s versteht man jenen Kreis k, welcher c bei s von Ordnung 2 berührt, d.h. $c(s) = k(s)$, $c'(s) = k'(s)$ und $c''(s) = k''(s)$. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist wegen obiger Formel durch $M = k(s) + \frac{k''(s)}{|k''(s)|^2} = c(s) + \frac{c''(s)}{|c''(s)|^2}$ gegeben und sein Radius ist $r = \frac{1}{|c''(s)|}$. Mittels diesen Ansatzes folgt auch seine Existenz.

Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte (wohldefiniert, wo $|c''| \neq 0$) heißt Evolute. Unter der Krümmung $K(s)$ der Kurve c bei s versteht man die Krümmung des Krümmungskreises.

Für den Krümmungskreis gilt: $c''(s) = k''(s) = K(s) \cdot \nu(s)$, wo $\nu(s)$ die Einheitsnormale an k bzw. c und $K(s)$ die Krümmung ist. Nach dem Newtonschen Gesetz "Kraft = Masse × Beschleunigung" mißt $K(s)$ die (skalare Größe der) Kraft, die nötig ist, um den, mit skalarer Geschwindigkeit $|c'(s)| = 1$ bewegten Punkt (mit Einheitsmasse) auf der Kurve zu halten.

Wir können also K als den Koeffizienten von $\tau' = c''$ bzgl. des zweiten Vektors ν des Begleitbeins (τ, ν) auffassen. Wenn wir diese Gleichung $\tau' = K \cdot \nu$ mit einer Rotation R um $\pi/2$ drehen, dann erhalten wir

$$\nu' = R(\tau)' = R(\tau') = R(K \cdot \nu) = K \cdot R(\nu) = K \cdot R^2(\tau) = -K \cdot \tau.$$

Zusammen sind das die sogenannten Frenet'schen Ableitungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \tau' &= K \cdot \nu \\ \nu' &= -K \cdot \tau, \end{aligned}$$

die die Ableitung des Begleitbeins in der Basis, welche durch das Begleitbein gegeben ist, ausdrücken.

Mit $c(s) =: (x(s), y(s))$ ergibt sich folgende explizite Formel für die Krümmung

$$\begin{aligned} K(s) &= \langle K(s) \cdot \nu(s), \nu(s) \rangle = \langle c''(s), \nu(s) \rangle \\ &= \langle c''(s), \tau(s)^\perp \rangle \\ &= \det(c'(s), c''(s)), \end{aligned}$$

denn

$$\det(x, y) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \\ = \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle y, x^\perp \rangle.$$

Falls c nicht nach der Bogenlänge parametrisiert ist, sei $t \mapsto s(t)$ die Bogenlängenfunktion und $\bar{c} = c \circ s^{-1}$ die Reparametrisierung nach der Bogenlänge. In diesem Fall erhalten wir für die Krümmung:

$$\begin{aligned} K_{\bar{c}}(s) &= \det(\bar{c}'(s), \bar{c}''(s)) = \det\left(c'(t) \tfrac{1}{s'}, \left(c''(t) - c'(t) \tfrac{1}{s'} s''\right) \tfrac{1}{(s')^2}\right) \\ &= \tfrac{1}{(s')^3} \det(c'(t), c''(t)) + 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow K_c(t) = K_{\bar{c}}(s(t)) &= \frac{\det(c'(t), c''(t))}{|c'(t)|^3} = \frac{\langle c'(t)^\perp, c''(t) \rangle}{|c'(t)|^3}, \end{aligned}$$

wobei wir Folgendes verwendeten: $c = \bar{c} \circ s$, $c' = (\bar{c}' \circ s) s'$, $c'' = (\bar{c}'' \circ s)(s')^2 + (\bar{c}' \circ s) s''$ und $\det(x, y) = \langle y, x^\perp \rangle$.

Wir wollen nun zeigen, daß der Krümmungkreis unter Bewegungen invariant ist. Dazu genügt es, die Invarianz des Mittelpunktes

$$M = c(s) + \frac{c''(s)}{|c''(s)|^2} = c(s) + \frac{K(s)\nu(s)}{|K(s) \cdot 1|^2} = c(s) + \frac{\nu(s)}{K(s)}$$

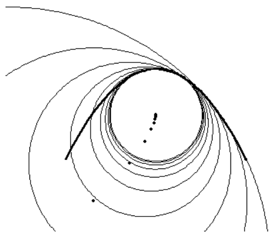
zu zeigen: Sei c nach der Bogenlänge parametrisiert und sei $\bar{c}(t) = R(c(t)) + a$ die durch $x \mapsto Rx + a$ bewegte Kurve. Die Krümmung von $\bar{c}$ ist dann:

$$\begin{aligned} K_{\bar{c}}(t) &= \det(\bar{c}'(t), \bar{c}''(t)) = \det\big(R(c'(t)), R(c''(t))\big) \\ &= \det\big(R(c'(t), c''(t))\big) = \det R \cdot \det(c'(t), c''(t)) = K_c(t), \end{aligned}$$

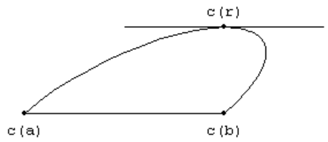
da $\det R = +1$. Somit ist die Krümmung invariant und damit auch der Mittelpunkt.

3.3 Lemma (Krümmungskreis als Limes). *Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, $c''(s) \neq 0$. Für je drei verschiedene Punkte s_1, s_2, s_3 sei $M(s_1, s_2, s_3)$ der Mittelpunkt des Kreises durch die Punkte $c(s_1), c(s_2), c(s_3)$ und $M(s)$ der Mittelpunkt des Krümmungskreises von c.*

Dann gilt: $M(s_1, s_2, s_3) \to M(s)$ für $s_1, s_2, s_3 \to s$. Gleiches gilt auch für die Radien.



3.4 Sublemma. *Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Sei $w \neq 0$ ein Richtungsvektor einer Geraden durch $c(a)$ und $c(b)$. Dann existiert ein $r \in\,]a, b[$ für das $c'(r)$ ein skalares Vielfaches von w ist.*



Beweis des Sublemmas. Sei $w \neq 0$ ein Richtungsvektor einer Geraden durch $c(a)$ und $c(b)$ und $\nu := w^\perp$, d.h. $\langle \nu, c(b) - c(a)\rangle = 0$. Also erfüllt $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(t) := \langle c(t) - c(a), \nu\rangle$ die Randbedingungen $g(a) = 0 = g(b)$. Aus dem Satz von Rolle folgt: $\exists\, r \in\,]a, b[\, : 0 = g'(r) = \langle c'(r), \nu\rangle$. Somit ist $c'(r) \perp \nu \perp w$, d.h. $c'(r) \parallel w$. □

Wir kommen nun zu dem eigentlichen Beweis des Lemmas:

Beweis. Angenommen es existieren $s_1 < s_2 < s_3$ beliebig nahe an s, sodaß $c(s_1)$, $c(s_2)$, $c(s_3)$ auf einer Geraden mit dem Richtungsvektor ν liegen. Aus dem Sublemma folgt, daß $s_{1,2}$ und $s_{2,3}$ existieren mit $s_1 < s_{1,2} < s_2 < s_{2,3} < s_3$ und $c'(s_{1,2}) \parallel \nu \parallel c'(s_{2,3})$. Also ist $c'(s_{1,2}) = \lambda c'(s_{2,3})$ mit einen $\lambda = \pm 1$, da $|c'| = 1$. Falls $\lambda = -1$ für beliebig nahe $s_1 < s_2 < s_3$, dann ist $c'(s_{1,2}) = -c'(s_{2,3})$. Da die linke Seite gegen $c'(s)$, die rechte Seite aber gegen $-c'(s)$ strebt, ist dies ein Widerspruch zur Voraussetzung $c'(s) \neq 0$, d.h. $\lambda = +1$ und somit $c'(s_{1,2}) = c'(s_{2,3})$. Es konvergiert also $0 = \frac{c'(s_{1,2}) - c'(s_{2,3})}{s_{1,2} - s_{2,3}} \to c''(s) \neq 0$, das ist ein Widerspruch. Demnach ist $M(s_1, s_2, s_3)$ für s_1, s_2, s_3 nahe s wohldefiniert.

Sei nun $h : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(t) := |c(t) - M(s_1, s_2, s_3)|^2$. Dann ist $h(s_1) = h(s_2) = h(s_3)$ und nach dem Mittelwertsatz existieren $s_{1,2}$ und $s_{2,3}$ mit $h'(s_{1,2}) =$

$0 = h'(s_{2,3})$ und weiters existiert ein $s_{1,2,3}$ mit $h''(s_{1,2,3}) = 0$. Die Ableitungen von h sind:

$$h' = 2\langle c', c - M\rangle$$
$$h'' = 2\Big(\langle c'', c - M\rangle + \langle c', c'\rangle\Big).$$

Wir erhalten zwei implizite Gleichung für M:

$$\langle c'(s_{1,2}), c(s_{1,2})\rangle = \langle c'(s_{1,2}), M(s_1, s_2, s_3)\rangle$$
$$\langle c''(s_{1,2,3}), c(s_{1,2,3})\rangle + 1 = \langle c''(s_{1,2,3}), M(s_1, s_2, s_3)\rangle.$$

Sei $A(t_1, t_2)$ die Matrix $(c'(t_1), c''(t_2))$ (wobei wir $c'(t_1)$ und $c''(t_2)$ als Zeilenvektoren auffassen). Dann können wir (*) wie folgt schreiben:

$$A(s_{1,2}, s_{1,2,3}) \cdot M(s_1, s_2, s_3) = \begin{pmatrix} \langle c'(s_{1,2}), c(s_{1,2})\rangle \\ \langle c''(s_{1,2,3}), c(s_{1,2,3})\rangle + 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $s_1, s_2, s_3 \to s$ konvergiert $A(s_{1,2}, s_{1,2,3})$ gegen $A(s,s) = (c'(s), c''(s))$ in $L(\mathbb{R}^2)$. Also ist auch $A(s_{1,2}, s_{1,2,3})$ invertierbar für s_1, s_2, s_3 nahe s und $A(s_{1,2}, s_{1,2,3})^{-1} \to A(s,s)^{-1}$. Somit konvergiert $M(s_1, s_2, s_3)$ gegen

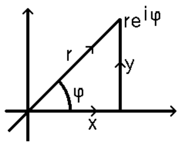
$$A(s,s)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \langle c'(s), c(s)\rangle \\ \langle c''(s), c(s)\rangle + 1 \end{pmatrix} =: M(s).$$

Unter Verwendung von (*) erhalten wir:

$$\langle c'(s), M(s) - c(s)\rangle = 0 \Rightarrow M(s) - c(s) = \lambda\nu(s) \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\langle c''(s), c(s) - M(s)\rangle = -1 \Rightarrow -1 = \langle c''(s), -\lambda\nu(s)\rangle = \langle K(s)\nu(s), -\lambda\nu(s)\rangle =$$
$$= -K(s)\lambda|\nu(s)|^2 = -K(s)\lambda$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{K(s)} \quad \text{und} \quad M(s) = c(s) + \frac{\nu(s)}{K(s)}. \qquad \square$$

3.5 Polarkoordinaten versus kartesische Koordinaten

Aus den Grundvorlesungen kennen wir die Abbildung p, die den POLARKOORDINATEN $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ die KARTESISCHEN KOORDINATEN $(x, y) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ zuordnet.



Wir wollen nun umgekehrt Punkten im $\mathbb{R}^2$, gegeben in kartesischen Koordinaten, zugehörige Polarkoordinaten auf differenzierbare Weise zuordnen.

Die Ableitung von p ist durch $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$ gegeben und ist für $r = 0$ nicht invertierbar. Also ist dieses Problem lokal um $0 \in \mathbb{C}$ nicht lösbar, deshalb nehmen wir 0 aus, d.h. wir betrachten die Einschränkung von $p : (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Diese Einschränkung ist nach dem Inversen-Funktionensatz lokal ein Diffeomorphismus. Sie ist aber nur lokal injektiv. Um sie global injektiv zu machen schränken wir sie weiter zu einer Abbildung $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein. Noch immer ist der Winkel φ aber nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π festgelegt. Also müssen wir φ auf ein Intervall der Länge 2π beschränken - damit wir leicht von Differenzierbarkeit sprechen können - auf ein offenes Intervall. Bei gegebenem $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ sei dieses Intervall $]\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi[$. Dann ist $p : \mathbb{R}^+ \times]\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi[\to \mathbb{C} \setminus \{te^{i\varphi_0} : t \leq 0\}$ ein Diffeomorphismus. Das Bild bzgl. p ist die (komplexe) Ebene ohne einen Halbstrahl. Wir können sogar explizit die Umkehrfunktion $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ bzw. $\varphi = \operatorname{arccot}(\frac{x}{y})$ angeben, wenn wir für arctan und arccot den passenden Zweig wählen.

3.6 Lemma (Krümmung als Richtungsänderung). *Sei $c : I \to \mathbb{C}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c' : I \to S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Sei $s_0 \in I$ und $\theta : I \to \mathbb{R}$ für s nahe s_0 eine differenzierbare Lösung von $e^{i\theta(s)} = c'(s)$. Dann folgt $K(s) = \theta'(s)$. Das bedeutet, daß die Krümmung K die infinitesimale Änderung des Winkels der Tangente mißt.*

Beweis. Durch Differenzieren der Gleichung $c'(s) = e^{i\theta(s)}$ erhält man $c''(s) = i\theta'(s)e^{i\theta(s)} = \theta'(s)ic'(s) = \theta'(s)\nu(s)$, das ist aber die implizite Gleichung für die Krümmung $\Rightarrow K(s) = \theta'(s)$. □

Zusammenfassung

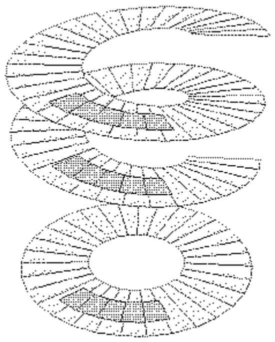
Die Krümmung einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve kann aufgefaßt werden als:

1. Der Kehrwert $\frac{1}{r} = |c''(s)| = |K(s)|$ des Radius r des Krümmungskreises, d.h. jenes Kreises, der c am besten approximiert, versehen mit einen Vorzeichen welches sich daraus ergibt ob der Krümmungskreis positiv oder negativ orientiert ist, siehe (3.2).
2. Der skalare Wert der Beschleunigung $c''(s) = K(s)\nu(s)$, siehe (3.2).
3. Die infinitesimale Änderung des Winkels der Tangente $K(s) = \theta'(s)$, nach Lemma (3.6).

3.7 Polarkoordinaten als Überlagerung

Wir wollen nun das globale Verhalten der Polarkoordinaten untersuchen. Sei $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ wie in (3.5) die Abbildung $(r, \varphi) \mapsto re^{i\varphi}$, die Polarkoordinaten kartesische Koordinaten zuordnet.

Definition. In der Topologie nennt man eine stetige Abbildung $p : X \to Y$ zwischen Hausdorffräumen eine ÜBERLAGERUNG, falls eine Überdeckung von Y mit offenen sogenannten TRIVIALISIERENDEN MENGEN $U \subset Y$ existiert, sodaß $p^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen U_j, genannt BLÄTTER, mit $j \in J$ ist und $p|_{U_j} : U_j \to U$ ein Homöomorphismus für alle U und alle $j \in J$ ist. Falls die Kardinalität κ der Indexmenge J nicht von U abhängt, bezeichnet man $p : X \to Y$ auch als eine κ-BLÄTTRIGE ÜBERLAGERUNG.



Das Urbild $p^{-1}(U)$ ist dann die topologische Summe seiner Blätter, denn eine Teilmenge $V \subseteq p^{-1}(U)$ ist genau dann offen, wenn $V \cap U_j$ offen ist für alle $j \in J$.

Sei $c : I \to X$ eine stetige Kurve für welche $(p \circ c)(I)$ ganz in einer trivialisierenden Umgebung U liegt, so ist $c(I)$ ganz in einem Blatt über U enthalten, denn die zusammenhängende Menge $c(I)$ kann nicht verschiedene Summanden der topologischen Summe $\bigsqcup_{j \in J} U_j$ treffen.

Längs Überlagerungen lassen sich Kurven liften:

3.8 Lemma (Liftung von Kurven). *Sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung, $c : I \to Y$ eine stetige Kurve mit $0 \in I$ und sei $x_0 \in p^{-1}(c(0))$. Dann existiert eine eindeutige stetige Kurve $\tilde{c} : I \to X$ genannt* Lift *von c mit $p \circ \tilde{c} = c$ und $\tilde{c}(0) = x_0$.*

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "x_0"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[r, "c"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{c}"] & Y \end{tikzcd}$$

Beweis. Zuerst die Eindeutigkeit: Seien c_1 und c_2 zwei Lifts. Dann ist $0 \in T := \{t \in I : c_1(t) = c_2(t)\}$ und T ist abgeschlossen. Zu einem $t \in T$ sei U eine trivialisierende Umgebung von $c(t)$ und U_0 das Blatt über U, welches $c_1(t) = c_2(t)$ enthält. Da c_1 und c_2 stetig sind, haben sie für t' nahe t Werte in U_0, und da $p : U_0 \to U$ eine Bijektion ist, ist $c_1(t') = (p|_{U_0}^{-1} \circ c)(t') = c_2(t')$ für diese t'. Also ist T offen. Weil I ein Intervall und somit zusammenhängend ist, stimmt T mit I überein, d.h. $c_1 = c_2$.

Nun zur Existenz: Sei

$$T := \{t \in I : \text{Ein Lift } \tilde{c} \text{ von } c \text{ auf der Strecke von } 0 \text{ nach } t \text{ existiert}\}.$$

Klarerweise ist $0 \in T$ und T ein Intervall. Wir zeigen, daß T keinen Rand in I besitzt. Angenommen $t \in I$ wäre ein Randpunkt von T, o.B.d.A. $t \geq 0$. Sei U eine trivialisierende Umgebung von $c(t)$, dann ist $c(t') \in U$ für t' nahe t. Sei U_0 jenes (eindeutige) Blatt über U welches $\tilde{c}(t')$ enthält für alle hinreichend nahen $t' < t$ (bzw. im Falle $t = 0$ den Punkt x_0). Dann läßt sich $\tilde{c}$ durch $p|_{U_0}^{-1} \circ c$ lokal um t (eindeutig) fortsetzen, und somit ist t kein Randpunkt von T; ein Widerspruch. □

3.9 Folgerung. *Sei $c : I \to S^1$ eine stetige Kurve, dann existiert ein stetiger Lift $\bar{c} : I \to \mathbb{R}$, d.h. $e^{i\bar{c}(t)} = c(t)$ für alle $t \in I$. Ist $t_0 \in I$, so ist $\bar{c}$ eindeutig durch Angabe von $\bar{c}(t_0) \in \mathbb{R}$ mit $e^{i\bar{c}(t_0)} = c(t_0)$ bestimmt. Falls c glatt ist, so auch $\bar{c}$.*

Beweis. Offensichtlich beschreibt $\theta \mapsto e^{i\theta}$ jene Überlagerung $\mathbb{R} \to S^1$, die aus der in (3.5) durch Polarkoordinaten gegebenen Überlagerung $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ durch Einschränkung auf $\mathbb{R} \cong \{1\} \times \mathbb{R} = p^{-1}(S^1) \to S^1$ gegeben ist. Also haben wir die Liftungseigenschaft nach (3.8). Die Glattheit von $\tilde{c}$ folgt, da p ein lokaler Diffeomorphismus ist.

Wir geben nun einen zweiten direkteren Beweis, der auch gleichzeitig die Glattheit des Liftes liefert.

Zuerst eine Vorbemerkung: Sei $\bar{c}$ ein Lift von c. Wegen der Stetigkeit von c existiert ein $\delta > 0$ mit $|c(t) - c(t_0)| < 2$ für alle $|t - t_0| < \delta$. Dann ist $|\bar{c}(t) - \bar{c}(t_0)| < \pi$ für diese t, denn wäre es größer als π für ein t so nach dem Zwischenwertsatz auch gleich π für ein anderes t und somit $c(t) = \pm ic(t_0)$ also $|c(t) - c(t_0)| = 2$, Widerspruch. Also ist $\bar{c}(t) = \varphi(c(t))$ für $|t - t_0| < \delta$, mit φ wie in (3.5) und Anfangswert $\varphi_0 = \bar{c}(t_0)$.

Nun zeigen wir die Eindeutigkeit lokaler Lifts: Seien $c_j : I_j \to \mathbb{R}$ zwei Lifts von $c|_{I_j}$ für $j = 1, 2$, wobei $I_j \ni t_0$ ein offenes Teilintervall von I ist. Sei $X := \{t \in I_1 \cap I_2 : c_1(t) = c_2(t)\}$. Wir müssen zeigen, daß $X = I_1 \cap I_2$. Die Menge X ist nicht leer, da $t_0 \in X$, und sie ist abgeschlossen in $I_1 \cap I_2$, da sie durch eine stetige Gleichung gegeben ist. Sei nun $t \in X$, dann ist $c_j(t') = \varphi(c(t'))$ für t' nahe t, wegen der Vorbemerkung. Also ist X auch offen. Da das offene Intervall $I_1 \cap I_2$ zusammenhängend ist, folgt $X = I_1 \cap I_2$.

Schließlich die Existenz: Sei X die Menge der $t \in I$, bis zu welchen ein (eindeutiger) Lift existiert, genauer: $t \in X \Leftrightarrow$ ein Lift $\bar{c} : J \to \mathbb{R}$ von $c|_J$ existiert für ein offenes Teilintervall J von I, welches t und t_0 enthält. Die Menge X ist nicht leer da $t_0 \in X$, denn $\varphi \circ c$ ist ein lokaler Lift von c, wo φ wie in (3.5) mit Anfangswinkel $\bar{c}(t_0)$ ist. Sie ist nach Konstruktion offen, da die Intervalle J als offen vorausgesetzt sind. Sie ist auch abgeschlossen in I: Sei nämlich $t \in I$ im Abschluß von X. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von c auf kompakten Teilintervallen von I existiert ein $\delta > 0$ mit $|c(t') - c(t'')| < 2$ für $|t' - t''| < \delta$ mit $t' \in [t_0, t]$. Sei $t_1 \in X$ mit $|t_1 - t| < \delta$. Dann sind $\bar{c}$ und $\varphi \circ c$ lokale Lifts um t_1 von c, wobei φ wie in (3.5) mit Anfangswert $\bar{c}(t_1)$ bei t_1 ist. Also stimmen sie wegen der Eindeutigkeit überein und ergeben zusammen einen lokalen Lift, der auf einer Umgebung von $[t_0, t]$ definiert ist, i.e. $t \in X$. Da I zusammenhängend ist, folgt $X = I$, also existiert ein Lift auf ganz I. □

3.10 Liften mittels des Kurvenintegrals

Eine dritte Methode den Lift $\bar{c}$ für glattes c zu erhalten, verwendet das Kurvenintegral und die dazu notwendigen Differentialformen (mit denen wir uns in Kapitel (5) und (6) noch sehr eingehend beschäftigen werden):

Sei $f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^n$, differenzierbar. Dann ist die Ableitung f' (oder auch das totale Differential df) von folgender Gestalt:

$$df = f' : U \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n) := \{T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n : T \text{ ist linear}\}.$$

Allgemein heißt eine Abbildung $\omega : U \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ 1-Form (mit Werten im $\mathbb{R}^n$). Eine 1-Form heißt exakt $:\Leftrightarrow \exists\, f : U \to \mathbb{R}^n$ glatt mit $df = \omega$.

Für die linearen Abbildungen $x : (x, y) \mapsto x$ und $y : (x, y) \mapsto y$ ergeben sich nach (2.1) die zwei speziellen exakten 1-Formen dx und dy:

$$dx(x, y)(u, v) = u \quad \text{bzw.} \quad dy(x, y)(u, v) = v.$$

Für jedes glatte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ haben wir allgemein

$$\begin{aligned} df(x,y)(u,v) &= df(x,y)(u\cdot(1,0)+v\cdot(0,1)) \\ &= u\cdot df(x,y)(1,0)+v\cdot df(x,y)(0,1) \\ &= dx(x,y)(u,v)\cdot \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+dy(x,y)(u,v)\cdot \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{aligned}$$

oder kürzer nach Weglassen von $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ als Gleichheit für Abbildungen in $L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^m)$:

$$df(x,y) = \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot dx(x,y) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot dy(x,y),$$

wobei wir die Reihenfolge der Faktoren ausgetauscht haben, damit die Wirkung auf (u,v) klarer ist (Beachte: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\in\mathbb{R}^m$ und $dx(x,y), dy(x,y)\in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ und das Produkt $v\cdot T\in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^m)$ ist definiert durch $(v\cdot T)(z) := T(z)\cdot v$ für $v\in\mathbb{R}^m$, $T\in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ und $z\in\mathbb{R}^2$).
Noch kürzer können wir das nach Weglassen von $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ als Gleichheit für Abbildungen $\mathbb{R}^2\to L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^m)$ schreiben als

$$df = \tfrac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}\cdot dy.$$

Analog erhalten wir die Koordinatendarstellung einer allgemeinen 1-Form ω:

$$\begin{aligned} \omega(x,y)(u,v) &= u\cdot\omega(x,y)(1,0)+v\cdot\omega(x,y)(0,1) \\ &=: dx(x,y)(u,v)\cdot\omega_1(x,y)+dy(x,y)(u,v)\cdot\omega_2(x,y) \\ \Rightarrow \omega &= \omega_1\cdot dx+\omega_2\cdot dy \end{aligned}$$

wobei $\omega_i : U\to\mathbb{R}^n$ definiert ist durch $\omega_1(x,y) := \omega(x,y)(1,0)$ und $\omega_2(x,y) := \omega(x,y)(0,1)$.
Sei $c : [a,b]\to U$ eine Kurve mit $c(t) = (x(t),y(t))$ und ω wie oben, dann berechnet sich das Kurvenintegral wie folgt:

$$\begin{aligned} \int_c \omega = \int_c \omega_1(x,y)\cdot dx+\omega_2(x,y)\cdot dy &:= \int_a^b \omega(c(t))(c'(t))\,dt \\ &= \int_a^b \omega_1(c(t))\tfrac{dx}{dt}(t)\,dt+\omega_2(c(t))\tfrac{dy}{dt}(t)\,dt \end{aligned}$$

Mittels des Kurvenintegrals läßt sich eine Funktion $f : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^m$ aus ihrem Differential und einem Anfangswert rekonstruieren, denn

$$f(c(b))-f(c(a)) = \int_a^b (f\circ c)'(t)\,dt = \int_a^b df(c(t))(c'(t))\,dt = \int_c df,$$

für jede Kurve c von $c(a)$ nach $c(b)$. Die Überlagerung $p : \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ via Polarkoordinaten aus (3.5) war gegeben durch $(r,\varphi)\mapsto r\,e^{i\varphi}$. Wir wollen eine Kurve $c : I\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ zu einer Kurve $\bar c : I\to\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ längs p liften. Die Projektion auf die erste Komponente $(r,\varphi)\mapsto r$ faktorisiert zu einer wohldefinierten glatten Funktion r :

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$. Somit ist $r(\bar{c}(t)) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "r"] & \\ & \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \setminus \{0\} \arrow[ur, dotted, "\sqrt{x^2+y^2}"'] & \end{tikzcd}$$

Für die zweite Projektion geht das nicht so (Der Winkel φ kann aus den kartesischen Koordinaten nur bis auf ganzzahliges Vielfaches von 2π berechnet werden). Aber wir können die zweite Komponente als Kurvenintegral schreiben

$$\varphi(\bar{c}(t)) = \varphi(\bar{c}(0)) + \int_{\bar{c}|_{[0,t]}} d\varphi$$

Da φ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches auch auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bestimmt ist, kann man hoffen, daß das Differential $d\varphi$ zu einer 1-Form ω auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ hinunterfaktorisiert. Wegen der Kettenregel $d\varphi(u)(v) = \omega(p(u)) \cdot dp(u)(v)$ berechnen wir dazu das Differential der Überlagerungsabbildung $z = p : \mathbb{C} \supset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}$, $(r, \varphi) \mapsto z := r\, e^{i\varphi}$:

$$dz = d(re^{i\varphi}) = \frac{\partial(re^{i\varphi})}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial(re^{i\varphi})}{\partial \varphi} \cdot d\varphi = e^{i\varphi}\, dr + i\, r\, e^{i\varphi}\, d\varphi = r\, e^{i\varphi} \left(\frac{dr}{r} + i\, d\varphi\right)$$

Somit ist

$$\frac{dz}{z} = \frac{e^{i\varphi}\, dr + i\, r\, e^{i\varphi}\, d\varphi}{r\, e^{i\varphi}} = \frac{dr}{r} + i\, d\varphi = d(\ln r) + i\, d\varphi$$

als Abbildungen $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \cong L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) + i\, L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Oder in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} d(\ln(r)) + i\, d\varphi &= \frac{dz}{z} = \frac{dx + i\, dy}{x + i\, y} = \frac{(x - iy)\, dx + i\,(x - iy)\, dy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x\, dx + y\, dy}{x^2 + y^2} + i\, \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

wobei $x, y : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \xrightarrow{z} \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, und somit ist

$$d(\ln r) = \frac{x\, dx + y\, dy}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad d\varphi = \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2}.$$

Wir können aber x und y auch als Koordinatenprojektionen auf $\mathbb{C}$ auffassen, und somit $\frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2}$ als 1-Form ω auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Für diese ist $d\varphi(u)(v) = \omega(p(u))(dp(v))$

und somit erhalten wir schlußendlich

$$\begin{aligned}\varphi(\bar c(t)) &= \varphi(\bar c(0)) + \int_{\bar c|_{[0,t]}} d\varphi \\ &= \varphi(\bar c(0)) + \int_0^t d\varphi(\bar c(\tau))(\bar c'(\tau))\,d\tau \\ &= \varphi(\bar c(0)) + \int_0^t \omega(c(\tau))(c'(\tau))\,d\tau \\ &= \varphi(\bar c(0)) + \int_{c|_{[0,t]}} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2},\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile x und y die Koordinatenprojektionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bezeichnen. Insbesonders berechnet diese Formel $\bar c(t) \in \mathbb{R}$ für $c : I \to S^1 \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3.11 Satz (Die Krümmung charakterisiert die Kurve).
Sei $K : I \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, so gibt es, bis auf Bewegungen, genau eine Kurve, die eine Bogenlängenparametrisierung c besitzt, für die $K_c(s) = K(s)$ gilt.

Beweis. Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit der Krümmung K, d.h. $|c'(s)| = 1$ für alle s und $K(s) = \theta'(s)$ nach (3.6), wobei θ ein Lift von c' ist, und somit $e^{i\theta(s)} = c'(s)$ gilt. Also folgt

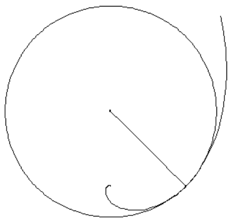
$$\begin{aligned}\theta(s) &= \theta(0) + \int_0^s \theta'(\tau)\,d\tau = \theta(0) + \int_0^s K(\tau)d\tau \text{ und} \\ c(s) &= c(0) + \int_0^s c'(\tau)d\tau = c(0) + \int_0^s e^{i\theta(\tau)}d\tau.\end{aligned}$$

Dabei ist $c(0)$ der frei wählbare Anfangspunkt der Kurve, und $\theta(0)$ der frei wählbare Winkel der Anfangsrichtung. Je zwei solche Anfangsdaten liefern eine Bewegung, welche die zugehörigen Kurven ineinander überführt. Sei c wie oben definiert. Dann ist $c'(s) = e^{i\theta(s)}$, also $|c'(s)| = 1$, d.h. c ist nach der Bogenlänge parametrisiert. Da θ der Lift ist, gilt $K_c(s) = \theta'(s) = K(s)$. □

3.12 Definition (Scheitel und Spiralbögen)

Falls $K(t) = 0$, dann heißt t ein Flachpunkt. Falls t ein Flachpunkt ist, an dem die Krümmung das Vorzeichen ändert, so heißt t ein Wendepunkt. Falls die Krümmung ein lokales Extremum bei t besitzt, so heißt t ein Scheitel. Falls K monoton und nirgends 0 ist, so heißt c ein Spiralbogen.

3.13 Lemma, [Kneser]. *Sei c ein Spiralbogen. Dann ist jeder Krümmungskreis mit kleinerem Radius in jedem mit größerem enthalten. Für jeden Punkt s der Kurve, liegt die eine Hälfte von c im Inneren des Krümmungskreises bei s und die andere Hälfte im Äußeren.*



Beweis. Wir betrachten die Ableitung der Evolute:

$$\begin{aligned} e(s) &:= c(s) + \frac{1}{K(s)}\nu(s) \quad \text{und setzen} \quad R(s) := \frac{1}{K(s)} \\ \Rightarrow \quad e'(s) &= c'(s) + R'(s)\nu(s) + R(s)\nu'(s) \\ &= \tau(s) + R'(s)\nu(s) - R(s)K(s)\tau(s) = R'(s)\nu(s). \end{aligned}$$

Für die vorletzte Zeile verwendeten wir die Frenet'schen Ableitungsgleichungen. Die Bogenlänge der Evolute berechnen wir mit Hilfe des Integrals:

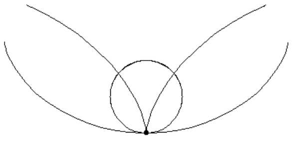
$$\begin{aligned} L_a^b(e) &= \int_a^b |e'(s)|ds = \int_a^b |R'(s)|ds = \qquad \text{(da } R' \text{ konstantes Vorzeichen hat)} \\ &= \Big|\int_a^b R'(s)ds\Big| = |R(b) - R(a)| \\ &\Rightarrow |e(b) - e(a)| \le L_a^b(e) = |R(b) - R(a)| \end{aligned}$$

d.h. der Kreis mit größerem Radius umfaßt den mit kleinerem. Man bemerke, daß Gleichheit $|e(b) - e(a)| = L_a^b(e)$ nur dann gilt, wenn e konstant ist oder die Strecke von $e(a)$ nach $e(b)$ parametrisiert. Falls e konstant ist, so $0 = e' = R'\nu$, d.h. R ist konstant und damit c ein Kreisbogen. Andernfalls ist $e'(s) \parallel v := e(b) - e(a) \neq 0$ für alle s und somit auch $\nu(s) \parallel v$ und $\tau(s) \parallel v^\perp$ für s mit $R'(s) \neq 0$. Also parametrisiert c (zumindest lokal) eine Gerade und $K = 0$ ein Widerspruch.

Für den zweiten Teil der Aussage können wir o.B.d.A. annehmen, daß die Krümmung monoton wachsend bzw. R monoton fallend ist. Bei festem t und $t \le t'$ schließen wir, daß $c(t')$ im Inneren des Krümmungskreises bei t liegt, da $c(t')$ auf dem Krümmungskreis bei t' liegt und dieser in jenem bei t enthalten ist $(R(t) \ge R(t'))$. Falls $t' \le t$ schließen wir analog. □

3.14 Rollkurven

Gegeben seinen zwei nach Bogenlänge parametrisierte Kurven c_0 und c_1. Gesucht ist die Bahn c eines in der Ebene von c_1 fixierten Punktes p, wenn die Kurve c_1 längs jener von c_0 abrollt.



Wir wollen c nach der abgerollten Länge t parametrisieren. Das Abrollen von c_1 längs c_0 bedeutet, daß wir eine Bewegung B_t suchen, die den Punkt $c_1(t)$ auf $c_0(t)$, die Einheitstangente $\tau_1(t)$ auf $\tau_0(t)$ und somit die Einheitsnormale $\nu_1(t)$ auf $\nu_0(t)$. Aus der ersten Bedingung folgt, daß B_t die Form $B_t(x) = R_t(x - c_1(t)) + c_0(t)$ hat. Es sei $\theta_1(t)$ und $\theta_0(t)$ der Winkel der Tangente an c_1 und c_0 zum Zeitpunkt t. Dann muß R_t die Drehung um $\theta_0(t) - \theta_1(t)$ sein. Also ist die Gleichung der Rollkurve c durch

$$c(t) := e^{i(\theta_0(t)-\theta_1(t))}(p - c_1(t)) + c_0(t)$$

gegeben.

Für die Ableitung von c erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}c(t) &= i(\theta_0 - \theta_1)'(t)e^{i(\theta_0(t)-\theta_1(t))}(p - c_1(t)) - e^{i(\theta_0(t)-\theta_1(t))}c_1'(t) + c_0'(t)\\ &= i(K_0(t) - K_1(t))e^{i(\theta_0(t)-\theta_1(t))}(p - c_1(t)) - e^{i(\theta_0(t)-\theta_1(t))}e^{i\theta_1(t)} + e^{i\theta_0(t)}\\ &= (K_0(t) - K_1(t))ie^{i(\theta_0(t)-\theta_1(t))}(p - c_1(t))\end{aligned}$$

Somit ist die skalare Geschwindigkeit:

$$v(t) = \left|\frac{d}{dt}c(t)\right| = |K_0(t) - K_1(t)|\,|p - c_1(t)|.$$

Die zweite Ableitung von c ist:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\right)^2 c(t) &= i(K_0 - K_1)'(t)e^{i(\theta_0-\theta_1)(t)}(p - c_1(t))\\ &\quad + i(K_0 - K_1)(t)i(K_0 - K_1)(t)e^{i(\theta_0-\theta_1)(t)}(p - c_1(t))\\ &\quad + i(K_0 - K_1)(t)e^{i(\theta_0-\theta_1)(t)}c_1'(t)\\ &= (K_0 - K_1)'(t)ie^{i(\theta_0-\theta_1)(t)}(p - c_1(t))\\ &\quad - (K_0 - K_1)(t)^2e^{i(\theta_0-\theta_1)(t)}(p - c_1(t))\\ &\quad - (K_0 - K_1)(t)ie^{i(\theta_0-\theta_1)(t)}c_1'(t).\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}&\det\left(\frac{d}{dt}c(t), \left(\frac{d}{dt}\right)^2 c(t)\right) =\\ &= \det\Big((K_0 - K_1)(t)ie^{i(\theta_0(t)-\theta_1(t))}(p - c_1(t)),\\ &\qquad - (K_0 - K_1)(t)^2e^{i(\theta_0-\theta_1)(t)}(p - c_1(t)) - (K_0 - K_1)(t)ie^{i(\theta_0-\theta_1)(t)}c_1'(t)\Big)\\ &= (K_0 - K_1)(t)^3\det\Big(p - c_1(t), p - c_1(t)\Big) - (K_0 - K_1)(t)^2\det\Big(p - c_1(t), c_1'(t)\Big)\\ &= (K_0 - K_1)(t)^3|p - c_1(t)|^2 - (K_0 - K_1)(t)^2\det\Big(p - c_1(t), c_1'(t)\Big).\end{aligned}$$

Für die Krümmung K von c erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
K(t) &= \frac{\det(\frac{d}{dt}c(t), \left(\frac{d}{dt}\right)^2 c(t))}{\left|\frac{d}{dt}c(t)\right|^3} \\
&= \frac{(K_0-K_1)(t)^3|p-c_1(t)|^2 - (K_0-K_1)(t)^2\det(p-c_1(t), c_1'(t))}{|(K_0-K_1)(t)|^3\,|p-c_1(t)|^3} \\
&= \frac{\operatorname{sign}((K_0-K_1)(t))}{|p-c_1(t)|} - \frac{1}{|(K_0-K_1)(t)|}\det(\frac{p-c_1(t)}{|p-c_1(t)|^3}, c_1'(t)) \\
&= \frac{\operatorname{sign}((K_0-K_1)(t))}{|p-c_1(t)|^3}\Big(|p-c_1(t)|^2 - \frac{1}{(K_0-K_1)(t)}\det(p-c_1(t), c_1'(t))\Big).
\end{aligned}$$

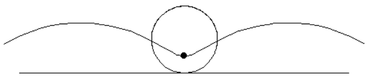
Sei nun die abrollende Kurve c_1 ein Kreis mit Radius 1, d.h. $c_1(t) := e^{it}$ und $p = (a, 0)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
c_1'(t) &= ie^{it} \\
K_1 &= 1 \\
p - c_1(t) &= (a - \cos t, -\sin t) \\
|p-c_1(t)|^2 &= a^2 - 2a\cos t + 1 = (a^2+1) - 2a\cos t \\
\det(x - c_1(t), c_1'(t)) &= \det(a - e^{it}, ie^{it}) = a\cos t - 1
\end{aligned}$$

und somit ist die Krümmung der Rollkurve

$$\begin{aligned}
K(t) &= \frac{\operatorname{sign}((K_0-K_1)(t))}{|p-c_1(t)|^3}\Big(|p-c_1(t)|^2 - \frac{1}{(K_0-K_1)(t)}\det(p-c_1(t), c_1'(t))\Big) \\
&= \frac{\operatorname{sign}(K_0(t)-1)}{|a^2+1-2a\cos t|^{3/2}}\Big(a^2+1-2a\cos t - \frac{a\cos t - 1}{K_0(t)-1}\Big)
\end{aligned}$$

Zykloiden.
Sei nun insbesonders c_0 eine Gerade, d.h. $c_0(t) = t$.



Dann ist $K_0(t) = 0$ und somit

$$\begin{aligned}
K(t) &= \frac{-1}{|a^2+1-2a\cos t|^{3/2}}\Big(a^2+1-2a\cos t - \frac{a\cos t - 1}{-1}\Big) \\
&= \frac{a(\cos t - a)}{|a^2+1-2a\cos t|^{3/2}}
\end{aligned}$$

Und speziell für $a = 1$, d.h. einen Punkt auf dem Kreis, ist

$$K(t) = -\frac{(1-\cos t)}{|2-2a\cos t|^{3/2}} = -1/(2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}) = -\frac{1}{4|\sin(t/2)|}.$$

Nun wollen wir die Scheitel bestimmen. Dazu schreiben wir

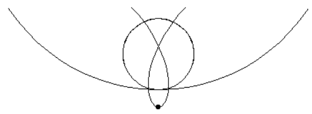
$$\sqrt{a}K(t) = \frac{\cos t - a}{(a + 1/a - 2\cos t)^{3/2}}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sqrt{a}K(t) &= -\sin t\,(a+1/a-2\cos t)^{-5/2}\ \left((a+1/a-2\cos t)+3(\cos t-a)\right)\\ &= -\sin t\,(a+1/a-2\cos t)^{-5/2}\ (1/a-2a+\cos t)\end{aligned}$$

Somit ist $\frac{d}{dt}\sqrt{a}K(t)=0$ genau dann, wenn $\sin t=0$ oder $\cos t = 2a-\frac{1}{a}$.

Epi- und Hypozykloiden Sei nun c_0 ein Kreis mit Radius R, d.h. $c_0(t)=R\,e^{\pm it/R}$.



Dann ist $K_0=\pm 1/R$ und somit

$$\begin{aligned}K(t) &= \frac{\operatorname{sign}(K_0(t)-1)}{|a^2+1-2a\cos t|^{3/2}}\Big(a^2+1-2a\cos t-\frac{a\cos t-1}{K_0(t)-1}\Big)\\ &= \frac{\operatorname{sign}(\pm1/R-1)}{|a^2+1-2a\cos t|^{3/2}}\Big(a^2+1-2a\cos t-\frac{a\cos t-1}{\pm1/R-1}\Big)\end{aligned}$$

Ist insbesonders $a=1$, d.h. p ein Punkt am abrollenden Kreis, dann ist

$$\begin{aligned}K(t) &= \frac{\operatorname{sign}(\pm1/R-1)}{|2(1-\cos t)|^{3/2}}\Big(2(1-\cos t)+\frac{1-\cos t}{\pm1/R-1}\Big)\\ &= \frac{\operatorname{sign}(\pm1/R-1)}{2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}\Big(2+\frac{1}{\pm1/R-1}\Big)\\ &= \frac{\operatorname{sign}(\pm1/R-1)}{2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}\cdot\frac{R\mp2}{R\mp1}\\ &= \operatorname{sign}(\pm1/R-1)\cdot\frac{1}{4|\sin t/2|}\cdot\frac{R\mp2}{R\mp1}\end{aligned}$$

3.15 Einhüllende - Enveloppe

Zu jeder geometrischen ebene Kurve ist die Familie ihrer Tangenten assoziiert. Wir wollen nun bestimmen, welche Geraden-Scharen auf diese Weise auftreten können. Sei $c: I\to E$ eine Parametrisierung der Kurve, dann ist die Tangente durch $s\mapsto c(t)+sc'(t)$ gegeben, oder implizit durch

$$\Big\langle\binom{x}{y},\nu(t)\Big\rangle = h(t),\ \text{mit } \nu(t):=c'(t)^\perp \text{ und } h(t):=\langle c(t),\nu(t)\rangle.$$

Nach Anwendung einer Drehung, können wir annehmen, daß e_1 der Einheitstangentialvektor in einem Punkt ist und somit für nahe t in der Tangentengleichung y nach x aufgelöst werden kann, d.h. die Form $y=a(t)\cdot x+b(t)$ besitzt, wobei $a(t)$ der Anstieg der Kurve $c: t\mapsto(x(t),y(t))$ zum Zeitpunkt t ist und $b(t)$ durch Einsetzen von $c(t)$ anstelle von (x,y) erhalten wird. Wenn die Krümmung K von c nicht verschwindet, dann muß $a'(t)\neq0$ sein, denn $a(t)=y'(t)/x'(t)$ und somit ist

$$a'(t)=\frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{x'(t)^2}=\frac{\det(c'(t),c''(t))}{x'(t)^2}=\frac{|c'(t)|^3}{x'(t)^2}K(t).$$

Sei allgemein eine glatt parametrisierte Familie von Geraden vorgegeben. Nach Anwendung einer Drehung haben diese lokal die Gestalt

$$y = a(t) \cdot x + b(t).$$

Wir wollen nun versuchen eine Kurve c zu finden, die diese Geraden als Schar der Tangenten hat. Man nennt c dann die Einhüllende oder Enveloppe dieser Geraden. Es soll also $c(t) = (x(t), y(t))$ sowohl

$$y(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t) \text{ als auch } y'(t) = a(t) \cdot x'(t)$$

erfüllen. Der Fall, daß a konstant ist, ist nicht interessant, denn dann muß eine dazu passende Kurve c eine Gerade parametrisieren und somit auch b konstant sein. Darum setzten wir a als streng monoton oder besser ein wenig stärker $a'(t) \neq 0$ für alle t voraus. Falls c existiert, so bedeutet das nach dem Obigen, daß die Krümmung von c nicht verschwindet. Dann können wir den Anstieg als Parameter p verwenden. Die Gleichungen sind dann

$$y(p) = p \cdot x(p) + g(p) \text{ und } \frac{dy}{dx} = p,$$

mit $g := b \circ a^{-1}$. Beachte, daß die Existenz einer regulären Lösung c (mit nicht verschwindender Krümmung) das Folgende für g bedeutet:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dp} &= \frac{dy}{dp} - 1 \cdot x - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} = -x \\ \frac{d^2g}{dp^2} &= -\frac{dx}{dp} \neq 0 \end{aligned}$$

Wenn wir nun die Kurve nach x umparametrisieren (es ist ja $x'(p) \neq 0$), so ist die Gleichung die Clairaut'sche Differentialgleichung

$$y(x) = y'(x) \cdot x + g(y'(x)),$$

wobei wir die Bedingung, daß x als Parameter gewählt werden kann bedeutet, daß $p'(x) = y''$ nirgends verschwindet. Wenn wir diese Bedingung nicht verlangen, so erhalten wir als Lösungen auch jede Gerade der Schar (dann ist y' konstant p).

Um die Kurve c zu finden müssen wir also die Clairaut'sche Differentialgleichung

$$y = x \cdot y' + g(y') \text{ mit } g''(y) \neq 0$$

lösen. Dies ist eine implizite Differentialgleichung

$$F(x, y, y') = 0 \text{ mit } F(x, y, p) := x \cdot p + g(p) - y.$$

Wenn $\partial_p F \neq 0$ wäre, dann können wir diese implizite Gleichung nach dem impliziten Funktionensatz in eine explizite verwandeln. Aber wenn wir die Differentialgleichung nach x differenzieren, so erhalten wir

$$0 = \frac{d}{dx} F(x, y(x), y'(x)) = \partial_1 F(x, y, y') + \partial_2 F(x, y, y') \cdot y' + \partial_3 F(x, y, y') \cdot y'',$$

wobei $\partial_1 F(x, y, p) = p$, $\partial_2 F(x, y, p) = -1$ und $\partial_3 F(x, y, p) = x + g'(p)$ ist. Also ist $0 = y' - 1 \cdot y' + \partial_3 F(x, y, y') \cdot y''$. Falls y nicht eine Gerade beschreibt, so ist $y'' \neq 0$ und folglich $\partial_3 F(x, y, y') = 0$.

Die übliche Methode in dieser Situation ist, y' als neue Variable p zu verwenden (wegen $y'' \neq 0$ ist dies nach dem inversen Funktionensatz möglich). D.h. unsere Gleichung lautet nun $F(x(p), y(p), p) = 0$ zusammen mit $y'(p) = p \cdot x'(p)$. Differenzieren wir nun $F(x(p), y(p), p)$ nach p so erhalten wir

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dp}F(x(p), y(p), p) = \partial_1 F(x, y, p) \cdot x' + \partial_2 F(x, y, p) \cdot y' + \partial_3 F(x, y, p) \cdot 1 \\ &= (\partial_1 F + p \cdot \partial_2 F) \cdot x' + \partial_3 F\end{aligned}$$

und falls $\partial_1 F + p \cdot \partial_2 F \neq 0$ ein System expliziter Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}x' &= -\frac{\partial_3 F}{(\partial_1 F + p \cdot \partial_2 F)} \\ y' &= p \cdot x' = -\frac{p \cdot \partial_3 F}{(\partial_1 F + p \cdot \partial_2 F)}.\end{aligned}$$

Dies führt nun zwar oft zum Ziel, nicht aber in unserer speziellen Situation, denn da ist, wie wir bereits gesehen haben, $\partial_1 F + p \cdot \partial_2 F = 0$. Nach dem Obigen ist dann aber $0 = \partial_3 F = x + g'(p)$, d.h. $x(p) = -g'(p)$ und aus $F(x(p), y(p), p) = 0$ folgt $y(p) = p \cdot x(p) + g(p)$. Und das System ist mit

$$\begin{aligned}x(p) &= -g'(p) \\ y(p) &= p \cdot x(p) + g(p)\end{aligned}$$

somit gelöst, wobei wir nur noch $p := (-g')^{-1}$ substituieren müssen: Wegen $\frac{dy}{dx} = p$ ist $(\frac{d}{dx})^2 y = \frac{d}{dx}p = 1/\frac{d}{dp}x = -1/g''(p) \neq 0$, d.h. die Lösungskurve ist regulär und hat Krümmung ungleich 0. Beachte, daß natürlich die Geraden $y(x) = p \cdot x + g(p)$ selbst ebenfalls Lösungen des Systems sind.

Wir können auch zeigen, daß die Kurve immer auf der selben Seite der Tangente bleibt, denn

$$\begin{aligned}&x(p) = -g'(p) \qquad x' = -g'' \qquad x'' = -g''' \\ &y(p) = p \cdot x(p) + g(p) y' = p \cdot x' = -p \cdot g'' y'' = -g'' + p \cdot g''' \\ \Rightarrow\ &\langle c''(p), \nu(p)\rangle = x'' \cdot (-p) + y'' \cdot 1 = p \cdot g''' - g'' - p \cdot g''' = -g'' \neq 0\end{aligned}$$

Insbesonders ist jede Kurve mit nicht verschwindender Krümmung die Enveloppe ihrer Tangenten.

Weiters ist die Evolute die Enveloppe der Normalen. In der Tat ist die Evolute e einer Kurve c durch

$$e(t) := c(t) + \frac{1}{K(t)}\nu(t)$$

gegeben, wobei wir annehmen dürfen, daß c nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Die Ableitung von e ist dann

$$\begin{aligned}e'(t) &= c'(t) + \frac{1}{K(t)}\nu'(t) - \frac{K'(t)}{K(t)}\nu(t) \\ &= \tau(t) + \frac{1}{K(t)}(-K(t)\tau(t)) - \frac{K'(t)}{K(t)}\nu(t) = -\frac{K'(t)}{K(t)}\nu(t)\end{aligned}$$

und somit ist e regulär solange c keinen Scheitel ($K'(t) = 0$) besitzt.

7. Kurven im höher Dimensionalen

In diesem Abschnitt übertragen wir die grundlegenden Begriffe wie Einheitstangentialvektor, Einheitsnormalvektor und Krümmung auf Kurven in mehrdimensionalen $\mathbb{R}^n$'s.

Eine Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ kann man nach der Bogenlänge parametrisieren, das heißt $|c'(t)| = 1$. Daraus folgt durch Differentiation, daß $\langle c', c''\rangle = 0$. Wir können c'' als die Kraft (Beschleunigung), die gebraucht wird, damit der Punkt (mit Einheitsmasse) auf der Kurve bleibt, interpretieren.

7.1 Definition (Krümmung und Begleitbein)

Die Krümmung einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve c im Punkt t ist als $K(t) := |c''(t)| \geq 0$ definiert. Falls $K(t) \neq 0$, dann heißt $\nu := \frac{1}{|c''(t)|} c''(t)$ der Hauptnormalenvektor von c in t.

Im $\mathbb{R}^3$ können wir die beiden Vektoren τ (siehe (2.6)) und ν zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis $\{\tau, \nu, \beta\}$ ergänzen, indem wir den Binormalenvektor β als $\beta := \tau \times \nu$ definieren. Diese Basis heißt das Begleitbein der Kurve.

Im $\mathbb{R}^{n+1}$ gehen wir wie folgt vor: Seien $c'(t), c''(t), \dots, c^{(n)}(t)$ linear unabhängig. Mittels des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens läßt sich daraus eine orthonormale Familie $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ konstruieren. (Dabei geht man induktiv vor, um zu zeigen, daß für k linear unabhängige Vektoren $a_1, a_2, \dots a_k$ ein eindeutig bestimmter Vektor v existiert, welcher normal auf die $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ steht, mit a_k einen Winkel α (mit $|\alpha| < \pi/2$) einschließt und im Erzeugnis der $a_1, a_2, \dots a_k$ liegt.) Wir ergänzen nun $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}, \nu_n$ des $\mathbb{R}^{n+1}$.

Diese Orthonormalbasis heißt Begleitbein der Kurve.

7.2 Definition (Krümmungen)

Wir wollen nun das Analogon der Freneschen Ableitungsgleichungen herleiten. Dazu benötigen wir die Komponenten $\langle \nu_i', \nu_j\rangle$ von ν_i' bzgl. der Basisvektoren ν_j. Für jeden Vektor ν_i' gilt: $\nu_i' = \sum_{j=0}^n \langle \nu_i', \nu_j\rangle \nu_j$. Wir differenzieren die Gleichung $\langle \nu_i(s), \nu_j(s)\rangle = \delta_{ij}$ nach s und erhalten:

$$\langle \nu_i', \nu_j\rangle + \langle \nu_i, \nu_j'\rangle = 0 \Rightarrow \langle \nu_i', \nu_j\rangle = -\langle \nu_i, \nu_j'\rangle.$$

Also ist die Matrix $(\langle \nu_i', \nu_j\rangle)_{i,j}$ schiefsymmetrisch. Da $\nu_i \in \langle\{c', \dots, c^{(i+1)}\}\rangle$ ist, kann man ν_i auch auf folgende Weise darstellen:

$$\begin{aligned} \nu_i &= \sum_{j=1}^{i+1} a_j \cdot c^{(j)} \\ \Rightarrow \nu_i' &= \sum_{j=1}^{i+1} \Big(a_j' \cdot c^{(j)} + a_j \cdot c^{(j+1)} \Big) \in \Big\langle \{c', c'', \dots, c^{(i+2)}\} \Big\rangle \end{aligned}$$

Da ν_j normal steht auf $c', c'', \dots c^{(j)}$ ist somit $\langle \nu_i', \nu_j\rangle = 0$ für $j > i+1$. Außerdem ist offensichtlich $\langle \nu_i', \nu_i\rangle = 0$ für alle i und folglich stehen in der Diagonalen der Matrix

von $(\langle \nu_i', \nu_j\rangle)_{i,j}$ 0-en, und nur oberhalb und unterhalb der Diagonalen stehen auf schiefsymmetrische Weise Eintragungen.
Für eine Kurve c heißt $\langle \nu_i', \nu_{i+1}\rangle =: K_{i+1}$ die $(i+1)$-te Krümmung.

$$\langle \nu_i', \nu_j\rangle = \begin{pmatrix} 0 & K_1 & 0 & \dots & 0 \\ -K_1 & 0 & K_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -K_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & K_n \\ 0 & \dots & 0 & -K_n & 0 \end{pmatrix}$$

Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve c in $\mathbb{R}^2$ ergibt sich:

$$K_1 = \langle \nu_0', \nu_1\rangle = \left\langle (c')', \frac{c''}{|c''|}\right\rangle = |c''| = K.$$

Wir haben folgendes gezeigt:

7.3 Frenet'sche Ableitungsgleichungen.
Für das Begleitbein $(\nu_i)_{i=0}^n$ einer Kurve c im $\mathbb{R}^{n+1}$ gilt:

$$\nu_i' = -K_i \cdot \nu_{i-1} + K_{i+1} \cdot \nu_{i+1},$$

wobei $K_0 := 0$, $K_{n+1} := 0$, $\nu_{-1} := 0$ und $\nu_{n+1} := 0$.

Beweis.

$$\nu_i' = \sum_{j=0}^n \underbrace{\langle \nu_i', \nu_j\rangle}_{=0 \text{ für } |i-j|\neq 1} \cdot \nu_j = \underbrace{\langle \nu_i', \nu_{i+1}\rangle}_{=K_{i+1}} \cdot \nu_{i+1} + \underbrace{\langle \nu_i', \nu_{i-1}\rangle}_{\langle \nu_{i-1}', \nu_i\rangle = K_i} \cdot \nu_{i-1} \qquad \square$$

7.4 Lemma. *Das Begleitbein und die Krümmungen sind geometrische Objekte.*

Beweis. Bleibt dem Leser überlassen! □

7.5 Bemerkung

Umgekehrt lassen sich die Ableitungen der Kurve wie folgt als Linearkombinationen des Begleitbeins schreiben:

$$\begin{aligned} c' &= \nu_0 \\ c'' &= \nu_0' = K_1\nu_1 - 0 \\ c''' &= (K_1\nu_1)' = K_1'\nu_1 + K_1\nu_1' = K_1'\nu_1 + K_1(K_2\nu_2 - K_1\nu_0) \\ &= K_1K_2\nu_2 + K_1'\nu_1 - {K_1}^2\nu_0. \end{aligned}$$

Nach dem Taylorschen Lehrsatz läßt sich eine Kurve c nun wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
c(t) &= c(0) + \frac{c'(0)}{1!}t + \frac{c''(0)}{2!}t^2 + \frac{c'''(0)}{3!}t^3 + O(t^4) \\
&= c(0) + \nu_0(0)t + \frac{K_1(0)\nu_1(0)}{2}t^2 \\
&\quad + \frac{K_1(0)K_2(0)\nu_2(0) + K_1'(0)\nu_1(0) - (K_1(0))^2\nu_0(0)}{6}t^3 + O(t^4) \\
&= c(0) + \left(t - \frac{(K_1(0))^2}{6}t^3\right)\nu_0(0) \\
&\quad + \left(\frac{K_1(0)}{2}t^2 + \frac{K_1'(0)}{6}t^3\right)\nu_1(0) + \left(\frac{K_1(0)K_2(0)}{6}t^3\right)\nu_2(0) + O(t^4)
\end{aligned}$$

7.6 Definition (Torsion)

Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit $\tau := \nu_0, \nu := \nu_1, \beta := \tau \times \nu = \nu_2$, dann nennt man $K := K_1$ die KRÜMMUNG und $T := K_2$ die TORSION der Kurve. Die Ableitungsgleichungen lauten dann:

$$\begin{array}{rcccc}
\tau' & = & & +K\nu & \\
\nu' & = & -K\tau & & +T\beta \\
\beta' & = & & -T\nu &
\end{array}$$

Die von ν und β aufgespannte Ebene durch $c(0)$ heißt NORMALEBENE, die von τ und ν aufgespannte heißt SCHMIEGEBENE und die von τ und β aufgespannte heißt REKTIFIZIERENDE EBENE.

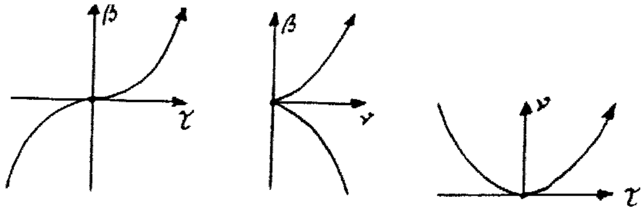
Sind x, y, z die Koordinaten von c bezüglich τ, ν, β im Punkt $c(0)$. Laut (7.5) gilt

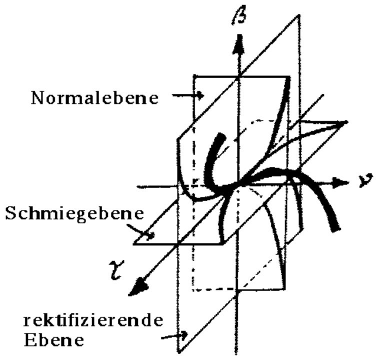
$$\begin{aligned}
x(t) &= t - \frac{K^2(0)}{6}t^3 + O(t^4) \\
y(t) &= \frac{K(0)}{2}t^2 + \frac{K'(0)}{6}t^3 + O(t^4) \\
z(t) &= \frac{K(0)T(0)}{6}t^3 + O(t^4)
\end{aligned}$$

Wir betrachten die Projektion der Kurve in die Ebenen des begleitenden Dreibeins: Zuerst die Projektion auf die Schmiegebene: Wir erhalten $y = \frac{K}{2}t^2 + O(t^3)$, $x = t + O(t^3)$ und nach Vernachlässigen der Glieder höherer Ordnung $y \approx x^2\frac{K}{2}$.

Für die Projektion auf die rektifizierende Ebene erhalten wir $x = t + O(t^3)$, $z = \frac{KT}{6}t^3 + O(t^4)$ und somit $z \approx x^3\frac{KT}{6}$.

Für die Projektion auf die Normalebene erhalten wir $y = \frac{K}{2}t^2 + O(t^3)$, $z = \frac{KT}{6}t^3 + O(t^4)$ und somit $y^3 \approx (\frac{K}{2})^3t^6 = \frac{9K}{2T^2}\frac{(KT)^2}{6^2}t^6 \approx z^2\frac{9K}{2T^2}$. Diese Projektionen ergeben als 3-dimensionales Bild:





7.7 Lemma. *Die Krümmungen K_i $(i = 1, \dots, n)$ und das Begleitbein $(\nu_1, \dots, \nu_n)$ einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve sind durch folgende Bedingungen eindeutig festgelegt:*

$$c^{(j+1)} = \nu_0^{(j)} \equiv K_1 \cdot \ldots \cdot K_j \cdot \nu_j \mod \langle \nu_0, \dots, \nu_{j-1} \rangle,$$
$$K_i > 0 \text{ für } i < n$$

und $(\nu_1, \dots, \nu_n)$ ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis.

Beweis. Wir wissen bereits (wegen der Bemerkung in (7.4)), daß diese Gleichung für $j = 1, \dots, 3$ erfüllt ist. Nehmen wir an, sie ist für j erfüllt, d.h.

$$\nu_0^{(j)} = K_1 \cdot \ldots \cdot K_j \cdot \nu_j + \sum_{i=0}^{j-1} a_i \nu_i \quad (*),$$

so müssen wir die Behauptung nur mehr für $j + 1$ zeigen: Dazu differenzieren wir (*) und erhalten

$$\begin{aligned}
\nu_0^{(j+1)} &= (K_1 \dots K_j) \cdot \nu_j' + (K_1 \dots K_j)' \cdot \nu_j + \sum_{i=0}^{j-1} (a_i' \cdot \nu_i + a_i \cdot \nu_i') \\
&\equiv (K_1 \dots K_j)(K_{j+1} \cdot \nu_{j+1} - K_j \cdot \nu_{j-1}) \mod \langle \nu_0, \dots, \nu_j \rangle \\
&\equiv K_1 \dots K_j K_{j+1} \cdot \nu_{j+1} \mod \langle \nu_0, \dots, \nu_j \rangle,
\end{aligned}$$

da $K_j \nu_{j-1}$ im Erzeugnis der $\nu_0, \dots, \nu_j$ liegt.

Nach Konstruktion ist für $j < n$ der Winkel zwischen ν_j und $c^{(j+1)}$ kleiner als $\pi/2$. Also gilt:

$$0 < \langle \nu_j, c^{(j+1)} \rangle = \Big\langle \nu_j, K_1 \cdot \ldots \cdot K_j \nu_j + \sum_{i<j} a_i \nu_i \Big\rangle = K_1 \cdot \ldots \cdot K_j \underbrace{\langle \nu_j, \nu_j \rangle}_{1}.$$

Hiermit sind alle $K_j > 0$ für $j < n$.

Nach Konstruktion bilden die ν_j eine positiv orientierte Orthonormalbasis.

Umgekehrt folgt aus

$$c^{(j+1)} \equiv K_1 \cdot \ldots \cdot K_j \nu_j \mod \langle \nu_0, \ldots, \nu_{j-1} \rangle$$

und $K_j > 0$ für $j < n$, daß $\langle \nu_0, \ldots, \nu_{j-1} \rangle = \langle c', \ldots, c^{(j)} \rangle$ für $1 \leq j < n$ sowie $0 < \langle \nu_j, c^{(j+1)} \rangle$. Wegen der Orthogonalität ist also ν_j das Begleitbein. Weiters ist $K_1 \cdot \cdots \cdot K_j$ der Koeffizient von ν_j, in der Entwicklung von $\nu_0^{(j)}$ bzgl. der Basis $(\nu_0, \ldots, \nu_n)$. Durch diese Produkte sind auch alle K_i eindeutig festgelegt. □

7.8 Folgerung.
Es ist $K_1^n K_2^{n-1} \ldots K_{n-1}^2 K_n = \det(c', \ldots, c^{(n+1)})$ *und insbesonders hat* K_n *hat das gleiche Vorzeichen wie* $\det(c', \ldots, c^{(n+1)})$. *Für Raumkurven* $c : I \to \mathbb{R}^3$ *ist die Torsion somit durch* $T = \det(c', c'', c'')/K^2$ *gegeben.*

Beweis. Nach den Regeln für das Rechnen mit Determinanten erhalten wir

$$\begin{aligned}\det(c', \ldots, c^{(n+1)}) &= \det\Big(\nu_0, K_1\nu_1, \ldots, K_1 \cdot \ldots \cdot K_n \nu_n + \sum_{i=0}^{n} a_i \nu_i\Big) \\ &= \underbrace{{K_1}^n {K_2}^{n-1} \ldots {K_{n-1}}^2}_{>0} {K_n}^1 \underbrace{\det(\nu_0, \ldots, \nu_n)}_{=1 \text{ da pos. orientiert}}\end{aligned}$$ □

7.9 Satz (Die Krümmungen charakterisieren die Kurve).
Seien $K_i : I \to \mathbb{R}$ *glatte Funktionen für* $1 \leq i \leq n$ *mit* $K_i(t) > 0$ *für* $i < n$. *Dann gibt es eine bis auf Bewegungen eindeutig bestimmte Kurve im* $\mathbb{R}^{n+1}$, *welche nach der Bogenlänge parametrisiert genau die* K_i *als Krümmungen besitzt.*

Die Devise ist also: "Sag mir, wie Du Dich krümmst und windest, und ich sag Dir wer Du bist"!

Beweis. O.B.d.A. sei $0 \in I$. Wir behaupten: Es existiert genau eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit gegebenen Krümmungen und den Anfangsbedingungen: $c(0) = 0$ und mit der Standardbasis $e_0, \ldots, e_n$ als Begleitbein bei 0.

Nach den Frenet'schen Ableitungsgleichungen muß $\nu_j' = K_{j+1} \cdot \nu_{j+1} - K_j \cdot \nu_{j-1}$ für $j = 0, \ldots, n$ und $\nu_j(0) = e_j$ sein. Dies ist ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem mit $(n+1)^2$ eindimensionalen Gleichungen und entsprechenden Anfangsbedingungen. Für ein solches System existiert eine eindeutige Lösung $(\nu_0, \ldots, \nu_n)$, für die wir zeigen werden, daß dieses das Begleitbein einer Kurve ist. Wir behaupten, daß die ν_i für jeden Zeitpunkt orthonormiert sind: Wir definieren $g_{ij} := \langle \nu_i, \nu_j \rangle : I \to \mathbb{R}$. Dann ist $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Mit

$$g_{ij}' = \langle \nu_i', \nu_j \rangle + \langle \nu_i, \nu_j' \rangle = K_{i+1} g_{i+1,j} - K_i g_{i-1,j} + K_{j+1} g_{i,j+1} - K_j g_{i,j-1}$$

erhalten wir abermals ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem mit $(n+1)^2$ eindimensionalen Gleichungen und entsprechenden Anfangsbedingungen $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Auch hier muß es eine eindeutige Lösung g_{ij} geben. Wir sehen andererseits, daß δ_{ij} eine Lösung ist:

$$K_{i+1}\delta_{i+1,j} - K_i\delta_{i-1,j} + K_{j+1}\delta_{i,j+1} - K_j\delta_{i,j-1} =$$
$$= \left\{\begin{array}{cc} 0 & \text{für } |i-j| \neq 1 \\ -K_i + K_{j+1} = 0 & \text{für } i = j+1 \\ K_{i+1} - K_j = 0 & \text{für } j = i+1 \end{array}\right\} = \delta'_{i,j}$$

Also ist $g_{ij} = \delta_{ij}$, d.h. die ν_i sind orthonormiert. Sie sind auch positiv orientiert, denn $\det(\nu_0, \dots, \nu_n)(0) = 1$ und $\det(\nu_0, \dots, \nu_n)(t) = \pm 1$ für alle t. Wegen des Zwischenwertsatzes folgt, $\det(\nu_0, \dots, \nu_n)(t) = 1$ für alle t. Es gibt höchstens eine Kurve c, welche die ν_i als Begleitbein hat und $c(0) = 0$ erfüllt, nämlich: $c(t) := \int_0^t \nu_0$, denn c' muß gleich ν_0 sein. Es ist $|c'| = |\nu_0| = 1$, also ist c nach der Bogenlänge parametrisiert. Durch Differenzieren erhalten wir $c^{(j+1)}(t) = \nu_0^{(j)}$ und wegen der Differentialgleichung für die ν_j gilt

$$\nu_0^{(j)} \equiv K_1 \cdot \ldots \cdot K_j \nu_j \mod \langle \nu_0, \dots, \nu_{j-1} \rangle$$

für $j < n$ wie im Beweis von (7.7) gezeigt wurde. Also ist auch

$$c^{(j+1)}(t) \equiv K_1 \cdot \ldots \cdot K_j \nu_j \mod \langle \nu_0, \dots, \nu_{j-1} \rangle$$

und damit sind die K_j die Krümmungen von c und die ν_i das Begleitbein nach Lemma (7.7).

Jede andere Kurve mit diesen Krümmungen läßt sich durch eine eindeutig bestimmte Bewegung in eine Kurve mit (denselben Krümmungen und) obigen Anfangsbedingungen transformieren. Diese ist nach dem bisher Gesagten eindeutig bestimmt, also auch jene. □

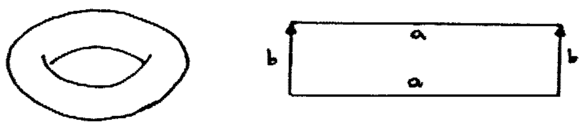
II. Mannigfaltigkeiten

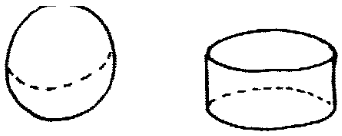
In diesem Kapitel führen wir den Begriff der Mannigfaltigkeit ein. Wir beginnen dabei spielerisch mit zweidimensionalen Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$, sogenannten Flächen, verallgemeinern diese dann im zweiten Abschnitt zu Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, und präzisieren im dritten Abschnitt die spielerischen Beispiele vom Anfang. Nach einem Einschub über die Homotopietheorie von höher dimensionalen Sphären behandeln wir noch die klassischen Beispiele von Mannigfaltigkeiten, die eine glatte Gruppenstruktur tragen, also von sogenannten Lie-Gruppen. Nach Einführung des Begriffs der glatten Abbildung haben wir genügend Einsicht, um uns abstrakten Mannigfaltigkeiten zuzuwenden, damit meine ich solche Mannigfaltigkeiten die nicht (von vornherein) in einem umgebenden Euklidischen Raum sitzen. Nach Produkten und disjunkten Vereinigungen von Mannigfaltigkeiten gehen wir dann noch auf die Reichhaltigkeit der glatten Funktionen auf ihnen ein, insbesonders betrifft das Trennungsaxiome wie etwa jenes von Hausdorff, Lokalkompaktheit und vor allem Parakompaktheit und die damit äquivalente Existenz von Partitionen der eins, die das zentrale Hilfsmittel darstellen um von lokalen Konstruktionen (also z.B. solchen aus der Analysis) zu globalen übergehen zu können.

9. Beispiele zweidimensionaler Flächen

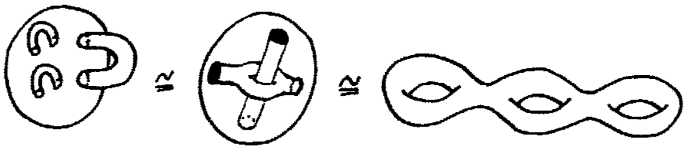
Wir wollen uns in diesem Abschnitt vorerst spielerisch mit zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten vertraut machen. Das sind Objekte, die lokal, bis auf Verbiegungen und Dehnungen, wie eine Scheibe im $\mathbb{R}^2$ aussehen.

9.1 Beispiele orientierbarer Flächen





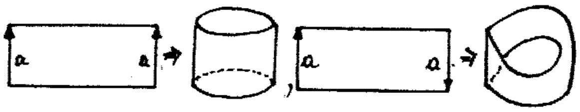
Sphäre S^2 und *Zylinder* $S^1 \times \mathbb{R}$



9.2 Klassifikationssatz für orientierbare Flächen.
Jede zweidimensionale, kompakte, zusammenhängende Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist homöomorph zu einer Fläche von Geschlecht g, d.h. entsteht aus der Sphäre durch Ankleben von g Zylinder.

Ohne Beweis, siehe z.B. [**57**, 9.3.5]

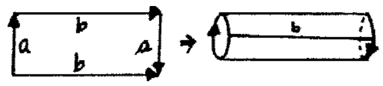
9.3 Beispiele nicht-orientierbarer Flächen

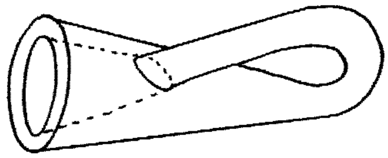


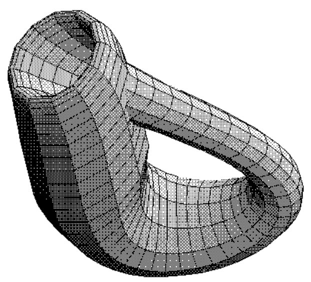
Beispiele von zweidimensionalen, zusammenhängenden, nicht orientierbaren Flächen:

Schneidet man das Möbiusband der Länge nach auf, so erhält man ein zweifach verdrehtes Band, das man im $\mathbb{R}^4$ aufdrehen kann (siehe (11.10)).

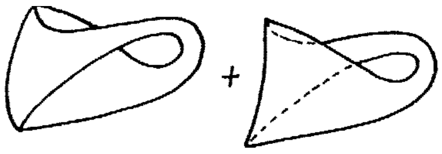
Beispiele von zweidimensionalen, zusammenhängenden, kompakten, nicht orientierbaren Flächen:



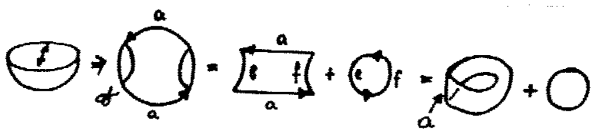


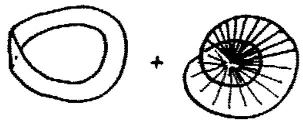


Das nennt man die Klein'sche Flasche, die man im $\mathbb{R}^4$ ohne Doppelpunkte realisieren kann und die auch durch Verkleben zweier Möbiusbänder entsteht.



Ein anderes Beispiel ist die projektive Ebene $\mathbb{P}^2$, dies ist die Menge aller Geraden durch den Nullpunkt im $\mathbb{R}^3$. Man kann die projektive Ebene aus der Sphäre auf folgende Weise erhalten: Die antipodalen Punkte auf der Sphäre erzeugen die gleiche Gerade und müssen miteinander identifiziert werden. Dazu kleben wir die nördliche Hemisphäre antipodal auf die südliche. Wir müssen noch die gegenüberliegenden Punkte am Äquator miteinander identifizieren. Hierzu verformen wir die Halbkugel zu einer Scheibe, von der wir auf beiden Seiten einen Halbkreis ausschneiden und erhalten nach Verkleben der antipodalen Punkte am Äquator ein Möbiusband und eine Scheibe. Nun muß man nur mehr den Rand der Scheibe mit dem des Möbiusbandes verkleben.





Man kann sich das auf drei Arten vorstellen:

1) Man zeichnet das Möbiusband und klebt die Scheibe (mit Selbstdurchdringung) an.

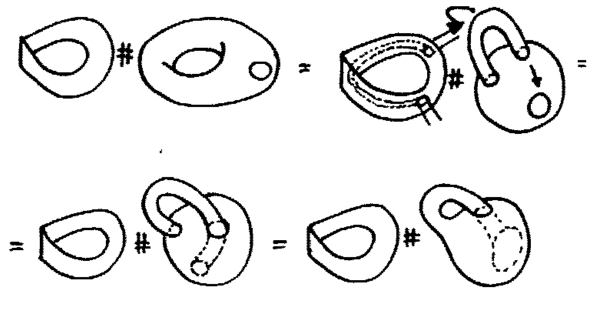
2) Man zeichnet die Scheibe und klebt das Möbiusband (mit Selbstdurchdringung) an. Das nennt man auch die Kreuzhaube.

3) Auch hier kleben wir an ein Möbiusband (dreifach verdreht und selbstdurchdrungen) eine Scheibe. Das nennt man auch Boy's Surface, siehe die Zeichnung auf der nächsten Seite.

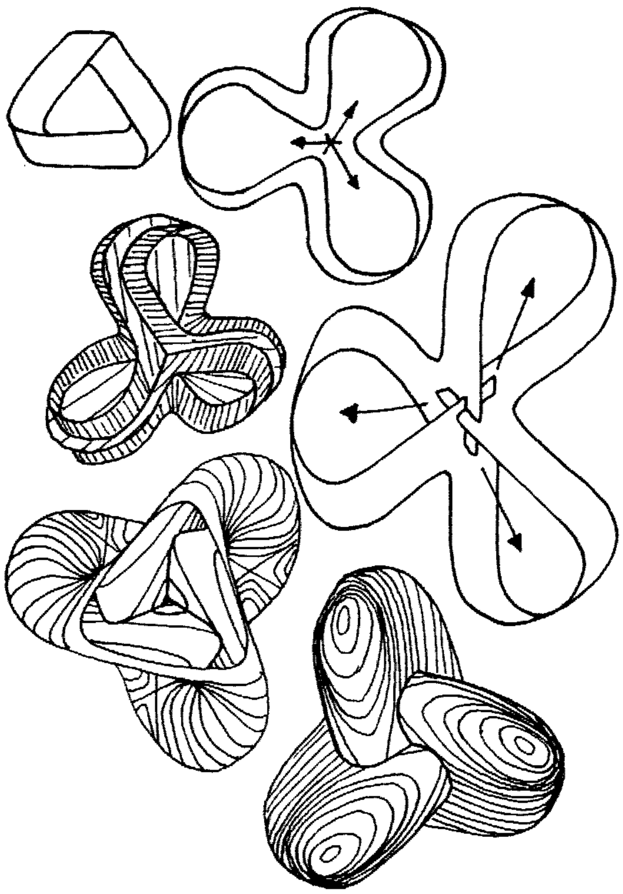
9.4 Klassifikationssatz nicht-orientierbarer Flächen. *Jede nicht orientierbare, zweidimensionale, zusammenhängende, kompakte Fläche entsteht aus einer Sphäre durch Ankleben von endlich vielen (≥ 1) Kreuzhauben. Die Anzahl der angeklebten Kreuzhauben heißt Geschlecht der Fläche.*

Ohne Beweis, siehe z.B. [**57**, 9.3.10].

Klebt man an einen Torus mit Loch ein Möbiusband, so ist das das Gleiche, wie wenn man an eine Klein'sche Flasche mit Loch ein Möbiusband klebt.



Boy's Surface



10. Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

In diesem Abschnitt wollen wir Mannigfaltigkeiten als hinreichend "reguläre" Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definieren. Wir werden sehen, daß diese auf verschiedenste Weise beschrieben werden können.

10.1 Definition (reguläre Abbildungen)

Eine glatte Abbildung $f : U \to V$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen sind, heißt REGULÄR, falls der Rang der Ableitung in jedem Punkt $x \in U$ so groß wie möglich, also gleich $\min\{n, m\}$ ist.

Beachte, daß eine in einem Punkt reguläre Abbildung lokal um diesen Punkt regulär ist, denn der Rang kann lokal nicht fallen.

Aus der linearen Algebra kennen wir folgende Beziehungen für den Rang $\operatorname{rang}(A)$ einer linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{Bild}(A)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\operatorname{Ker}(A))$$

Falls also $m \leq n$ ist, so bedeutet die Regularität, daß die Ableitung in jedem Punkt surjektiv ist. Anderenfalls bedeutet sie, daß die Ableitung in jedem Punkt injektiv ist.

Für die Äquivalenz der in (10.4) zu gebende Beschreibung "schöner" Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ benötigen wir die folgenden zwei zentralen Sätze aus der mehrdimensionalen Analysis:

10.2 Inverser Funktionensatz. *Sei U offen im $\mathbb{R}^n$ und sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ glatt, mit $f(0) = 0$, und invertierbarer Ableitung an der Stelle 0. Dann ist f ein lokaler Diffeomorphismus, d.h. es gibt offene Umgebungen V,V' von 0, sodaß $f : V \to V'$ bijektiv und f^{-1} glatt ist.*

Ohne Beweis, siehe reelle Analysis.

10.3 Impliziter Funktionensatz. *Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ glatt mit $f(0,0) = 0$ und $\partial_2 f(0,0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ invertierbar. Dann gibt es lokal eine eindeutige Lösung $y(x)$ von $f(x, y(x)) = 0$ und $x \mapsto y(x)$ ist C^∞.*

Beweis. Wir definieren $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ mit $F(x,y) := (x, f(x,y))$. Diese Funktion ist glatt, und $F(0,0) = 0$. Abgeleitet ergibt das eine $(n+m) \times (n+m)$-Matrix:

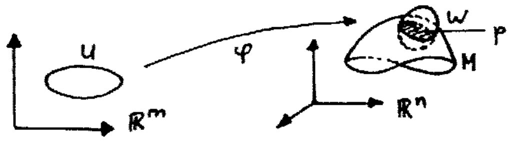
$$F'(0,0) = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ * & \partial_2 f(0,0) \end{pmatrix}$$

Diese ist invertierbar, also folgt aus dem inversen Funktionensatz, daß F^{-1} lokal existiert und glatt ist. Da F in der ersten Variable die Identität ist, gilt gleiches auch für F^{-1}, also sei $(u, g(u,v)) := F^{-1}(u,v)$. Dann gilt:

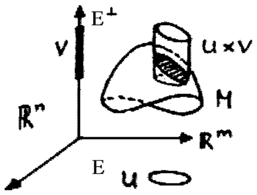
$$\begin{aligned} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = (x,0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x,y) = F^{-1}(x,0) = (x, g(x,0)) \Leftrightarrow y = g(x,0) \end{aligned} \qquad \square$$

10.4 Satz (Charakterisierung von Teilmannigfaltigkeiten).
Für eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $p \in M$ und $m \leq n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

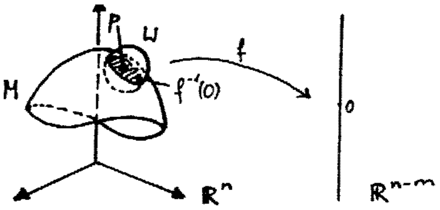
1. *(LOKALE PARAMETRISIERUNG) Es gibt eine glatte, bei 0 reguläre Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, wobei $0 \in U$ offen im $\mathbb{R}^m$ und $\varphi(0) = p$, so daß für alle offenen Umgebungen U_1 von $0 \in U$ eine offene Umgebung W von p in $\mathbb{R}^n$ existiert mit $\varphi(U_1) = W \cap M$.*



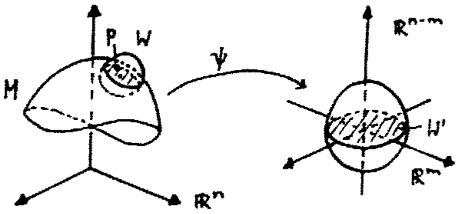
2. *(LOKALER GRAPH) Es gibt eine glatte Abbildung $g : U \to V$, wobei U offen in einem m-dimensionalen Teilraum E des $\mathbb{R}^n$ und V offen in $E^\perp$ ist. Dabei soll gelten: $p \in M \cap (U \times V) = \mathrm{Graph}(g) := \{(x, g(x)) : x \in U\} \subseteq E \times E^\perp \cong \mathbb{R}^n$.*



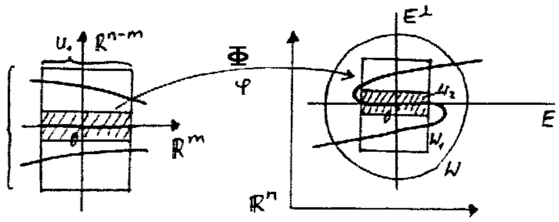
3. (lokale Gleichung) *Es gibt eine glatte, bei p reguläre Abbildung $f : W \to \mathbb{R}^{n-m}$, wobei $p \in W$ offen im $\mathbb{R}^n$ und $f^{-1}(0) = M \cap W$ ist.*



4. (lokale Trivialisierung) *Es gibt einen Diffeomorphismus $\Psi : W \to W'$, wo $0 \in W'$ offen in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ und $p \in W$ offen im $\mathbb{R}^n$ ist, und es gilt: $\Psi(M \cap W) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap W'$.*



Beweis. O.B.d.A. sei $p = 0 \in \mathbb{R}^n$.
($1 \Rightarrow 4$) Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ das Bild von $\varphi'(0)$. Dann ist $\dim(E) = m$ und bezüglich $E \oplus E^\perp \cong \mathbb{R}^n$ ist $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ und $\varphi'(0) = (\varphi_1'(0), \varphi_2'(0))$. Folglich ist $\varphi_2'(0) = 0$ und $\varphi_1'(0) : \mathbb{R}^m \to E$ ist injektiv (also bijektiv).



Sei $\Phi : \mathbb{R}^m \oplus E^\perp \to E \oplus E^\perp$ definiert durch

$$\Phi(u, v) := \varphi(u) + v = (\varphi_1(u), \varphi_2(u) + v).$$

Die Jacobimatrix von Φ bei $(0,0)$ ist:

$$\Phi'(0,0) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(0) & 0 \\ \varphi_2'(0) & \mathrm{id} \end{pmatrix}.$$

Sie ist invertierbar, da $\varphi_1'(0) : \mathbb{R}^m \to E$ bijektiv ist. Aus dem Inversen-Funktionensatz (10.2) folgt, daß Φ ein lokaler Diffeomorphismus ist, d.h. $\exists\, U_1 \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\exists\, V_1 \subseteq E^\perp$ offen und $\exists\, W_1 \subseteq W$ offen, sodaß $\Phi : U_1 \times V_1 \to W_1$ ein Diffeomorphismus ist. Also ist

$$\varphi(U_1) = \Phi(U_1 \times \{0\}) \subseteq W_1 \subseteq W.$$

Wegen der Eigenschaft (1) von φ existiert ein offenes $W_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, und o.B.d.A. ist $W_2 \subseteq W_1$, sodaß $\varphi(U_1) = W_2 \cap M$. Wir definieren $W' := \Phi^{-1}(W_2)$. Dann ist $U_1 \times \{0\} \subseteq W'$, denn $\Phi(U_1 \times \{0\}) = \varphi(U_1) = W_2 \cap M$, und weiters ist $\Phi : W' \to W_2$ ein Diffeomorphismus mit inverser Abbdildung $\Psi := \Phi^{-1} : W_2 \to W'$. Für $z \in W_2$ gilt:

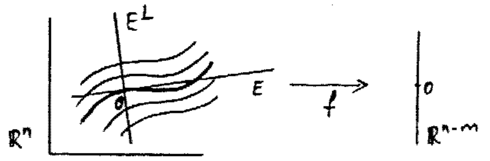
$$\begin{aligned} z \in M &\Leftrightarrow \exists\, u \in U_1 : \Phi(u,0) = \varphi(u) = z \\ &\Leftrightarrow \Psi(z) = (u,0) \text{ für ein } u \in U_1 \\ &\Leftrightarrow \Psi(z) \in (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap W'. \end{aligned}$$

Insbesonders ist φ auf U_1 die Einschränkung eines Homöomorphismuses, also $\varphi : U_1 \to M$ eine topologische Einbettung auf eine offene Teilmenge von M.

($4 \Rightarrow 3$) Sei $f := \mathrm{pr}_2 \circ \psi$, wobei $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^{n-m}$ die zweite Projektion ist. Da $f'(z) = \underbrace{\mathrm{pr}_2}_{\text{surj.}} \circ \underbrace{\psi'(z)}_{\text{bij.}}$ surjektiv ist, ist f regulär. Sei $z \in W$ dann gilt:

$$z \in M \Leftrightarrow \psi(z) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \Leftrightarrow (\mathrm{pr}_2 \circ \psi)(z) = f(z) = 0$$

($3 \Rightarrow 2$) Sei f eine lokale Gleichung wie in (3).



Wir definieren $E := \operatorname{Ker} f'(0)$ und verwenden $\mathbb{R}^m \cong E \times E^\perp$. Wegen

$$\dim \underbrace{\operatorname{Ker} f'(0)}_{E} + \underbrace{\dim \operatorname{Bild} f'(0)}_{n-m} = \underbrace{\dim \mathbb{R}^n}_{n},$$

ist $\dim E = m$ und $\dim E^\perp = n - m$. Gesucht ist eine Funktion $g : E \to E^\perp$, welche implizit gegeben ist durch $f(x,y) = 0$ (d.h. $(x,y) \in M$), und $y = g(x)$. Um den impliziten Funktionensatz anwenden, betrachten wir die zweite partielle Ableitung von f:

$$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)} = \partial_2 f(0,0) : E^\perp \to \mathbb{R}^{n-m}.$$

Diese ist surjektiv, da wegen $f'(0)(v_1, v_2) = \partial_1 f(0)(v_1) + \partial_2 f(0)(v_2)$ für $(v_1, 0) \in E \times \{0\} \cong E = \operatorname{Ker} f'(0)$ folgendes gilt: $\partial_1 f(0)(v_1) = f'(0)(v_1, 0) = 0$. Da $f'(0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ surjektiv ist, ist also auch $\partial_2 f(0) : E^\perp \to \mathbb{R}^{n-m}$ surjektiv und wegen $\dim(E^\perp) = n-m$ somit bijektiv. Aus dem impliziten Funktionensatz (10.3) folgt nun: $\exists\, U \subseteq E$ offen, $\exists\, V \subseteq E^\perp$ offen und $g : U \to V$ glatt, mit $g(x) = y \Leftrightarrow f(x,y) = 0$

($2 \Rightarrow 1$) Sei M lokal als Graph von $g : U \to V$ beschrieben. Wir definieren die glatte Abbildung $\varphi : U \to E \times E^\perp = \mathbb{R}^n$ durch $x \mapsto (x, g(x))$. Die Frage ist, ob φ die Menge

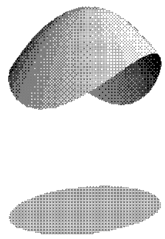
M lokal beschreibt. Dazu schließen wir für $(x, y) \in U \times V =: W$ wie folgt:

$$(x, y) \in M \Leftrightarrow (x, y) \in \text{Graph}(g) \Leftrightarrow y = g(x) \Leftrightarrow (x, y) = (x, g(x)) = \varphi(x).$$

Die Abbildung φ ist eine Einbettung, denn $(x, y) \mapsto y$ beschreibt eine Linksinverse. $\square$

Definition (Konkrete Mannigfaltigkeit)

Eine Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ mit einer der obigen äquivalenten Eigenschaften für all ihre Punkte $p \in M$ heißt C^∞-(Teil-)Mannigfaltigkeit (des $\mathbb{R}^n$) der Dimension m. Im Gegensatz zu Kurven dürfen diese Mannigfaltigkeiten selbst für $m = 1$ keine Doppelpunkte besitzen.



Eine glatte reguläre Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \to M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit offenen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\varphi(0) = p$, die eine Einbettung auf eine offene Teilmenge von M ist, heißt lokale (bei p zentrierte) Parametrisierung von M. In ($1 \Rightarrow 4$) haben wir gezeigt, daß ein φ, welches (1) erfüllt, lokal eine Parametrisierung ist. Die Komponenten der Umkehrabbildung zu einer lokalen Parametrisierung heißen lokale Koordinaten von M.

11. Beispiele von Teilmannigfaltigkeiten

In diesen Abschnitt geben wir nun eine Reihe von Beispielen und machen damit auch die Flächen aus (9) präzise.

11.1 Kreis

1. Gleichung: $x^2 + y^2 = R^2$.
   Sei also $W := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dann ist $f : W \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := x^2 + y^2 - R^2$ eine Gleichung für M, die auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ regulär ist.
2. Parametrisierung: $\varphi \mapsto (x, y) := (R \cdot \cos\varphi, R \cdot \sin\varphi)$.
   Für alle $(x_0, y_0) \in M$ existiert ein $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ (gegeben durch $e^{i\varphi_0} = (x_0, y_0)$), sodaß $\varphi \mapsto (x, y)$ eine lokale Parametrisierung von $U :=]\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi[$ auf $W \cap M$ mit $W := \mathbb{R}^2 \setminus \{(-x_0, -y_0)\}$ ist.
3. Graph: $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ oder $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$
   Sei $E := \mathbb{R} \times \{0\}$, $U :=]-R, +R[\subset E$ und $V :=]0, +R[\subset E^\perp$. Dann ist $M \cap (U \times V) = \{(x, \sqrt{R^2 - x^2}) : x \in U\}$ eine lokale Darstellung von M als Graph von $g : U \to V$.
4. Trivialisierung: $(R, \varphi) \mapsto (R \cdot \cos\varphi, R \cdot \sin\varphi)$ also $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\psi(M) = \{R\} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$. Dies sind gerade Polarkoordinaten.

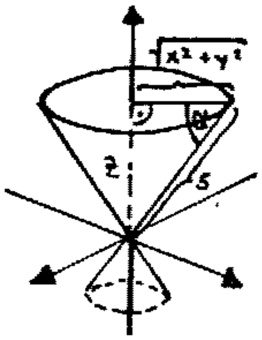
11.2 Zylinder

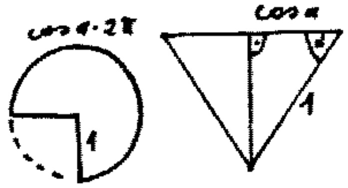
1. Gleichung: $x^2 + y^2 + 0 \cdot z = R^2$
2. Parametrisierung: $(\varphi, z) \mapsto (R \cdot \cos\varphi, R \cdot \sin\varphi, z)$ oder isometrisch $(\varphi, z) \mapsto (R\, e^{i\,\varphi/R}, z)$
3. Graph: $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ oder $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$
4. Trivialisierung: $(\varphi, r, z) \leftrightarrow (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi, z)$, das sind die Zylinderkoordinaten.

11.3 Kegel

Drehung einer Geraden durch Null mit Anstieg α um die z-Achse.

1. Gleichung: $\tan\alpha = z/\sqrt{x^2 + y^2}$ oder $(x^2 + y^2)\tan^2\alpha = z^2$,
2. Parametrisierung: $(\varphi, s) \mapsto (s\cos\alpha\cos\varphi, s\cos\alpha\sin\varphi, s\sin\alpha)$
3. Graph: $z = \pm\tan\alpha\sqrt{x^2 + y^2}$
4. Trivialisierung: $(\varphi, \alpha, s) \leftrightarrow (s\cos\alpha\cos\varphi, s\cos\alpha\sin\varphi, s\sin\alpha)$, das sind die Kugelkoordinaten.





Eine bessere Parametrisierung erhält man durch Aufrollen des Kegels in eine Ebene:

$$(x, y) \mapsto (r, \psi) \mapsto \left(s := r, \varphi := \frac{\psi}{\cos\alpha}\right) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cos\left(\frac{\psi}{\cos\alpha}\right) \\ r\cos\alpha\sin\left(\frac{\psi}{\cos\alpha}\right) \\ r\sin\alpha \end{pmatrix},$$

wobei (x, y) kartesische und (ψ, r) Polarkoordinaten in der Ebene sind.

Daß diese Parametrisierung längenbewahrend ist, sieht man auch wie folgt: Die Länge einer Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist durch $L(c) = \int_a^b |c'(t)|\, dt$ gegeben. Damit Kurve und Bildkurve unter einer Abbildung φ gleiche Länge haben, muß also $\int_a^b |c'(t)|\, dt = \int_a^b |\varphi'(c(t)) \cdot c'(t)|\, dt$ gelten. Dies ist genau dann für alle Kurven c erfüllt, wenn $|\varphi'(p) \cdot v| = |v|$ für alle p und v gilt, d.h. $\varphi'(p)$ eine Isometrie ist.

Die Ableitung obiger Parametrisierung ist die Zusammensetzung von

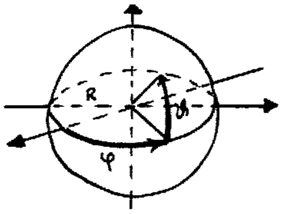
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot\cos(\frac{\psi}{\cos\alpha}) & -r\cos\alpha\cdot\sin(\frac{\psi}{\cos\alpha}) \\ \cos\alpha\cdot\sin(\frac{\psi}{\cos\alpha}) & r\cos\alpha\cdot\cos(\frac{\psi}{\cos\alpha}) \\ \sin\alpha & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos\alpha} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\psi & -r\sin\psi \\ \sin\psi & r\cos\psi \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\ \cos\psi\ \cos\left(\frac{\psi}{\cos\alpha}\right)-\sin\psi\ \sin\left(\frac{\psi}{\cos\alpha}\right) & \cos\alpha\ \sin\psi\ \cos\left(\frac{\psi}{\cos\alpha}\right)-\cos\psi\ \sin\left(\frac{\psi}{\cos\alpha}\right) \\ \cos\alpha\ \cos\psi\ \sin\left(\frac{\psi}{\cos\alpha}\right)+\sin\psi\ \cos\left(\frac{\psi}{\cos\alpha}\right) & \cos\alpha\ \sin\psi\ \sin\left(\frac{\psi}{\cos\alpha}\right)+\cos\psi\ \cos\left(\frac{\psi}{\cos\alpha}\right) \\ \cos\alpha\ \cos\psi & \sin\alpha\ \sin\psi \end{pmatrix}$$

von der man mit längerer direkter Rechnung zeigen kann, daß sie isometrisch ist.

11.4 Sphäre

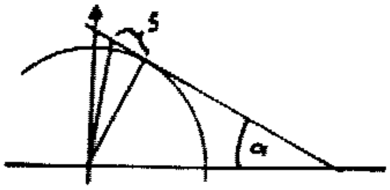
1. Gleichung: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
2. Parametrisierung: $(\varphi, \theta) \mapsto (R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta)$ mit Längengrade φ und Breitengrade θ.
3. Graph: $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$
4. Trivialisierung: Kugelkoordinaten.



Man kann eine Sphäre auch parametrisieren, indem man auf den berührenden Kegel mit Anstieg α projiziert:

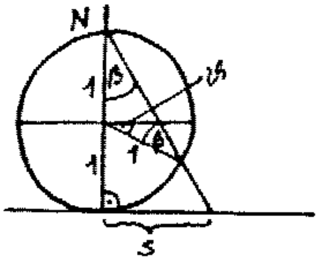
$$(x, y) \mapsto (\varphi, s) \mapsto (\varphi, \theta(s)) \mapsto \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta \end{pmatrix},$$

dabei sind (φ, s) die Parameter der obigen Parametrisierung des Kegels und (φ, θ) die Parameter der Kugel.



Spezielle Wahlen der Funktion θ liefern die Radialprojektion, bzw. die Normalprojektion auf die Erzeugenden des Kegels, siehe Aufgabe (72.42).

Besonders wichtig ist die stereographische Projektion: Man projiziert von einem Punkt der Sphäre (o.B.d.A. dem Nordpol) auf die Tangentialebene im antipodalen Punkt.



Es ist $2\beta + (\frac{\pi}{2} + \theta) = \pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$ und somit ist

$$\frac{s}{2} = \tan\beta = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \tan(\theta/2)}{1 + \tan(\theta/2)}.$$

Diese Projektion ist winkelerhaltend und Kreise werden auf Kreise oder Geraden abgebildet, siehe Aufgabe (72.41).

11.5 n-Sphäre

$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Die Funktion $f : x \mapsto |x|^2 - 1$ ist eine reguläre Gleichung für S^n, denn $f'(x)(x) = 2|x|^2 = 2$ für $x \in S^n$. Als lokale Koordinaten verwenden wir die stereographische Projektion (aber diesmal auf die Äquatorialebene, was einen Faktor $1/2$ bzgl. der gerade Besprochenen ergibt), d.h. wir suchen zu $x \in S^n$ ein $y \in \mathbb{R}^n = p^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$, wobei $p \in S^n$ der gewählte Pol ist, mit

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p, p + \lambda(x-p)\rangle = |p|^2 - \lambda\langle p, p-x\rangle \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{1}{\langle p, p-x\rangle} = \frac{1}{1 - \langle p, x\rangle} \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= (1-\lambda)p + \lambda x = \frac{1}{1-\langle p,x\rangle}(x - \langle p,x\rangle p). \end{aligned}$$

Umgekehrt

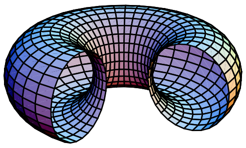
$$\begin{aligned} & x = p + \mu(y-p) \text{ mit } |x| = 1 \\ \Rightarrow\ & 1 = \langle x, x\rangle = \langle p + \mu(y-p), p + \mu(y-p)\rangle \\ & \quad = 1 + 2\langle p, \mu(y-p)\rangle + \mu^2\langle y-p, y-p\rangle \\ \Rightarrow\ & 0 = \mu^2|y-p|^2 + 2\mu\langle p, y-p\rangle = \mu(\mu|y-p|^2 - 2\langle p, p-y\rangle). \end{aligned}$$

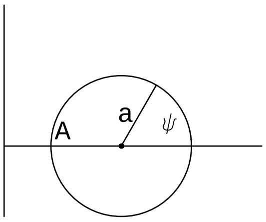
Aus $\mu = 0$ erhalten wir die uninteressante Lösung $x = p$. Andernfalls ist

$$\mu = \frac{2(1 - \langle p, y\rangle)}{|y|^2 - 2\underbrace{\langle y, p\rangle}_{0} + 1} = \frac{2}{|y|^2 + 1} \quad \text{und damit}$$

$$x = \frac{1}{|y|^2+1}\Big(2y + (|y|^2 - 1)p\Big)$$

11.6 Torus





1. Gleichung: $z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - A)^2 = a^2$
2. Parametrisierung:
$$(\varphi, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} (A + a\cos\psi)\cos\varphi \\ (A + a\cos\psi)\sin\varphi \\ a\sin\psi \end{pmatrix},$$
mit Längengrade φ und Breitengrade ψ.

Für den speziellen Torus $z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - A)^2 = A^2 - 1 = a^2$ mit $A > 1$ berechnen wir das Urbild unter der stereographischen Projektion $\mathbb{R}^4 \supset S^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich des Punktes $(0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$ wie folgt:

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto \frac{1}{1-y_2}(x_1, y_1, x_2, 0) \text{ da } y = \frac{x - \langle x, p\rangle p}{1 - \langle x, p\rangle} \text{ ist.}$$

Diesem Torus entspricht folgende Teilmenge der S^3:

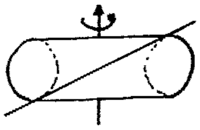
$$x_1{}^2 + y_1{}^2 + x_2{}^2 + y_2{}^2 = 1$$
$$\left(\frac{x_2}{1-y_2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}}{1-y_2} - A\right)^2 = A^2 - 1 = a^2$$

Dies formen wir nun um:

$$\frac{x_2{}^2}{(1-y_2)^2} + \frac{x_1{}^2 + y_1{}^2}{(1-y_2)^2} - 2A\frac{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}{1-y_2} + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_2{}^2 + 1 - (x_2{}^2 + y_2{}^2) - 2A\sqrt{1 - (x_2{}^2 + y_2{}^2)} \cdot (1 - y_2) + 1 - 2y_2 + y_2{}^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2(1-y_2) = 2A\sqrt{1 - (x_2{}^2 + y_2{}^2)}(1 - y_2)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1{}^2 + y_1{}^2 + x_2{}^2 + y_2{}^2 = 1 \\ \qquad 1 - (x_2{}^2 + y_2{}^2) = \dfrac{1}{A^2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1{}^2 + y_1{}^2 = \dfrac{1}{A^2} \ldots \text{ Kreis im } \mathbb{R}^2 \times \{(0,0)\} \\ x_2{}^2 + y_2{}^2 = \dfrac{A^2-1}{A^2} = \dfrac{a^2}{A^2} \ldots \text{ Kreis im } \{(0,0)\} \times \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Der Torus ist also das kartesische Produkt $S^1 \times S^1$ von zwei aufeinander normalstehenden Kreisen.

Bemerkung: Folgender spezielle Schnitt durch den Torus ergibt zwei einander schneidende Kreise:



Wir verwenden auf der Schnittebene $z = \frac{a}{\sqrt{A^2-a^2}}x$ die Basis mit den orthonormalen Vektoren $(\frac{\sqrt{A^2-a^2}}{A}, 0, \frac{a}{A})$ sowie $(0,1,0)$ und bezeichnen mit (s,y) die entsprechenden Koordinaten. Dann ist $x = \frac{\sqrt{A^2-a^2}}{A} \cdot s$ und $z = \frac{a}{A} \cdot s$. Setzen wir dies in die Torusgleichung $z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - A)^2 = a^2$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{A}s\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{A^2-a^2}{A^2}s^2 + y^2} - A\right)^2 = a^2 \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\; a^2(A^2 - s^2) &= \left(\sqrt{(A^2-a^2)s^2 + A^2y^2} - A^2\right)^2 \\
&= (A^2-a^2)s^2 + A^2y^2 + A^4 - 2A^2\sqrt{(A^2-a^2)s^2 + A^2y^2} \\
\Leftrightarrow\; s^2 + y^2 + (A^2 - a^2) &= 2\sqrt{(A^2-a^2)s^2 + A^2y^2} \\
\Leftrightarrow\; \big(s^2 + y^2 + (A^2-a^2)\big)^2 &= 4(A^2-a^2)s^2 + 4A^2y^2 \\
\Leftrightarrow\; \big(A^2 - (s^2 + (y+a)^2)\big) \cdot \big(A^2 - (s^2 + (y-a)^2)\big) &= 0,
\end{aligned}$$

und das ist die Gleichung zweier Kreise mit Mittelpunkte $(0, \pm a)$ in den (s,y)-Koordinaten und Radius A.

11.7 Hopffaserung $S^3 \to S^2$

Sie ist definiert durch folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S^3 \arrow[r, dotted, "\text{Hopffaserung}"] \arrow[d, hook] & S^2 \arrow[d, "\text{stereogr.Proj.}"] \\
\mathbb{C}^2 \arrow[r] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

$$(z_1, z_2) \longrightarrow \frac{z_2}{z_1}$$

Da die Inverse zur stereographischen Projektion um $p = (0,0,1)$ die Abbildung $y \mapsto \frac{2y + (|y|^2-1)p}{|y|^2+1} = \frac{1}{|y|^2+1}(2y, |y|^2 - 1)$ ist, bekommen wir folgende Formel für die

Hopffaserung:

$$\begin{aligned}(z_1,z_2)\mapsto \frac{1}{|\frac{z_2}{z_1}|^2+1}\Big(2\frac{z_2}{z_1},|\frac{z_2}{z_1}|^2-1\Big) &=\\ =\frac{z_1\bar z_1}{|z_1|^2+|z_2|^2}\Big(2\frac{z_2}{z_1},\frac{|z_2|^2-|z_1|^2}{z_1\bar z_1}\Big)\\ =\underbrace{\frac{1}{|z_1|^2+|z_2|^2}}_{1\text{ weil }(z_1,z_2)\in S^3}\Big(2z_2\bar z_1,|z_2|^2-|z_1|^2\Big).\end{aligned}$$

Wir betrachten die Urbilder in der S^3 eines Breitenkreises auf der S^2, dabei sind θ die Breitengrade.

$$\begin{aligned}&(z_1,z_2)\in S^3,\ |\frac{z_2}{z_1}|=r\Big(=\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})\Big) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \begin{Bmatrix}|z_2|=r|z_1|\\ (z_1,z_2)\in S^3\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}|z_2|^2=r^2|z_1|^2\\ |z_1|^2+|z_2|^2=1\end{Bmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{Bmatrix}|z_2|=r|z_1|\\ |z_1|^2(1+r^2)=1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}|z_2|^2=r^2\dfrac{1}{1+r^2}\\ |z_1|^2=\dfrac{1}{1+r^2}\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

Das entspricht nach (11.6) unter der stereographischen Projektion $S^3\to\mathbb{R}^3$ einem Torus im $\mathbb{R}^3$, wo $A=\sqrt{r^2+1}$ und $a=r$ ist.
Wir betrachten das Urbild in S^3 des Südpols auf der S^2:

$$(0,0,-1)\in S^2\ \hat{=}\ (r=0)\in\mathbb{R}^2\ \hat{=}\ (|z_1|=1,z_2=0)\subset S^3,$$

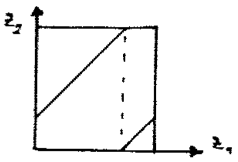
bzw. des Nordpols auf der S^2:

$$(0,0,+1)\in S^2\ \hat{=}\ (r=\infty)\subset\mathbb{R}^2\ \hat{=}\ (z_1=0,|z_2|=1)\subset S^3.$$

Wir behaupten allgemein: das Urbild jedes Punktes auf der S^2 (welcher bzgl. der stereographischen Projektion $S^2\to\mathbb{C}$ durch $z_0\in\mathbb{C}$) gegeben ist, ist ein Kreis in der $S^3\subset\mathbb{R}^4$, den man als Schnitt der Sphäre $S^3\subset\mathbb{R}^4$ mit der Ebene $z_2=z_1z_0$ erhält:

$$\begin{Bmatrix}(z_1,z_2)\in S^3\\ \dfrac{z_2}{z_1}=z_0\in\mathbb{C}\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}|z_2|^2+|z_1|^2=1\\ z_2=z_1z_0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}|z_1|^2=\dfrac{1}{1+r^2}\\ |z_2|^2=r^2\dfrac{1}{1+r^2}\\ z_2=z_1z_0\end{Bmatrix}$$

d.h. z_1 durchläuft einen Kreis, gleichzeitig durchläuft z_2 ebenso einen Kreis.



In stereographischen Koordinaten entspricht den ersten beiden Gleichungen im $\mathbb{R}^3$ der Torus $T: z^2+(\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{r^2+1})^2=r^2$. O.B.d.A. sei $r=z_0\in\mathbb{R}$, ansonsten drehen wir um $e^{-i\theta}$, was einer Drehung in der (x,y)-Ebene entspricht.

$$\text{Auf der } S^3: \left\{\begin{aligned} z_2 &= r z_1 \\ |z_2|^2 &= r^2 \frac{1}{1+r^2} \\ |z_1|^2 &= \frac{1}{1+r^2} \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} x_2 &= r x_1,\ y_2 = r y_1 \\ |z_2|^2 &= r^2 \frac{1}{1+r^2} \\ |z_1|^2 &= \frac{1}{1+r^2} \end{aligned}\right\}$$

$$\text{Entspricht im } \mathbb{R}^3: \left\{\begin{aligned} &z = rx \\ &x^2+y^2+z^2-1 = 2ry \\ &z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{r^2+1})^2 = r^2 \end{aligned}\right\}$$

Wobei wir $z_1 = x_1 + i\,y_1,\ z_2 = x_2 + i\,y_2$ gesetzt haben und die Formeln für die stereographische Projektion verwendeten:

$$x_1 = \frac{2x}{1+|(x,y,z)|^2} \qquad y_1 = \frac{2y}{1+|(x,y,z)|^2}$$
$$x_2 = \frac{2z}{1+|(x,y,z)|^2} \qquad y_2 = \frac{|(x,y,z)|^2-1}{1+|(x,y,z)|^2}.$$

Also ist das Urbild eines Punktes in den beiden Schnittkreisen des Torus mit der Ebene $z = rx$ erhalten. Eine genauere Analyse liefert, daß es genau der vorne bzgl. y liegende der beiden ist.

Das Äußere des Volltorus in der S^3 ist wieder ein Torus, wobei das Innere das Urbild der Südhalbkugel und das Äußere das Urbild der Nordhalbkugel ist.

11.8 Beispiel. *Der Raum $L_r(n,m)$ aller $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ von fixen Rang r ist eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension $r\,(n+m-r)$.*

Beweis. Wir beschreiben $L_r(n,m)$ lokal mittels einer regulären Gleichung. Sei dazu $T_0 \in L_r(n,m)$, d.h. $\operatorname{rang}(T_0) = \dim \operatorname{Bild} T_0 = r$. Es sei $F := \operatorname{Bild} T_0$ und $E := \operatorname{Ker} T_0^\perp$. Dann ist $T_0|_E : E \to F$ injektiv, und wegen $\dim E = n - \dim \operatorname{Ker} T_0 = \dim \operatorname{Bild} T_0 = \dim F$ sogar bijektiv. Bezüglich der orthogonal-Zerlegungen $\mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp$ und $\mathbb{R}^m = F \oplus F^\perp$ hat also T_0 folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} \text{ mit } B_0 = 0,\ C_0 = 0,\ D_0 = 0 \text{ und } A_0 \text{ invertierbar.}$$

Sei nun U die (wegen $GL(E) \subseteq L(E,E)$ offen) offene Umgebung aller Matrizen $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ mit A invertierbar. Dann liegt T in $L_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ genau dann wenn, $\dim \operatorname{Bild} T = r$. Es ist

$$T \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av + Bw \\ Cv + Dw \end{pmatrix}.$$

Somit ist $T \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0$ genau dann, wenn $v = -A^{-1}Bw$ und $Cv + Dw = 0$, oder äquivalent $v = -A^{-1}Bw$ mit $CA^{-1}Bw = Dw$. Es ist also $r = \operatorname{rang} T = \dim \operatorname{Bild} T = \dim \operatorname{Dom} T - \dim \operatorname{Ker} T = n - \dim \operatorname{Kern} T$ genau dann, wenn alle $w \in E^\perp$ die Gleichung $CA^{-1}Bw = Dw$ erfüllen, d.h. $D = CA^{-1}B$ ist.

Die Abbildung

$$f : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \supseteq U \to L(E^\perp, F^\perp), \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto D - CA^{-1}B$$

beschreibt L_r lokal und ist glatt. Sie ist auch regulär, denn ihre Ableitung in Richtung $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$ ist $X \in L(E^\perp, F^\perp)$. Die Dimension von $L_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist somit $n\,m - (n - r)\,(m-r) = r\,(n+m-r)$. □

11.9 Beispiel. *Die Graßmannmannigfaltigkeit $G(r,n)$ der r-Ebenen durch 0 im $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmannigfaltigkeit von $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ der Dimension $r\,(n-r)$.*

Wenn wir $r = 1$ wählen, dann erhalten wir als Spezialfall die projektiven Räume $\mathbb{P}^{n-1} = G(1,n)$.

Beweis. Wir identifizieren die linearen Teilräume des $\mathbb{R}^n$ mit den orthogonal-Projektionen auf sie. Damit ist $G(r,n)$ eine Teilmenge der Mannigfaltigkeit $L_r(n,n)$. Sei E_0 ein Teilraum von $\mathbb{R}^n$ der Dimension r und P_0 die ortho-Projektion auf E_0 bezüglich der Zerlegung $\mathbb{R}^n = E_0 \oplus E_0^\perp$ ist P_0 dann durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Eine Umgebung von P_0 in $L_r(n,n)$ ist dann durch die Matrizen $\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$ mit invertierbaren A gegeben. Eine lineare Abbildung P ist genau dann eine ortho-Projektion, wenn sie idempotent ($P^2 = P$) und selbstadjungiert $P = P^t$ ist, oder äquivalent mit einer Gleichung, wenn $P^tP = P$ ist. In der Tat: Daß P eine Projektion ist, bedeutet $P|_{\text{Bild}\,P} = \text{id}$, d.h. $P^2 = P$, und eine Orthogonalprojektion zu sein bedeutet $\text{Ker}(P) = \text{Bild}(P)^\perp$. Aus $P^2 = P$ folgt aber $\text{Ker}(P) = \text{Bild}(1-P)$, denn $P(1-P) = 0$ und $Px = 0 \Rightarrow x = x - Px = (1-P)x$. Somit ist $\text{Ker}(P) \perp \text{Bild}(P)$ genau dann, wenn $0 = \langle (1-P)x, Py \rangle = \langle x, (1-P^t)Py \rangle$ für alle x, y, d.h. $P = P^tP$. Umgekehrt folgt $P^t = (P^tP)^t = P^tP = P$ und somit $P = P^tP = P^2$. Für die Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$ ist das genau dann der Fall, wenn $A = A^t$ und $B^t = C$ (dann ist auch $(CA^{-1}B)^t = B^t(A^t)^{-1}C^t = CA^{-1}B$) und

$$\begin{pmatrix} A^tA + C^tC & A^tB + C^tCA^{-1}B \\ B^tA + B^t(A^t)^{-1}C^tC & B^tB + B^t(A^t)^{-1}C^tCA^{-1}B \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & B^t(A^t)^{-1}C^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

oder äquivalent $A^tA + C^tC = A$ und damit

$$A^tB + C^tCA^{-1}B = A^tB + (A - A^tA)A^{-1}B = B,$$
$$B^tA + B^t(A^t)^{-1}C^tC = B^tA + B^t(A^t)^{-1}(A - A^tA) = B^t(A^t)^{-1}A = C$$

und

$$\begin{aligned} B^tB + B^t(A^t)^{-1}C^tCA^{-1}B &= B^tB + B^t(A^t)^{-1}(A - A^tA)A^{-1}B \\ &= B^t(A^t)^{-1}B = CA^{-1}B \end{aligned}$$

Zusammen sind die Gleichungen also $A^tA + C^tC = A$ ($\Rightarrow A^t = A$), $B = C^t$ und $D = CA^{-1}B$. Dies sind $r^2 + (n-r)^2 + r\,(n-r)$ unabhängige Gleichungen, und folglich sollte die Dimension von $G(r,n)$ gerade $n^2 - (r^2 + n^2 - 2nr + r^2 + nr - r^2) = nr - r^2 = r(n-r)$ sein.

Es bleibt also zu zeigen, daß die Gleichungen regulär sind und dafür ist es genug die Regularität der ersten Gleichung $A^tA + C^tC - A = 0$ zu zeigen. Ihr Differential in Richtung (X,Y) ist $(X,Y) \mapsto X^tA + A^tX - X + Y^tC + C^tY$. Wir müssen also die Gleichung $X^tA + A^tX - X + Y^tC + C^tY = Z$ lösen. Sei dazu $A = 1$ und $Y = 0$. Dann ist $X^t = X^t + X - X = Z$ sofort lösbar. □

11.10 Aufdrehen eines 2-fach verdrehten Bandes

Ein unverdrehtes Stück eines Bandes ist parametrisiert durch

$$\varphi_0 : [0, 2\pi] \times [-1, +1] \to \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4, \quad (\theta, r) \mapsto (\theta, r, 0, 0).$$

Ein zweifach verdrehtes Band ist parametrisiert durch

$$\varphi_\pi : [0, 2\pi] \times [-1, +1] \to \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4, \quad (\theta, r) \mapsto (\theta, r\cos\theta, r\sin\theta, 0).$$

Wir wollen nun eine Diffeotopie $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ des $\mathbb{R}^4$ finden, welche das nicht verdrehte Band in das 2-fach verdrehte Band überführt. Dazu bezeichnen wir die Koordinaten im $\mathbb{R}^4$ mit (x, y, z, w). Diese Diffeotopie $F(t; .)$ soll die Hyperebenen normal auf die x-Achse invariant lassen, und dort als Drehung wirken. Wir bezeichnen diese Drehung in der Hyperebenen $x + \{0\} \times \mathbb{R}^3$ zum Zeitpunkt t mit $R(t,x) \in SO(\mathbb{R}^3)$. Und zwar soll dies gerade eine Drehung um den Winkel $-t$ um die Achse $\ell = (\cos\frac{x}{2}, \sin\frac{x}{2}, 0)$ sein. Wir erhalten $R(t,x)$ indem wir zuerst um die w-Achse die Achse ℓ in die y-Achse drehen, sodann um die y-Achse um den Winkel t drehen, und danach die y-Achse zurück auf die ℓ-Achse um die w-Achse drehen. Die Matrizen-Darstellung von $R(t,x)$ bezüglich der Koordinaten (y, z, w) sieht also wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
&[R(t,x)] = \\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{x}{2} & -\sin\frac{x}{2} & 0 \\ \sin\frac{x}{2} & \cos\frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{x}{2} & \sin\frac{x}{2} & 0 \\ -\sin\frac{x}{2} & \cos\frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{x}{2} & -\sin\frac{x}{2} & 0 \\ \sin\frac{x}{2} & \cos\frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{x}{2} & \sin\frac{x}{2} & 0 \\ -\cos t\sin\frac{x}{2} & \cos t\cos\frac{x}{2} & \sin t \\ \sin t\sin\frac{x}{2} & -\sin t\cos\frac{x}{2} & \cos t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\frac{x}{2} + \cos t\sin^2\frac{x}{2} & (1-\cos t)\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} & -\sin t\sin\frac{x}{2} \\ (1-\cos t)\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} & \sin^2\frac{x}{2} + \cos t\cos^2\frac{x}{2} & \sin t\cos\frac{x}{2} \\ \sin t\sin\frac{x}{2} & -\sin t\cos\frac{x}{2} & \cos t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

In den Randpunkten $x = 0$ und $x = 2\pi$ ist

$$[R(t,0)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

und

$$[R(t,2\pi)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

hält also die y-Achse fix.

Unsere gesuchte Diffeotopie ist somit

$$F(t;x,y,z,w) := (x, R(t,x)(y,z,w))$$

und die entsprechende Isotopie

$$\begin{aligned} \varphi_t(\theta,r) :&= F(t,\varphi_0(\theta,r)) = (\theta, R(t,\theta)(r,0,0)) \\ &= \Big(\theta, \tfrac{r}{2}(1+\cos\theta+\cos t(1-\cos\theta)), \tfrac{r}{2}(1-\cos t)\sin\theta, r\sin t\sin\tfrac{\theta}{2}\Big) \end{aligned}$$

Klarerweise ist $\varphi_t(\theta,r) = (\theta,r,0,0)$ für $\theta = 0$ und für $\theta = 2\pi$. Weiters sind φ_0 und φ_π die gewünschten Randwerte. Und nach Konstruktion sind alle φ_t Einbettungen von $[0,2\pi]\times[-1,1] \to \mathbb{R}^4$.

14. Beispiele von Lie-Gruppen

Etliche der klassischen Beispiele von Mannigfaltigkeiten sind sogar Lie-Gruppen, tragen also zusätzlich eine glatte Gruppenstruktur. Wir führen in diesen Abschnitt diese klassischen Lie-Gruppen ein, die wir zum Teil auch schon in (1) kennengelernt haben.

14.1 Allgemeine lineare Gruppe

Der Vektorraum $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) = L(n,m) := \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ linear }\}$ ist nm-dimensional. Die allgemeine lineare Gruppe (engl. general linear group) (siehe auch (1.2))

$$GL(\mathbb{R}^n) = GL(n) := \{T \in L(n,n) : \det T \neq 0\} \subset L(n,n)$$

ist eine offene n^2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit in $L(n,n)$, denn sie ist durch eine stetige Ungleichung gegeben. Bezüglich der Komposition ist $GL(n)$ eine Gruppe.

14.2 $A\,x+b$-Gruppen

Sei $E = F \oplus F'$ und $G := \{T \in GL(E) : T(F) \subseteq F\}$. Es seien p und p' die Projektionen auf F und F' mit Kern F' und F. Jedes T hat bezüglich der Zerlegung $E = F \oplus F'$ folgende Darstellung

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

wobei $A = p\circ T|_F \in GL(F)$, $D = p'\circ T|_{F'} \in GL(F')$, $B = p\circ T|_{F'} \in L(F',F)$ und $C = p'\circ T|_F \in L(F,F')$. Also läßt T den Teilraum F invariant genau dann, wenn $C = 0$ ist, d.h.

$$G = \Big\{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : A \in GL(F), D \in GL(F'), B \in L(F',F)\Big\}.$$

Wir haben folgende Untergruppen:

$$
\begin{aligned}
G_b &= \left\{\begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : B \in L(F', F)\right\} \cong (L(F', F), +)\\
G_d &= \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} : D \in GL(F')\right\} \cong GL(F')\\
G_a &= \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in GL(F)\right\} \cong GL(F)\\
G_{a,d} &= \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} : A \in GL(F), D \in GL(F')\right\} \cong GL(F) \times GL(F')\\
G_{b,d} &= \left\{\begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : D \in GL(F'), B \in L(F', F)\right\}\\
G_{a,b} &= \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in GL(F), B \in L(F', F)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & G & \\
G_{a,b} \arrow[ur, hook] & G_{a,d} \arrow[u, hook] & G_{b,d} \arrow[ul, hook] \\
G_a \arrow[u, hook] \arrow[ur, hook] & G_b \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] & G_d \arrow[ul, hook] \arrow[u, hook] \\
 & \{1\} \arrow[ul, hook] \arrow[u, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}
$$

Dual haben wir die folgenden Gruppen-Epimorphismen, die jeweils durch Ersetzen der entsprechenden Eintragungen durch die neutralen Elemente 1 bzw. 0 gegeben sind

$$
\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, two heads] & \\
G_{a,b} \arrow[d, two heads] & G_{a,d} \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & G_{b,d} \arrow[d, two heads] \\
G_a & & G_d
\end{tikzcd}
$$

Dies liefert folgende kurze exakte Sequenzen von Gruppen

$$1 \longrightarrow G_b \hookrightarrow G \longrightarrow G_{a,d} \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow G_{b,d} \hookrightarrow G \longrightarrow G_a \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow G_{a,b} \hookrightarrow G \longrightarrow G_d \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow G_b \hookrightarrow G_{b,d} \longrightarrow G_d \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow G_b \hookrightarrow G_{a,b} \longrightarrow G_a \longrightarrow 1,$$

Die natürlichen Inklusionen der rechtsstehenden Gruppen liefern Schnitte zu den Projektionen. Und somit erhalten wir semidirekte Produkte

$$\begin{aligned}
G &\cong L(F',F) \ltimes (GL(F) \times GL(F'))\\
G &\cong G_{b,d} \ltimes GL(F)\\
G &\cong G_{a,b} \ltimes GL(F')\\
G_{b,d} &\cong L(F',F) \ltimes GL(F')\\
G_{a,b} &\cong L(F',F) \ltimes GL(F),
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} A^{-1}A'A & A^{-1}(A'B + (B' - BD^{-1}D')D) \\ 0 & D^{-1}D'D \end{pmatrix}$$

lassen sich die entsprechenden Wirkungen leicht angeben.

Wenn wir als $E = F \times \mathbb{R}$ wählen, dann heißt die Gruppe $G_{a,b}$ jener $T \in GL_{\mathcal{F}}(E)$ die auf $\mathbb{R}$ als Identität wirken auch die $A\,x + b$-Gruppe, denn sie ist gerade die Gruppe der affinen Abbildungen. Der affinen Abbildung $x \mapsto A\,x + b$ wird dabei die Matrix

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Man beachte, daß dies als Mannigfaltigkeit $GL(E) \times E$ ist, aber die Multiplikation komplizierter, nämlich die des semidirekten Produkts $E \rtimes GL(E)$ ist.

14.3 Flaggen

Es sei $\mathcal{F} : \{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k = E$ eine aufsteigende Folge von Teilräumen (eine sogenannte Flagge). Dann ist $GL_{\mathcal{F}}(E) := \{T \in GL(E) : T(F_j) \subseteq F_j\}$ eine Lie-Gruppe, denn sei $F'_j := F_j^\perp \cap F_{j+1} \cong F_{j+1}/F_j$, dann ist $T \in GL_{\mathcal{F}}(E)$ genau dann, wenn es bezüglich der Zerlegung

$$E = F'_0 \oplus F'_1 \oplus \cdots \oplus F'_{k-1}$$

die Form

$$\begin{pmatrix} T_{1,1} & \dots & T_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & T_{n,n} \end{pmatrix}$$

hat mit $T_{j,j} \in GL(F'_j)$ und $T_{j,l} \in L(F'_l, F'_j)$ für $j < l$. Dies ist das prototypische Beispiel einer auflösbaren Lie-Gruppe falls $\dim F_k = k$ für alle k.

14.4 Nilpotente Gruppen

Wir können noch die Untergruppe jener Abbildungen betrachten, die auf $F'_j = F_{j+1}/F_j$ als Identität wirken, d.h. in der Diagonale lauter Identitäten haben. Das ist ein prototypisches Beispiel einer nilpotenten Gruppe, wenn $\dim F_k = k$ für alle k.

Ein Spezialfall ist die Heisenberggruppe, die wir zuerst in anderer Form beschreiben als

$$H := E \oplus \mathbb{R}, \text{ mit } (x,t) \cdot (y,s) := (x+y, t+s+b(x,y)),$$

wobei b eine symplektische Form (d.h. $b : E \times E \to \mathbb{R}$ is bilinear, schief-symmetrisch und nicht degeneriert, siehe (14.9)) ist. Es ist $(x,t)^{-1} = (-x,-t)$. Wieder ist H als Menge das Produkt der beiden (abelschen) Gruppen E und $\mathbb{R}$. Diesmal ist es nichteinmal ein semidirektes Produkt, sondern eine zentrale Erweiterung $1 \to \mathbb{R} \to H \to E \to 1$, die durch den Zykel b gegeben ist. Man kann H aber auch als Matrizengruppe beschreiben, wenn wir o.B.d.A. $E := F \oplus F$ setzen und $b(x_1, y_1; x_2, y_2) := \langle x_1, y_2\rangle - \langle x_2, y_1\rangle$ wählen (wir werden in (14.9) zeigen, daß jede symplektische Form von dieser Gestalt ist) und $F \cong F^*$ via $x \mapsto \langle x, \_\rangle$ verwenden.

$$\begin{aligned} H &\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x^* & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x^* \in F^*,\, y \in F,\, t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq GL(\mathbb{R} \times F \times \mathbb{R}) \\ &\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x^* & y^* & t \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x \in F,\, x^* := \langle x, \_\rangle \\ y \in F,\, y^* := \langle y, \_\rangle \\ t \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} \subseteq Sp(\mathbb{R} \times F \times F \times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Der zweite Isomorphismus ist durch

$$(x,y,t) \mapsto T(x,y,t) := \begin{pmatrix} 1 & x^* & y^* & t \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{cases} x^* := \langle x, \_\rangle \\ y^* := \langle y, \_\rangle \end{cases}$$

gegeben. Er hat Werte in $Sp(\mathbb{R} \times F \times F \times \mathbb{R})$ bezüglich der symplektischen Form $b(t_1, x_1, y_1, s_1; t_2, x_2, y_2, s_2) = t_1 s_2 - t_2 s_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1$, denn diese ist durch die Matrix

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben und es gilt $T^t J T = J$ wie man leicht nachrechnet.

Der erste Isomorphismus ist durch

$$(x^*, y, t) \mapsto T(x^*, y, t) := \begin{pmatrix} 1 & x^* & (t + x^*(y))/2 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben (Rechnung!).

Nachdem wir nun einige “auflösbare” Gruppen kennengelernt haben, wollen wir uns den “halbeinfachen” zuwenden.

14.5 Spezielle lineare Gruppe

Sie ist definiert als:

$$SL(n) := \{T \in L(n,n) : \det(T) = 1\} \subseteq GL(n).$$

Also ist sie durch die Gleichung $\det(T) = 1$, bzw. $f(T) = 0$ gegeben, wobei $f : L(n,n) \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(T) := \det(T) - 1$ ist. Wir behaupten, daß diese Gleichung regulär ist, d.h. die Ableitung der Determinantenfunktion ist surjektiv. Da die Determinante polynomial in den Koeffizienten ist, folgt die Glattheit und daraus folgt wiederum – zusammen mit der gleich zu beweisenden Surjektivität – die Regularität. Die Richtungsableitung an der Stelle A in Richtung B ist:

$$\begin{aligned} \det{}'(A)(B) &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0} \det(A + tB) = \tfrac{d}{dt}|_{t=0} \det(A \cdot (1 + tA^{-1}B)) \\ &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0} \det(tA) \cdot \det(\tfrac{1}{t} + A^{-1}B) \\ &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0} t^n \det(A) \cdot \left(\frac{1}{t^n} - \frac{1}{t^{n-1}} \operatorname{Spur}(A^{-1}B) + \dots + \det(A^{-1}B) \right) \\ &= \det A \operatorname{Spur}(A^{-1}B). \end{aligned}$$

Ohne die gesamte Ableitung $\det{}'(A) : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ zu berechnen, kann man kürzer auch so vorgehen:

$$\det{}'(A)(A) = \tfrac{d}{dt}|_{t=0} \underbrace{\det((1+t)A)}_{(1+t)^n \det A} = n(1+t)^{n-1}|_{t=0} \det A = n \det A.$$

Folglich ist $\det{}'(A)$ surjektiv und $SL(\mathbb{R}^n)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n^2 - 1$.

14.6 Orthogonale Gruppe

Sie ist definiert durch (siehe auch (1.2)):

$$O(n) := \{T \in GL(n,n) : T^t \circ T = \mathrm{id}\} = \{T \in GL(n,n) : \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \,\forall\, x, y\}.$$

So wie in Beispiel (14.5) wollen wir nun zeigen, daß die Ableitung für die quadratische – daher auch glatte – Funktion $f : GL(n) \to L_{\mathrm{sym}}(n,n)$ mit $f(T) := T^t \circ T = \operatorname{komp}(T^t, T)$ surjektiv ist. Zu diesem Zweck, berechnen wir uns zuerst die Ableitung:

$$f'(T) \cdot S = \operatorname{komp}(S^t, T) + \operatorname{komp}(T^t, S) = S^t \circ T + T^t \circ S.$$

Die Dimension von $L_{\text{sym}}(n,n)$ ist offensichtlich $\frac{(n+1)n}{2}$. Für ein $R \in L_{\text{sym}}(n,n)$ existiert ein $S \in L(n,n)$ mit $S^t \circ T + T^t \circ S = R$, denn

$$(S^t \circ T) + (S^t \circ T)^t = R \quad \Rightarrow \quad S^t \circ T = \tfrac{1}{2}R \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad S^t = \tfrac{1}{2}RT^{-1} \Rightarrow S = (T^t)^{-1}\tfrac{1}{2}R.$$

Also ist f' surjektiv, und somit $O(\mathbb{R}^n)$ eine Teilmannigfaltigkeit von $L(n,n)$ der Dimension $\dim(O(n)) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Allgemeiner können wir die Stiefelmannigfaltigkeit $V(k,n) := \{T \in L(k,n) : T^tT = \mathrm{id}\}$ betrachten (siehe (70.6)). Die Funktion $f : L(k,n) \to L_{\text{sym}}(k,k), T \mapsto T^tT - \mathrm{id}$, ist glatt und erfüllt $f'(T)(S) = T^tS + S^tT$. Also ist sie regulär, denn für symmetrisches R können wir $f'(T)(S) = R$ durch $S := \frac{1}{2}TR$ lösen.

14.7 Gruppen invarianter Automorphismen, O_b

Wir wollen nun die orthogonale Gruppe verallgemeinern, indem wir eine beliebige Bilinearform $b : E \times E \to \mathbb{R}$ auf einem euklidischen Raum E betrachten. Mit

$$O_b(E) := \{T \in GL(E) : b(Tx,Ty) = b(x,y)\,\forall\, x,y \in E\}$$

bezeichnen wir die Gruppe aller invertierbaren linearen Abbildungen, die die Bilinearform b invariant lassen. Bekanntlich stehen die Bilinearformen $b : E \times E \to \mathbb{R}$ in bijektiver Beziehung zu den linearen Abbildungen $B : E \to E$, vermöge

$$b(x,y) = \langle Bx, y\rangle = \langle x, B^t y\rangle.$$

Denn $b : E \times E \to \mathbb{R}$ können wir genausogut als Abbildung $\check{b} : E \to L(E,\mathbb{R}) = E^*$ auffassen, welche durch $x \mapsto (y \mapsto b(x,y))$ gegeben ist. Das skalare Produkt $\langle \_, \_ \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ entspricht dabei einer Abbildung $\iota : E \to E^*$, welche ein Isomorphismus ist, denn $\mathrm{Ker}(\iota) = \{x : \langle x, y\rangle = 0\,\forall\, y\} = \{0\}$, und da $\dim(E) = \dim(E^*)$, ist ι bijektiv. Die Zusammensetzung $B := \iota^{-1} \circ \check{b} : E \to E^* \to E$ ist dann die gesuchte lineare Abbildung, denn

$$b(x,y) = \check{b}(x)(y) = (\iota \circ B)(x)(y) = \langle Bx, y\rangle.$$

Die Gleichung $b(Tx,Ty) = b(x,y)$ ist somit mit $\langle T^tBTx, y\rangle = \langle BTx, Ty\rangle = \langle Bx, y\rangle$ äquivalent, und damit ist

$$O_b(E) = \{T \in GL(E) : T^tBT = B\}.$$

Wir sollten also zeigen, daß dies eine reguläre Gleichung ist. Für die Ableitung der Funktion $f : GL(E) \to L(E)$, welche durch $f(T) = T^tBT - B$ definiert ist, erhalten wir $f'(T)(S) = S^tBT + T^tBS$. Wie bei $O(E)$ können wir nicht erwarten, daß sie surjektiv nach $L(E,E)$ ist, sondern wir brauchen einen linearen Teilraum $F \subseteq L(E,E)$ in welchem f Werte hat und auf welchen $f'(T)$ surjektiv ist.

Wenn B (schief)symmetrisch ist, dann gilt das gleiche auch für $f(T)$ und wir sollten also für F den Teilraum $L_\pm(E,E)$ der (schief)symmetrischen linearen Abbildungen verwenden. Dieser hat als Dimension $n(n+1)/2$ (bzw. $n(n-1)/2$), wenn n die Dimension von E ist. Wenn $U \in F$ ist und T die Identität ist, dann ist $U = f'(T)(S) = S^tB + BS$ nach S auflösbar, wenn wir $BS = \frac{1}{2}U$ nach S lösen können, denn dann ist $S^tB = \pm(BS)^t = \pm\frac{1}{2}U^t = \frac{1}{2}U$. Falls B invertierbar ist, geht das und $S = \frac{1}{2}B^{-1}U$. Falls $T \in GL(E)$ beliebig ist, dann hat die Gleichung

$U = f'(T)(S) = S^tBT + T^tBS$ die Lösung $S = \frac{1}{2}B^{-1}(T^{-1})^tU$, denn dann gilt $T^tBS = \frac{1}{2}U$ und $S^tBT = \frac{1}{2}U^tT^{-1}(B^{-1})^tBT = \pm\frac{1}{2}U^t = \frac{1}{2}U$. Falls also B injektiv ist, d.h. b nicht degeneriert ist, oder äquivalent $b(x,y) = 0\,\forall\; y \Rightarrow x = 0$, dann ist $O_b(E)$ eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension

$$\dim O_b(E) := \begin{cases} n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2 & \text{falls } b \text{ symmetrisch ist} \\ n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2 & \text{falls } b \text{ schief-symmetrisch ist.} \end{cases}$$

Man beachte, daß für invertierbares B und $T \in O_b(E)$ automatisch $\mathrm{Det}(T) = \pm 1$ gilt, denn $0 \neq \mathrm{Det}(B) = \mathrm{Det}(T^tBT) = \mathrm{Det}(T)^2\,\mathrm{Det}(B)$.

14.8 Der symmetrische Fall, $O(n,k)$

Im symmetrischen Fall können wir nach dem Spektralsatz (Hauptachsentransformation) eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren e_j mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_j \in \mathbb{R}$ finden. Es ist dann

$$B(x) = \sum_j \lambda_j \langle x, e_j\rangle e_j$$

und somit

$$b(x,y) = \langle Bx, y\rangle = \sum_j \lambda_j \langle x, e_j\rangle \langle y, e_j\rangle$$

Da $\mathrm{Ker}(B) = \{0\}$ vorausgesetzt ist, müssen alle Eigenwerte $\lambda_j \neq 0$ sein, und somit sieht b in der Orthogonalbasis $f_j := \sqrt{|\lambda_j|}e_j$ wie folgt aus

$$b(x,y) = \sum_{\lambda_j>0} x^j y^j - \sum_{\lambda_j<0} x^j y^j,$$

wobei $x^j := \langle x, f_j\rangle$ die Koordinaten von x bezüglich der Basis (f_j) bezeichnet. Man nennt b auch pseudoeuklidisches Produkt. Solche sind für die Relativitätstheorie von Bedeutung. Man beachte, daß es Vektoren $x \neq 0$ gibt, welche Norm $b(x,x) = 0$ haben und auch solche mit negativer Norm. Man nennt die mit verschwindender Norm lichtartig, d.h. $\sum_{j>k}(x^j)^2 = \sum_{j\leq k}(x^j)^2$ (dies beschreibt einen "Kegel"), und die mit positiver Norm raumartig und die mit negativer Norm zeitartig. Man betrachte z.B. die Form

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle := x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$$

Dann sind die Vektoren im Inneren des Doppelkegels mit der x_3-Achse die zeitartigen, die im Äußeren die raumartigen und die am Doppelkegel die lichtartigen. Bestimme des orthogonale Komplement jedes Vektors, zeige insbesonders, daß $v^\perp$ für lichtartige Vektoren, gerade die Tangentialebene an den Kegel in v ist. Die Gruppe $O_b(E)$ hängt also bis auf Isomorphie nur von der Signatur, d.h. Anzahl k der negativen Eigenwerte von b, ab und wird daher auch mit $O(n,k)$ bezeichnet, wobei $n = \dim(E)$ ist. Man beachte, daß $O(n,k) = O(n,n-k)$ ist. Die offene Teilgruppe $SL(n) \cap O(n,k)$ wird mit $SO(n,k)$ bezeichnet. Die $O(4,1)$ wird (in der Physik) auch als die Lorenzgruppe bezeichnet.

14.9 Der schiefsymmetrische Fall, $Sp(2n)$

Im schiefsymmetrischen Fall können wir eine Normalform wie folgt finden. Sei also b eine nichtdegenerierte schiefsymmetrische Bilinearform, eine sogenannte symplektische Form. Diese sind für die klassischen Mechanik von Bedeutung. Für eine Teilmenge $A \subseteq E$ bezeichnen wir mit $A^\perp := \{x \in E : x \perp y \forall\, y \in A\}$ das orthogonale Komplement. Wobei $x \perp y$ heißt, daß $b(x, y) = 0$ ist. Da b schiefsymmetrisch ist, ist $x \perp x$ für alle x. Eine Teilmenge $A \subseteq E$ heißt isotrop, falls $A \subseteq A^\perp$, d.h. $b|_{A\times A} = 0$. Es sei F so eine maximale isotrope Teilmenge. Wegen der Bilinearität von b muß F ein Teilraum sein (solche Teilräume heißen Lagrange Teilräume). Für Lagrange Teilräume F gilt $F = F^\perp$, denn andernfalls können wir ein $y \in F^\perp \setminus F$ zu F hinzufügen und erhalten eine größere isotrope Teilmenge $F \cup \{y\}$.

Für jeden Teilraum F gilt $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$ (in der Tat $i^* \circ \check{b} : E \to E^* \to F^*$ ist surjektiv, wobei $i : F \to E$ die Inklusion bezeichnet, denn $\check{b} : E \to E^*$ ist nach Voraussetzung bijektiv, und $i^* : E^* \to F^*$ ist klarerweise surjektiv (wähle ein linksinverses p zu i, dann gilt $i^* \circ p^* = \mathrm{id}$)) und somit ist $\dim E = \dim(\mathrm{Ker}) + \dim(\mathrm{Bild}) = \dim(F^\perp) + \dim(F)$). Insbesonders gilt also $\dim E = \dim F + \dim F^\perp = 2 \dim F$ für Lagrange Teilräume F. Insbesonders folgt aus der Existenz von Lagrange Teilräumen, daß E geradedimensional sein muß.

Wir wählen nun einen zu F komplementären Lagrange Teilraum F'. Das ist möglich, denn wenn für einen isotropen Teilraum G sowohl $G \cap F = \{0\}$ als auch $G + F \subset E$ gilt, dann ist $G^\perp + F = G^\perp + F^\perp = (G \cap F)^\perp = \{0\}^\perp = E \supset G + F$ und somit können wir ein $y \in G^\perp$ finden, für welches $(\mathbb{R}y + G) \cap F = \{0\}$ ist, denn andernfalls wäre $y \in G + F$. Wir haben hier für Teilräume A und B die Gleichungen $A^{\perp\perp} = A$ ($\Leftarrow A \subseteq A^{\perp\perp}$ und Dimensionsgründen) und $(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$ (trivial) und somit $A^\perp + B^\perp = (A^\perp + B^\perp)^{\perp\perp} = (A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp})^\perp = (A \cap B)^\perp$ verwendet. Der Raum $G_1 := \mathbb{R}y + G$ ist nun ein größerer isotroper Teilraum.

Es sei $i' : F' \to E$ die Inklusion. Dann ist $i^* \circ \check{b} \circ i' : F' \to E \to E^* \to F^*$ injektiv, denn der Kern von $i^* \circ \check{b}$ ist $F^\perp = F$ und $F \cap F' = \{0\}$, und somit aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus. Wir behaupten, daß der induzierte Isomorphismus $E = F' \times F \cong F^* \times F$ die symplektische Form b in die Form $(y_1^*, y_1; y_2^*, y_2) \mapsto y_1^*(y_2) - y_2^*(y_1)$ übersetzt. Sei also $x_j = y_j' + y_j$ mit $y_j \in F$ und $y_j' \in F'$. Dann ist $b(x_1, x_2) = b(y_1', y_2) + b(y_1, y_2') = b(y_1', y_2) - b(y_2', y_1)$, da F und F' isotrop sind. Also sei $y_i^* := (i^* \circ \check{b} \circ i')(y_i')$. Dann ist $b(y_1', y_2) = b(i'y_1', iy_2) = \check{b}(i'y_1')(iy_2) = (i^* \circ \check{b} \circ i')(y_1')(y_2) = y_1^*(y_2)$ und somit ist $b(x_1, x_2) = y_1^*(y_2) - y_2^*(y_1)$. Wählen wir nun in F eine Basis $(e_j)_{k<j\le 2k}$ (mit $2k = \dim E$) und in F^* die duale Basis $(e^j)_{j>k}$. Mit $(e_j := e'_{k+j})_{j\le k}$ bezeichnen wir die entsprechende Basis in F'. Dann ist $(e_j)_{j\le 2k=n}$ eine Basis von E, die jener von $F^* \times F$ entspricht, dann ist $y^*(y) = \sum_j y_j y^j$, wobei y_j die Koordinaten von y^* bzgl. e^j und y^j jene von y bzgl. e_j bezeichnet. Also ist

$$b(x, y) = \sum_{j\le k} x^j y^{j+k} - x^{j+k} y^j.$$

Die entsprechende Gruppe wird mit $Sp(2k)$ bezeichnet, und heißt reelle symplektische Gruppe.

14.10 Spiegelungen

Wir wollen nun spezielle Abbildungen $T \in O_b(E)$ beschreiben. Und zwar solche, die eine Hyperebene als Fixpunktmenge $\{x \in E : Tx = x\}$ besitzen. Sei F diese Hyperebene und $0 \neq y \in F^\perp$, d.h. $F = \{y\}^\perp$. Sei $0 \neq y' \notin F$ mit $b(y', y) = 1$ (möglich, da $b(y', y) = 0 \Rightarrow y' \in \{y\}^\perp = F$), dann läßt sich jedes $x \in E$ als $x = b(x, y)y' + (x - b(x, y)y')$ schreiben, und $b(x - b(x, y)y', y) = 0$, d.h. $x - b(x, y)y' \in F$. Folglich ist T von der Form

$$T(x) = b(x, y)T(y') + (x - b(x, y)y') = x + b(x, y)(T(y') - y') =: x + b(x, y)y''.$$

Damit T die Form b erhält, muß

$$\begin{aligned} b(x_1, x_2) = b(T(x_1), T(x_2)) &= b(x_1 + b(x_1, y)y'', x_2 + b(x_2, y)y'') = \\ &= b(x_1, x_2) + b(x_1, y)b(y'', x_2) + b(x_2, y)b(x_1, y'') + b(x_1, y)b(x_2, y)b(y'', y'') \end{aligned}$$

gelten, d.h. $b(x_1, y)b(y'', x_2) + b(x_2, y)b(x_1, y'') + b(x_1, y)b(x_2, y)b(y'', y'') = 0$. Wenn wir $x_2 = y'$ setzen und $x_1 \perp y$ wählen, dann folgt $b(x_1, y'') = 0$, also ist $y'' \in \{y\}^{\perp\perp} = \mathbb{R}\, y$. Sei also $y'' = \lambda y$ (mit $\lambda \neq 0$, da T nicht die Identität ist). Dann ist

$$\lambda b(x_1, y)b(y, x_2) + \lambda b(x_2, y)b(x_1, y) + b(x_1, y)b(x_2, y)\lambda^2 b(y, y) = 0$$

genau dann wenn $b(x_2, y)(\pm 1 + 1 + \lambda b(y, y)) = 0$ ist für alle x_2, bzw. $1 + \lambda b(y, y) = \mp 1$ $(x_2 := y')$

Im symmetrischen Fall ist das damit äquivalent, daß $\lambda b(y, y) = -2$ ist und im schiefsymmetrischen ist es immer erfüllt.

Die $T \in O_b(E)$ mit einer Hyperebene $F = \{y\}^\perp$ als Fixpunktmenge sind also genau

$$T(x) := \begin{cases} x - 2\frac{b(x,y)}{b(y,y)} y & \text{mit } b(y, y) \neq 0 \text{ im symmetrischen Fall} \\ x + \lambda b(x, y)y & \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ im schiefsymmetrischen Fall} \end{cases}$$

Diese heißen auch Spiegelungen, in Analogie zum Fall, wo b eine euklidische Metrik ist.

Es läßt sich für $x \neq x'$ mit $b(x, x) = b(x', x')$ genau dann solch eine Abbildung T finden mit $Tx = x'$, wenn $b(x, x') \neq b(x, x)$ ist, denn $x' = x + \lambda b(x, y)y$ gilt genau dann, wenn $y = \mu(x' - x)$ mit $1 = \lambda\mu^2 b(x, x' - x) = \lambda\mu^2(b(x, x') - b(x, x))$ gilt. Im symmetrischen Fall ist dann $\lambda b(y, y) = \lambda\mu^2 b(x' - x, x' - x) = -2$. Diese Abbildung läßt $(x' - x)^\perp$ fix. Im symplektischen Fall ist jede solche Abbildung orientierungserhaltend, denn $T(y') = y' + \lambda y$ liegt auf der gleichen Seite von F wie y', und im symmetrischen Fall orientierungsvertauschend, denn $T(y) = y - 2y = -y$.

Proposition. *Für jede (schief-)symmetrische nicht-degenerierte Bilinearform $b : E \times E \to \mathbb{R}$ wird $O_b(E)$ von den Spiegelungen erzeugt.*

Man kann zeigen, daß im symmetrischen Fall $n = \dim E$ viele Spiegelungen genügen und im symplektischen sind mindestens $n + 1$ notwendig (siehe [**31**, Sur les Groups Classique, Hermann, Paris 1967]).

Beweis. Im symmetrischen Fall wählen wir eine Orthonormalbasis von E (d.h. $b(e_i, e_j) = 0$ und $b(e_i, e_i) = \pm 1$) Die Bilder $e_i' := T(e_i)$ sind dann ebenfalls eine Orthonormalbasis. Falls $b(e_1, e_1') \neq b(e_1, e_1)$, dann gibt es eine Spiegelung, die e_1 auf e_1' abbildet. Andernfalls ist $b(e_1, e_1') = b(e_1, e_1)$, dann gibt es eine Spiegelung die e_1 auf $-e_1$ abbildet, und eine die $-e_1$ auf e_1' abbildet, da $b(e_1, -e_1') = -b(e_1, e_1) \neq b(e_1, e_1)$. Also läßt T bis auf diese Spiegelungen e_1 fix. Wir zeigen nun mit Induktion, daß T bis auf Spiegelungen $\{e_1, \dots, e_k\}$ fix läßt. In der Tat, wenn T die Menge $\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ fix läßt, und $b(e_k, e'_k) \neq g(e_k, e_k)$ ist, dann bildet die Spiegelung S um $e'_k - e_k$ den Vektor e_k auf e'_k ab, und läßt $(e'_k - e_k)^\perp \supseteq (e'_k)^\perp \cap (e_k)^\perp \supseteq \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ fix, also läßt $S^{-1}T$ sogar $\{e_1, \dots, e_k\}$ fix (Man beachte, daß $S^2 = \mathrm{id}$ im symmetrischen Fall, und $S_+ \circ S_- = \mathrm{id}$ im symplektischen Fall). Ist andererseits $g(e_k, e'_k) = g(e_k, e_k)$, dann spiegeln wir zuerst an $2e_k$ (mit $b(e_k, e_k) = \pm 1 \neq 0$) und danach an $e'_k + e_k$ (mit $b(e_k + e'_k, e_k + e'_k) = 2(b(e_k, e_k) + b(e_k, e'_k)) = 4b(e_k, e_k) \neq 0$). Diese Spiegelungen lassen $(e_k)^\perp \cap (e_k + e'_k)^\perp \supseteq \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ invariant, also läßt T bis auf diese Spiegelungen $\{e_1, \dots, e_k\}$ invariant.

Im symplektischen Fall beweisen wir die Aussage mittels Induktion nach $j := n - \dim F$, wo $F := \{x : Tx = x\}$. Für $j = 0$ ist $T = \mathrm{id}$. Sei also $j > 0$. Für jedes $y \in E$ ist $b(y, x) = b(Ty, Tx) = b(Ty, x)$ für alle $x \in F$, d.h. $Ty - y \in F^\perp$. Falls $b(Ty, y) \neq 0$ ist ($\Rightarrow y \notin F$), dann existiert eine Spiegelung, welche y auf Ty abbildet und die $(Ty - y)^\perp \supseteq F$ fix läßt. Bis auf diese Spiegelung läßt also T auch $F \oplus \mathbb{R}\, y$ fix. Andernfalls ist $b(Ty, y) = 0$ für alle y. Sei vorerst $F \cap F^\perp \neq \{0\}$. Dann wählen wir ein $0 \neq x \in F \cap F^\perp$ und ein $y \in E$ mit $b(y, x) = 1$ (geht wie in der Beschreibung von Spiegelungen). Es gilt dann $y \notin F$, da $x \in F^\perp$. Weiters ist $b(x, Ty) = b(x, y) \neq 0$ und somit existieren Spiegelungen die y auf $x + y$, bzw. Ty auf $x + y$ abbilden, und $(x + y - y)^\perp \cap (x + y - Ty)^\perp \supseteq F$ fix lassen. Also läßt T bis auf diese Spiegelungen $F \oplus \mathbb{R}\, y$ fix, und wir können die Induktionsannahme anwenden.
Ist $F = \{0\}$, dann existiert ein $x \in F^\perp = E$ mit $b(x, y) = 1 = b(x, Ty)$, denn ergänze $(e_1 := y, e_2 := Ty)$ zu einer Basis eines Lagrange Teilraums (beachte, daß der von $\{y, Ty\}$ erzeugte Teilraum isotrop ist) und setze $x := e^1 + e^2$ in Termen der dualen Basis $(e^i)_{i=1}^k$. Nun verfahre wie gerade zuvor.
Ist schließlich $F \neq \{0\}$ und $F \cap F^\perp = \{0\}$, dann ist $E = F \oplus F^\perp$ und b induziert auf $F^\perp$ eine symplektische Form, denn für $y' \in F^\perp$ mit $b(y', y) = 0 \,\forall\, y \in F^\perp$ gilt $y' \in (F^\perp)^\perp = F$ und somit $y' = 0$. Weiters läßt $T \in O_b(E)$ den Raum $F^\perp$ invariant, denn $b(Ty', y) = b(Ty', Ty) = b(y', y) = 0$ für alle $y \in F$ und $y' \in F^\perp$. nach Induktionsvoraussetzung ist $T|_{F^\perp}$ eine Zusammensetzung von Spiegelungen längs Vektoren in $F^\perp$. Da solche Spiegelungen aber $F = F^{\perp\perp}$ fix lassen, ist T auf ganz E die Zusammensetzung dieser Spiegelungen. □

Folgerung. *Es gilt $Sp(2k) \subseteq SL(2k)$.*

14.11 Der degenerierte Fall

Falls b degeneriert ist, d.h. B einen nicht trivialen Kern K besitzt, dann erhält jedes $T \in O_b(E)$ diesen Kern, denn $BT = (T^{-1})^t B$ impliziert, daß $BT(K) = 0$ ist. Also können wir $\tilde{E} := E/K$ betrachten. Falls b (schief)symmetrisch ist, so induziert b eine nichtdegenerierte (schief)symmetrische Form $\tilde{b} : \tilde{E} \times \tilde{E} \to \mathbb{R}$, denn $\operatorname{Ker} B^t = \operatorname{Ker} B$. Und $T \in O_b(E)$, genau dann wenn $T(K) \subseteq K$ und $\tilde{T} \in O_{\tilde{b}}(\tilde{E})$, wobei $\tilde{T}$ definiert ist durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook] \arrow[d, "T|_K"'] & E \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "T"'] & \tilde{E} \arrow[d, dotted, "\tilde{T}"] \\ K \arrow[r, hook] & E \arrow[r, two heads, "p"] & \tilde{E} \end{tikzcd}$$

Wir verwenden nun den Isomorphismus $E \cong K \oplus \tilde{E}$, welcher durch $(1 - sp, p)$ mit der Inversen $(k, \tilde{x}) \mapsto k + s(\tilde{x})$ gegeben ist (denn $p(1 - sp) = 0$), wobei $p : E \to \tilde{E}$ die kanonische Projektion ist und $s : \tilde{E} \to E$ ein Rechtsinverses. Dann können wir $T \in O_b(K \times \tilde{E})$ wie folgt darstellen:

$$\begin{pmatrix} T|_K & Ts - s\tilde{T} \\ 0 & \tilde{T} \end{pmatrix}$$

mit $T|_K \in GL(K)$ und $\tilde{T} \in O_{\tilde{b}}(\tilde{E})$. Als Mannigfaltigkeiten ist also $O_b(E) \cong GL(K) \times O_{\tilde{b}}(\tilde{E}) \times L(\tilde{E}, K)$, wobei der Isomorphismus gegeben ist durch $T \mapsto (T|_K, \tilde{T}, Ts - s\tilde{T})$. Aus (14.9) folgt, daß als Gruppe:

$$O_b(E) \cong (GL(K) \times O_{\tilde{b}}(\tilde{E})) \rtimes L(\tilde{E}, K)$$

14.12 Der unsymmetrische Fall

Falls schließlich b weder symmetrisch noch schiefsymmetrisch ist, so zerlegen wir b in den symmetrischen und den schiefsymmetrischen Teil $b = b_+ + b_-$, wobei $b_\pm(x, y) = (b(x, y) \pm b(y, x))/2$ ist. Dem entspricht übrigens gerade die Zerlegung von $B = B_+ + B_-$, wobei $B_\pm = (B \pm B^t)/2$ ist. Dann ist $O_b(E) = O_{b_+}(E) \cap O_{b_-}(E)$. Allerdings wissen wir nicht, ob dieser Durchschnitt von Mannigfaltigkeiten wieder eine ist. Für Lie-Gruppen kann man dies aber allgemein zeigen (abgeschlossene Untergruppen von Lie-Gruppen sind ebenso Lie-Gruppen).

14.13 Die Gruppen $U(n,k)$

Betrachten wir den Spezialfall, wo die Abbildung I, die die Darstellung $b_-(x, y) = b_+(Ix, y)$ vermittelt, eine b_+-Isometrie ist. Dann gilt $I^t = -I$ und $I^t I = 1$, wobei $()^t$ transponieren bzgl. b_+ bezeichnet. Also ist $I^2 = -1$ und wir können folglich E zu einem komplexen Vektorraum machen, indem wir $(a + ib)\, x := a\, x + b\, I(x)$. Man beachte, daß I auch eine b_- Isometrie ist, denn $b_-(Ix, Iy) = b_+(I^2x, Iy) = b_+(Ix, y) = b_-(x, y)$. Wir fassen die beiden Gleichungen $b_\pm(Tx, Ty) = b_\pm(x, y)$ in $\mathbb{R}$ zu einer Gleichung $b(Tx, Ty) = b(x, y)$ in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ zusammen, d.h. $b(x, y) := b_+(x, y) + ib_-(x, y)$. Dann ist b reell-bilinear, konjugiert symmetrisch, denn $b(y, x) = b_+(y, x) + ib_-(y, x) = b_+(x, y) - ib_-(x, y) = \overline{b(x, y)}$, und sogar $\mathbb{C}$-linear im zweiten Faktor, denn

$$\begin{aligned} b(x, iy) &= b_+(x, iy) + ib_-(x, iy) = \\ &= b_+(iy, x) + ib_+(ix, iy) = ib_+(x, y) - b_-(x, y) = ib(x, y). \end{aligned}$$

Also ist b eine hermitesche Form, die klarerweise ebenfalls nicht degeneriert ist.
Ist umgekehrt b eine beliebige hermitesche nichtdegenerierte Form auf einem komplexen Vektorraum E, dann ist ihr Realteil b_+ eine symmetrische nicht degenerierte Form

und ihr Imaginärteil eine symplektische Form b_- und es gilt $b_-(x,y) = b_+(ix,y)$. In der Tat ist

$$b_+(x,y) = (b(x,y) + \overline{b(x,y)})/2 = (b(x,y) + b(y,x))/2 \in \mathbb{R}$$
$$b_-(x,y) = (b(x,y) - \overline{b(x,y)})/(2i) = (b(x,y) - b(y,x))/(2i) \in \mathbb{R}$$

und somit ist $b_\pm$ (schief-)symmetrisch und es gilt $b_+(x,iy) + ib_-(x,iy) = b(x,iy) = ib(x,y) = ib_+(x,y) - b_-(x,y)$, d.h. $b_+(x,iy) = -b_-(x,y)$ oder äquivalent $b_-(x,y) = -b_-(y,x) = b_+(y,ix) = b_+(ix,y)$. Es ist i eine b_+-Isometrie, denn $b_+(ix,iy) = (b(ix,iy)+\overline{b(ix,iy)})/2 = (-i^2 b(x,y)+\overline{-i^2 b(x,y)})/2 = (b(x,y)+\overline{b(x,y)}))/2 = b_+(x,y)$. Somit ergibt sich auch aus der nicht-Degeneriertheit von b jene von $b_\pm$.
In dieser Situation ist

$$O_{b_+}(E) \cap O_{b_-}(E) = O_{b_+}(E) \cap L_{\mathbb{C}}(E) = O_{b_-}(E) \cap L_{\mathbb{C}}(E) = U_b(E) \subseteq L_{\mathbb{C}}(E),$$

wobei

$$U_b(E) := \{T \in GL(E) : b(Tx,Ty) = b(x,y)\, \forall\, x,y \in E\}$$
$$L_{\mathbb{C}}(E) := \{T \in L(E) : T \text{ ist } \mathbb{C}\text{-linear}\} = \{T \in L(E) : T \circ I = I \circ T\}.$$

Wobei wir die neue Bezeichnung U verwendet haben, da b nun $\mathbb{C}$-wertig ist.
Offensichtlich ist $O_{b_+} \cap O_{b_-} = U_b$. Es ist $U_b \subseteq L_{\mathbb{C}}(E)$, denn für $T \in O_{b_+} \cap O_{b_-}$ gilt $b_+(Tix,Ty) = b_+(ix,y) = b_-(x,y) = b_-(Tx,Ty) = b_+(iTx,Ty)$ und somit ist $T(ix) = iT(x)$ für alle x, d.h. $T \in L_{\mathbb{C}}(E)$. Umgekehrt ist $O_{b_\pm} \cap L_{\mathbb{C}}(E) \subseteq O_{b_\mp}$, denn $b_\mp(Tx,Ty) = \pm b_\pm(iTx,Ty) = \pm b_\pm(Tix,Ty) = \pm b_\pm(ix,y) = b_\mp(x,y)$.
Sei nun E ein komplexer Vektorraum mit komplexer Basis $(e_i)_{i\le n}$, d.h. jedes $z \in E$ läßt sich eindeutig als $z = \sum_{j=1}^n z^j e_j$ mit Koeffizienten $z^j \in \mathbb{C}$ schreiben. Es sei $z^j =: x^j + ix^{n+j}$ die Zerlegung in Real- und Imaginärteil. Dann ist $z = \sum_{j=1}^{2n} x^j e_j$, wobei $e_{k+j} := ie_j$ für alle $1 \le j \le n$ ist. Also hat E als reeller Vektorraum die Basis $(e_j)_{j=1}^{2n}$. Man beachte, daß zuerst alle Realteile und erst danach die Imaginärteile kommen, d.h. die durch die Basen gegebenen Isomorphismen $E \cong \mathbb{C}^n$ und $E \cong \mathbb{R}^{2n}$ induzieren nicht den vielleicht erwarteten Isomorphismus $\mathbb{C}^n \cong (\mathbb{R}^2)^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, sondern ist noch mit dem Umordnungsisomorphismus $(\mathbb{R}^2)^n \cong (\mathbb{R}^n)^2$ zusammengesetzt. Die Multiplikation von $\mathbb{R}^{2n}$ ist also durch die Matrix

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben, und wir bezeichnen mit $L_{\mathbb{C}}(n) := \{T \in L(2n) : T \circ I = I \circ T\}$.
Wenn $T \in L_{\mathbb{C}}(E)$ bezüglich der komplexen Basis $(e_j)_{j\le n}$ die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} + ib_{1,1} & \dots & a_{1,n} + ib_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + ib_{n,1} & \dots & a_{n,n} + ib_{n,n} \end{pmatrix} = A + iB$$

hat, dann hat T bezüglich der reellen Basis $(e_1,\dots,e_n;ie_1,\dots,ie_n)$ die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & -b_{1,1} & \dots & -b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & -b_{n,1} & \dots & -b_{n,n} \\ b_{1,1} & \dots & b_{1,n} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix},$$

wie eine einfache Koordinatenrechnung zeigt.

Sei nun b die standard hermitesche Form, d.h.

$$b(z,w) = \sum_{j=1}^{n} \bar z^j w^j.$$

Die Gruppe $U_b(E)$ wird dann auch als $U(n)$ bezeichnet. Wenn wir wie zuvor $z^j = x^j + ix^{n+j}$ und $w^j = y^j + iy^{n+j}$ setzen, dann ergibt sich

$$b(z,w) = \sum_{j=1}^{n}(x^j y^j - i^2 x^{n+j} y^{n+j}) + i\sum_{j=1}^{n}(x^j y^{n+j} - x^{n+j} y^j),$$

also ist der Realteil von b gerade die positiv definite symmetrische Standardform und der Imaginärteil gerade die symplektische Standardform. Also ist

$$U(n) = O(2n)\cap Sp(2n) = O(2n)\cap L_{\mathbb{C}}(n) = Sp(2n)\cap L_{\mathbb{C}}(n).$$

Wenn b die hermitesche Standardform mit Signatur $k>0$ bezeichnet, d.h.

$$b(z,w) = \sum_{j>k}^{n} \bar z^j w^j - \sum_{j\le k} \bar z^j w^j,$$

dann wird die Gruppe $U_b(E)$ mit $U(n,k)$ bezeichnet, und eine analoge Rechnung zeigt, daß Realteil und Imaginärteil folgende Matrixbeschreibungen $B_\pm$ haben

$$\begin{aligned} B_+ &= \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & 1_k \end{pmatrix}, \\ B_- &= \begin{pmatrix} 0 & -1_k \\ 1_k & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad \text{mit } 1_k = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

also ist

$$U(n,k) = \text{“}O(2n,2k)\text{”}\cap\text{“}Sp(2n)\text{”} = \text{“}O(2n,2k)\text{”}\cap L_{\mathbb{C}}(n) = \text{“}Sp(2n)\text{”}\cap L_{\mathbb{C}}(n),$$

wobei die Gruppen unter Anführungszeichen nur bis auf Koordinatenvertauschungen durch die Standardformen beschrieben werden.

Wie für reelle Vektorräume, läßt sich natürlich auch für komplexe Vektorräume zeigen, daß die Gruppen

$$U(n,k) := \{T\in L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) : b(Tx,Ty) = b(x,y)\} = O(2n,2k)\cap Sp(2n)$$

Teilmannigfaltigkeiten von $L_{\mathbb{C}}(E)$ sind, wobei b eine nicht degenerierte hermitesche Form ist, die gerade k negative Eigenwerte hat. Man beachte, daß schiefhermitesche Formen nichts anderes als $i\,b$ für eine hermitsche Form b sind, also nichts neues liefern.

14.14 Komplex lineare Abbildungen, $GL_{\mathbb{C}}$, $SL_{\mathbb{C}}$

Sei nun E ein komplexer n-dimensionaler Vektorraum. Wir können nun wie im reellen Fall auch folgende Untergruppen des komplexen Vektorraums $L_{\mathbb{C}}(E)$ betrachten.

$$\begin{aligned}
GL_{\mathbb{C}}(E) &:= \{T \in L_{\mathbb{C}}(E) : T \text{ ist } \textit{invertierbar}\} = GL(E) \cap L_{\mathbb{C}}(E)\\
SL_{\mathbb{C}}(E) &:= \{T \in L_{\mathbb{C}}(E) : \mathrm{Det}_{\mathbb{C}}(T) = 1\}\\
SU_b(E) &:= \{T \in SL_{\mathbb{C}}(E) : b(Tx, Ty) = b(x, y)\,\forall\, x, y\} = U_b(E) \cap SL_{\mathbb{C}}(E)\\
SU(n) &:= U(n) \cap SL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)\\
SU(n,k) &:= U(n,k) \cap SL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)
\end{aligned}$$

betrachten, wobei $\mathrm{Det}_{\mathbb{C}}$ die komplexe Determinante ist.

Es sei $\mathbb{C}_*$ die Gruppe $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation. Die Abbildung $\mathbb{C}_* \times SL_{\mathbb{C}}(n) \to GL_{\mathbb{C}}(n)$, $(t, T) \mapsto tT$ ist offensichtlich ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, denn $\det_{\mathbb{C}}(tT) = t^n \det_{\mathbb{C}}(T)$, mit Kern $\{(\frac{1}{t}, t \cdot 1) : t^n = 1\} \cong \mathbb{Z}_n$. Man kann zeigen, daß daraus leicht folgt, daß dies eine Überlagerungsabbildung ist. Andererseits ist $GL_{\mathbb{C}}(n) = SL_{\mathbb{C}}(n) \ltimes \mathbb{C}_*$ ein semidirektes Produkt, da die kurze exakte Sequenz

$$1 \to SL_{\mathbb{C}}(n) \hookrightarrow GL_{\mathbb{C}}(n) \xrightarrow{\mathrm{Det}} \mathbb{C}_* \to 1$$

via folgendem Gruppenhomomorphismus $\mathbb{C}_* \to GL_{\mathbb{C}}(n)$ splittet:

$$z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Im reellen Fall ist $\mathbb{R}^+ \times SL(n) \to GL^+(n)$, $(t, T) \mapsto tT$ ein Gruppenisomorphismus. Also kann man $\mathbb{R}_* \times SL(n)$ mit $GL(n)$ als Mannigfaltigkeit identifiziert werden. Falls n ungerade ist, so liefert die gleiche Formel auch einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{R}_* \times SL(n) \to GL(n)$. Im geraden Fall ist $GL(n) = SL(n) \ltimes \mathbb{R}^*$ wie zuvor wieder ein semidirektes Produkt.

Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen reeller Determinante Det und komplexer Determinante $\mathrm{Det}_{\mathbb{C}}$ herstellen. Dazu betrachten wir die Exponentialfunktion $\exp : L_{\mathbb{K}}(E) \to GL_{\mathbb{K}}(E)$, $T \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k$. Offensichtlich ist $\exp'(\mathrm{id})(T) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tT) = T \exp(0) = T$ für alle t (oder allgemeiner $\exp'(T)(S) = \exp(T)S$, falls $TS = ST$ ist) und somit ist exp ein lokaler Diffeomorphismus bei 0.

Es gilt $\mathrm{Det}_{\mathbb{K}}(\exp(T)) = e^{\mathrm{Spur}_{\mathbb{K}} T}$, denn dazu betrachten wir $f : \mathbb{R} \to L_{\mathbb{K}}(E) \to GL_{\mathbb{K}}(E) \to \mathbb{K} \setminus \{0\} \to \mathbb{K}$ gegeben durch $f(t) = \ln(\mathrm{Det}_{\mathbb{K}}(\exp(tT)))$ (dies macht Sinn, da wir längs der Kurve $t \mapsto \mathrm{Det}_{\mathbb{K}}(\exp(tT))$ die komplexe Logarithmusfunktion wohldefiniert wählen können). Dann ist $f(0)=0$ und

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\operatorname{Det}'_{\mathbb{K}}(\exp(tT))\exp'(tT)(T)}{\operatorname{Det}_{\mathbb{K}}(\exp(tT))} \\ &= \frac{\operatorname{Det}_{\mathbb{K}}(\exp(tT))\ \operatorname{Spur}(\exp(-tT)\exp(tT)T)}{\operatorname{Det}_{\mathbb{K}}(\exp(tT))} = \operatorname{Spur}(T) \end{aligned}$$

also ist $f(t)=t\operatorname{Spur}(T)$, und $f(1)=\operatorname{Spur}(T)$ liefert das Gewünschte.

Wir wollen nun zeigen, daß $|\operatorname{Det}_{\mathbb{C}}(T)|^2 = \operatorname{Det}_{\mathbb{R}}(T)$ ist für $\mathbb{C}$-lineares T. Da beides Polynome (in den Eintragungen der Matrix) von T sind, genügt es das für T nahe der Identität zu zeigen, also für solche Abbildungen der Form $\exp(T)$. Für diese gilt:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Det}_{\mathbb{C}}(\exp(T))|^2 &= \operatorname{Det}_{\mathbb{C}}(\exp(T))\overline{\operatorname{Det}_{\mathbb{C}}(\exp(T))} \\ &= e^{\operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(T)}\, e^{\overline{\operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(T)}} = e^{\operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(T)+\overline{\operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(T)}} \\ &= e^{\operatorname{Spur}_{\mathbb{R}}(T)} = \operatorname{Det}_{\mathbb{R}}(\exp(T)), \end{aligned}$$

denn es ist $\operatorname{Spur}_{\mathbb{R}}(T) = \operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(T) + \overline{\operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(T)}$, denn sei $A+iB$ die komplexe Matrixdarstellung von T, dann ist $\operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(A\pm iB) = \operatorname{Spur}(A)\pm i\operatorname{Spur}(B)$ und

$$\begin{aligned} \operatorname{Spur}_{\mathbb{R}}(T) &= \operatorname{Spur}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = 2\operatorname{Spur}(A) = \\ &= \operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(A+iB)+\operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(A-iB) = \operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(T)+\overline{\operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(T)}. \end{aligned}$$

Eine andere algebraische Methode, die selbe Gleichung zu erhalten, geht wie folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}_{\mathbb{R}}(T) &= \operatorname{Det}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} A-iB & -B \\ B+iA & A \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Det}\begin{pmatrix} A-iB & -B \\ B+iA-i(A-iB) & A-i(-B) \end{pmatrix} = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} A-iB & -B \\ 0 & A+iB \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Det}(A-iB)\cdot\operatorname{Det}(A+iB) = \overline{\operatorname{Det}_{\mathbb{C}}(T)}\cdot\operatorname{Det}_{\mathbb{C}}(T) = |\operatorname{Det}_{\mathbb{C}}(T)|^2. \end{aligned}$$

14.15 Komplexe Gruppen, $O_{\mathbb{C}}$, $Sp_{\mathbb{C}}$

Ist nun $b: E\times E\to\mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-bilineare (schief-)symmetrische, nicht degenerierte Form, dann wollen wir $U_b(E)$ analog zum Fall einer hermiteschen Form als Durchschnitte reeller Gruppen beschreiben. Dazu zerlegen wir b in Real- und Imaginärteil, d.h. $b(x,y)=b_+(x,y)+ib_-(x,y)$, wobei

$$\begin{aligned} b_+(x,y) &= (b(x,y)+\overline{b(x,y)})/2\in\mathbb{R} \\ b_-(x,y) &= (b(x,y)-\overline{b(x,y)})/(2i)\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Dann sind der Realteil b_+ und der Imaginärteil b_- zwei reell bilineare (schief-)symmetrische reell-wertige Formen, und es gilt $-b_-(x,y)+ib_+(x,y) = ib(x,y) = b(x,iy) = b_+(x,iy)+ib_-(x,iy)$, d.h. $b_-(x,y) = -b_+(x,iy)$. Weiters gilt

$$b_+(ix,iy) = -b_-(ix,y) = \mp b_-(y,ix) = \pm b_+(y,i^2x) = -b_+(x,y).$$

Eine $\mathbb{R}$-lineare Bijektion, die sowohl b_+ als auch b_- erhält ist $\mathbb{C}$-linear, denn

$$b_+(Tx,Tiy) = b_+(x,iy) = -b_-(x,y) = -b_-(Tx,Ty) = b_+(Tx,iTy) \Rightarrow Tiy = iTy;$$

und umgekehrt erhält jede Abbildung T, die b erhält auch den Real- und Imaginärteil, d.h.

$$O_{b_+}(E) \cap O_{b_-}(E) = O_{b_+}(E) \cap L_{\mathbb{C}}(E) = O_{b_-}(E) \cap L_{\mathbb{C}}(E) = U_b(E) \subseteq L_{\mathbb{C}}(E).$$

Ist insbesonders b die standard $\mathbb{C}$-bilineare symmetrische Form, welche durch $b(z,w) := \sum_{i=1}^n z^i w^i$ gegeben ist, dann wird $U_b(E)$ auch als $O_{\mathbb{C}}(n)$ bezeichnet. Beachte, daß das Analogon zu $O(n,k)$ für $0 < k < n$ uninteressant, da isomorph zu $O_{\mathbb{C}}(n)$, ist. Real- und Imaginärteil haben wegen

$$b(z,w) = \sum_j (x^j y^j - x^{n+j} y^{n+j}) + i \sum_j (x^j y^{n+j} + x^{n+j} y^j)$$

folgende Darstellung

$$B_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sie haben beide Signatur n, denn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot B_- \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = B_+$$

und somit ist

$$O_{\mathbb{C}}(n) = \text{“}O(2n,n)\text{”} \cap \text{“}O(2n,n)\text{”} = \text{“}O(2n,n)\text{”} \cap L_{\mathbb{C}}(n),$$

wobei die Gruppen auf der rechten Seite nur bis auf Koordinaten-Vertauschungen und Drehungen durch Standardformen beschrieben werden.
Ist schließlich b die standard $\mathbb{C}$-bilineare alternierende Form, welche durch

$$b(z,w) := \sum_{i=1}^m (z^i w^{m+i} - z^{m+i} w^i)$$

gegeben ist, dann wird $U_b(E)$ auch als $Sp_{\mathbb{C}}(n)$ bezeichnet. Real- und Imaginärteil haben wegen

$$\begin{aligned} b(z,w) = \sum_j (&x^j y^{m+j} - x^{2m+j} y^{3m+j} - x^{m+j} y^j + x^{3m+j} y^{2m+j}) \\ &+ i \sum_j (x^j y^{3m+j} + x^{2m+j} y^{m+j} - x^{m+j} y^{2m+j} - x^{3m+j} y^j) \end{aligned}$$

folgende Darstellung

$$B_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$Sp_{\mathbb{C}}(2m) = \text{“}Sp(4m)\text{”} \cap L_{\mathbb{C}}(2m),$$

wobei die Gruppe unter Anführungszeichen nur bis auf Koordinaten Vertauschungen – welche durch (0)(123) und (0)(132) geben sind – durch die Standardform beschrieben wird.

Beachte noch, daß

$$\begin{aligned} GL_{\mathbb{C}}(E) &\subseteq GL^+(E) := \{T \in GL(E) : \operatorname{Det}(T) > 0\} \\ O_{\mathbb{C}}(n) &\subseteq SL(2n) \\ Sp_{\mathbb{C}}(n) &\subseteq SL_{\mathbb{C}}(2n), \end{aligned}$$

denn $\operatorname{Det}(T) = |\operatorname{Det}_{\mathbb{C}}(T)|^2 \geq 0$ und $T \in O_{\mathbb{C}}(T) \Rightarrow T^t T = 1$, d.h. $\operatorname{Det}_{\mathbb{C}}(T)^2 = 1$, also $\operatorname{Det}(T) = |\pm 1|^2 = 1$. Da $Sp_{\mathbb{C}}(n)$ von den Spiegelungen erzeugt wird, und diese positive komplexe Determinante haben, gilt auch die letzte Inklusion. Wieder hat $O_{\mathbb{C}}(n)$ zwei Zusammenhangskomponenten, wobei $SO_{\mathbb{C}}(n) := SL_{\mathbb{C}}(n) \cap O_{\mathbb{C}}(n)$, wohingegen $Sp_{\mathbb{C}}(n)$ und $SL_{\mathbb{C}}(n)$ zusammenhängend sind.

14.16 Quaternionisch lineare Abbildungen

Man kann analoges auch für den Schiefkörper der Quaternionen machen. Als Vektorraum können wir ihn mit $\mathbb{H} := \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ identifizieren. Die Multiplikation läßt sich zum Beispiel für $(t,x),(s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{H}$ so einführen:

$$(t,x) \cdot (s,y) := (ts - \langle x,y\rangle, ty + sx + x \times y).$$

Wir können eine Konjugation durch

$$\overline{(t,x)} := (t, -x)$$

definieren. Dann gilt $\bar{q} \cdot q = |q|^2$ und somit ist $1/q = \bar{q}/|q|^2$. Es gelten dann alle Körper-Axiome bis auf das Kommutativgesetz der Multiplikation (siehe Aufgabe (72.65) auch für andere Beschreibungen). Wenn wir die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ mit i, j, k bezeichnen, dann ist $1 \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}$ eine Einheit und es gilt $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$. Damit Matrizen mit quaternionischen Eintragungen aber quaternionisch linear auf Vektoren wirken, müssen wir quaternionische **rechts-**Vektorräume E betrachten. Mit $L_{\mathbb{H}}(E)$ bezeichnen wir den reellen Vektorraum aller $T : E \to E$, welche $\mathbb{H}$-linear sind. D.h. $L_{\mathbb{H}}(E) = \{T \in L(E) : T(xi) = (Tx)i, T(xj) = (Tx)j, T(xk) = (Tx)k\} = \{T \in L_{\mathbb{C}}(E) : T(xj) = (Tx)j\}$, wobei die komplexe Struktur auf E durch $\mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \{0\} \subseteq \mathbb{H}$ gegeben ist. Wir erhalten dann die Gruppen

$$\begin{aligned} GL_{\mathbb{H}}(E) &:= \{T \in L_{\mathbb{H}}(E) : T \text{ ist } \mathit{invertierbar}\} = GL(E) \cap L_{\mathbb{H}}(E) \\ SL_{\mathbb{H}}(E) &:= \{T \in L_{\mathbb{H}}(E) : \operatorname{Det}_{\mathbb{R}}(T) = 1\} = SL(E) \cap L_{\mathbb{H}}(E) \end{aligned}$$

Es sei also $(e_l)_{l=1}^n$ eine Basis des quaternionischen Rechtsvektorraums E, d.h. jedes $q \in E$ hat eine eindeutige Darstellung

$$q = \sum_{l=1}^n e_l q^l$$

und wenn wir $q^l =: z^l + jz^{n+l}$ mit $z^l, z^{n+l} \in \mathbb{C}$ darstellen, erhalten wir $q = \sum_{l=1}^n e_l z^l + (e_l j) z^{n+l} = \sum_{l=1}^{2n} e_l z^l$, wobei wir $e_{n+l} := e_l j$ gesetzt haben. D.h. die $(e_j)_{j=1}^{2n}$ sind eine komplexe Basis von E als komplexer Vektorraum. Man beachte, daß qj als quaternionische Koordinaten natürlich $q^l j$ hat, aber als komplexe Koordinaten

$$qj = \sum_{l=1}^n e_l (z^l + jz^{n+l}) j = \sum_{l=1}^n e_l (j\bar{z}^l + j^2 \bar{z}^{n+l}) = \sum_{l=1}^n e_l (-\bar{z}^{n+l}) + \sum_{l=1}^n (e_l j) \bar{z}^l,$$

d.h. die Koeffizienten von qj ergeben sich durch

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{z}^1 \\ \vdots \\ \bar{z}^{2n} \end{pmatrix}.$$

Sei nun $A + Bj$ die Matrixdarstellung von T bezüglich dieser Basis mit komplexen Matrizen A und B, d.h. $T(e_l) = \sum_k e_k T_l^k = \sum_k e_k (A_l^k + B_l^k j)$ und somit

$$\begin{aligned} T(q) &= T(\sum_l e_l q^l) = \sum_l T(e_l) q^l = \sum_l \sum_k e_k T_l^k q^l \\ &= \sum_k e_k \Big(\sum_l T_l^k q^l \Big) \\ &= \sum_k e_k \Big(\sum_l (A_l^k + B_l^k j) \cdot (z^l + j z^{n+l}) \Big) \\ &= \sum_k \Big(e_k \sum_l (A_l^k z^l - B_l^k z^{n+l}) + e_k j \sum_l (\bar{B}_l^k z^l + \bar{A}_l^k z^{n+l}) \Big). \end{aligned}$$

Also hat T bezüglich der komplexen Basis $(e_1, \dots, e_n, e_1 j, \dots, e_n j)$ folgende Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}.$$

Wenn wir nun die komplexe Basis zur reellen Basis

$$(e_1, \dots, e_n; e_1 j, \dots, e_n j; e_1 i, \dots, e_n i; e_1 ji, \dots, e_n ji)$$

ergänzen, dann hat T folgende Matrizendarstellung nach dem bereits oben gezeigten, wobei wir A und B in Real- und Imaginärteil zerlegen, d.h. $A = A_1 + iA_2$ und $B = B_1 + iB_2$:

$$\begin{pmatrix} A_1 & -B_1 & -A_2 & B_2 \\ B_1 & A_1 & B_2 & A_2 \\ A_2 & -B_2 & A_1 & -B_1 \\ -B_2 & -A_2 & B_1 & A_1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir diese Basis noch auf die natürlichere Form

$$(e_1, \dots, e_n; e_1 i, \dots, e_n i; e_1 j, \dots, e_n j; e_1 k, \dots, e_n k)$$

bringen, dann hat T folgende Darstellung

$$\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 & -B_1 & -B_2 \\ A_2 & A_1 & -B_2 & B_1 \\ B_1 & B_2 & A_1 & -A_2 \\ B_2 & -B_1 & A_2 & A_1 \end{pmatrix}, \text{ mittels Konjugation mit } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir wollen mit $L_{\mathbb{H}}(n)$ den Teilraum von $L_{\mathbb{C}}(2n)$ bzw. $L(4n)$ mit den so beschriebenen quaternionischen Strukturen auf $\mathbb{C}^{2n}$ bzw. $\mathbb{R}^{4n}$ bezeichnen.

Da $\mathbb{H}$ ein schief-Körper ist, geht nun aber so manches schief. So gibt die übliche Formel für die Determinante nichts vernünftiges, da sie nicht $\mathbb{H}$-linear in den Spalten ist. Wir behaupten als nächstes, daß die komplexe Determinante auf $L_{\mathbb{H}}(E)$ positiv ist, und somit $\mathrm{Det}_{\mathbb{C}}(T) = +\sqrt{\mathrm{Det}(T)}$ gilt. Dazu rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}_{\mathbb{C}}\begin{pmatrix} A & -B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} &= \mathrm{Det}_{\mathbb{C}}\begin{pmatrix} A_1 + iA_2 & -B_1 - iB_2 \\ B_1 - iB_2 & A_1 - iA_2 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} A_1 & -B_1 \\ B_1 & A_1 \end{pmatrix} + i^2 \,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A_2 & -B_2 \\ -B_2 & -A_2 \end{pmatrix} \\
&\quad + i\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A_2 & -B_1 \\ -B_2 & A_1 \end{pmatrix} - i\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A_1 & -B_2 \\ -B_1 & A_2 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} A_1 & -B_1 \\ B_1 & A_1 \end{pmatrix} + \mathrm{Det}\begin{pmatrix} A_2 & -B_2 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix} \\
&\quad + i\Big(\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A_2 & -B_1 \\ -B_2 & A_1 \end{pmatrix} - (-1)^2\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A_2 & -B_1 \\ -B_2 & A_1 \end{pmatrix}\Big) \\
&= \mathrm{Det}_{\mathbb{R}}(A_1 + iB_1) + \mathrm{Det}_{\mathbb{R}}(A_2 + iB_2) \ge 0.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
GL_{\mathbb{H}}(E) &\subseteq GL^+_{\mathbb{C}}(E) := \{T \in GL_{\mathbb{C}}(E) : \mathrm{Det}_{\mathbb{C}}(T) > 0\} \\
GL_{\mathbb{H}}(E) &\cong \mathbb{R}^+ \times SL_{\mathbb{H}}(E) \\
SL_{\mathbb{H}}(E) &= \{T \in L_{\mathbb{H}}(E) : \mathrm{Det}_{\mathbb{C}}(T) = 1\} \subseteq SL_{\mathbb{C}}(E),
\end{aligned}$$

wobei der Isomorphismus wie im reellen Fall durch $T \mapsto (\mathrm{Det}(T)^{1/n}, \mathrm{Det}(T)^{-1/n} \cdot T)$ gegeben ist.

14.17 Quaternionische Formen, $Q(n,k)$, $Q_-(n)$

Sei schließlich $q : E \times E \to \mathbb{H}$ eine Form die quaternionisch linear in der zweiten Variable ist und konjugiert (schief)symmetrisch, nicht degeneriert. Dann bezeichnen wir mit

$$Q_q(E) := \{T \in GL_{\mathbb{H}}(E) : q(Tx, Ty) = q(x, y)\, \forall\, x, y \in E\}.$$

Wie zuvor zeigt man, daß dies eine Mannigfaltigkeit ist. Es ist also $q(x, y\lambda) = q(x, y)\lambda$, $\overline{q(y, x)} = \pm q(x, y)$ und damit $q(x\lambda, y) = \pm\overline{q(y, x\lambda)} = \pm\overline{q(y, x)\lambda} = \bar\lambda q(x, y)$. Wir setzen $s(x, y) := \mathfrak{Re}\, q(x, y) = \frac{q(x,y)+\overline{q(x,y)}}{2} = \frac{q(x,y)\pm q(y,x)}{2}$. Dann ist s (schief)symmetrisch (2. Darstellung), $\mathbb{R}$-wertig (1. Darstellung) und $\mathbb{R}$-linear. Und für alle $\lambda \in S^3 \subseteq \mathbb{H}$ gilt

$$s(x\lambda, y\lambda) = \frac{\bar\lambda q(x, y)\lambda \pm \bar\lambda q(y, x)\lambda}{2} = \bar\lambda s(x, y)\lambda = \bar\lambda\lambda s(x, y) = s(x, y),$$

da $s(x, y) \in \mathbb{R}$ mit allen Quaternionen vertauscht.

Es gilt $q(x,y) = s(x,y) + i\,s(xi,y) + j\,s(xj,y) + k\,s(xk,y)$, denn

$$\begin{aligned}
s(x,y) &+ i\,s(xi,y) + j\,s(xj,y) + k\,s(xk,y) = \\
&= \frac{1}{2}\Big((q(x,y) + i\,q(xi,y) + j\,q(xj,y) + k\,q(xk,y)) \\
&\qquad \pm (q(y,x) + i\,q(y,xi) + j\,q(y,xj) + k\,q(y,xk))\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(4q(x,y) \pm (q(y,x) + i\,q(y,x)\,i + j\,q(y,x)\,j + k\,q(y,x)\,k)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(4q(x,y) \mp 2\overline{q(y,x)}\Big) \\
&= q(x,y),
\end{aligned}$$

wobei wir für die vorletzte Zeile $q(x,y) = a + ib + jc + kd$ setzen, und dann alles ausmultiplizieren.

Man beachte auch, daß für $\lambda \in \{i,j,k\}$ die Form $(x,y) \mapsto s(x\lambda,y)$ $\mathbb{R}$-bilinear ist und $s(y\lambda,x) = \pm s(x,y\lambda) = \mp s(x\lambda^2,y\lambda) = \mp s(x\lambda,y)$ erfüllt, d.h. ebenfalls (schief)symmetrisch ist.

Umgekehrt sei $s : E \times E \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-bilinear und (schief-) symmetrisch und es existieren s-Isometrien I und J mit $I^2 = -1 = J^2$ und $IJ + JI = 0$. Dann können wir E zu einem quaternionischen Rechtsvektorraum machen durch $x \cdot (a + ib + jc + kd) = xa + I(x)b + J(x)c + JI(x)d$ und

$$q(x,y) := s(x,y) + i\,s(Ix,y) + j\,s(Jx,y) + k\,s(JIx,y)$$

definiert eine konjugiert (schief-)symmetrische nicht-degenerierte Form die $\mathbb{H}$-linear in der zweiten Variable ist. Offensichtlich ist jedes T, welches q und damit auch s, $s(I\_,\_)$, $s(J\_,\_)$, $s(JI\_,\_)$ invariant läßt, automatisch $\mathbb{H}$-linear, denn $s(ITx,Ty) = s(Ix,y) = s(TIx,Ty)$ und somit $ITx = TIx$ und analog für J. Es gilt also $Q_q(E) = O_s(E) \cap GL_{\mathbb{H}}(E)$.

Falls nun q eine Standardform ist, d.h. eine der folgenden Formen:

$$\begin{aligned}
q(z,w) &= \sum_{l=1}^{n} \bar{z}^l w^l \\
q(z,w) &= \sum_{l>k} \bar{z}^l w^l - \sum_{l\le k} \bar{z}^l w^l \\
q(z,w) &= \sum_{l=1}^{n} \bar{z}^l\, i\, w^l
\end{aligned}$$

dann werden die entsprechenden Gruppen mit $Q(n) = U_{\mathbb{H}}(n)$, $Q(n,k) = U_{\mathbb{H}}(n,k)$ sowie $Q_-(m) = U_\alpha(m) = Sp_{\mathbb{H}}(m)$ bezeichnet. Wir erhalten für s bezüglich der reellen Basis $(e_1,\dots;e_1 i,\dots;e_1 j,\dots;e_1 k,\dots)$ und der entsprechenden reellen Koordinaten

$$\begin{gathered}
(x^1,\dots;x^{n+1},\dots,x^{2n+1},\dots;x^{3n+1},\dots) \text{ für } z \text{ und} \\
(y^1,\dots;y^{n+1},\dots,y^{2n+1},\dots;y^{3n+1},\dots) \text{ für } w
\end{gathered}$$

wobei $z^l = x^l + ix^{n+l} + jx^{2n+l} + kx^{3n+l}$ und $w^l = y^l + iy^{n+l} + jy^{2n+l} + ky^{3n+l}$:

$$s(x,y) = \sum_l x^l y^l + x^{n+l} y^{n+l} + x^{2n+l} y^{2n+l} + x^{3n+l} y^{3n+l}$$

$$\begin{aligned} s(x,y) &= \sum_{l>k} x^l y^l + x^{n+l} y^{n+l} + x^{2n+l} y^{2n+l} + x^{3n+l} y^{3n+l} \\ &\quad - \sum_{l\le k} x^l y^l + x^{n+l} y^{n+l} + x^{2n+l} y^{2n+l} + x^{3n+l} y^{3n+l} \end{aligned}$$

$$s(x,y) = \sum_l -x^l y^{n+l} + x^{n+l} y^l - x^{2n+l} y^{3n+l} + x^{3n+l} y^{2n+l}$$

D.h. die Matrizendarstellungen sind

$$\begin{pmatrix} 1_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_k \end{pmatrix} \text{ mit } 1_k \text{ wie zuvor;}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \text{ mit } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} Q(n) &= O(4n) \cap L_{\mathbb{H}}(n) \subseteq SL_{\mathbb{H}}(n) \\ Q(n,k) &= \text{“}O(4n,4k)\text{”} \cap L_{\mathbb{H}}(n) \subseteq SL_{\mathbb{H}}(n) \\ Q_-(n) &= \text{“}Sp(4n)\text{”} \cap L_{\mathbb{H}}(n) \subseteq SL_{\mathbb{H}}(n) \end{aligned}$$

Wir können aber auch je zwei Komponenten zusammenfassen. Wie wir bereits für $U(n)$ gezeigt haben, ist $h(x,y) := s(x,y) + i\,s(xi,y)$ eine (schief-)hermitesche Form und $j\,q(xj,y) + k\,q(xk,y) = j\,(q(xj,y) + i\,q(xji,y)) = j\,h(xj,y)$, wobei $(x,y) \mapsto h(xj,y)$ (symmetrisch) schiefsymmetrisch und komplex bilinear ist, denn $h(yj,x) = s(yj,x) + i\,s(yji,x) = \pm s(xj,y) \pm i\,s(xji,y) = \pm h(xj,y)$. Also hat q eine Zerlegung $q(x,y) = h(x,y) + j\,h(xj,y)$ in (schief-)hermiteschen und (symmetrischen) schiefsymmetrischen $\mathbb{C}$-bilinearen Teil. Führt man das wieder für die Standardformen durch, so erhalten wir

$$\begin{aligned} q(z,w) &= \sum_l (\bar z^l - \bar z^{n+l} j)(w^l + jw^{n+l}) \\ &= \sum_l (\bar z^l w^l + \bar z^{n+l} w^{n+l}) + j \sum_l (z^l w^{n+l} - z^{n+l} w^l) \end{aligned}$$

$$q(z,w) = \sum_{l>k} (\bar z^l - \bar z^{n+l} j)(w^l + jw^{n+l}) - \sum_{l\le k} (\bar z^l - \bar z^{n+l} j)(w^l + jw^{n+l})$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l>k}(\bar z^l w^l + \bar z^{n+l} w^{n+l}) - \sum_{l\le k}(\bar z^l w^l + \bar z^{n+l} w^{n+l}) \\
&\qquad + j\sum_{l>k}(z^l w^{n+l} - z^{n+l} w^l) - j\sum_{l\le k}(z^l w^{n+l} - z^{n+l} w^l)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q(z,w) &= \sum_l (\bar z^l - \bar z^{n+l} j) i (w^l + j w^{n+l}) \\
&= \sum_l (\bar z^l i w^l + \bar z^{n+l}(-j) i w^l - \bar z^{n+l}(-j) i j w^{n+l} - \bar z^l i j w^{n+l}) \\
&= \sum_l i(\bar z^l w^l - \bar z^{n+l} w^{n+l}) - ji\sum_l (z^{n+l} w^l + z^l w^{n+l})
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
Q(n) &= U(2n) \cap Sp_{\mathbb{C}}(2n) \\
&= U(2n) \cap L_{\mathbb{H}}(n) = Sp_{\mathbb{C}}(2n) \cap L_{\mathbb{H}}(n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q(n,k) &= \text{“}U(2n,2k)\text{”} \cap \text{“}Sp_{\mathbb{C}}(2n)\text{”} \\
&= \text{“}U(2n,2k)\text{”} \cap L_{\mathbb{H}}(n) = \text{“}Sp_{\mathbb{C}}(2n)\text{”} \cap L_{\mathbb{H}}(n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_-(n) &= U(2n,n) \cap \text{“}O_{\mathbb{C}}(2n)\text{”} \\
&= U(2n,n) \cap L_{\mathbb{H}}(n) = \text{“}O_{\mathbb{C}}(2n)\text{”} \cap L_{\mathbb{H}}(n)
\end{aligned}
$$

14.18 Übersicht

Gruppe	Dim	kompakt	komplex	Kurzbeschreibung
$GL(n)$	n^2	$-$	$-$	$\mathrm{Det}_{\mathbb{R}} \neq 0$
$SL(n)$	n^2-1	$-$	$-$	$\mathrm{Det}_{\mathbb{R}} = 1$
$SO(n)$	$n(n-1)/2$	$+$	$-$	sym,lin,pos-def
$SO(n,k)$	$n(n-1)/2$	$-$	$-$	sym,lin,def
$Sp(n)$ 1)	$n(n+1)/2$	$-$	$-$	alt,lin,def
$U(n)$	n^2	$+$	$-$	konj-sym,pos-def
$U(n,k)$	n^2	$-$	$-$	konj-sym,def
$SU(n)$	n^2-1	$+$	$-$	konj-sym,pos-def, $\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} = 1$
$SU(n,k)$	n^2-1	$-$	$-$	konj-sym,def, $\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} = 1$
$GL_{\mathbb{C}}(n)$	$2n^2$	$-$	$+$	$\mathbb{C}$-lin, $\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} \neq 0$
$SL_{\mathbb{C}}(n)$	$2n^2-2$	$-$	$+$	$\mathbb{C}$-lin, $\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} = 1$
$O_{\mathbb{C}}(n)$	$n(n-1)$	$-$	$+$	sym,$\mathbb{C}$-lin,def
$Sp_{\mathbb{C}}(n)$ 1)	$n(n+1)$	$-$	$+$	alt,$\mathbb{C}$-lin,def
$Q(n)$	$n(2n+1)$	$+$	$-$	konj-sym,$\mathbb{H}$-lin,pos-def
$Q(n,k)$	$n(2n+1)$	$-$	$-$	konj-sym,$\mathbb{H}$-lin,def
$Q_-(n)$	$n(2n-1)$	$-$	$-$	schief-konj-sym,$\mathbb{H}$-lin,def
$GL_{\mathbb{H}}(n)$	$4n^2$	$-$	$-$	$\mathbb{H}$-lin, $\mathrm{Det}_{\mathbb{R}} \neq 0$
$SL_{\mathbb{H}}(n)$	$4n^2-1$	$-$	$-$	$\mathbb{H}$-lin, $\mathrm{Det}_{\mathbb{R}} = 1$

1) In diesen Fällen ist $n = 2m$ gerade.

14.19 Niedere Dimensionen

Gruppe	dim	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$SL(n)$	n^2-1	$\{1\}$	$S^1 \times \mathbb{C}$	$\dim = 8$
$SO(n)$	$n(n-1)/2$	$\{1\}$	S^1	$PSU(2)$
$SO(n,1)$	$n(n-1)/2$	$-$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$PSL(2)$
$Sp(n)$	$n(n+1)/2$	$-$	$S^1 \times \mathbb{C}$	$-$
$SU(n)$	n^2-1	$\{1\}$	S^3	$\dim = 8$
$SU(n,1)$	n^2-1	$-$	$S^1 \times \mathbb{C}$	$\dim = 8$
$SL_{\mathbb{C}}(n)$	$2n^2-2$	$\{1\}$	$\dim = 6$	$\dim = 16$
$SO_{\mathbb{C}}(n)$	$n(n-1)$	$\{1\}$	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\dim = 6$
$Sp_{\mathbb{C}}(n)$	$n(n+1)$	$-$	$\dim = 6$	$-$
$Q(n)$	$n(2n+1)$	S^3	$\dim = 10$	$\dim = 21$
$Q(n,1)$	$n(2n+1)$	$-$	$\dim = 10$	$\dim = 21$
$Q_-(n)$	$n(2n-1)$	S^1	$\dim = 6$	$\dim = 15$
$SL_{\mathbb{H}}(n)$	$4n^2-1$	S^3	$\dim = 15$	$\dim = 35$

dim= 0:
Offensichtlich ist
$\boldsymbol{SL(1)} = \{t \in \mathbb{R} : t = 1\}$, $\boldsymbol{SO(1)} = \{1\} \subseteq SL(1)$, $\boldsymbol{SU(1)} = \{z \in \mathbb{C} : z = 1\}$, $\boldsymbol{SL_{\mathbb{C}}(1)} = \{z \in \mathbb{C} : z = 1\}$, $\boldsymbol{SO_{\mathbb{C}}(1)} = \{1\} \subseteq SL_{\mathbb{C}}(1)$

dim= 1:

$\boldsymbol{U(1)} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z}z = 1\} = S^1 \subseteq \mathbb{C}$.

$\boldsymbol{Q_-(1)} = S^1$, denn $\overline{z}iw = \overline{\lambda z}i\lambda w = \overline{z}\overline{\lambda}i\lambda w$, genau dann, wenn $i = \bar\lambda i\lambda$, oder $|\lambda| = 1$ und $\lambda i = i\lambda$, i.e. $\lambda = a + ib$ mit $a^2 + b^2 = 1$.

Die definierende Gleichung der gesuchten Untergruppen von $SL_{\mathbb{C}}(2)$ ist neben $\det = 1$ durch $b(Tx, Ty) = b(x, y)$ gegeben. Dafür genügt es $(x, y) := b(e_1, e_1)$, $(x, y) := (e_1, e_2)$ und $(x, y) := (e_2, e_2)$ einzusetzen, oder wenn $b(x, y) = \langle Bx, y\rangle$ ist, die Matrizengleichung $T^*BT = B$ zu lösen. Da $T \in SL_{\mathbb{C}}(2)$ liegt, ist $T = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ invertierbar mit inverser Matrix $T^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$. Also läßt sich die Matrizengleichung auch als $BT = (T^*)^{-1}B$ schreiben, und liefert uns im Folgenden die nötigen Bedingungen an die Koeffizienten a, b, c und d.

Die Elemente der Abelsch'en unter den folgenden Gruppen G werden wir gemeinsam diagonalisieren. D.h. für jedes $T \in G$ werden wir die Eigenwerte $\lambda_\pm^T$ und zugehörige (von T unabhängige) Eigenvektoren $e_\pm$ bestimmen. Wenn Λ^T die Diagonalmatrix mit Eintragungen λ_+^T und λ_-^T ist, und U die Matrix mit Spalten e_+ und e_- ist, d.h. $U(e_1) = e_+$ und $U(e_2) = e_-$, dann ist $T \cdot U = U \cdot \Lambda^T$, d.h. $U^{-1} \cdot T \cdot U = \Lambda^T$. Die Konjugation mit U bildet also die Gruppe G isomorph auf eine Gruppe von Diagonalmatrizen in $SL_{\mathbb{C}}(2)$ ab.

$$\boldsymbol{SO(2)} = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1\right\} \cong \left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar\lambda \end{pmatrix} : \lambda \in S^1\right\} \cong S^1,$$

$$\text{denn} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (1) & a^2 + c^2 = 1 \quad (b(e_1, e_1) = 1) \\ (2) & b^2 + d^2 = 1 \quad (b(e_2, e_2) = 1) \\ (3) & ab + cd = 0 \quad (b(e_1, e_2) = 0) \\ (4) & ad - bc = 1 \quad (\det = 1) \end{cases}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} d \cdot (3) - b \cdot (4) : &\quad -b = c(d^2 + b^2) = c, \\ b \cdot (3) + d \cdot (4) : &\quad d = a(b^2 + d^2) = a \end{aligned}$$

und somit $a^2 + b^2 = 1$. Kürzer folgt das alles auch aus der Matrizengleichung $BT = (T^t)^{-1}B$, mit $B = \mathrm{id}$.

Die Eigenwerte von T sind $\lambda_\pm = a \pm i\, b$ mit zugehörigen Eigenvektoren $e_\pm = (1, \pm i)$. Also bildet die Konjugation mit $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{smallmatrix}\right)$ die Gruppe $SO(2)$ isomorph auf die Diagonalmatrizen mit konjugiert komplexen Eintragungen vom Betrag 1 ab.

$$\boldsymbol{SO(2{,}1)} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R},\ a^2 - b^2 = 1\right\} \cong$$
$$\cong \left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/la \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} \cong \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

Analog wie bei der $SO(2)$ folgt die erste Gleichung aus der Matrizengleichung mit $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Der erste Isomorphismus ist dann analog durch Konjugation mit der Matrix $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ der Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_\pm := a \pm b$ gegeben. Nun konjugieren wir mit $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, welche die Standardbasis auf eine Basis mit

$b(e_j,e_j)=0$ und $b(e_1,e_2)=1$ abbildet. Dann ist

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & 0\\ 0 & a-b\end{pmatrix}$$

und $(a+b)(a-b)=1$.

dim= 2

$\boldsymbol{GL_{\mathbb{C}}(1)}=\mathbb{C}_*$.

$$\boldsymbol{SO_{\mathbb{C}}(2)}=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}: a,b\in\mathbb{C}, a^2+b^2=1\right\}\cong\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1/a\end{pmatrix}: a\in\mathbb{C}_*\right\}\cong\mathbb{C}_*,$$

denn wie für $SO(2)$ erhalten erhalten wir die Gleichheit aus der Matrizengleichung und den Isomorphismus durch Konjugation mit $\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}$. Dann ist

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+ib & 0\\ 0 & a-ib\end{pmatrix}$$

und $(a+ib)(a-ib)=1$.

dim= 3

$$\boldsymbol{SL(2)}=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}: a,b,c,d\in\mathbb{R},\ ad-bc=1\right\}$$

$\boldsymbol{Sp(2)}=SL(2)$,

$$\text{denn}\quad\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in Sp(2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & cb-ad\\ ad-bc & 0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow ad-bc=1$$

$$\boldsymbol{SU(2,1)}=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ \bar b & \bar a\end{pmatrix}: a,b\in\mathbb{C},\ |a|^2-|b|^2=1\right\}\cong SL(2),$$

denn die Gleichheit folgt analog wie bei der $SO(2,1)$ mit $B:=\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$ und dem hermite'schen Produkt. Der Isomorphismus ist durch Konjugation mit $U:=\left(\begin{smallmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{smallmatrix}\right)$ geben, siehe (34.5) und (72.62).
Beachte daß die Mannigfaltigkeit $\{(a,b)\in\mathbb{C}^2 : |a|^2-|b|^2=1\}$ vermöge $(a,b)\mapsto(\frac{a}{|a|},b)=(\frac{a}{\sqrt{1+|b|^2}},b)$ diffeomorph zu $S^1\times\mathbb{C}$ ist. Allerdings sieht die induzierte Gruppenstruktur auf $S^1\times\mathbb{C}$ sehr kompliziert aus.

$$\boldsymbol{SU(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \cong S^3$$

wobei die Gleichung wieder wie für die $SO(2)$ folgt und der Isomorphismus durch die Darstellung der Quaternionen $\mathbb{H}$ als Matrizen in $GL_{\mathbb{C}}(2)$ gegeben ist.

$\boldsymbol{Q(1)} = S^3$, denn $T \in Q(1)$ genau dann, wenn $T \in GL_{\mathbb{H}}(1) = \mathbb{H}$ mit $\bar{T}T = 1$, und

$$\begin{aligned} \overline{(a+ib+jc+kd)} \cdot (a+ib+jc+kd) &= (a-ib-jc-kd) \cdot (a+ib+jc+kd) \\ &= (a^2+b^2+c^2+d^2) + i0 + j0 + k0. \end{aligned}$$

$\boldsymbol{SL_{\mathbb{H}}(1)} = S^3$, denn

$$\begin{aligned} (t+ix+jy+kz) \cdot (a+ib+jc+kd) = (&ta - xb - yc - zd) \\ &+ i(xa + tb + yd - zc) \\ &+ j(tc + ya + kb - xd) \\ &+ k(za + td + xc - yb) \end{aligned}$$

also wirkt eine Quaternione $(a+ib+jc+kd)$ als folgende Matrix auf einem Vektor (t,x,y,z):

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

und hat reelle Determinante $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

$\boldsymbol{SO(3)} = PSU(2) = PS^3$, jede Einheitsquaternione $a+ib+jc+kd$ wirkt orthogonal auf $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ durch Konjugation und läßt die Zerlegung $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ invariant. Jedes Element aus $SO(3)$ ist durch eine Konjugation mit einer Einheitsquaternione gegeben. Geometrisch kann man das auch so sehen: Eine Drehung ist durch Drehachse und Drehwinkel festgelegt, also durch durch einen Vektor $u \in D^3$ welcher der Drehung mit der Achse $u/|u| \in S^2$ und dem Drehwinkel $\pi|u| \in [-\pi,\pi]/\sim = S^1$ entspricht. Also erhalten wir eine 2-blättrige Überlagerung $S^3 = D^3/\partial D^3 \to SO(3)$ aus folgendem Diagramm

$$\begin{tikzcd} S^2 \times [-1,1] \arrow[r, two heads, "\mathrm{id} \times e^{i\pi -}"] \arrow[d, two heads] & S^2 \times S^1 \arrow[d, two heads] \\ \mathbb{D}^3 \arrow[r, dotted] & SO(3), \end{tikzcd}$$

wobei die linke vertikale Abbildung durch $(x,t) \mapsto tx$ und die rechte durch $(v, ph) \mapsto$ "Drehung um v mit Winkel φ" gegeben sind. Siehe dazu auch (24.40). Beachte, daß das Zentrum $Z(SU(2))$ von $SU(2)$ durch $\{\pm \mathrm{id}\}$ gegeben ist und somit $PSU(2) := SU(2)/Z(SU(2)) = S^3/\mathbb{Z}_2$ ist.

$\boldsymbol{SO^+(3,1)} = PSL(2)$ wird analog wie für $SO(3) = PS^3$ gezeigt. Für Details dazu ebenso (24.40). Beachte, daß das Zentrum $Z(SL(2))$ von $SL(2)$ durch $\{\pm\,\mathrm{id}\}$ gegeben ist und somit $PSL(2) := SL(2)/Z(SL(2))$ ist.

15. Glatte Abbildungen

Um verschiedene Mannigfaltigkeiten miteinander in Beziehung zu setzen, benötigen wir natürlich auch den Begriff der glatten Abbildungen zwischen ihnen und den geben wir jetzt.

15.1 Definition (glatte Abbildung)

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen zwei glatten Mannigfaltigkeiten $M \subseteq \mathbb{R}^m$ und $N \subseteq \mathbb{R}^n$.
Die Abbildung f heißt GLATT (C^∞) $:\Leftrightarrow$ lokal läßt sie sich zu einer glatten Abbildung $\tilde f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ erweitern, d.h.

$$\forall\, p \in M\, \exists\, U(p) \underset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbb{R}^m\, \exists\, \tilde f : U(p) \to \mathbb{R}^n \text{ glatt mit} \tilde f|_{M\cap U(p)} = f|_{M\cap U(p)}.$$

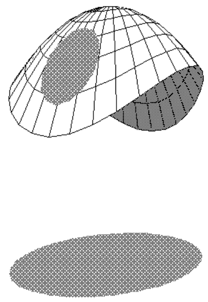
Die konstante Abbildung, die Identität und die Zusammensetzung glatter Abbildungen sind glatt: Seien $f : M_1 \to M_2$ sowie $g : M_2 \to M_3$ glatt und $\tilde f : U_1 \to \mathbb{R}^{n_2}$ bzw. $\tilde g : U_2 \to \mathbb{R}^{n_3}$ lokale, glatte Fortsetzungen, dann ist $(g \circ \tilde f) = \tilde g \circ \tilde f : \tilde f^{-1}(U_2) \to \mathbb{R}^{n_3}$ eine lokale, glatte Fortsetzung von $g \circ f$, also ist $g \circ f$ glatt.

15.2 Beispiele glatter Abbildungen.
(1) Für die klassischen Liegruppen G aus Abschnitt (14) ist die Multiplikation $\mathrm{mult} : G \times G \to G$ glatt, denn für die offene Teilmenge $GL(E)$ von $L(E,E)$ ist dies die Einschränkung der bilinearen Abbildung $(T, S) \mapsto T\,S$, und die anderen klassischen Liegruppen G sind Teilmannigfaltigkeiten in $GL(E)$. Gleiches gilt für die Inversion $\mathrm{inv} : G \to G$, denn für $GL(E)$ ist sie die Lösung der impliziten Gleichung $\mathrm{mult}(A, \mathrm{inv}(A)) = \mathrm{id}$, auf die der inverse Funktionensatz anwendbar ist. Die Ableitung ist dabei durch

$$\mathrm{inv}'(A)(B) = -A^{-1}BA^{-1}$$

gegeben.
(2) Orthogonales-Komplement-nehmen $\perp$: $G(k, n) \to G(n - k, n)$ ist glatt als Einschränkung der affinen, durch $P \mapsto 1 - P$ gegeben Abbildung $L_k(n, n) \to L_{n-k}n, n$.
(3) Die Bild-Abbildung $\mathrm{Bild} : V(k, n) \to G(k, n)$ ist glatt, denn als Abbildung von $V(k, n) := \{T \in L(k, n) : T^tT = \mathrm{id}\} \to G(k, n) \subset L_k(n, n)$ ist sie durch $T \mapsto TT^t$ gegeben: Offensichtlich ist TT^t eine ortho-Projektion mit $\mathrm{Bild}\, T \subseteq \mathrm{Bild}\, TT^t \subseteq \mathrm{Bild}\, TT^tT = \mathrm{Bild}\, T$.

15.3 Lemma (Karten sind Diffeomorphismen).
Sei $\varphi : U \to M$ eine lokale Parametrisierung der Mannigfaltigkeit M. Dann ist φ lokal ein Diffeomorphismus.



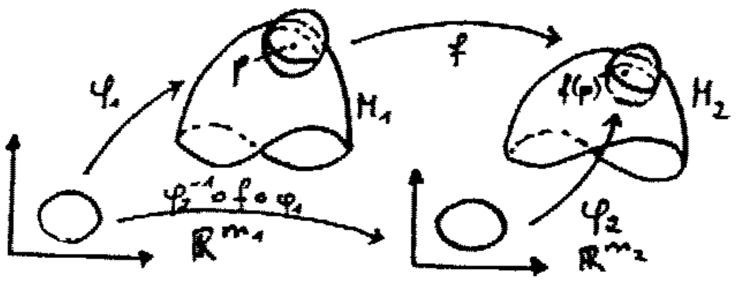
Beweis. Nach Voraussetzung ist φ glatt. Im Beweis der Richtung ($1 \Rightarrow 4$) von Satz (10.4) haben wir φ zu einem lokalen Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ erweitert. Aus der Bijektivität von φ (ist Voraussetzung) folgt, daß

$$\varphi^{-1} : M \cap V \to U$$

als Abbildung existiert. Sie ist sogar glatt, denn lokal läßt sie sich zu der glatten Abbildung Φ^{-1} erweitern. □

15.4 Lemma (Glatte Abbildungen). *Für eine stetige Abbildung $f : M \to N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist glatt.*
2. *Für jede lokale Parametrisierung φ von M und jede lokale Parametrisierung ψ von N gilt: Die Abbildung $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ ist glatt wo sie definiert ist.*
3. *Für jedes $p \in M$ existiert eine lokale Parametrisierung φ von M um p und existiert eine lokale Parametrisierung ψ von $f(p)$, sodaß die Kartendarstellung $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ glatt ist.*



Beweis. ($1 \Rightarrow 2$) Seien nun $\varphi : U_1 \to V_1 \cap M$ und $\psi : U_2 \to V_2 \cap N$ lokale Parametrisierungen. Die Abbildung $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ ist genau für jene $x \in U_1$ definiert, welche $f(\varphi(x)) \in V_2$ erfüllen. Das ist aber die offene Menge $U_1 \cap (f \circ \varphi)^{-1}(V_2)$. Obige Abbildung ist glatt, da sie nur aus glatten Funktionen zusammengesetzt ist.

($2 \Rightarrow 3$) Wenn die Aussage für alle lokalen Parametrisierungen gilt, dann erst recht für eine spezielle.

(3⇒1) Zu zeigen ist, daß f glatt ist. Dies ist eine lokale Eigenschaft, und lokal läßt sich f folgendermaßen als Komposition von glatten Abbildungen darstellen:

$$f = \psi \circ \underbrace{(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)}_{\text{glatt nach (3)}} \circ \varphi^{-1}. \qquad \square$$

16. Abstrakte Mannigfaltigkeiten

In diesen Abschnitt wollen wir den Mannigfaltigkeiten umgebenden Euklidischen Raum loswerden, und kommen so zum Begriff der abstrakten Mannigfaltigkeit.

Unsere vorläufige Definition einer Mannigfaltigkeit ist aber noch immer nicht zufriedenstellend: Bisher verwendeten wir ganz wesentlich die Eigenschaften des umgebenden Raumes, der mit dem Objekt, das wir beschreiben wollen, begrifflich nichts zu tun hat.

16.1 Beispiele

(Siehe auch Abschnitt (9)).

1. Das Möbiusband entsteht "topologisch", wenn man zwei Seiten eines Rechtecks miteinander identifiziert und das Ganze mit der Quotiententopologie versieht. Denkt man sich dieses Gebilde im $\mathbb{R}^3$ realisiert und zerschneidet es längs der Mittellinie, so entsteht bekanntlich ein mehrfach verdrehtes Band. Führen wir dasselbe aber "topologisch" durch, entsteht ein einfaches, nicht verdrehtes Band. Die beiden Figuren lassen sich aber im $\mathbb{R}^3$ nicht stetig ineinander überführen, das geht erst im $\mathbb{R}^4$.
2. Der "Klein'schen Flasche" oder vor allem der "projektiven Ebene" sieht man gar nicht ohne weiteres an, in welchen $\mathbb{R}^n$ sie "passen", in den $\mathbb{R}^3$ jedenfalls nicht.

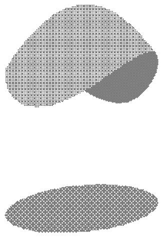
Im folgenden wollen wir die Definition von Teilmannigfaltigkeiten eines $\mathbb{R}^n$ erweitern zu einer solchen für abstrakte Mannigfaltigkeiten.

16.2 Definition (Abstrakte Mannigfaltigkeit)

Sei X eine beliebige Menge. Eine Karte (oder auch lokale Parametrisierung) von X ist eine injektive Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \to X$, definiert auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Zwei Karten φ_1, φ_2 heißen C^∞-kompatibel oder verträglich, falls der Kartenwechsel

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(\varphi_2(U_2)) \to \varphi_2^{-1}(\varphi_1(U_1))$$

ein Diffeomorphismus offener Mengen ist. Die Idee dahinter ist, daß jede Karte φ_1 glatt sein soll, und nach (15.4) sollte dazu $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ dort wo es definiert ist glatt sein. Ein C^∞-Atlas einer Menge X ist eine Familie C^∞-kompatibler Karten, deren Bilder ganz X überdecken. Zwei C^∞-Atlanten heißen äquivalent, wenn alle ihre Karten miteinander C^∞-kompatibel sind. Eine abstrakte C^∞-Mannigfaltigkeit ist eine Menge zusammen mit einer Äquivalenzklasse glatter Atlanten.



16.3 Definition (Topologie einer Mannigfaltigkeit)

Auf einer abstrakten Mannigfaltigkeit erhält man eine TOPOLOGIE , indem man definiert:$U \subseteq X$ heißt offen $:\Leftrightarrow \varphi^{-1}(U)$ ist offen im $\mathbb{R}^m$ für jede Karte des Atlas.

Die Karten $\varphi : U \to \varphi(U) \subset M$ werden dann zu Homöomorphismen. Denn stetig sind sie nach Konstruktion der Topologie auf M und falls $U_1 \subset U$ offen ist, so ist es auch $\varphi(U_1) \subset M$ denn $\psi^{-1}(\varphi(U_1)) = (\varphi^{-1} \circ \psi)^{-1}(U_1)$ ist das Bild unter dem Homöomorphismus $\varphi^{-1} \circ \psi$.

Man verlangt üblicherweise auch noch, daß diese Topologie HAUSDORFF ist, d.h.: je zwei disjunkte Punkte lassen sich durch disjunkte offene Umgebungen trennen.

Die folgende Proposition zeigt, daß diese Definition wirklich eine Erweiterung von Definition (10.4) ist.

16.4 Proposition. *Jede C^∞-Teilmannigfaltigkeit M eines $\mathbb{R}^n$ ist in natürlicher Weise eine C^∞-Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Einen Atlas auf M erhält man aus allen lokalen injektiven Parametrisierungen mittels (10.4). Die Kartenwechsel sind dann glatt nach (15.3) und die Topologie von M ist die induzierte Topologie des umgebenden $\mathbb{R}^n$, da die Parametrisierungen lokal Einbettungen sind, siehe den Beweis von (10.4). □

16.5 Proposition (Maximaler Atlas).
Sei $\mathcal{A}$ ein C^∞-Atlas für M, dann ist

$$\mathcal{A}_{\max} := \{\varphi : \varphi \text{ Karte für } M \text{ und } \varphi \text{ verträglich mit allen } \psi \in \mathcal{A}\}$$

der eindeutig bestimmte maximale Atlas, der $\mathcal{A}$ umfaßt.

Beweis. Wir zeigen zuerst $\mathcal{A}_{\max}$ ist ein C^∞-Atlas: Seien φ, $\psi \in \mathcal{A}_{\max}$, dann ist zu zeigen, $\varphi^{-1} \circ \psi$ ist glatt. Sei $x \in \psi^{-1}(\operatorname{Bild}\varphi)$ also $\psi(x) \in \operatorname{Bild}\varphi \cap \operatorname{Bild}\psi$. Da $\mathcal{A}$ ein Atlas ist, folgt die Existenz eines $\chi \in \mathcal{A}$ mit $\psi(x) \in \operatorname{Bild}\chi$. Somit ist $\varphi^{-1}\circ\chi\circ\chi^{-1}\circ\psi = (\chi^{-1} \circ \varphi)^{-1} \circ (\chi^{-1} \circ \psi)$ lokal um x definiert. Die beiden geklammerten Teile sind laut Definition von $\mathcal{A}_{\max}$ glatt und folglich ist auch $\varphi^{-1} \circ \psi$ glatt.

Sei nun $\mathcal{B}$ ein C^∞-Atlas, der $\mathcal{A}$ umfaßt, dann ist z.z.: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_{\max}$. Sei $\varphi \in \mathcal{B}$, dann ist φ verträglich mit allen $\psi \in \mathcal{B}$. Da $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, ist φ verträglich mit allen $\psi \in \mathcal{A}$, also ist nach Konstruktion $\varphi \in \mathcal{A}_{\max}$. □

16.6

Die folgenden Überlegungen zeigen, daß die Kartenwechsel, also eine Familie von lokalen Abbildungen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, schon die ganze Information über M enthalten. Sei $\{f_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in A\}$ eine Familie von Diffeomorphismen offener Teilmengen endlichdimensionaler Vektorräume, sodaß $f_{\alpha\beta}^{-1} = f_{\beta\alpha}$ und (dort wo die linke Seite definiert ist) $f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma}$ gilt. (Das sind offensichtlich die Eigenschaften von Kartenwechseln.) Definiert man die Äquivalenzrelation: $x \sim y :\Leftrightarrow f_{\alpha\beta}(y) = x$ wobei $x \in \operatorname{Dom} f_{\alpha\alpha}$ und $y \in \operatorname{Dom} f_{\beta\beta}$, so ist $M := \left(\bigsqcup_{\alpha\in A} \operatorname{Dom} f_{\alpha\alpha}\right)/_\sim$ eine C^∞-Mannigfaltigkeit mit den Karten $\varphi_\alpha : \operatorname{Dom} f_{\alpha\alpha} \to M$, die durch $\varphi_\alpha(x) = [x]_\sim$ gegeben sind. Klarerweise gilt $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta = f_{\alpha\beta}$. Wir haben also tatsächlich eine Mannigfaltigkeit geschaffen, die die gegebenen Funktionen als Kartenwechsel hat.

16.7 Definition (Topologische Mannigfaltigkeit)

Ein topologischer Raum M heißt TOPOLOGISCHE MANNIGFALTIGKEIT $:\Leftrightarrow$ es gibt eine Familie von Homöomorphismen zwischen offenen Teilmengen eines endlichdimensionalen Vektorraums und offenen Teilmengen von M, deren Bilder M überdecken.

Solche Homöomorphismen heißen KARTEN von M. Und eine Familie von Karten, deren Bilder M überdecken, heißt ATLAS.

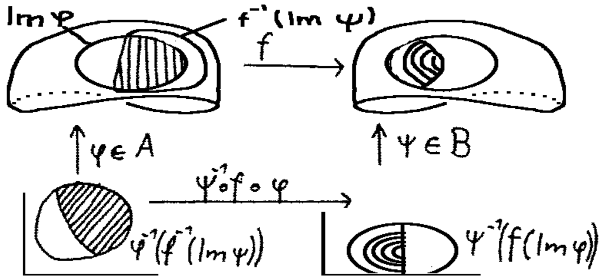
Bemerkungen

1. Falls M eine topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}$ ein Atlas für M ist, so sind alle Kartenwechsel automatisch Homöomorphismen auf offenen Teilen des $\mathbb{R}^m$. Man braucht also “nur” genügend viele unter ihnen zu finden, so daß die entsprechenden Kartenwechsel differenzierbar sind, um einen glatten Teilatlas zu erhalten, und somit M als glatte Mannigfaltigkeit zu erkennen.
2. Nicht jede topologische Mannigfaltigkeit besitzt aber einen C^∞-Atlas. Das erste Beispiel [**50**] war 10-dimensional. Heute ist 4 die niedrigste Dimension, für die es ein Beispiel gibt.

Wir wollen nun unseren Differenzierbarkeitsbegriff für Abbildungen zwischen Teilmannigfaltigkeiten auf abstrakte Mannigfaltigkeiten übertragen. Das Lemma (15.4) legt folgende Definition nahe:

16.8 Definition (Glatte Abbildung)

Seien $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ zwei C^∞-Mannigfaltigkeiten. Die Abbildung $f : M \to N$ heißt GLATT $:\Leftrightarrow$ f ist stetig, und für jeden Punkt $x \in M$ existieren Karten $\varphi \in \mathcal{A}$ und $\psi \in \mathcal{B}$, sodaß $x \in \operatorname{Bild}\varphi$, $f(x) \in \operatorname{Bild}\psi$ und die KARTENDARSTELLUNG $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ von f glatt ist. Das gilt dann ebenso für beliebige Karten $\varphi \in \mathcal{A}$ und $\psi \in B$.



Insbesonders ist die Identität id : $(M, \mathcal{A}) \to (M, \mathcal{B})$ genau dann ein Diffeomorphismus, wenn die beiden Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ äquivalent sind. Weiters besteht $\mathcal{A}_{\max}$ aus all jenen Karten φ, die Diffeomorphismen auf ihr Bild sind, d.h. $\varphi^{-1} \circ \psi$ ist eine Diffeomorphismus offener Mengen für alle Karten $\psi \in \mathcal{A}$.

16.9 Bemerkungen

1. Die Stetigkeit von f setzt man voraus, damit die Kartendarstellung auf einer offenen Menge definiert ist.
2. Da der Kartenwechsel glatt ist, genügt es, obige Eigenschaft bei jedem x für eine Karte aus $\mathcal{A}$ und für eine aus $\mathcal{B}$ um $f(x)$ zu fordern, sie überträgt sich auf alle Karten.
3. Wenn man $\mathbb{R}$ als Mannigfaltigkeit auffaßt, lassen sich sehr leicht zwei C^∞-Strukturen angeben: $\mathcal{A}_1 := \{\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, und $\mathcal{A}_2 := \{\varphi(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Diese sind nicht verträglich, da $\varphi^{-1} \circ \mathrm{id} : x \to \sqrt[3]{x}$ nicht glatt ist (denn $\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x})$ existiert nicht bei 0). Allerdings sind die beiden Strukturen diffeomorph, also doch gewissermaßen gleich.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} & \text{hier Mannigfaltigkeiten} \\ \mathbb{R} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{R} \arrow[u, "\mathrm{id}"'] & \text{hier Vektorräume} \end{tikzcd}$$

   Die Abbildung $f = \sqrt[3]{x}$ ist ein Diffeomorphismus: f, f^{-1} sind bijektiv und klarerweise stetig. Ebenso ist f glatt, da $(\mathrm{id}^{-1} \circ f \circ \varphi)(x) = f(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$ glatt ist. Analog ist f^{-1} glatt, da $(\varphi^{-1} \circ f^{-1} \circ \mathrm{id})(x) = \varphi^{-1}(x^3) = x$ glatt ist.
4. Ab $\dim M = 4$ gilt nicht mehr allgemein, daß zwei C^∞-Atlanten einer topologischen Mannigfaltigkeit bis auf Diffeomorphismus gleich sind. Für Dimension kleiner als 4 wurde es hingegen von [**56**] gezeigt. Nach [**33**] trägt zum Beispiel die S^7 mindestens 15 nicht diffeomorphe C^∞-Strukturen; die S^{31} mehr als $16 \cdot 10^6$. Genauer gilt:

$\dim = n$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
Strukturen auf S^n	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16	...

   Für $\mathbb{R}^n$, $n \neq 4$ gibt es genau eine glatte Struktur. Für $n > 4$ wurde das von [**37**] bewiesen. Ganz überraschend konnte [Kirby1982] beweisen, daß für den $\mathbb{R}^4$ eine exotische C^∞-Struktur existiert. Von [**78**] wurde gezeigt, daß es sogar überabzählbar viele gibt.

5. Die Klasse der C^∞-Abbildungen zwischen zwei Mannigfaltigkeiten bilden eine Kategorie. Dabei versteht man unter einer Kategorie eine Klasse von Räumen (Objekten) und Abbildungen (Morphismen), sodaß zu jedem Objekt die Identität ein Morphismus und die Zusammensetzung von Morphismen wieder ein solcher ist. Es ist also für drei C^∞-Mannigfaltigkeiten M, N, P und glatte Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to P$ zu zeigen:
   a) $g \circ f : M \to P$ ist glatt.
   b) $\mathrm{id} : M \to M$ ist glatt.

16.10 Lemma (Offene Teilmannigfaltigkeit). *Sei $(M, \mathcal{A})$ eine C^∞-Mannigfaltigkeit, und U offen in M. Dann ist U in natürlicher Weise eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Ein Atlas auf U ist durch die Einschränkungen von Karten von M gegeben.*

Beweis. Klarerweise ist $(U, \mathcal{A}_U := \{\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} : \varphi \in \mathcal{A}\})$ eine topologische Mannigfaltigkeit. Bleibt zu zeigen, daß die Kartenwechsel glatt sind:

$$(\psi|_{\psi^{-1}(U)})^{-1} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)} = (\psi^{-1} \circ \varphi)|_{\varphi^{-1}(U)}$$

ist eine Einschränkung von C^∞-Funktionen und somit C^∞. □

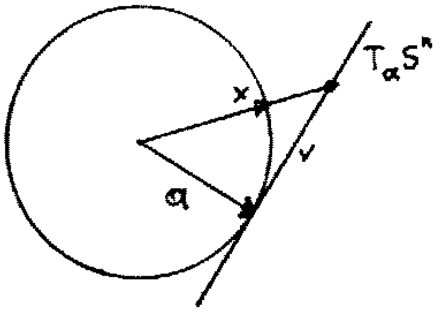
16.11 Bemerkungen

1. Es ist also sinnvoll, von C^∞-Abbildungen zu sprechen, die nur auf offenen Teilmengen einer C^∞-Mannigfaltigkeit definiert sind.
2. Die Karten φ einer C^∞-Mannigfaltigkeit sind Diffeomorphismen

$$\varphi : \mathbb{R}^m \underset{\text{off.}}{\supseteq} \operatorname{Dom}\varphi \to \operatorname{Bild}\varphi \underset{\text{off.}}{\subseteq} M.$$

16.12 Beispiele von Atlanten

1. $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$
Wir konstruieren Karten durch radial-Projektionen auf die Tangentialebenen ("Radialprojektion").



$$\alpha + v = \lambda x \quad \text{mit} \quad \langle \alpha, v\rangle = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; x \mapsto v := \langle x, \alpha\rangle^{-1} \cdot x - \alpha,\; v \mapsto x := (\alpha + v) \cdot |\alpha + v|^{-1}.$$

Eine Karte für eine Umgebung von α ist also

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha :&\mathbb{R}^n \cong \alpha^\perp \to \{x \in S^n : \langle x, \alpha\rangle > 0\} \subseteq M \\ \varphi_\alpha(v) :&= (\alpha + v) \cdot |(\alpha + v)|^{-1} \\ \varphi_\alpha^{-1}(x) &= \langle x, \alpha\rangle^{-1} \cdot x - \alpha. \end{aligned}$$

Die Menge $\{\varphi_\alpha : \alpha \in S^n\}$ bildet einen C^∞-Atlas für S^n. Allerdings überdecken auch die Bilder der Karten $\varphi_{\pm e_i}$ für $i = 1 \ldots n+1$ die S^n. Da sowohl φ_α als auch φ_α^{-1} glatt auf einer offenen Umgebung im $\mathbb{R}^{n+1}$ sind, sind klarerweise alle Kartenwechsel glatt.

2. Der Atlas der stereographischen Projektion für S^n hat als Karten ψ_α mit $\alpha \in S^n$:

$$\psi_\alpha : \begin{cases} \alpha^\perp \to S^n \setminus \{\alpha\} \\ v \mapsto \alpha + 2(v - \alpha) \cdot (|v|^2 + 1)^{-1} \end{cases}$$

mit der Umkehrabbildung

$$\psi_\alpha^{-1}(x) = (x - \langle x, \alpha\rangle \cdot \alpha) \cdot (1 - \langle x, \alpha\rangle)^{-1}.$$

Die Karte ψ_α ist für $S^n \setminus \{\alpha\}$ definiert. Für einen Kartenwechsel genügt es also, noch eine Karte für α zu finden, etwa $\psi_{-\alpha}$. Den Kartenwechsel für diese beiden Karten erhält man aus elementaren geometrischen Überlegungen: Es seien v und v^* die Bilder unter ψ_α^{-1} und $\psi_{-\alpha}^{-1}$. Die Dreiecke $(\alpha, x, -\alpha)$ und $(\alpha, 0, v)$ haben zwei gleiche Winkel, je einen rechten und jenen bei α, also sind sie ähnlich. Die Dreiecke $(0, v^*, -\alpha)$ und $(\alpha, x, -\alpha)$ sind aus entsprechenden Gründen ebenfalls ähnlich. Aus dem Strahlensatz erhält man:

$$\frac{|v|}{1} = \frac{1}{|v^*|} \Rightarrow |v| = |v^*|^{-1} \;\Rightarrow\; \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha(v) = v^* = v \cdot |v|^{-2}.$$

3. Die naheliegende Frage, wie die beiden durch (1) und (2) gegebenen Strukturen auf S^n zusammenpassen, ist so zu beantworten: Die Karten sind verträglich (d.h. erzeugen denselben maximalen Atlas), denn

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^{-1} &: x \mapsto x \cdot \langle x, \alpha\rangle^{-1} - \alpha \\ \psi_\beta &: v \mapsto \beta + 2(v - \beta) \cdot (|v|^2 + 1)^{-1} \\ \varphi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta &: v \mapsto \frac{\beta + 2(v - \beta) \cdot (|v|^2 + 1)^{-1}}{\langle \beta + 2(v - \beta) \cdot (|v|^2 + 1)^{-1}, \alpha\rangle} - \alpha \end{aligned}$$

ist eine – wenn auch komplizierte – C^∞-Funktion. Die Verträglichkeit der Karten kann auch daran erkannt werden, daß die Karten als lokale Diffeomorphismen des umgebenden Raums aufgefaßt werden können.

4. EINPUNKTKOMPAKTIFIZIERUNG des $\mathbb{R}^n$:

Wir definieren auf $\mathbb{R}^n_\infty := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ einen Atlas durch χ_0 und χ_∞, diese sind gegeben durch:

$$\chi_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_\infty$$
$$\chi_0(x) = x$$
$$\chi_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_\infty$$
$$\chi_\infty(0) = \infty \text{ und } \chi_\infty(x) = x \cdot |x|^{-2} \text{ sonst.}$$

Die Kartenwechsel $\chi_0^{-1} \circ \chi_\infty$ und $\chi_\infty^{-1} \circ \chi_0$ von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ errechnen sich als: $x \mapsto x \cdot |x|^{-2}$. Dieser Kartenwechsel ist uns schon in (2), bei der Sphäre, begegnet.

Behauptung: $\mathbb{R}^n_\infty \cong S^n$ mittels $f(\infty) = e_1$ und $f(x) = \psi_{e_1}(x)$. Es ist klar, daß f bijektiv ist; bleibt zu zeigen, daß sowohl f als auch f^{-1} glatt ist: Die zu untersuchenden Fälle sind:

1. $\psi_{e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_0 = \chi_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$
2. $\psi_{e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_\infty = \chi_0^{-1} \circ \chi_\infty$
3. $\psi_{-e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_0 = \chi_\infty^{-1} \circ \chi_0$
4. $\psi_{-e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_\infty = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$

Dies sind alles Diffeomorphismen, also ist f ein Diffeomorphismus.

5. Projektive Räume

$$P^n := \{ \text{ Geraden durch 0 im } \mathbb{R}^{n+1}\} = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/_\sim$$

wobei $x \sim y \Leftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodaß $\lambda x = y$. Als Karten wählt man etwa für $0 \le i \le n :$

$$\varphi_i : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \to P^n \\ (y^1, \dots, y^n) \mapsto \Big[(-1)^i (y^1, \dots, y^i, 1, y^{i+1}, \dots, y^n)\Big] \end{cases}$$

Das Vorzeichen ist dabei so gewählt, daß P^n so orientiert wie möglich wird, siehe (3) in (46.9). Die φ_i gehen bijektiv von $\mathbb{R}^n$ nach $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : x^{i+1} \neq 0\}/_\sim$. Der Kartenwechsel berechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} &(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)(y^1, \dots, y^n) = \\ &= \varphi_j^{-1}\Big[(-1)^i (y^1, \dots, y^i, 1, y^{i+1}, \dots, y^n)\Big] \overset{(\text{O.B.d.A. } j > i)}{=\!=\!=\!=\!=} \\ &= (y^j)^{-1}(-1)^i(-1)^j (y^1, \dots, y^i, 1, y^{i+1}, \dots, y^{j-1}, y^{j+1}, \dots, y^n). \end{aligned}$$

Das ist ein Diffeomorphismus (auf dem Definitionsbereich). Also ist P^n eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Ganz analoges Vorgehen liefert $P^n_\mathbb{C}$ (komplexe Geraden in $\mathbb{C}^{n+1}$) mit $\dim P^n_\mathbb{C} = 2n$ und $P^n_\mathbb{H}$ mit $\dim P^n_\mathbb{H} = 4n$.

In (11.9) hatten wir eine weitere Beschreibung der projektiven Räume P^n als Graßmannmannigfaltigkeit $G(1, n+1) \subseteq L(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1})$ gegeben. Dabei hatten wir Geraden durch 0 im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit den orthogonal-Projektionen auf sie identifiziert. Wir wollen nun zeigen, daß dies diffeomorphe Räume beschreibt. Sei dazu $\bar\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ gegeben durch $(y^1, \dots, y^n) \mapsto (-1)^i (y^1, \dots, y^i, 1, y^{i+1}, \dots, y^n)$. Dann ist $\varphi_i = \pi \circ \bar\varphi_i$, wobei $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to P^n := \mathbb{R}^{n+1}/\sim$ die kanonische Projektion $x \mapsto [x]$ bezeichnet.

Für $a, b \in E := \mathbb{R}^{n+1}$ sei $a \otimes b \in L(E,E)$ definiert durch $(a \otimes b)(x) := \langle a, x\rangle b$ (Für eine Erklärung dieser Notation siehe (38)). Dann ist $(a \otimes b)^t = b \otimes a$, denn

$$\langle (a \otimes b)x, y\rangle = \langle a, x\rangle \cdot \langle b, y\rangle = \langle x, (b \otimes a)y\rangle.$$

Und weiters ist

$$(a_1 \otimes b_1) \circ (a_2 \otimes b_2) = \langle a_1, b_2\rangle\; a_2 \otimes b_1.$$

Folglich ist $P := a \otimes b$ genau dann eine ortho-Projektion (d.h. $P^t = P = P^2$), wenn $a = b$ und $\langle a, b\rangle = 1$ ist. Die ortho-Projektionen P vom Rang 1 sind also genau die P der Gestalt $P = a \otimes a$ mit $|a| = 1$. Die glatte Abbildung $x \mapsto \frac{x}{|x|} \otimes \frac{x}{|x|}$ ist somit eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to G(1, n+1)$ und faktorisiert zu einer glatten Bijektion $P^n \to G(1, n+1)$. Lokal erhalten wir eine inverse Abbildung, indem wir ein einer Abbildung P nahe $a \otimes a$ den Punkt $\pi(P(a)) \in P^n$ zuordnen. Es ist nämlich $P(a) = \langle b, a\rangle b$ für $P = b \otimes b$ und somit $f(\pi(P(a))) = f(\pi(b)) = b \otimes b = P$. Also ist f der gesuchte Diffeomorphismus.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\bar\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & S^n \arrow[d, two heads] & \\
 & P^n \arrow[r, dotted, "\cong", "f"'] & G(1, n+1) \arrow[r, hook] & L(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1})
\end{tikzcd}$$

16.13 Bemerkung

Zwischen projektiven Räumen und Sphären gibt es einige Beziehungen:

(1) Die projektive Gerade $P^1 \cong S^1$.

Als Karten für die S^1 wählen wir $\psi_1 := \psi_{0,1}$ und $\psi_2 := \psi_{0,-1}$, die stereographischen Projektionen zu den Punkten $(0, 1)$ und $(0, -1)$ (vgl. Bsp. (16.12)). Für den Kartenwechsel erhalten wir:

$$(\psi_{0,1}^{-1} \circ \psi_{0,-1})(x) = (\psi_{0,-1}^{-1} \circ \psi_{0,1})(x) = x^{-1} \text{ auf } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Als Karten für P^1 ordnen wir jeder Ursprungsgeraden den Schnittpunkt mit den Geraden $y = 1$ (bzw. $x = 1$) zu:

$$\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to P^1 \setminus [(0, 1)] \\ x \mapsto [(1, x)] \end{cases} \text{ und } \varphi_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to P^1 \setminus [(1, 0)] \\ x \mapsto [(x, 1)] \end{cases}$$

Mit der Karte φ_1 erhalten wir alle Klassen bis auf $[(0, 1)]$ (das entspricht der y-Achse). Diesen Mangel behebt die Karte φ_2. Wir berechnen die Umkehrabbildungen:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1^{-1} : [(x, y)] = [(1, y \cdot x^{-1})] \mapsto y \cdot x^{-1} = \frac{y}{x} \\
&\varphi_2^{-1} : P^1 \setminus [(1, 0)] \to \mathbb{R} \text{ mit} \\
&\varphi_2^{-1} : [(x, y)] \mapsto x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y}
\end{aligned}$$

Nun zum Kartenwechsel:

$$(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(x) = \varphi_2^{-1}[(1, x)] = x^{-1}, \quad (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)(x) = \varphi_1^{-1}[(x, 1)] = x^{-1},$$

jeweils auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Sei $f: P^1 \to S^1$ gegeben durch:

$$f = \begin{cases} \psi_2\circ\varphi_1^{-1} \text{ auf } P^1\setminus[(0,1)] \\ \psi_1\circ\varphi_2^{-1} \text{ auf } P^1\setminus[(1,0)]. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da aus $\psi_2^{-1}\circ\psi_1 = \varphi_1^{-1}\circ\varphi_2$ folgt, daß $\psi_2\circ\varphi_1^{-1} = \psi_1\circ\varphi_2^{-1}$. Sie ist aber auch ein Diffeomorphismus. Dies müssen wir nur für die induzierte Funktion zeigen. Sei $x \in P^1\setminus[(0,1)]$ dann ist $f(\operatorname{Bild}\varphi_1) = \operatorname{Bild}\psi_2$, $\psi_2^{-1}\circ f\circ\varphi_1 = \psi_2^{-1}\circ\psi_2\circ\varphi_1^{-1}\circ\varphi_1 = \mathrm{id}$. Das ist aber ein Diffeomorphismus.

$$\begin{tikzcd} P^1 \arrow[r, "f"] & S^1 \\ \mathbb{R} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, equal] & \mathbb{R} \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Analog für $x \in P^1\setminus[(1,0)]$.
Einfacher sieht man $P^1 \cong S^1$ auch mittels (16.12.4):

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\chi_\infty"] & \\ P^1 \arrow[rr, dotted, "\cong"] & & \mathbb{R}_\infty \\ & \mathbb{R} \arrow[ul, "\varphi_2"] \arrow[ur, "\chi_0"'] & \end{tikzcd}$$

(2) $P^1_{\mathbb{C}} \cong S^2$: Geometrisch läßt sich das wie folgt veranschaulichen: Man parametrisiert die komplexen Ursprungsgeraden in $P^1_{\mathbb{C}}$ durch ihre eindeutigen Schnitte mit der komplexen Gerade $g := \{(z,1) : z \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{R}^2$. Nur die komplexe Gerade h parallel zu g d.h. $h = \{(z,0) : z \in \mathbb{C}\} \in P^1_{\mathbb{C}}$ bekommt kein Bild. Jene Geraden, die nahe bei h liegen, haben ihre Schnittpunkte weit draußen auf g. Also entspricht die noch fehlende Gerade h dem Punkt ∞ in der Einpunktkompaktifizierung $\mathbb{R}^2_\infty$ von $\mathbb{R}^2$. Daß diese beiden Räume isomorph sind, wissen wir aber (siehe Beispiel (16.12)).

17. Produkte und Summen von Mannigfaltigkeiten

Die einfachste Möglichkeit, aus Mannigfaltigkeiten neue zu basteln, ist die Bildung von Produkten und Summen, die wir in diesen Abschnitt behandeln.

17.1 Proposition (Produkte). *Für $i = 1,\dots,n$ sei $(M_i,\mathcal{A}_i)$ eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Dann ist $\prod_{i=1}^n M_i$ in natürlicher Weise eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Der Atlas auf $\prod M_i$ ist gegeben durch*

$$\prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i := \{\varphi_1\times\ldots\times\varphi_n : \varphi_i \in \mathcal{A}_i\}.$$

Das Produkt $\prod M_i$ hat folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder C^∞-Mannigfaltigkeit N und C^∞-Abbildungen $f_i : N \to M_i$ existiert eine eindeutige C^∞-Abbildung

$f = (f_1, \dots, f_n)$, sodaß $\mathrm{pr}_i \circ f = f_i$. Dabei bezeichnet $\mathrm{pr}_i : \prod M_i \to M_i$ die C^∞-Abbildung $(x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$. Die universelle Eigenschaft kann auch durch folgendes Diagramm ausgedrückt werden:

$$\begin{tikzcd} M_i & & \prod_i M_i \arrow[ll, "\mathrm{pr}_i"'] \\ & N \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, dotted, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Die auf $\prod_i M_i$ induzierte Topologie ist gerade die Produkttopologie.

Beweis. Offensichtlich ist durch den Atlas $\prod_i \mathcal{A}_i$ induzierte Topologie gerade die Produkttopologie, denn das Produkt von Homöomorphismen φ_i ist ebenso ein Homöomorphismus

$$\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n : \mathrm{Dom}\,\varphi_1 \times \dots \times \mathrm{Dom}\,\varphi_n \to \mathrm{Bild}\,\varphi_1 \times \dots \times \mathrm{Bild}\,\varphi_n \subseteq \prod M_i.$$

Die Kartenwechsel

$$(\psi_1 \times \dots \times \psi_n)^{-1} \circ (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n) = (\psi_1^{-1} \circ \varphi_1) \times \dots \times (\psi_n^{-1} \circ \varphi_n).$$

sind als Produkte von Diffeomorphismen $(\psi_i^{-1} \circ \varphi_i)$ selbst Diffeomorphismen, und somit ist $\prod M_i$ eine C^∞-Mannigfaltigkeit.

Wir behaupten nun $\mathrm{pr}_i : \prod M_i \to M_i$ ist glatt.

Sei $(x^1, \dots, x^n) \in \prod M_i$ und $\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n$ eine Karte um diesen Punkt. Dann ist φ_i Karte um x^i. Somit ist

$$\varphi_i^{-1} \circ \mathrm{pr}_i \circ (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n) : \mathbb{R}^{m_1 + \dots + m_n} \to \mathbb{R}^{m_i}, \quad (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$$

eine lineare Projektion, also glatt. Seien $f_i \in C^\infty(N, M_i)$, dann ist $x \mapsto f(x) = (f_1, \dots, f_n)$ die einzige Abbildung mit $\mathrm{pr}_i \circ f = f_i$. Bleibt noch zu zeigen: f ist C^∞. Sei φ eine Karte zentriert bei $x \in N$,

$$\begin{aligned}
&(\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n)^{-1} \circ f \circ \varphi(0) = \\
&= (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n)^{-1}(f_1(\varphi(0)), \dots, f_n(\varphi(0))) \\
&= (\varphi_1^{-1}(f_1(\varphi(0))), \dots, \varphi_n^{-1}(f_n(\varphi(0)))) \\
&= (\varphi_1^{-1} \circ f_1 \circ \varphi, \dots, \varphi_n^{-1} \circ f_n \circ \varphi)(0).
\end{aligned}$$

Laut Vorraussetzungen waren $\varphi_i^{-1} \circ f_i \circ \varphi$ glatt (da die f_i glatt sind), also ist f glatt. □

17.2 Beispiele von Produkten

1. Der Zylinder Z ist eine Teilmenge im $\mathbb{R}^3$, nämlich das kartesische Produkt aus der S^1 und $]-1, 1[\cong \mathbb{R}$. Die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} S^1 \times \mathbb{R} \to Z \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (x, y, t) \mapsto (x, y, \pi^{-1} \cdot 2 \arctan t) \end{cases}$$

ist ein Diffeomorphismus. Also ist der Zylinder eine C^∞-Mannigfaltigkeit.

2. Der n-dimensionale Torus im $\mathbb{R}^{2n}$ entsteht durch das n-fache kartesische Produkt der $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$:
$$S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1 = \prod_{i=1}^{n} S^1 = (S^1)^n = T^n.$$
Für $n = 2$ ergibt sich der uns schon bekannte "Fahrradschlauch" T^2 (vgl. (11.6)), allerdings als Teilmenge von $\mathbb{R}^4$ anstelle von $\mathbb{R}^3$. Ein Diffeomorphismus $f : S^1 \times S^1 \to T^2$ kann folgendermaßen beschrieben werden:
$$f : (\varphi, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi(R + r \cdot \cos\psi) \\ \sin\varphi(R + r \cdot \cos\psi) \\ r \cdot \sin\psi \end{pmatrix}$$

17.3 Proposition (Summen).
Seien $(M_i, \mathcal{A}_i)$ C^∞-Mannigfaltigkeiten. Dann ist die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_i M_i$ in natürlicher Weise eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Ein Atlas $\mathcal{A}$ auf $\bigsqcup_i M_i$ ist gegeben durch $\bigcup_i \mathcal{A}_i$ (hier ist keine Beschränkung der Indexmenge nötig).
Zusätzlich hat $\bigsqcup M_i$ folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder C^∞-Mannigfaltigkeit N und für alle C^∞-Abbildungen $f_i : M_i \to N$ existiert eine eindeutige glatte Abbildung f mit
$$f := \bigsqcup_i f_i : \bigsqcup M_i \to N, \text{ sodaß } f|_{M_i} = f_i.$$
Dies kann auch durch folgendes Diagramm ausgedrückt werden:
$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "f_i"'] & & \bigsqcup_i M_i \arrow[dl, dotted, "f"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

Beweis. Offene Mengen in $\bigsqcup M_i$ sind Vereinigungen offener Mengen in M_i. Da $\varphi \in \bigcup \mathcal{A}_i$ folgt, daß $\varphi \in \mathcal{A}_i$ für zumindest ein i, d.h. φ ist ein Homöomorphismus. Für $\varphi, \psi \in \bigcup \mathcal{A}_i$ ist entweder $\varphi^{-1} \circ \psi = \emptyset$ oder ein i existiert mit $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_i$ und somit ist $\psi^{-1} \circ \varphi$ glatt. Der Beweis der universellen Eigenschaft erübrigt sich. $\square$

18. Zerlegungen der Eins

Um aus lokalen Konstruktionen (wie sie z.B. in der Analysis behandelt werden) auch globale zu erhalten benötigen wir eine Methode, diese lokal zu verkleben. Wir brauchen dazu "Gewichts"-Funktionen, d.h. Funktionen, die nur lokal nicht verschwinden, größer oder gleich 0 sind und zusammen sich auf 1 summieren. Das sind die sogenannten Partitionen der Eins, die wir in diesen Abschnitt behandeln.

18.1 Definition (Partition der Eins)

Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M. Eine $\mathcal{U}$ unterordnete GLATTE PARTITION DER EINS ist eine Menge $\mathcal{F}$ von glatten Abbildungen $M \to \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ mit den Eigenschaften:

1. Die Familie $\{\mathrm{Trg}(f) : f \in \mathcal{F}\}$ ist lokal endlich, d.h. $\forall\, p \in U\ \exists\, U(p)$ sodaß $\{f \in \mathcal{F} : \mathrm{Trg}(f) \cap U(p) \neq 0\}$ endlich ist. Dabei ist $\mathrm{Trg}(f)$ der Abschluß von $\{x : f(x) \neq 0\}$.
2. $\forall\, f \in \mathcal{F}\ \exists\, U_f \in \mathcal{U} : \mathrm{Trg}(f) \subseteq U_f$
3. $\sum_{f\in\mathcal{F}} f = 1$

18.2 Satz (Partition der Eins). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von U. Dann gibt es eine C^∞-Partition der Eins, die $\mathcal{U}$ untergeordnet ist.*

Beweis. Zuerst wollen wir bemerken, daß es immer Funktionen mit beliebig kleinem Träger gibt. Betrachten wir zum Beispiel die glatte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} \text{ für } t > 0 \\ 0 \text{ für } t \leq 0 \end{cases}$$

Wenn wir dazu nun $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf folgende Weise definieren: $\varphi(x) := h(r^2 - |x|^2)$; dann ist φ klarerweise auch glatt und $\varphi(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Weiters gilt

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow h(r^2 - |x|^2) = 0 \Leftrightarrow r^2 - |x|^2 \leq 0 \Leftrightarrow r \leq |x|,$$

das heißt also, der Träger von φ ist gegeben durch $\mathrm{Trg}\,\varphi = \{x : |x| \leq r\}$.

Jetzt wollen wir uns dem eigentlichen Beweis des Satzes zuwenden. Wir zeigen zuerst, daß U (und in der Tat jeder separable metrische Raum) Lindelöf ist. Dabei heißt ein Raum LINDELÖF, wenn jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt.

Sei dazu $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von U. Sei weiters $W \in \mathcal{U}$ und p ein Punkt in $W \cap \mathbb{Q}^n$. Dann wissen wir: Es existiert ein $0 < r \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft, daß $U_p(r) := \{x : |x - p| < r\} \subseteq W$. Es gibt aber nur abzählbar viele Punkte und Radien mit dieser Eigenschaft. Diese Kugeln sind eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ und sie überdecken U. Zu jeder solchen Kugel wählen wir ein umfassendes $W \in \mathcal{U}$. Diese W sind eine abzählbare Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$ (d.h. U ist Lindelöf).

Sei $\mathcal{U}$ die gegebene offene Überdeckung von U. Zu jedem $x \in W \in \mathcal{U}$ wählen wir ein $r > 0 : \{y : |y - x| \leq r\} \subseteq W$. Nach obigem wissen wir, daß es ein $\varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ gibt mit

$$U_\varphi := \{y : |y - x| < r\} = \{y : \varphi(y) \neq 0\}.$$

Diese Mengen bilden eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$. Da U Lindelöf ist, können wir schließen, daß bereits abzählbar viele U_φ den Raum U überdecken. Seien nun $U_1, U_2, \ldots$ diese abzählbar vielen U_φ mit zugehörigen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Seien weiters W_n wie folgt definiert:

$$W_n := \{x \in U : \varphi_n(x) > 0 \wedge \varphi_i(x) < \frac{1}{n} \text{ für } 1 \leq i < n\}.$$

Es ist klar, daß die W_n offen sind (durch stetige Ungleichung gegeben), und Teilmengen von U_n sind.

Die W_n bilden eine Überdeckung von U, denn zu jedem $x \in U$ existiert ein minimales n_0 mit $\varphi_{n_0} > 0$. Dann ist aber $x \in W_{n_0}$.

Wir wollen jetzt beweisen, daß die W_n lokal endlich sind. Wählen wir $x \in U$ beliebig, dann existiert ein n, sodaß $x \in U_n$. Sei n_0 das kleinste n mit der Eigenschaft, daß $x \in U_{n_0}$. Nun definieren wir eine offene Umgebung um x:

$$U(x) := \left\{y : \varphi_{n_0}(y) > \tfrac{1}{2}\varphi_{n_0}(x)\right\}.$$

Falls $W_k \cap U(x) \neq \emptyset$, dann sei y im Durchschnitt dieser beiden Mengen gewählt und es folgt:

$$\varphi_i(y) < \tfrac{1}{k} \text{ für } i < k \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\varphi_{n_0}(x) < \varphi_{n_0}(y).$$

Falls k so groß ist, daß $\frac{1}{k} < \frac{\varphi_{n_0}(x)}{2}$ und k größer als n_0 ist, dann erhalten wir durch

$$\tfrac{1}{k} < \tfrac{1}{2}\varphi_{n_0}(x) < \varphi_{n_0}(y) < \tfrac{1}{k}$$

einen Widerspruch. Also existieren nur endlich viele k mit $W_k \cap U(x) \neq \emptyset$.
Wir definieren eine glatte Funktion $\psi_n : U \to \{t : 0 \leq t\}$ durch

$$\psi_n(x) := h(\varphi_n(x))h\Big(\frac{1}{n} - \varphi_1(x)\Big) \cdot \ldots \cdot h\Big(\frac{1}{n} - \varphi_{n-1}(x)\Big),$$

und rechnen wie folgt

$$\psi_n(x) \neq 0 \Leftrightarrow \Big(\varphi_n(x) > 0\Big) \wedge \Big(\tfrac{1}{n} - \varphi_1(x) > 0\Big) \wedge \ldots \wedge \Big(\tfrac{1}{n} - \varphi_{n-1}(x) > 0\Big) \Leftrightarrow x \in W_n.$$

Da $\{W_n : n\}$ lokal endlich ist, sind in der Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n$ lokal nur endlich viele Summanden ungleich 0, und somit ist $\psi := \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Diese Funktion verschwindet nirgends, da die $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Überdeckung bilden.
Nun definieren wir $f_n := \frac{\psi_n}{\psi} \in C^\infty(U, \mathbb{R})$.

$$\sum f_n = \frac{\sum \psi_n}{\psi} = \frac{\psi}{\psi} = 1$$

damit hätten wir Punkt (1) und (3) von (18.1) gezeigt.
(2) folgt nun aus: $\operatorname{Trg}(f_n) \subseteq \bar{W}_n \subseteq \bar{U}_n \subseteq U_f$ für ein $U_f \in \mathcal{U}$. □

Bemerkung

Dieser Beweis funktioniert für Lindelöf-Räume, in denen die Mengen der Gestalt $\{x : f(x) \neq 0\}$ mit $f \in C^\infty$ eine Basis der Topologie bilden.

18.3 Definition (Parakompaktheit)

Ein topologischer Raum X heißt PARAKOMPAKT, falls es für jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine lokal-endliche Verfeinerung $\mathcal{V}$ gibt. D.h. $\mathcal{V}$ ist eine offene Überdeckung von X mit den Eigenschaften:

1. Für alle $V \in \mathcal{V}$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $V \subseteq U$ ("Verfeinerung").
2. Für alle $x \in X$ gibt es ein U_x, sodaß höchstens für endlichviele $V \in \mathcal{V}$ gilt: $U_x \cap V \neq \emptyset$ (d.h. ist lokal-endlich).

Eine große Klasse von Beispielen für parakompakte Räume liefert uns das

18.4 Lemma. *Sei X ein topologischer Raum mit $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, wobei K_n kompakt ist in X und $K_n \subseteq K_{n+1}^o$. Dann gilt ist X parakompakt und Lindelöf.*

Beweis. Wir definieren zuerst $A_n := K_{n+1} \setminus K_n^o$. Diese Menge ist kompakt. Die Menge

$$\mathcal{U}_n := \Big\{U \cap (K_{n+2}^o \setminus K_{n-1}) : U \in \mathcal{U}\Big\}$$

ist eine offene Überdeckung von A_n. Sei $\mathcal{U}'_n$ eine endliche Teilüberdeckung, dann ist $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}'_n$ eine offene Überdeckung von X und eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$. Es ist zu zeigen, daß $\mathcal{V}$ lokal-endlich ist. Für $x \in X$ gibt es ein n, sodaß $x \in A_n$. Nach Konstruktion von $\mathcal{V}$ können nur Mengen aus $\mathcal{U}'_{n-1} \cup \mathcal{U}'_n \cup \mathcal{U}'_{n+1}$ mit A_n nicht leeren Durchschnitt haben. Dies sind aber nur endlich viele, damit ist X parakompakt. Aus der abzählbaren offenen Überdeckung $\mathcal{V}$ gewinnt man auch leicht eine abzählbare Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$, und somit ist X Lindelöf. □

18.5 Folgerung (Fortsetzung glatter Funktionen). *Sei M eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$ ist genau dann glatt, wenn es eine offene Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$ gibt, die M umfaßt, und eine glatte Abbildung $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$, die f fortsetzt, d.h. $\tilde{f}|_M = f$.*

Beweis. Die Richtung von rechts nach links ist trivial! Umgekehrt existiert für alle $p \in M$ eine offene Umgebung $U(p) \subset \mathbb{R}^n$ und eine glatte Fortsetzung $\tilde{f}^p : U(p) \to \mathbb{R}$. Sei $\mathcal{U} := \{U(p) : p \in M\}$ und $U := \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{W\in\mathcal{U}} W$. Dann ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $M \subseteq U$. Nach (18.2) existiert eine Partition $\mathcal{G}$ der Eins, welche $\mathcal{U}$ untergeordnet ist. Die Abbildung $\tilde{f}$ definieren wir nun folgendermaßen:

$$\tilde{f} := \sum_{g\in\mathcal{G}} g \cdot \tilde{f}^{p(g)},$$

wobei $g \cdot f_{p(g)}$ auf $U \setminus \mathrm{Trg}(g)$ durch 0 fortgesetzt zu denken ist. In dieser Summe sind die einzelnen Summanden glatt, aber nur endlich viele sind $\neq 0$. Das heißt aber gerade, daß $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ ebenfalls glatt ist. Um auch die letzte Gleichung zu zeigen, schränken wir $\tilde{f}$ auf M ein und rechnen für ein $x \in M$:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{g\in\mathcal{G}} g(x) \cdot \underbrace{f_{p(g)}(x)}_{f(x)} = \underbrace{\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} g(x)\right)}_{1} \cdot f(x) = f(x). \qquad \square$$

18.6 Folgerung (Partition der Eins für Mannigfaltigkeiten).
Jede Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine C^∞-Partition der Eins.

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M. O.B.d.A. Seien $W \in \mathcal{U}$ so klein gewählt, daß sie Bilder von Parametrisierungen sind. Man kann auch schärfer o.B.d.A. vorraussetzen, daß es für jedes $U \in \mathcal{U}$ offene Teilmengen $\tilde{U}$ des $\mathbb{R}^n$ gibt, die M lokal trivialisieren, also insbesonders $\tilde{U} \cap M = U$ erfüllen. Die Teilmannigfaltigkeit M trägt also die Spurtopologie, die sie vom $\mathbb{R}^n$ erbt. Wenn wir U_0 durch

$$U_0 := \bigcup_{U\in\mathcal{U}} \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$$

definieren, dann ist U_0 offen und M ist abgeschlossen in U_0: Sei nämlich $x \in U_0 \setminus M$, dann $\exists\ U \in \mathcal{U} : x \in \tilde{U} \setminus M$ und somit folgt $\exists\ U(x) \subseteq \tilde{U} : U(x) \cap M = \emptyset$.

Nach (18.2) existiert eine Partition $\mathcal{F}$ der Eins, welche $\tilde{\mathcal{U}} := \{\tilde{U} : U \in \mathcal{U}\}$ untergeordnet ist. Also ist $\{f|_M : f \in \mathcal{F}\}$ eine Partition der Eins, welche $\mathcal{U}$ untergeordnet ist. □

18.7 Proposition (Nullstellenmengen).
Jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Nullstellenmenge einer C^∞-Abbildung.

Vergleiche das mit dem Satz (10.4) über Nullstellenmengen regulärer Abbildungen.

Beweis. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, und sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$, dann gibt es ein glattes f_x mit $x \in \operatorname{Trg} f_x \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}^n \setminus A$ mit Mengen der Gestalt $U_x = \{y : f_x(y) > 0\}$, wobei $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Da $\mathbb{R}^n \setminus A$ Lindelöf ist, besitzt $\mathcal{U}$ eine abzählbare Teilüberdeckung. Seien $f_1,\ f_2,\ ...$ die ensprechenden Funktionen. O.B.d.A. sei

$$\left|\frac{\partial f_k^{t_1+\dots+t_n}}{\partial x_1^{t_1}\dots\partial x_n^{t_n}}\right| \leq \frac{1}{2^k} \text{ für } t_1+..+t_n \leq k.$$

Dies erreicht man durch Multiplikation von f_k mit einer genügend kleinen Zahl. Die Abbildung $f(x) := \sum_k f_k(x)$ konvergiert dann in allen partiellen Ableitungen gleichmäßig. D.h. f ist glatt und $f \geq 0$. Weiters gilt: $f(x) = 0 \Leftrightarrow f_k(x) = 0$ für alle $k \Leftrightarrow x \notin U_y$ für alle $y \in \mathbb{R}^n \setminus A \Leftrightarrow x \in A$. □

III. Tangentialraum

In diesem Kapitel werden wir den Begriff der Ableitung auf Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten übertragen. Da Ableitungen Richtungsvektoren ineinander überführen, wirken sie nicht zwischen den Mannigfaltigkeiten sondern den ebenso zu besprechenden Tangentialräumen. Als Anwendung werden wir dann erste einfache infinitesimale Eigenschaften wie Immersivität und Submersivität von Abbildungen besprechen. Unter zusätzlichen lokalen bis globalen Eigenschaften erhalten wir dann Einbettungen, Faserbündel und als Spezialfall die bereits im ersten Kapitel angerissenen Überlagerungen.

20. Tangentialraum und Derivationen

Die Ableitung $f'(x)$ einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist definiert als die lineare Approximation an $f - f(x)$ im Punkte x. Auf Mannigfaltigkeiten läßt sich das nun nicht ohne weiteres übertragen, denn um von einer linearen Abbildung $f'(x)$ sprechen zu können, muß diese zwischen Vektorräumen (und nicht zwischen Mannigfaltigkeiten wie f es macht) laufen. Wir benötigen also zuallererst eine lineare Approximation an eine Mannigfaltigkeit M im Punkt $x \in M$. Diese soll dann der Definitionsbereich bzw. Wertebereich der linearen Approximation von f bei x werden.

20.1 Satz (Beschreibung des Tangentialraums).
Sei M eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $p \in M$. Dann sind folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ident:

1. $\operatorname{Bild} \varphi'(0)$*, wobei φ eine lokale Parametrisierung von M mit $\varphi(0) = p$ ist.*
2. $\{c'(0) : c : I \to M$ *glatt*, $c(0) = p\}$.
3. $\operatorname{Ker} f'(p)$*, wobei f eine reguläre Gleichung ist, die M lokal um p beschreibt.*
4. $\operatorname{Graph} g'(\bar{p})$*, wobei M lokal um p als Graph der Funktion g beschrieben wird mit $p = (\bar{p}, g(\bar{p}))$.*

Beweis. ($1 \subseteq 2$) Sei $\varphi'(0)(v) \in \operatorname{Bild}(\varphi'(0))$, wobei $v \in \mathbb{R}^n$ ist. Wenn wir die lokal in M glatte Kurve c durch

$$c(t) := \varphi(0 + tv)$$

definieren, erhalten wir $c'(0) = \varphi'(0)(v)$.
($2 \subseteq 3$) Wir betrachten nun ein $c'(0)$ für eine Kurve $c \in C^\infty(I, M)$ mit $c(0) = p$ und eine lokal reguläre Gleichung f für M,

$$f'(\underbrace{p}_{c(0)})(c'(0)) = (\underbrace{f \circ c}_{0})'(0) = 0.$$

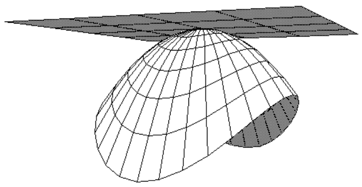
d.h. $c'(0) \in \operatorname{Ker} f'(p)$

($3 \subseteq 1$) Da wir bereits $1 \subseteq 2 \subseteq 3$ gezeigt haben, genügt zu zeigen, daß die Teilräume in (1) und (3) gleiche Dimension haben:

$$\dim \operatorname{Ker} f'(p) = n - \dim \underbrace{\operatorname{Bild} f'(p)}_{\mathbb{R}^{n-m}} = m$$
$$\dim \operatorname{Bild} \varphi'(0) = \dim \mathbb{R}^m = m.$$

($1 = 4$) Eine Parametrisierung von M ist durch $\varphi(u) = (u, g(u))$ gegeben.

$$\operatorname{Bild} \varphi'(\bar{p}) = \operatorname{Bild}(\mathrm{id}, g'(\bar{p})) = \{(v, g'\bar{p})(v) : v \in \mathbb{R}^m\} = \operatorname{Graph} g'(\bar{p}) \qquad \square$$



20.2 Definition (Tangentialraum und Tangentialabbildung)

Den in (20.1) beschriebenen Teilraum des $\mathbb{R}^n$ nennt man den Tangentialraum an M im Punkt p und bezeichnet ihn mit T_pM. Seine Elemente heißen Tangentialvektoren.

Für $f : M \to N$ definiert

$$T_pf : \begin{cases} T_pM \to T_{f(p)}N \\ c'(0) \mapsto (f \circ c)'(0) \text{für } c \in C^\infty(I, M) \text{ mit } c(0) = p \end{cases}$$

die Tangentialabbildung zu f bei $p \in M$. Diese ist linear, denn $(T_pf)(c'(0)) = (f \circ c)'(0) = (\tilde{f})'(p)(c'(0))$ also ist $T_pf = (\tilde{f})'(p)|_{T_pM}$.

Diese Definition ist sinnvoll, d.h. hängt nicht von der Wahl von c ab, sondern nur von $c'(0)$. Seien c_1 und c_2 zwei solche Kurven mit $c_1'(0) = c_2'(0)$. Zu $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to N \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert eine glatte Abbildung

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^m \overset{\text{offen}}{\supseteq} U(p) \to \mathbb{R}^n \text{ mit} \tilde{f}|_M = f.$$

Dazu rechnen wir nun:

$$(f \circ c_1)'(0) = (\tilde{f} \circ c_1)'(0) = \tilde{f}'(p)(c_1'(0)) =$$
$$= \tilde{f}'(p)(c_2'(0)) \overset{\text{analog}}{=\!=\!=} (f \circ c_2)'(0).$$

20.3 Beispiel (Quadriken).

Es sei $f : E \to \mathbb{R}$ eine quadratische (d.h. $f(tx) = t^2 f(x)$ und insbesonders $f(0) = 0$) glatte Form und $c \neq 0$. Dann ist die Quadrik $M := f^{-1}(c) = \{x \in E : f(x) = c\}$ eine Teilmannigfaltigkeit von E, denn Differenzieren der Homogenitätsgleichung liefert $f'(tx)(tv) = t^2 f'(x)(v)$, also $f'(tx)(v) = tf'(x)(v)$ und weiters $f''(tx)(tw, v) = tf''(x)(w, v)$, also $f''(x) = f''(tx) = f''(0)$ für $t \to 0$. Somit ist $f(x) = b(x, x)$, wobei $b := \frac{1}{2}f''(0)$ eine symmetrische quadratische Form ist. Die Ableitung von f ist $f'(x)(v) = b(x,v) + b(v,x) = 2b(x,v)$ und somit surjektiv bezüglich v für $x \in M$, denn $2b(x,x) = f(x) = c \neq 0$. Der Tangentialraum von M bei x ist somit $\{v \in E : b(x,v) = 0\} =: v^\perp$.

Ein erstes Beispiel ist die Sphäre als Quadrik $S^n = f^{-1}(1)$, wobei $f(x) := |x|^2$.

Die spezielle lineare Gruppe $SL(E) := \{T \in L(E) : \det(T) = 1\}$ hat als Tangentialraum bei $\mathrm{id} \in SL(E)$ den Teilraum $\{T \in L(E) : 0 = \det'(\mathrm{id})(T) = \mathrm{Spur}(T)\}$ der spurfreien linearen Abbildungen.

Die orthogonale Gruppe $O(E) := \{T \in L(E) : T^tT = \mathrm{id}\}$ hat als Tangentialraum bei id den Teilraum $\{T \in L(E) : 0 = f'(\mathrm{id})(T) = T^t + T\}$ der schiefsymmetrischen (d.h. antiselbstadjungierten) linearen Abbildungen, wobei f die quadratische Form $f(T) := T^tT$ ist.

Allgemeiner ist für eine bilineare nicht-degenerierte Form $b : E \times E \to \mathbb{R}$ der Tangentialraum der Gruppe $O_b(E) := \{T \in L(E) : b(Tx,Ty) = b(x,y) \forall\ x,y \in E\} = \{T \in L(E) : T^tBT = B\}$ (mit $b(x,y) = \langle Bx, y\rangle$) bei id gerade der Teilraum $\{T \in L(E) : T^tB + BT = 0\}$, der bezüglich B schiefsymmetrischen linearen Abbildungen.

Für die in (14.7)-(14.19) behandelten Gruppen G erhalten wir auf entsprechende Weise folgende Beschreibungen des Tangentialraums bei $\mathrm{id} \in G$, woraus wir wieder leicht die Dimension von G ablesen können.

G	$T_{\mathrm{id}}G$	dim
$GL(n)$	$L(n)$	n^2
$GL_{\mathbb{C}}(n)$	$L_{\mathbb{C}}(n)$	$2n^2$
$GL_{\mathbb{H}}(n)$	$L_{\mathbb{H}}(n)$	$4n^2$
$SL(n)$	$\{T \in L(n) : \mathrm{Spur}_{\mathbb{R}}(T) = 0\}$	$n^2 - 1$
$SL_{\mathbb{C}}(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : \mathrm{Spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\}$	$2(n^2 - 1)$
$SL_{\mathbb{H}}(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{H}}(n) : \mathrm{Spur}_{\mathbb{R}}(T) = 0\}$	$4n^2 - 1$
$O(n), SO(n)$	$\{T \in L(n) : T^t + T = 0\}$	$n(n-1)/2$
$O(n,k), SO(n,k)$	$\{T \in L(n) : T^tI_k + I_kT = 0\}$	$n(n-1)/2$
$O_{\mathbb{C}}(n), SO_{\mathbb{C}}(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^t + T = 0\}$	$n(n - 1)$
$U(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^* + T = 0\}$	n^2
$U(n,k)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^*I_k + I_kT = 0\}$	n^2
$SU(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^* + T = 0, \mathrm{Spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\}$	$n^2 - 1$
$SU(n,k)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^*I_k + I_kT = 0, \mathrm{Spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\}$	$n^2 - 1$
$Q(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{H}}(n) : T^* + T = 0\}$	$n(2n + 1)$
$Q(n,k)$	$\{T \in L_{\mathbb{H}}(n) : T^*I_k + I_kT = 0\}$	$n(2n + 1)$
$Q_-(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{H}}(n) : T^*i + iT = 0\}$	$n(2n - 1)$
$Sp(2n)$	$\{T \in L(2n) : T^tJ + JT = 0\}$	$n(2n + 1)$
$Sp_{\mathbb{C}}(2n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(2n) : T^tJ + JT = 0\}$	$2n(2n+1)$

Im Detail bedeutet das z.B. für die $O(n,k)$, daß

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in O(n,k) \subseteq L(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow A^t + A = 0, \quad B^t = C, \quad D^t + D = 0\end{aligned}$$

und für die $Sp(2n)$, daß

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2n) \subseteq L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow C^t = C, \quad -A^t = D, \quad B^t = B.\end{aligned}$$

20.4 Lemma (Kettenregel). *Für drei Mannigfaltigkeiten M, N, P und zwei glatte Abbildungen f, g mit $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ gilt die Kettenregel:*

$$T_p(g \circ f) = T_{f(p)}g \circ T_p f.$$

Für die Identität $\mathrm{id} : M \to M$ *gilt:*

$$T_p(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T_pM} : T_pM \to T_pM.$$

Sind $f, g : M \to \mathbb{R}$ glatt, so gilt die Produktregel

$$T_p(f \cdot g) = f(p) \cdot T_p g + g(p) \cdot T_p f.$$

Die Tangentialabbildung $T_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$ ist linear, für $f \in C^\infty(M, N)$.
Es ist f genau dann ein lokaler Diffeomorphismus um p, wenn T_pf ein Isomorphismus ist.

Beweis. Indem man alle auftretenden Funktionen glatt auf Umgebungen in den umgebenden Vektorräumen erweitert, folgen diese Aussagen sofort aus den klassischen. □

Leider können wir die in (20.1) gegebenen Beschreibungen des Tangentialraums nicht direkt für abstrakte Mannigfaltigkeiten verwenden, da der umgebende Vektorraum wesentlich eingeht. Wir brauchen also noch andere (abstraktere) Beschreibungen. Dazu beachten wir, daß $v \in T_pM$ durch seine Wirkung auf $C^\infty(M, \mathbb{R})$ eindeutig bestimmt st und somit geben wir folgende

20.5 Definition (Derivation)

Eine Abbildung $\partial : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ heißt Derivation über x, wenn sie linear ist und die Produktregel erfüllt, d.h. für $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\partial(f + g) = \partial f + \partial g$
2. $\partial(\alpha f) = \alpha \cdot \partial f$
3. $\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g(x) + f(x) \cdot \partial g$

Mit $\mathrm{Der}_p(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge aller Derivationen über $p \in M$. Bezüglich der punktweisen Operationen, ist dies ein Vektorraum.

20.6 Satz (Tangentialvektoren als Derivationen). *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} T_pM \times C^\infty(M,\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ (v,f) &\mapsto (T_pf)(v) \end{aligned}$$

induziert einen linearen Isomorphismus

$$\Phi : \begin{cases} T_pM \to & \mathrm{Der}_p(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \\ \quad v \mapsto & \partial_v\Big(: f \mapsto (T_pf)(v)\Big) \end{cases}$$

Für jedes glatte $f : M \to N$ entspricht der Tangentialabbildung T_xf von f via Φ folgende Zuordnung auf der Seite der Derivation:

$$\begin{tikzcd} T_xM \arrow[r, "\Phi_x"] \arrow[d, "T_xf"'] & \mathrm{Der}_x(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \arrow[d] & \ni & \partial \arrow[d] \\ T_{f(x)}N \arrow[r, "\Phi_{f(x)}"] & \mathrm{Der}_{f(x)}(C^\infty(N,\mathbb{R}),\mathbb{R}) & \ni & (g \mapsto \partial(g \circ f)) = \partial \circ f^* \end{tikzcd}$$

Beweis. Die Abbildung $T_pM \times C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(v,f) \mapsto (T_pf)(v)$ ist klarerweise bilinear, also induziert sie eine lineare Abbildung $T_pM \to L(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ durch $v \mapsto (f \mapsto (T_pf)(v))$. Diese Abbildung hat Werte im Raum der Derivationen über p, denn seien $f, g : M \to \mathbb{R}$ zwei glatte Funktionen und $v \in T_pM$ dann gilt nach der Produktregel (20.4):

$$\partial_v(f \cdot g) = T_p(f \cdot g)(v) = f(p) \cdot (T_pg)(v) + g(p) \cdot (T_pf)(v).$$

Sei $f : M \to N$ glatt und $x \in M$. Dann kommutiert obiges Diagramm, denn für $v \in T_xM$ und $g \in C^\infty(N,\mathbb{R})$ ist $(\Phi_{f(x)} \circ T_xf)(v)(g) = (T_{f(x)}g)((T_xf)(v)) = (T_x(g \circ f))(v) = \partial(g \circ f)$, da $\partial := \Phi_x(v)$ auf $h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ durch $\partial(h) = (T_xh)(v)$ wirkt.

Wir wollen nun die Surjektivität von Φ beweisen:
Sei dazu ∂ eine Derivation von $C^\infty(M,\mathbb{R})$ über $p \in M$.

Wir zeigen zuerst, daß ∂ ein lokaler Operator ist, d.h. der Wert $\partial(f)$ nur von $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ nahe p abhängt.
Seien also $f_1, f_2 \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ mit $f_1 = f_2$ nahe p vorgegeben. Sei $f := f_1 - f_2$ und sei $g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ so gewählt, daß $g(p) = 1$ und daß der Träger von g in der Menge der x mit $f(x) = 0$ enthalten ist. Dann gilt:

$$0 = \partial(0) = \partial(g \cdot f) = \underbrace{g(p)}_{1} \cdot \partial(f) + \underbrace{f(p)}_{0} \cdot \partial(g) = \partial(f).$$

Daraus ergibt sich auch, daß $\partial(f) = 0$ für alle konstanten Funktionen f, denn $\partial(1) = \partial(1 \cdot 1) = 1 \cdot \partial(1) + \partial(1) \cdot 1$, also $\partial(1) = 0$.

Wir wollen zuerst für den Spezialfall $0 = p \in M = U \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^m$ die Surjektivität von Φ beweisen. Um eine Idee für das Urbild $v \in \mathbb{R}^m$ zu bekommen, beginnen wir umgekehrt mit $v \in T_pM = \mathbb{R}^m$. Sei $(e_i)_{i=1}^m$ die Standardbasis im $\mathbb{R}^m$ ist, dann kann man v in der Basis als $v = \sum_i v^i e_i$ entwickeln. Betrachten wir nun

$$\Phi : T_pM \ni v \mapsto \partial_v \in \operatorname{Der}_p(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R})$$

$$\text{mit } \partial_v(f) := (T_pf)(v) = f'(p)(v) = \sum_{i=1}^m (\partial_i f)(p) \cdot v^i,$$

wobei $\partial_i f$ die i-te partielle Ableitung von f ist, d.h. $(\partial_i f)(p) = \frac{\partial}{\partial t}\big|_0 f(p + te^i) = f'(p)(e^i)$. Also ist die Abbildung ∂_v nichts anderes als "Richtungsableitung d_v in Richtung v zu nehmen".

Umgekehrt erhalten wir für $\partial \in \operatorname{Der}_0(C^\infty(U,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ und $f \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ folgendes:

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^1 f'(tx)(x)dt = \int_0^1 \sum_i (\partial_i f)(tx) x^i dt \\ &= \sum_{i=1}^m x^i \underbrace{\int_0^1 (\partial_i f)(tx)dt}_{=:h_i(x)} \text{ für } x \text{ nahe } 0. \end{aligned}$$

und weiters, da ∂ ein lokaler Operator ist,

$$\begin{aligned} \partial(f) &= \partial(f(0)) + \partial\left(\sum_{i=1}^m \operatorname{pr}^i \cdot h_i\right) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^m \left(\partial(\operatorname{pr}^i) \underbrace{h_i(0)}_{(\partial_i f)(0)} + \underbrace{\operatorname{pr}^i(0)}_{=0} \cdot \partial(h_i)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \partial(f) = \sum_{i=1}^m \partial\underbrace{(\operatorname{pr}^i)}_{=:v^i} \cdot (\partial_i f)(0) \\ &\Rightarrow \partial_v(f) = \partial(f) \end{aligned}$$

Damit wäre zunächst der Spezialfall bewiesen.

Sei nun allgemein $p \in M$ und sei φ eine lokale Parametrisierung von M in p. Folgendes Diagramm zeigt, daß Φ_p eine Isomorphismus ist:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, equal] & T_0U \arrow[rr, "T_0\varphi", "\cong"'] \arrow[d, "\Phi_0"', "\cong"] & & T_pM \arrow[r, hook] \arrow[d, "\Phi_p"] & \mathbb{R}^n \\ & \operatorname{Der}_0(C^\infty(U,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \arrow[r, "(\varphi^*)^*", "\cong"'] & \operatorname{Der}_p(C^\infty(\varphi(U),\mathbb{R}),\mathbb{R}) \arrow[rr, "(\mathrm{incl}^*)^*", "\cong"'] & & \operatorname{Der}_p(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

Dabei ist $T_0\varphi$ ein Isomorphismus nach (20.4); Φ_0 ist einer wegen des Spezialfalls; $(\varphi^*)^* : \partial \mapsto (f \mapsto \delta(f \circ \varphi))$ ist einer, da $\varphi : U \to \varphi(U)$ ein Diffeomorphismus ist; und schließlich ist der rechte untere ein solcher, da Derivationen lokale Operatoren sind; Also ist auch Φ_p ein Isomorphismus, und somit der Satz bewiesen. $\square$

Wir können den Satz (20.6) nun dazu verwenden um den Tangentialraum abstrakter Mannigfaltigkeiten wie folgt zu definieren:

20.7 Definition (Tangentialraum einer abstrakten Mannigfaltigkeit)

Unter dem Tangentialraum einer abstrakten Mannigfaltigkeit M bei p versteht man den Vektorraum

$$T_pM := \mathrm{Der}_p(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R}).$$

Ist $f \in C^\infty(M,N)$ und $p \in M$, dann heißt die durch

$$\partial \mapsto ((T_pf)(\partial) : g \mapsto \partial(g \circ f)) \text{ für } \partial \in T_pM \text{ und } g \in C^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$$

definierte Abbildung $T_pf = (f^*)^* : T_pM \to T_{f(p)}N$, die Tangentialabbildung von M bei p.

20.8 Basen des Tangentialraums

Wenn wir wie für Abbildungen zwischen $\mathbb{R}^m$'s die Ableitung einer Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten als Matrix (also als Jacobimatrix) schreiben wollen so benötigen wir eine Basis. Aber selbst wenn wir im umgebenden Vektorraum eine Basis gewählt haben, so bekommen wir noch lange keine ausgezeichnete Basis des Tangentialraums. Wir können aber wie folgt vorgehen. Sei dazu M eine Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und φ eine Karte von M zentriert bei p. Dann ist $T_0\varphi : T_0\mathbb{R}^m \to T_pM$ ein linearer Isomorphismus nach (20.4) falls M eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist, aber auch im allgemeinen Fall einer abstrakten Mannigfaltigkeit, da (20.4) für diese ganz leicht zu zeigen ist. Die Standardbasis $(e_i)_{i=1}^m$ des $\mathbb{R}^m$ wird durch den Isomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^m \cong \mathrm{Der}_0(C^\infty(U,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ auf die Basis der partiellen Ableitungen $(\partial_i)_{i=1}^m$ in $T_0U = T_0\mathbb{R}^m$ abgebildet. Der Isomorphismus $T_0\varphi$ bildet diese Basis weiter auf eine Basis $(\partial_i^\varphi|_p := T_0\varphi(e_i))_{i=1}^m$ in T_pM ab. Im Fall einer Teilmannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$, sind dies gerade die partiellen Ableitungen $(T_0\varphi)(e_i) = (\partial_i\varphi)(0) = \varphi'(0)(e_i)$ der Parametrisierung φ. Seien $(u^1,\dots,u^m) := \varphi^{-1}$ die zu φ gehörenden lokalen Koordinaten, dann bezeichnen wir $\partial_i^\varphi|_p \in T_pM = \mathrm{Der}_p(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ auch als $\frac{\partial}{\partial u^i}\big|_p$. Es drückt die Schreibweise ∂_i^φ zwar deutlicher aus, daß diese Derivation von der Karte φ abhängt und nicht, wie man der Bezeichnungsweise $\frac{\partial}{\partial u^i}$ fälschlicherweise entnehmen könnte, nur von der i-ten Komponente u^i der Umkehrfunktion $\varphi^{-1} = (u^1,\dots,u^m)$. Die Bezeichnung $\frac{\partial}{\partial u^i}$ ist allerdings die üblichere und macht auch keine Probleme, falls man sie nur als $\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_i$ und nicht als $\frac{\partial}{\partial(u^i)}$ interpretiert. Es gilt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_p\right)(f) = (T_0\varphi)(\partial_i|0)(f) = \partial_i(f \circ \varphi)(0).$$

Also wirkt $\frac{\partial}{\partial u^i}\big|_p$ auf f durch partielles Ableiten der Kartendarstellung $f \circ \varphi$ von f in die i-te Richtung e_i. Ist φ nicht bei p zentriert, dann ist

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_p (f) = \partial_i^\varphi|_p(f) = \partial_i(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) \text{ für } f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$$

und insbesonders ist

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_p (u^j) = \partial_i(u^j \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) = \partial_i(\mathrm{pr}^j)(0) = \delta_i^j.$$

20.9 Transformationsverhalten von Tangentialvektoren

Sei nun $g \in C^\infty(M,N)$ und seien $\varphi^{-1} = u = (u^1,\dots,u^m)$ lokale Koordinaten von M bei p, ebenso seien $\psi^{-1} = v = (v^1,\dots,v^n)$ lokale Koordinaten von N bei $g(p)$. Wir wissen, daß $T_p g : T_p M \to T_{g(p)} N$ linear ist und $(\frac{\partial}{\partial u^i}\big|_p)$ eine Basis von $T_p M$ sowie $(\frac{\partial}{\partial v^i}\big|_{f(p)})$ eine von $T_{f(p)}N$ ist. Wie sieht nun die Matrixdarstellung $[T_p g]$ von $T_p g$ bezüglich dieser Basen?
Da nach Definition von $T_p g$ und wegen (20.6) das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m \arrow[r, "(\bar g)'(0)"] \arrow[d, "\Phi"', "\cong"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\Phi"', "\cong"] \\
\mathrm{Der}_0(C^\infty(U,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \arrow[r, "T_0\bar g"] \arrow[d, "T_0\varphi"', "\cong"] & \mathrm{Der}_0(C^\infty(V,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \arrow[d, "T_0\psi"', "\cong"] \\
\mathrm{Der}_p(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \arrow[r, "T_p g"] & \mathrm{Der}_{g(p)}(C^\infty(N,\mathbb{R}),\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

werden die entsprechenden Basen wie folgt abgebildet:

$$\begin{tikzcd}
e_i \arrow[r, "(\bar g)'(0)"] \arrow[d, "\Phi"', "\cong"] & \bar g'(0)(e_i) \arrow[r, equal] & \sum_j \partial_i \bar g^j(0)\cdot e_j \arrow[d, "\Phi"', "\cong"] \\
\partial_i \arrow[r, "T_0\bar g"] \arrow[d, "T_0\varphi"', "\cong"] & (T_0\bar g)(\partial_i) \arrow[r, equal] & \sum_j \partial_i \bar g^j(0)\cdot \partial_j \arrow[d, "T_0\psi"', "\cong"] \\
\partial_i^\varphi \arrow[r, "T_p g"] & (T_p g)(\partial_i^\varphi) \arrow[r, equal] & \sum_j \partial_i \bar g^j(0)\cdot \partial_j^\psi
\end{tikzcd}$$

Für die Komponenten von Tangentialvektoren erhalten wir also folgendes: Es sei $\xi = \sum_i \xi^i \partial_i^\varphi \in T_p M$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(T_p g)(\xi) &= (T_p g)\Big(\sum_i \xi^i \cdot \partial_i^\varphi\Big) \\
&= \sum_i \xi^i \cdot (T_p g)(\partial_i^\varphi) = \sum_i \xi^i \cdot \sum_j \partial_i \bar g^j(0)\cdot \partial_j^\psi \\
&= \sum_j \Big(\sum_i \xi^i \cdot \partial_i \bar g^j(0)\Big)\cdot \partial_j^\psi
\end{aligned}$$

Die Komponenten von $\eta = \sum_j \eta^j \partial_j^\psi := (T_p g)(\xi) \in T_{g(p)}N$ sind somit durch

$$\eta^j = \sum_i \xi^i \cdot \partial_i \bar g^j(0)$$

geben, bzw. in Matrizen-Schreibweise

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \bar g^1(0) & \dots & \partial_m \bar g^1(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \bar g^n(0) & \dots & \partial_m \bar g^n(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^m \end{pmatrix},$$

also gerade durch Multiplikation mit der Jacobi-Matrix der Koordinatendarstellung $\bar{g} = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ von g.

Wählen wir insbesonders $g = \mathrm{id}_M$ und zwei Karten φ und ψ zentriert bei $p \in M$. Dann ist g der Kartenwechsel von den Koordinaten $(u^1, \dots, u^m) := \varphi^{-1}$ zu den Koordinaten $(v^1, \dots, v^m) = \psi^{-1}$. Wenn wir die Formel $(T_p g)(\partial_i^\varphi) = \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot \partial_j^\psi$ formal als Multiplikation von Matrizen auffassen, dann ist

$$\begin{pmatrix} \partial_1^\varphi \\ \vdots \\ \partial_m^\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \bar{g}^1(0) & \dots & \partial_1 \bar{g}^m(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_m \bar{g}^1(0) & \dots & \partial_m \bar{g}^m(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1^\psi \\ \vdots \\ \partial_m^\psi \end{pmatrix}$$

also erhalten wir die Basis (∂_i^φ) aus der Basis (∂_j^ψ) indem wir mit der transponierten Jacobimatrix des inversen Kartenwechsels von φ zu ψ multiplizieren.

Wenn wie nun $\frac{\partial}{\partial u^i} := \partial_i^\varphi$, $\frac{\partial}{\partial v^j} := \partial_j^\psi$ und $\frac{\partial f}{\partial u^i} := \frac{\partial}{\partial u^i} f$ setzen und beachten, daß $(\partial_i^\varphi)|_p(f) = \partial_i(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p))$ ist und somit

$$\partial_i(\bar{g}^j)(0) = \partial_i((\psi^{-1} \circ g \circ \varphi)^j)(\varphi^{-1}(p)) = \partial_i(v^j \circ g \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) = \partial_i^\varphi(v^j \circ g)(p)$$

gilt, dann besagt obige Formel, daß

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_j \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial}{\partial v^j}$$

bzw. in Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial v^m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial u^m}{\partial v^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u^1}{\partial v^m} & \dots & \frac{\partial u^m}{\partial v^m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u^m} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial v^1}{\partial u^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v^m}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial v^m}{\partial u^m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^m \end{pmatrix}.$$

20.10 Beispiel

Sei $M = \mathbb{R}^3$. Wir wählen 3 verschiedene Koordinatensysteme:

(1) Kartesischen Koordinaten x, y, z mit zugehörigen Basisvektoren: $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$.

(2) Zylinderkoordinaten r, φ, z mit zugehörigen Basisvektoren: $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial}{\partial z}$.

(3) Kugelkoordinaten R, φ, ψ mit zugehörigen Basisvektoren: $\frac{\partial}{\partial R}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial}{\partial \psi}$.

Für den Kartenwechsel und die Jacobimatrizen der Kartenwechsel erhalten wir für (2) $\to$ (1): $x = r \cdot \cos\varphi, y = r \cdot \sin\varphi, z = z$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r \cdot \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r \cdot \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

für (3) → (2): $r = R \cdot \cos\psi$, $z = R \cdot \sin\psi$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{\partial r}{\partial \varphi} & \frac{\partial r}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial R} & \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -R\cdot\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & R\cdot\cos\psi \end{pmatrix},$$

und schließlich für (1) → (3) : $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi = \arctan(y/x)$, $\psi = \arccos(z/y)$. Das Ausrechnen der Jacobimatrizen des Kartenwechsels überlassen wir dem Leser als Übung.

Es gibt auch die Möglichkeit, den Tangentialraum einer abstrakten Mannigfaltigkeit geometrischer zu beschreiben.

20.11 Lemma (Tangentialvektoren via Kurven).
Sei $C^\infty_x(\mathbb{R}, M) := \{c \in C^\infty(\mathbb{R}, M) : c(0) = x\}$ die Menge der glatten Kurven durch $x \in M$. Für eine solche glatte Kurve c und eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ sei $\partial_c(f) := (f \circ c)'(0)$. Dann definiert $c \mapsto \partial_c$ eine surjektive Abbildung

$$\partial : C^\infty_x(M, \mathbb{R}) \to \mathrm{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}).$$

Wir können also T_xM mit $C^\infty_x(M, \mathbb{R})/\sim$ identifizieren, wobei $\sim$ folgende Äquivalenzrelation auf $C^\infty_x(M, \mathbb{R})$ ist:

$$c_1 \sim c_2 \quad :\Leftrightarrow \quad (f \circ c_1)'(0) = (f \circ c_2)'(0).$$

Die Tangentialabbildung einer glatten Funktion $g : M \to N$ sieht in dieser Beschreibung so aus:

$$(T_xg)(\partial_c) = \partial_{g\circ c}.$$

Dies entspricht also der Beschreibung von T_xM für Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ in (2) von (20.1). Sie hat allerdings den Nachteil, die Vektorraumstruktur von T_pM nicht erkennen zu lassen.

Beweis. Die folgende Rechnung zeigt, daß ∂_c eine Derivation über x ist:

$$\begin{aligned} \partial_c(f+g) &= \Big((f+g)\circ c\Big)'(0) = \Big((f\circ c) + (g \circ c)\Big)'(0) \\ &= (f\circ c)'(0) + (g\circ c)'(0) = \partial_c f + \partial_c g \\ \partial_c(\lambda f) &= \Big((\lambda f)\circ c\Big)'(0) = \Big(\lambda(f\circ c)\Big)'(0) \\ &= \lambda (f\circ c)'(0) = \lambda \cdot \partial_c f \\ \partial_c(f\cdot g) &= \Big((f\cdot g)\circ c\Big)'(0) = \Big((f\circ c)\cdot(g\circ c)\Big)'(0) \\ &= (f\circ c)'(0)\cdot(g\circ c)(0) + (f\circ c)(0)\cdot(g\circ c)'(0) \\ &= (\partial_c f)\cdot g(x) + (\partial_c g)\cdot f(x) \end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß die Zuordnung $c \mapsto \partial_c$ surjektiv ist, wählen wir lokale Koordinaten $\varphi^{-1} = (u^1, \dots, u^m)$ zentriert um $x \in M$. Jedes Element von $T_xM = \mathrm{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ hat dann die Gestalt $\sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. Wir definieren nun eine (lokale) Kurve $c : \mathbb{R} \to M$ durch $c(t) := \varphi(t\xi^1, \dots, t\xi^m)$, d.h. $u^i(c(t)) := t\xi^i$ für $i = 1, \dots, m$, dann gilt für $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}(f\circ c)'(0) &= \Big((f\circ\varphi)\circ(\varphi^{-1}\circ c)\Big)'(0) = (f\circ\varphi)'(0)\Big((\varphi^{-1}\circ c)'(0)\Big)\\ &= (f\circ\varphi)'(0)(\xi^1,\dots,\xi^m) = \sum_{i=1}^m \partial_i(f\circ\varphi)(0)\xi^i\\ &= \sum_{i=1}^m \tfrac{\partial}{\partial u^i}(f)\xi^i = \sum_{i=1}^m \xi^i\tfrac{\partial}{\partial u^i}(f).\end{aligned}$$

Somit ist ∂_c das vorgegebene Element von T_xM, mit dem einzigen Schönheitsfehler, daß c nur lokal definiert ist. Da aber obige Rechnung nur vom Aussehen von c nahe 0 abhängt, können wir c so umparametrisieren, daß sich nahe 0 nichts ändert, aber $c(t)$ ganz in $\mathrm{Dom}(\varphi)$ bleibt.

Daß T_xg die angegebene Gestalt hat ergibt sich sofort aus:

$$\begin{aligned}\Big((T_xg)(\partial_c)\Big)(f) = \partial_c(f\circ g) &= \Big((f\circ g)\circ c\Big)'(0)\\ &= \Big(f\circ(g\circ c)\Big)'(0) = \partial_{g\circ c}(f). \qquad \square\end{aligned}$$

Vor allem unter Physikern ist auch folgende Beschreibung des Tangentialraums üblich:

20.12 Lemma (Tangentialvektoren via Koordinaten). *Für jede lokale Parametrisierung φ von M zentriert um x seien die Koordinaten $(\xi^i_\varphi)_{i=1}^m$ eines Vektors $\xi_\varphi \in \mathbb{R}^m$ so vorgegeben, daß sie sich richtig transformieren, d.h. für je zwei Karten φ_1 und φ_2 mit Kartenwechsel $\psi = \varphi_2^{-1}\circ\varphi_1$ gelte $\xi_{\varphi_2} = \psi'(0)\xi_{\varphi_1}$, oder in Koordinaten $\xi^i_{\varphi_2} = \sum_{j=1}^m \partial_j\psi^i(0)\xi^j_{\varphi_1}$. Dann entspricht diesem Koordinaten-Schema ein eindeutiger Tangentialvektor in T_pM und umgekehrt.*

Ist $g: M\to N$ eine glatte Funktion, so bildet T_xf solch ein Schema $\xi_\varphi\in\mathbb{R}^m$ auf das Schema $\eta_\psi\in\mathbb{R}^n$ ab, mit $\eta_\psi = (\psi^{-1}\circ f\circ\varphi)'(0)(\xi_\varphi)$.

Beweis. Sei $\xi_\varphi \in \mathbb{R}^m$ für eine lokale Parametrisierung φ vorgegeben und seien $(u^1,\dots,u^m) := \varphi^{-1}$ die zugehörigen lokalen Koordinaten. Dann definieren wir eine Derivation $\partial_\xi \in T_xM$ durch $\partial_\xi := \sum_{i=1}^m \xi^i_\varphi \frac{\partial}{\partial u^i}$. Diese Definition macht Sinn, d.h. ist unabhängig von der Wahl der Karte φ, denn die ξ_φ transformieren sich genauso wie die Koeffizienten einer Derivation bezüglich der Basen $(\frac{\partial}{\partial u^i})$.

Umgekehrt bilden die Koeffizienten ξ^i_φ einer Derivation $\partial \in T_xM$ bezüglich der zu $\varphi = (u^1,\dots,u^m)^{-1}$ gehörenden Basis $(\frac{\partial}{\partial u^i})$, genau ein richtig transformierendes Koordinaten-Schema.

Daß T_xg diese Schemata auf angegebene Weise abbildet, folgt sofort aus der Koordinatendarstellung von T_xf bezüglich der Basen $(\frac{\partial}{\partial u^i})$ und $(\frac{\partial}{\partial v^j})$ von T_xM und $T_{g(x)}N$. $\square$

21. Immersionen

Wir wollen in den verbleibenden Abschnitten dieses Kapitels die Tangentialabbildung verwenden, um spezielle Eigenschaften von glatten Abbildungen zu studieren. Insbesondere interessieren wir uns für den richtigen Begriff von “Unterobjekten” sowie “Quotientenobjekten” von Mannigfaltigkeiten.

21.1 Definition (Immersionen und Submersionen)

Es sei $f \in C^\infty(M,N)$, wo M,N Mannigfaltigkeiten sind. Dann heißt:

$$\begin{aligned} f \text{ regulär } &:\Leftrightarrow \operatorname{rang}(T_x f) \text{ ist maximal } \forall\ x \in M; \\ f \text{ immersiv } &:\Leftrightarrow T_x f \text{ ist injektiv } \forall\ x \in M; \\ f \text{ submersiv } &:\Leftrightarrow T_x f \text{ ist surjektiv } \forall\ x \in M. \end{aligned}$$

Man beachte, daß eine Abbildung genau dann immersiv ist, wenn sie regulär ist und $\dim M \le \dim N$ gilt. Ebenso ist sie genau dann submersiv, wenn sie regulär ist und $\dim M \ge \dim N$ gilt.

21.2 Rangsatz. *Es sei $f \in C^\infty(M,N)$ und sei $\operatorname{rang} T_x f = r\ \ \forall\ x \in M$.*
Dann existiert eine Karte φ um x und eine Karte ψ um $f(x)$, sodaß die lokal definierte Abbildung:

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r} \to \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$$

die Gestalt $(x,y) \mapsto (x,0)$ hat.

Beweis. O.B.d.A. sei $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$, $x = 0$ und $f(x) = 0$. Es sei $F_1 := \operatorname{Bild}(f'(0))$, $F_2 := F_1^\perp$, $E_2 := \operatorname{Ker}(f'(0))$ und $E_1 := E_0^\perp$. Es ist $r = \operatorname{rang} f'(0) = \dim(F_1)$ und somit $\dim(E_1) := m - \dim(E_2) = \dim(F_1)$ und die Komponenten-Darstellung von $f'(0) : E_1 \oplus E_2 \to F_1 \oplus F_2$ hat folgende Gestalt:

$$f'(0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mit invertierbaren $A \in L(E_1, F_1)$. Wenn wir $f = (f_1, f_2)$ schreiben, dann ist $A = \partial_1 f_1(0,0)$. Wir betrachten nun die glatte Funktion $F : E_1 \oplus E_2 \to F_1 \oplus E_2$ gegeben durch:

$$F : (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1, x_2), x_2).$$

Dann sieht die Jacobi-Matrix von F in 0 wie folgt aus:

$$F'(0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(0,0) & \partial_1 f_2(0,0) \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}$$

also ist $F'(0)$ invertierbar und wegen den inversen Funktionen Satz (10.2) ist F ein lokaler Diffeomorphismus. Sei φ der zu F inverse lokale Diffeomorphismus und sei $g := f \circ \varphi$, dann hat $g = (g_1, g_2) = f \circ F^{-1}$ folgende Gestalt:

$$g(y_1, y_2) = (y_1, g_1(y_1, y_2)).$$

Denn

$$\begin{aligned}
x = (x_1, x_2) &:= F^{-1}(y_1, y_2) \Rightarrow \\
y = (y_1, y_2) &= F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), x_2) \Rightarrow \\
&\qquad y_1 = f_1(x_1, x_2) = (f_1(F^{-1}(y_1, y_2))) = g_1(y_1, y_2).
\end{aligned}$$

Weiters gilt $\operatorname{Rang} g'(y) = \operatorname{Rang} f'(\varphi(y)) = r$, da φ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Also ist in der Komponenten-Darstellung von $g'(y)$

$$g'(y) = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ \partial_1 g_2 & \partial_2 g_2 \end{pmatrix}$$

die rechte untere Ecke $\partial_2 g_2 = 0$ und somit $g_2(y_1, y_2) = g_2(y_1, 0)$. Sei $\psi^{-1} : F_1 \oplus F_2 \to F_1 \oplus F_2$ definiert durch

$$\psi^{-1}(y_1, y_2) = (y_1, y_2 - g_2(y_1, 0)).$$

Dann ist die Komponenten-Darstellung von $(\psi^{-1})'(x)$ gegeben durch

$$(\psi^{-1})'(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ \partial_1 g_2(y_1, y_2) & \mathrm{id} \end{pmatrix}$$

und somit ψ^{-1} ein lokaler Diffeomorphismus, also wirklich das Inverse eines ψ. Weiters gilt

$$\begin{aligned}
(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)(x_1, x_2) &= \psi^{-1}(y_1, g_2(x_1, x_2)) \\
&= (x_1, g_2(x_1, x_2) - g_2(x_1, 0)) = (x_1, 0) \qquad \square
\end{aligned}$$

21.3 Folgerung (Charakterisierung von Diffeomorphismen). *Für glatte Abbildungen f gilt:*

$$f \textit{ ist Diffeomorphismus } \Leftrightarrow f \textit{ und alle } T_x f \textit{ sind bijektiv.}$$

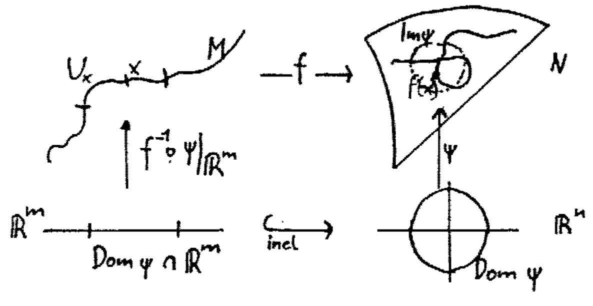
Beweis. ($\Rightarrow$) Die Abbildung f ist klarerweise bijektiv. Daß auch $T_x f$ bijektiv ist, haben wir in (20.4) bereits gezeigt.

($\Leftarrow$) Die Abbildung $g := f^{-1}$ ist wohldefiniert und stetig, da f als lokaler Diffeomorphismus offen ist. Nach dem Rangsatz existieren also Karten φ und ψ um x bzw. $f(x)$, sodaß $f(\operatorname{Im}(\varphi)) \subseteq \operatorname{Im}(\psi)$ und $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi = \mathrm{id}$. Es kann O.B.d.A. folglich $\operatorname{Dom}\psi = \operatorname{Dom}\varphi$ gewählt werden.

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Bild}\varphi \arrow[r, "f"] & \operatorname{Bild}\psi & \\
\mathbb{R}^m & \operatorname{Dom}\varphi \arrow[l, hook'] \arrow[u, "\cong"', "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \operatorname{Dom}\psi \arrow[u, "\psi"', "\cong"] \arrow[r, hook] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

Somit ist $z \mapsto f^{-1}(z) = (\varphi \circ \psi^{-1})(z)$ glatt auf $\operatorname{Bild}\psi$ und f ein Diffeomorphismus, da ψ^{-1} eingeschränkt auf $\operatorname{Bild}\varphi$ einer ist. $\square$

21.4 Proposition (Charakterisierung von Immersionen).
Sei $f \in C^\infty(M, N)$, dann ist f immersiv $\Leftrightarrow \forall\, x \in M\ \exists\, U_x$ offen in M und eine Karte ψ zentriert bei $f(x)$ in N, sodaß $f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \operatorname{Dom}\psi \cap \mathbb{R}^m \to U_x$ ein wohldefinierter Diffeomorphismus (und somit eine Karte von M) ist.



Beweis. Man bemerke zuerst, daß

$$f|_{U_x}^{-1}\circ\psi|_{\mathbb{R}^m}:\mathrm{Dom}\,\psi\cap\mathbb{R}^m\to U_x$$

genau dann eine wohldefinierte Bijektion ist, falls $f|_{U_x}$ injektiv ist und

$$\psi(\mathbb{R}^m)=\mathrm{Bild}\,\psi\cap f(U_x).$$

Es ist dann

$$(f|_{U_x}^{-1}\circ\psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}=\psi^{-1}\circ f|_{U_x}.$$

($\Leftarrow$) Zu zeigen ist, daß T_xf injektiv ist. Die Kartendarstellung von f bezüglich der Karte $f|_{U_x}^{-1}\circ\psi|_{\mathbb{R}^m}$ von M um x und der Karte ψ von N um $f(x)$ ist aber gerade die Inklusion $\mathrm{incl}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, also immersiv.

($\Rightarrow$) Der Rangsatz impliziert, daß Karten φ und ψ existieren, s.d. lokal

$$\psi^{-1}\circ f\circ\varphi=\mathrm{incl}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n.$$

Insbesonders ist $f\circ\varphi=\psi|_{\mathbb{R}^m}$. Sei $\mathrm{Dom}\,\varphi$ so klein gewählt, daß $f(\mathrm{Bild}\,\varphi)\subseteq\mathrm{Bild}\,\psi$ und sei $U_x=\varphi(\mathrm{Dom}\,\varphi)$. Dann ist $f|_{U_x}^{-1}\circ\psi|_{\mathbb{R}^m}=\varphi$ also ein wohldefinierter Diffeomorphismus.

$$\psi|_{\mathbb{R}^m}=\psi\circ\mathrm{incl}=f\circ\varphi\Rightarrow f|_{U_x}^{-1}\circ\psi|_{\mathbb{R}^m}=f|_{U_x}^{-1}\circ f\circ\varphi=\varphi.\qquad\square$$

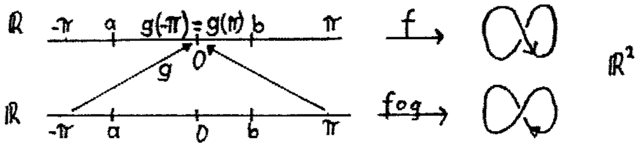
21.5 Folgerung. *Es sei $f\in C^\infty(M,N)$ eine Immersion und $g:P\to M$ eine stetige Abbildung mit $f\circ g\in C^\infty(P,N)$.*
$\Rightarrow g$ ist selbst glatt. $\square$

21.6 Bemerkungen

(1) Dabei ist die Stetigkeit von g wesentlich: Sei nämlich $g:\,]-\pi,\pi[\,\to\,]-\pi,\pi[$, definiert durch

$$g:t\mapsto\begin{cases}\pi-t & \text{für } t>0\\ 0 & \text{für } t=0\\ -\pi-t & \text{für } t<0\end{cases}$$

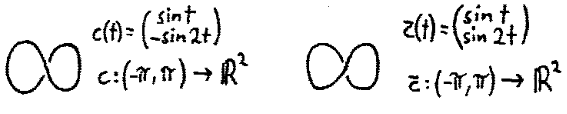
und $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}^2$ definiert durch $f(t):=(\sin t,-\sin 2t)$



Dann ist $f \circ g$ glatt, aber g ist nicht stetig, ergo auch nicht glatt.

(2) Eine Mannigfaltigkeit M, die Teilmenge einer Mannigfaltigkeit N ist, heißt IMMERSIVE TEILMANNIGFALTIGKEIT, falls die Inklusion $\mathrm{incl} : M \to N$ eine Immersion ist. Eine immersive Teilmannigfaltigkeit ist im allgemeinen keine Teilmannigfaltigkeit, wohl aber umgekehrt. (Siehe auch Einbettungen.) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ist injektive Immersion, aber $f(\mathbb{R})$ ist keine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

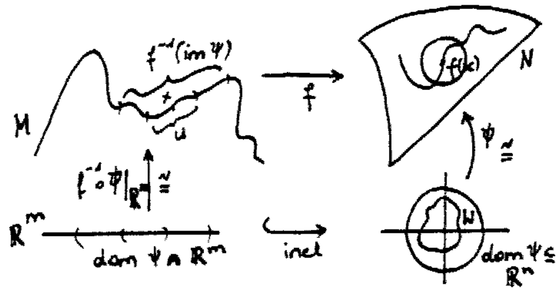
Die Mannigfaltigkeitsstruktur einer immersiven Teilmannigfaltigkeit ist im allgemeinen nicht durch die von N festgelegt. Seien $c_1, c_2 : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $c_1(t) := (\sin t, -\sin 2t)$ und $c_2(t) := (\sin t, \sin 2t)$. Dann erzeugen sie verschiedene Mannigfaltigkeitsstrukturen.



21.10 Definition (Einbettung)

Es sei $f : M \to N$ glatt, dann heißt f EINBETTUNG $:\Leftrightarrow$ f ist injektive Immersion und $f : M \to f(M)$ ist ein Homöomorphismus, dabei trage $f(M)$ die Spurtopologie von N.

21.11 Satz (Charakterisierung von Einbettungen).
Ist $f \in C^\infty(M, N)$, dann ist f Einbettung $\Leftrightarrow$ für jedes $x \in M$ gibt es eine Karte ψ von N zentriert bei $f(x)$, sodaß $f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \mathrm{Dom}\,\psi \cap \mathbb{R}^m \to f^{-1}(\mathrm{Bild}\,\psi)$ ein wohldefinierter Diffeomorphismus (und somit eine Karte) ist.



Beweis. Man bemerke zuerst, daß für ein injektives f die Zusammensetzung

$$f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \mathrm{Dom}\,\psi \cap \mathbb{R}^m \to f^{-1}(\mathrm{Bild}\,\psi)$$

genau dann eine wohldefinierte Bijektion ist, wenn $\psi(\mathbb{R}^m) = \mathrm{Bild}\,\psi \cap \mathrm{Bild}\,f$. Dann ist $(f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1} = \psi^{-1} \circ f$.

($\Leftarrow$)f muß injektiv sein. Sonst sei ψ eine Karte um $f(x_1) = f(x_2)$, mit $x_1 \neq x_2$, dann sind $x_1, x_2 \in f^{-1}(\mathrm{Bild}\,\psi)$, aber $(\psi^{-1} \circ f)(x_1) = (\psi^{-1} \circ f)(x_2)$, also ist $f^{-1} \circ \psi$ nicht wohldefiniert.

-f ist immersiv nach (21.4).

-f ist Homöomorphismus aufs Bild: Sei $U \subseteq M$ offen. Wir müssen zeigen: $f(U) \subseteq f(M)$ ist offen bezüglich der Spurtopologie von N auf $f(M)$. O.B.d.A. sei $U \subseteq$

$f^{-1}(\operatorname{Bild}\psi)$ für ein ψ mit obiger Eigenschaft. Dann ist

$$(f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^m$$

offen, also existiert ein $W \subseteq \operatorname{Dom}\psi$ offen, mit

$$W \cap \mathbb{R}^m = (f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}(U),$$

und es ist $f(U) = \psi(W) \cap \operatorname{Bild} f$, also offen in der Spurtopologie, denn

$$\begin{aligned}
&\psi : \mathbb{R}^m \cap \operatorname{Dom}\psi \to \operatorname{Bild} f \cap \operatorname{Bild}\psi \text{ ist bijektiv } \Rightarrow \\
&\Rightarrow \psi(W) \cap \operatorname{Bild} f = \psi(W \cap \mathbb{R}^m) = \psi((f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}(U)) = \\
&\quad = (\psi \circ \psi^{-1} \circ f)(U) = f(U).
\end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Sei f eine Einbettung. Da f eine Immersion ist, existiert für $x \in M$ ein $U_x \subseteq M$ offen und eine Karte ψ um $f(x)$, sodaß

$$f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \operatorname{Dom}\psi \cap \mathbb{R}^m \to U_x$$

ein wohldefinierter Diffeomorphismus ist. Da f ein Homöomorphismus auf das Bild ist, gibt es $W \subseteq \operatorname{Bild}\psi$ offen mit $W \cap \operatorname{Bild} f = f(U_x)$. O.B.d.A. sei $\operatorname{Bild}\psi = W$, dann ist $U_x = f^{-1}(\operatorname{Bild}\psi)$, denn

$$U_x = (f^{-1} \circ f)(U_x) = f^{-1}(W \cap \operatorname{Bild}\psi) = f^{-1}(\operatorname{Bild}\psi). \qquad \square$$

21.12 Definition (Teilmannigfaltigkeit)

Eine Teilmenge M einer Mannigfaltigkeit N, die die obige Eigenschaft bezüglich der Inklusion $\operatorname{incl} : M \hookrightarrow N$ besitzt, heißt (REGULÄRE) TEILMANNIGFALTIGKEIT. Diese Definition stimmt für $N = \mathbb{R}^n$ mit der in (10.1) gegebenen überein. Das Bild jeder Einbettung ist also eine reguläre Teilmannigfaltigkeit, und die Einbettung ist Diffeomorphismus aufs Bild.

21.13 Whitney'scher Einbettungssatz.

Es sei M eine zusammenhängende separable (und somit parakompakte) C^∞-Mannigfaltigkeit der Dimension m, dann existiert eine Einbettung von M in einen endlichdimensionalen Vektorraum. Jede abstrakte Mannigfaltigkeit läßt sich also als Teilmannigfaltigkeit eines $\mathbb{R}^n$ realisieren.

Für elementare Beweise siehe z.B. [**79**, S.73] mit $n > 2m$ oder [**57**, S.55] mit $n = 2m + 1$.

Beweis. Sei $\{\psi_i : 0 \leq i \leq m\}$ ein endlicher Atlas ((19.11)) und sei f_i eine zu $\{\operatorname{Bild}\psi_i\}$ gehörige Partition der Eins. Setzen $f : M \to \prod_{i=0}^m (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ durch

$$x \mapsto \big(f_i(x), f_i(x)\psi_i^{-1}(x)\big)_{i=0}^m.$$

Diese Abbildung f ist dann glatt.

f ist injektiv:

Angenommen $f(x) = f(\bar{x})$, dann gibt es ein i, sodaß $f_i(x) > 0$. Falls $\bar{x}$ derart ist, daß $f_i(\bar{x}) > 0$ so liegt $x, \bar{x} \in \operatorname{Bild}\psi_i$ und es ist $f_i(x)\psi_i^{-1}(x) = f_i(\bar{x})\psi_i^{-1}(\bar{x})$. Da $f_i(x) > 0$ ist folgt $\psi_i^{-1}(x) = \psi_i^{-1}(\bar{x})$ und schließlich $x = \bar{x}$ wegen der Bijektivität von ψ_i.

f besitzt eine lokale Linksinverse:
Sei dazu

$$\begin{aligned} V_i :&= \{(t,y) : t_i > 0, \frac{1}{t_i} y_i \in \operatorname{Dom} \psi_i\}, \\ g_i :&V_i \to M, \quad (t,y) \mapsto \psi_i(t_i^{-1} \cdot y_i) \\ U_i :&= f^{-1}(V_i) = \{x \in M : f_i(x) > 0\}. \end{aligned}$$

Dann ist $g_i \circ f = \mathrm{id}$ auf U_i, denn

$$U_i \ni x \mapsto g_i \circ f(x) = \psi_i \left(\frac{f_i(x) \psi_i^{-1}(x)}{f_i(x)} \right) = \psi_i(\psi_i^{-1}(x)) = x$$

f ist Immersion:

$$T_x(g_i \circ f) = T_x(\mathrm{id}) = T_{f(x)} g_i \circ T_x f$$

impliziert, daß $T_x f$ injektiv ist und somit f eine Immersion ist.
f ist ein Homöomorphismus aufs Bild:
Sei nämlich $(x_n) \in M$ eine Folge mit $f(x_n) \to f(x)$. Dann gilt $(g_i \circ f)(x_n) \to (g_i \circ f)(x)$ für alle i. Da ein i existiert mit $f_i(x) > 0$, ist $x \in U_i$ und ebenso fast alle x_n. Also gilt $x_n = (g^{-1} \circ f)(x_n) \to (g^{-1} \circ f)(x) = x$. □

21.14 Bemerkungen

1. Es sei M eine $m-$dimensionale Mannigfaltigkeit, dann läßt sich M in $\mathbb{R}^n$ einbetten, wobei
   (i) für $n = 2m + 1$ der Beweis relativ einfach ist, siehe [**57**, S.55];
   (ii) für $n = 2m$ stammt er von [**25**].
   Vermutung: Das minimale $n = 2m - \alpha(m) + 1$, wobei $\alpha(m)$ die Anzahl der Einser in der Dualentwicklung von m ist.
   Welches n ist nötig für Immersion?
   (i) für $n = 2m$ ist der Beweis relativ einfach, siehe [**57**, S.24]
   (ii) für $n = 2m - 1$ stammt er von [**25**] Vermutung: Das minimale $n = 2m - \alpha(m)$ um Immersionen zu erhalten. Diese Vermutung konnte schließlich bewiesen werden! Auf kompakten Mannigfaltigkeiten von [**12**] und allgemein von [**4**].
2. Der Rang-Satz liefert uns auf einfachste Weise weitere reguläre Teilmannigfaltigkeiten:
   Sei $f \in C^\infty(M, N)$. Dann gilt $\operatorname{rang}(T_x f) = r \ \ \forall \ x \in M \Rightarrow f^{-1}(y)$ ist reguläre Teilmannigfaltigkeit von M.
   Bew.: Dies ist lokale Eigenschaft, wir können also o.B.d.A. annehmen, daß $M \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann folgt aus (21.2), daß f lokal wie $(x,y) \mapsto (x,0)$ aussieht und das Urbild $f^{-1}(0)$ somit wie $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-r}$.

23. Faserbündel

Eine stärkere Eigenschaft als Submersivität werden wir jetzt kennenlernen:

23.1 Definition (Faserbündel)

Eine glatte Abbildung $p : P \to M$ heißt FASERBÜNDEL $:\Leftrightarrow$ p ist lokal trivial, d.h. $\forall\ y \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subset M$, eine C^∞-Mannigfaltigkeit F sowie ein Diffeomorphismus $\psi : U \times F \to p^{-1}(U)$, sodaß folgendes Diagramm kommutiert:

$$
\begin{tikzcd}
U \times F \arrow[rr, "\psi", "\cong"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & p^{-1}(U) \arrow[r, hook] \arrow[dl, "p"] & P \arrow[dl, "p"] \\
& U \arrow[r, hook] & M &
\end{tikzcd}
$$

dabei heißt F TYPISCHE FASER (Auf Zusammenhangskomponenten von M sind alle Fasern diffeomorph).

Ein Faserbündel p ist eine ÜBERLAGERUNG $:\Leftrightarrow$ die typische Faser F von p ist diskret. Dies ist die glatte Version von der Definition, die wir in (3.5) gegeben haben.

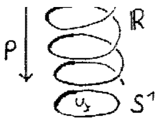
23.2 Beispiele von Faserbündeln

1. Für zwei Mannigfaltigkeiten M und N ist $\mathrm{pr}_1 : M \times F \to M$, $(x, y) \mapsto x$ ein Faserbündel mit typischer Faser F. So geartete Faserbündel heißen GLOBAL TRIVIAL (oder kurz trivial).
2. Die Projektion M"ob $\to S^1$ des Möbiusbandes auf die Mittellinie ist ein Faserbündel mit typischer Faser $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$.

3. Die Hopffaserung: $S^3 \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong S^2$ ist Faserbündel mit typischer Faser S^1, siehe (11.7).

Beispiele von Überlagerungen sind:

4 Die Abbildung $\mathbb{R} \to S^1$ gegeben durch $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ist eine abzählbarblättrige Überlagerung.



1. Folgende Abbildung $\mathbb{R} \times (-1, 1) \to$ M"ob

$$
\begin{pmatrix} \varphi \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\cos 2\varphi)(1 + t\cos\varphi) \\ (\sin 2\varphi)(1 + t\cos\varphi) \\ t \sin\varphi \end{pmatrix}
$$

ist eine abzählbarblättrige Überlagerung. Daraus erhält man eine zweiblättrige Überlagerung des Möbiusbandes durch dem Zylinder $S^1 \times (-1, 1)$ mittels

$$
(x, y, t) \mapsto \Big((x^2 - y^2)(1 + tx), 2xy(1 + tx), ty\Big).
$$

2. $S^n \to P^n$ ist eine zweiblättrige Überlagerung, siehe Aufgabe (72.53).
3. $S^3 \to SO(3)$ und $S^3 \times S^3 \to SO(4)$ sind zweiblättrige Überlagerungen, siehe Aufgabe (72.66) und (72.67).

25. Tangentialbündel

25.1 Motivation

Wir wollen gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung auf Mannigfaltigkeiten behandeln. Dazu betrachten wir zuerst den klassischen Fall:Ist eine Differentialgleichung $x'(t) = f(x(t))$ bzw. $x'(t) = f(t, x(t))$ gegeben, wobei $f : U \to \mathbb{R}^n$, $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist, so erhält man als Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ eine lokal definierte differenzierbare Kurve $x : (a, b) \to U$.

Wir wollen nun U durch eine Mannigfaltigkeit M ersetzen. Als Lösungskurve $x : (a, b) \to M$ werden wir wohl eine differenzierbare Kurve in der Mannigfaltigkeit erhalten. Deren Ableitung $x'(t)$ an der Stelle t ist ein Tangentialvektor in $T_{x(t)}M$. Die die Differentialgleichung konstituierende Funktion f muß folglich Punkte $x \in M$ auf Tangentialvektoren in diesen Punkten abbilden:

$$f : M \ni p \mapsto f(p) \in T_pM, \quad \text{d.h.} \quad f : M \to \bigsqcup_{p\in M} T_pM,$$

wobei $\bigsqcup_{p\in M} T_pM$ die disjunkte Vereinigung aller T_pM mit $p \in M$ bezeichnet.

25.2 Definition (Tangentialbündel)

Sei M eine Mannigfaltigkeit, so ist der Tangentialraum von M definiert durch:

$$TM := \bigsqcup_{p\in M} T_pM := \bigcup_{p\in M} \{p\} \times T_pM.$$

Auf TM existiert eine Abbildung $\pi_M : TM \to M$, definiert durch $\pi_M : \{p\} \times T_pM \ni (p, v) \mapsto p \in M$, die sogenannte Fusspunktabbildung. Jedes glatte $f : M \to N$ mit der Tangentialabbildung von f bei p: $T_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$ induziert eine Abbildung $Tf : TM \to TN$, die sogenannte Tangentialabbildung von f, die durch $(Tf)(p, v) := (f(p), T_pf(v))$ definiert ist. Es ist also $Tf|_{T_pM} = T_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$ linear.

Seien $f : M \to N$ und $g : N \to P$ glatt, dann nimmt die Kettenregel die sehr einfache Gestalt

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf$$

an, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}
(T(g \circ f))(x, v) &= \Big((g \circ f)(x), T_x(g \circ f)(v)\Big) \\
&= \Big(g(f(x)), T_{f(x)}g\big((T_xf)(v)\big)\Big) \\
(Tg \circ Tf)(x, v) &= Tg(Tf(x, v)) = Tg(f(x), T_xf(v)) \\
&= \Big(g(f(x)), T_{f(x)}g\big((T_xf)(v)\big)\Big)
\end{aligned}$$

Weiters gilt $T\,\mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{TM}$ und $(Tf)^{-1} = T(f^{-1})$.

25.3 Bemerkungen

Um von f schöne Eigenschaften (insbesondere Differenzierbarkeit) fordern zu können, brauchen wir eine glatte Mannigfaltigkeitsstruktur auf $TM = \bigsqcup_{x\in M} T_xM$. Betrachten wir dazu vorerst wieder Teilmannigfaltigkeiten M eines $\mathbb{R}^n$.

Sei $M = U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, dann ist $T_pM = \mathbb{R}^m$ und somit $TM = \bigcup_{p\in M}\{p\}\times\mathbb{R}^m = M\times\mathbb{R}^m$. Für eine glatte Abbildung $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Tangentialabbildung $Tf : U\times\mathbb{R}^m \to V\times\mathbb{R}^n$ gegeben durch $(Tf)(x,v) = (f(x), f'(x)(v))$.

Sei nun M eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und sei $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \to W\cap M$ eine lokale Parametrisierung. Dann ist

$$TM = \bigcup_{p\in M}\{p\}\times T_pM \subseteq M\times\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}.$$

Weiters ist $T\varphi : \mathbb{R}^{2m} \supseteq U\times\mathbb{R}^m = TU \to TM$, $(x,v)\mapsto(\varphi(x),\varphi'(x)(v))$ eine lokale Parametrisierung von TM: Sie ist klarerweise C^∞ und ist auf der offenen Teilmenge TU des $\mathbb{R}^{2m}$ definiert.

Die Jacobimatrix von $T\varphi$ bei (x,v) ist:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x) & \frac{\partial}{\partial v}\varphi(x) \\ \frac{\partial}{\partial x}\varphi'(x)(v) & \frac{\partial}{\partial v}\varphi'(x)(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ * & \varphi'(x) \end{pmatrix}.$$

Da φ regulär ist, ist $\varphi'(x)$ invertierbar und somit auch die Jacobimatrix von $T\varphi$, d.h. $T\varphi$ ist regulär.

Sei $f : M \to N$ glatt und seien $\varphi : \mathbb{R}^m \to M$ sowie $\psi : \mathbb{R}^n \to N$ lokale Parametrisierungen. Dann sind $T\varphi$ und $T\psi$ lokale Parametrisierungen von TM und TN nach (2). Die lokale Darstellung von Tf bezüglich dieser Parametrisierungen ist:

$$(T\psi)^{-1}\circ Tf\circ T\varphi = T(\psi^{-1})\circ Tf\circ T\varphi = T(\psi^{-1}\circ f\circ\varphi).$$

Da die lokale Darstellung $\psi^{-1}\circ f\circ\varphi$ von f glatt ist, gilt gleiches auch für die von Tf, also ist auch Tf glatt.

Falls nun M eine abstrakte Mannigfaltigkeit ist, dann sollten wir mittels der Karten $\varphi : \mathbb{R}^M \supseteq U \to M$ von M einen glatten Atlas $\{T\varphi : TU = U\times\mathbb{R}^M \to TM\}$ von TM definieren können. In der Tat zeigt die selbe Rechnung wie für konkrete Mannigfaltigkeiten, daß der Kartenwechsel glatt ist.

25.4 Lemma (Tangentialbündel als Faserbündel). *Für jede Mannigfaltigkeit M ist $TM \xrightarrow{\pi}$ ein Faserbündel.*

Beweis. Wir müssen lokale Trivialisierungen von $TM \xrightarrow{\pi} M$ finden. Sei dazu $\varphi : U \to M$ eine Karte von M. Dann ist $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq M$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge von M und $T\varphi : U\times\mathbb{R}^m = TU \to TM$ ist eine Karte von TM nach (25.3). Das Bild von $T\varphi$ ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Bild}(T\varphi) &= \{(x,v)\in TM : x\in\operatorname{Bild}\varphi =: V,\ v\in T_xM\}\\ &= \{(x,v)\in TM : x\in V\} = \pi_M^{-1}(V).\end{aligned}$$

Eine Trivialisierung von π über V ist nun durch folgendes Diasgramm gegeben:

$$\begin{tikzcd}
TM \arrow[d, "\pi"'] & \pi^{-1}(V) \arrow[l, hook', "\supseteq"'] \arrow[d, "\pi"] & TU \arrow[l, "T\varphi"'] \arrow[d, "\pi"] & \cong & U \times \mathbb{R}^m \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & V \times \mathbb{R}^m \arrow[l, "\varphi^{-1}\times\mathbb{R}^m"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
.M & V \arrow[l, hook', "\supseteq"'] & U \arrow[l, "\varphi"'] & \cong & U & V \arrow[l, "\varphi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

□

Bemerkung

Wir haben noch eine zusätzliche Struktur auf TM, denn die Fasern $T_xM = \pi^{-1}(x)$ sind Vektorräume und $T_0\varphi : \mathbb{R}^m = T_0\mathbb{R}^m \to T_xM$ ist linear.

25.5 Definition (Vektorbündel)

Ein Faserbündel $p : E \to M$ heißt Vektorbündel (VB), falls alle Fasern $p^{-1}(x) =: E_x$ Vektorräume sind und für jedes $x_0 \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq M$ sowie eine Trivialisierung ψ existiert,

$$\begin{tikzcd}
U \times \mathbb{R}^k \arrow[rr, "\psi", "\cong"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

die faserweise linear ist, d.h. $\psi_x := \psi(x, .) : \mathbb{R}^k \to E_x$ ist linear für jedes $x \in U$. So eine Trivialisierung heißt dann Vektorbündelkarte.

Unter einem Vektorbündel $E \to M$ kann man sich eine Familie $\{E_x : x \in M\}$ von Vektorräumen vorstellen, welche durch M in einen gewissen Sinn glatt parametrisiert ist.

25.6 Satz (Tangentialbündel als Vektorbündel).
Das Tangentialbündel $TM \to M$ jeder Mannigfaltigkeit M ist ein Vektorbündel.

Beweis. Sei $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \xrightarrow{\cong} V \subseteq M$ eine lokale Trivialisierung von M. Dann erhalten wir eine lokale Parametrisierung Ψ von TM als oberste Zeile des folgenden kommutativen Diagramms:

$$\begin{tikzcd}
V \times \mathbb{R}^m \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & U \times \mathbb{R}^m \arrow[l, "\varphi\times\mathrm{id}"', "\cong"] \arrow[r, "T\varphi", "\cong"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & TM|_V \arrow[d, "\pi"] \\
V & U \arrow[l, "\varphi"', "\cong"] \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] & V
\end{tikzcd}$$

Bleibt zu zeigen, daß $v \mapsto \Psi(x, v)$ von $\mathbb{R}^m \to \{x\} \times T_xM$ linear ist. Diese Abbildung ist aber

$$v \mapsto (\varphi^{-1}(x), v) \mapsto T\varphi(\varphi^{-1}(x), v) = (\underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(x))}_{=x}, \varphi'(\varphi^{-1}(x))(v))$$

und als Ableitung klarerweise linear. □

25.7 Bemerkungen

1. Der Vektorbündelkartenwechsel
$$\psi_V^{-1} \circ \psi_U : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \to p^{-1}(U \cap V) \to (U \cap V) \times \mathbb{R}^k,$$
$$(x, v) \mapsto \big(x, \psi_U(x) \cdot v\big) \mapsto \big(x, (\psi_V^{-1} \circ \psi_U)(x) \cdot v\big)$$
hat als wesentliche Komponente die Abbildung
$$\psi_{VU} : U \cap V \to L(k, k),$$
$$\big(x, \psi_{VU}(x) \cdot v\big) := (\psi_V^{-1} \circ \psi_U)(x, v).$$
Diese Abbildung ψ_{VU} heißt TRANSITIONSFUNKTION. Folglich hat ψ_{VU} Werte in $GL(k) \subset L(k, k)$, denn die Inverse zu $\psi_{VU}(x)$ ist $\psi_{UV}(x)$.
2. Im Falle des Tangentialbündels $TM \to M$ erhalten wir Transitionsfunktionen wie folgt:
$$\begin{aligned} \psi_i(x, v) &:= (x, {\varphi_i}'({\varphi_i}^{-1}(x))(v)) \quad \Rightarrow \\ (x, \psi_{i,j}(x)(v)) &:= ({\psi_i}^{-1} \circ \psi_j)(x, v) \\ \Rightarrow \quad &= \Big(x, \big({\varphi_i}'({\varphi_i}^{-1}(x))\big)^{-1} \left({\varphi_j}'({\varphi_j}^{-1}(x))\right)(v)\Big) \\ &= (x, ({\varphi_i}^{-1} \circ \varphi_j)'({\varphi_j}^{-1}(x))(v)) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \psi_{i,j}(x) &:= ({\varphi_i}^{-1} \circ \varphi_j)'({\varphi_j}^{-1}(x)). \end{aligned}$$
Also sind diese im Wesentlichen die Ableitung des Kartenwechsels ${\varphi_i}^{-1} \circ \varphi_j$ von M.
3. Die Transitionsfunktionen erfüllen allgemein die Kozykel-Gleichungen:
$$\psi_{U_3U_2}(x) \circ \psi_{U_2U_1}(x) = \psi_{U_3U_1}(x) \text{ für alle } x \in U_1 \cap U_2 \cap U_3$$
$$\psi_{UU}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \text{ für alle } x \in U$$
4. Nach Konstruktion ist die Abbildung $\tilde{\psi}_{UV} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ mit $\tilde{\psi}_{VU} : (x, v) \mapsto \psi_{VU}(x) \cdot v$ glatt. Und wir behaupten nun, daß dies dazu äquivalent ist, daß $\psi_{VU} : U \cap V \to GL(k) \subseteq L(k, k)$ selbst glatt ist. Um das zu beweisen, bezeichnen wir mit m die glatte (da bilineare) Multiplikation $L(k, k) \times L(k, k) \to L(k, k)$.
($\Leftarrow$) Dies gilt, weil
$$\tilde{\psi}_{VU} = m \circ (\psi_{VU} \times \mathrm{id}\,|_{\mathbb{R}^k}) : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \to L(k, k) \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$
($\Rightarrow$) Umgekehrt gilt: $\psi_{VU} : U \cap V \to L(k, k)$ ist C^∞, falls $ev_y \circ \psi_{VU}$ glatt $\forall\ \ y \in \mathbb{R}^k$ ist. Das ist der Fall, denn
$$ev_y \circ \psi_{VU}(x) = \psi_{VU}(x) \cdot y = \tilde{\psi}_{VU}(x, y)$$
$$\Rightarrow ev_y \circ \psi_{VU} = \tilde{\psi}_{VU}(., y) \text{ ist } C^\infty \quad \forall\ y.$$
5. Eine Familie von Trivialisierungen $\psi_U : U \times \mathbb{R}^k \to p^{-1}(U)$ des Faserbündels $p : V \to M$ mit der Eigenschaft, daß $\psi_{VU} : U \cap V \to GL(k)$ glatt ist, definiert eine Vektorraumstruktur auf den Fasern V_x vermöge der Abbildung ψ_V, die $\{x\} \times \mathbb{R}^k$ auf V_x isomorph abbildet. So wird $p : V \to M$ ein Vektorbündel und $\{\psi_U\}$ ein VB-Atlas.

6. Aus (16.7) wissen wir, daß sich eine Mannigfaltigkeit aus ihren Kartenwechseln zurückgewinnen läßt. Bei Transitionsfunktionen eines VB haben wir eine ähnliche Situation: Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M. Ein Kozykel von Transitionsfunktionen, d.h. eine Familie von glatten Funktionen $\psi_{VU} : U \cap V \to GL(k)$ für $U, V \in \mathcal{U}$, welche die Kozykel-Gleichungen erfüllt, definiert ein bis auf Isomorphie eindeutiges Vektorbündel.
Um das zu zeigen, definieren wir: $E_x := \{(U, w) : x \in U,\ w \in \mathbb{R}^k\}/\sim$, wobei
$$(U, w) \sim (V, w') \Leftrightarrow w' = \psi_{UV}(x) \cdot w.$$
Es ist E_x ein Vektorraum, da $\psi_U(x) : w \mapsto [(U, w)]$, ein Vektorraum-Isomorphismus ist $\mathbb{R}^k \to E_x$. Die disjunkte Vereinigung
$$E := \bigsqcup_{x \in M} E_x := \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times E_x)$$
ist ein Vektorbündel über M mit der Fußpunktabbildung $E \ni (x, v) \mapsto x \in M$. Es ist $E|_U := p^{-1}(U) = \bigsqcup_{x \in U} E_x \cong U \times \mathbb{R}^k$. Wir erhalten folgendes Diagramm:
$$\begin{tikzcd}
\big(x, \psi_U(x) \cdot v\big) \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & (x, v) \arrow[l, "\psi_U"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
x \arrow[r, equal] & x
\end{tikzcd}$$
und sehen,daß ψ_U Trivialisierung ist.
Für den Kartenwechsel gilt:
$$(\psi_V^{-1} \circ \psi_U)(x, w) = \psi_V^{-1}\big(x, \psi_U(x) \cdot w\big) = (x, w'),$$
wobei aus $[(V, w')] = [(U, w)]$ folgt, daß $(x, w) \mapsto (x, \psi_{VU}(x) \cdot w)$.

25.8 Lemma (Einschränkung eines Vektorbündels). *Sei $p : E \to M$ ein Vektorbündel und $A \subseteq M$ eine Teilmannigfaltigkeit, dann ist $E|_A := p^{-1}(A) \to A$ ein Vektorbündel.*

Beweis. Da $E \to M$ einen VB-Atlas besitzt, existieren VB-Karten ψ_U, für die gelten:
$$\begin{tikzcd}
E|_U = p^{-1}(U) \arrow[d, "p"'] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[l, "\psi_U"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
U \arrow[r, equal] & U
\end{tikzcd}$$
Eine Einschränkung auf A liefert:
$$\begin{tikzcd}
(E|_A)|_U = p^{-1}(U \cap A) \arrow[d, "p"'] & U \cap A \times \mathbb{R}^k \arrow[l, "\psi_U|_A"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
U \cap A \arrow[r, equal] & U \cap A
\end{tikzcd}$$
Wir sehen also, daß $\psi_U|_{\mathbb{R}^k \times A}$ eine Vektorbündelkarte für $E|_A$ ist. $\square$

25.9 Definition (Vektorbündelhomomorphismen)

Sind $p : V \to M$ und $q : W \to N$ Vektorbündel, so heißt eine glatte Funktion $\bar f$ Vektorbündelhomomorphismus über $f : M \to N$, falls folgendes Diagramm kommutiert und $\bar f_x : V_x \to W_{fx}$ linear ist $\forall\ x \in M$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\bar f"] \arrow[d, "p"'] & W \arrow[d, "q"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

25.10 Lemma. *Das Tangentialbündel ist durch folgende Eigenschaften bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt: Für jede abstrakte Mannigfaltigkeit M ist mit $\pi_M : TM \to M$ ein Vektorbündel über M gegeben, und für jedes glatte $f : M \to N$ ein VB-Homomorphismus $Tf : TM \to TN$ über f, sodaß gilt:*

1. $T(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}(TM),\ \ T(f \circ g) = Tf \circ Tg$ *"Kettenregel"*
2. *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus zwischen $T\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, d.h.*

$$\begin{tikzcd} T\mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, equal] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

3. *Sei $U \overset{\text{offen}}{\subseteq} M$. Dann gilt: $T(\mathrm{incl}) : TU \to TM|_U$ ist ein Isomorphismus.*

Ohne Beweis, siehe [**51**, S.122ff].

26. Teilvektorbündel

26.1 Definition (Teilvektorbündel)

Es seien $p : E \to M$, $q : F \to M$ zwei Vektorbündel, sodaß F_x Teilvektorraum von E_x ist $\forall\ x \in M$. Dann heißt $q : F \to M$ Teilvektorbündel von $p : E \to M$, falls zu E ein VB-Atlas $\{\psi_U\}$ existiert, der $F|_U$ auf $U \times \mathbb{R}^n$ abbildet, d.h. $\psi_U : U \times \mathbb{R}^k \cong E|_U = p^{-1}(U)$ und $\psi|(U \times \mathbb{R}^n) : U \times \mathbb{R}^n \cong F|_U$.

Das bedeutet, daß $\psi_U(x)$ den "konstanten" Teilraum $\mathbb{R}^n$ genau auf F_x dreht.

26.2 Proposition (Bild eines Vektorbündelmonomorphismuses).
Seien $q : F \to M$, $p : E \to M$ zwei VB, $f : F \to E$ ein VB-Monomorphismus (d.h. ein faserweise injektiver VB-Homomorphismus) über id_M, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r, "\mathrm{id}"] & M \end{tikzcd}$$

Dann gilt: $f(F)$ ist ein Teilvektorbündel von E und ist isomorph via f zu $F \to M$:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\cong", "f"'] \arrow[d, "q"'] & f(F) \arrow[d, "p|f(F)"] \\ M \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd}$$

Beweis. Da lokal beide VB trivial sind, nehmen wir o.B.d.A. an, daß $F = M \times \mathbb{R}^n$ und $E = M \times \mathbb{R}^k$ ist, sodaß

$$f : M \times \mathbb{R}^n \to M \times \mathbb{R}^k \text{ mit } f(x, v) = (x, f_x(v)).$$

Da $f_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ injektiv und linear ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß: $f_{x_0} = \mathrm{incl} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Sei pr eine Projektion $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ zu incl, dann ist $\mathrm{pr} \circ \mathrm{incl} = \mathrm{id} \in GL(n) \subseteq L(k, k)$ offen. Die Abbildung $x \mapsto \mathrm{pr} \circ f_x$ ist eine Abbildung von M nach $L(k, k)$, lokal um x_0 sind ihre Werte aber in $GL(n)$. O.B.d.A. sei M diese Umgebung von x_0. Es gilt:

$$\begin{tikzcd} M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-n} \arrow[r, "\psi"] & M \times \mathbb{R}^k = E \\ M \times \mathbb{R}^n \arrow[u, "\mathrm{incl}"] \arrow[r, "\psi|(M \times \mathbb{R}^n)"] & f(F) \arrow[u, "\mathrm{incl}"'] \\ M \times \mathbb{R}^n \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & M \times \mathbb{R}^n = F, \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

wobei $\psi : (x; v, w) \mapsto (x; f_x(v) + (0, w))$ dann eine VB-Karte mit Umkehrabbildung

$$\psi^{-1} : (x, z) \mapsto \Big(x, \Big((\mathrm{pr} \circ f_x)^{-1} \circ \mathrm{pr}\Big)(z), z - f_x\Big(\Big((\mathrm{pr} \circ f_x)^{-1} \circ \mathrm{pr}\Big)(z)\Big)\Big)$$

ist und $f(F)$ entspricht $M \times \mathbb{R}^n$. Es ist also f bezüglich dieser Karte die Inklusion $M \times \mathbb{R}^n \to M \times \mathbb{R}^n \times \{0\}^{k-n}$. □

26.3 Folgerung (Tangentialbündel einer Teilmannigfaltigkeit).
Sei $A \subseteq M$ eine reguläre Teilmannigfaltigkeit.

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "T\,\mathrm{incl}"] \arrow[d, "p_A"'] & TM|_A \arrow[d, "p_M"'] \\ A \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

Dann ist $TA \cong T\,\mathrm{incl}(TA)$ ein Teilbündel vom $TM|_A$. □

26.4 Folgerung (Tangentialbündel von Summen und Produkten).
Die folgenden Diagramme beschreiben Vektorbündel-Isomorphismen:

$$\begin{tikzcd} T(\prod M_i) \arrow[r, "T(\mathrm{pr}_i)_i"] \arrow[d, "\pi_{\prod M_i}"'] & \prod TM_i \arrow[d, "\prod \pi_{M_i}"'] \\ \prod M_i \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \prod M_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T(\bigsqcup M_i) \arrow[d, "\pi_{\bigsqcup M_i}"] & \bigsqcup TM_i \arrow[l, "\bigsqcup T\,\mathrm{incl}"'] \arrow[d, "\bigsqcup \pi_{M_i}"'] \\ \bigsqcup M_i & \bigsqcup M_i \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$ □

26.5 Lemma (Pull-back Bündel). *Sei $p : E \to M$ ein VB, $f : N \to M$ glatt. Dann existiert eine natürliche VB-Struktur auf dem* ZURÜCKGEZOGENEN VEKTORBÜNDEL *$f^*p : f^*E \to N$ mit $f^*p : E_{fx} \ni v \mapsto x$, wobei $f^*E := \bigsqcup_{x\in N} E_{fx}$ ist. Außerdem existiert ein VB-Homomorphismus $p^*f : f^*E \to E$ mit $p^*f : E_{fx} \ni v \mapsto v \in E$.*

Diese Zuordnung hat folgende universelle Eigenschaft: Für jedes andere VB $q : F \to N$ und VB-Homomorphismus $\bar f : F \to E$ über f existiert ein eindeutiger VB-Homomorphismus $f^+ : F \to f^*E$ über id_N, der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[drr, bend left, "\bar f"] \arrow[dr, dotted, "f^+"] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\
& f^*E \arrow[r, "p^*f"'] \arrow[d, "f^*p"] & E \arrow[d, "p"] \\
& N \arrow[r, "f"'] & M
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wir können f^*E folgendermaßen als Teilmenge von $N \times E$ aufgefassen:

$$f^*E \cong N \times_M E := \{(x, v) : f(x) = p(v)\} \subseteq N \times E.$$

Da $p : E \to M$ Submersion ist, folgt aus (21.23) (f und p sind transversal zueinander), daß $N \times_M E$ eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von $N \times E$ ist und $f^*(p) = \mathrm{pr}_1 | N \times_M E$, sowie $p^*f := \mathrm{pr}_2 | N \times_M E$ glatt sind. Die Regularität von $N \times_M E$ bewirkt dann die gewünschte universelle Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[drr, bend left] \arrow[dr, dotted, "!"'] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& N \times_M E \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & E \arrow[d, "p"'] \\
& N \arrow[r, "f"'] & M
\end{tikzcd}$$

Der gesuchte, eindeutig bestimmte VB-Homomorphismus f^+ ist also im Wesentlichen durch $f^+ = (q, \bar f)$ gegeben.

Noch zu zeigen ist, daß: $N \times_M E \to N$ ein VB ist und p^*f sowie f^+ VB-Homomorphismen für jeden VB-Homomorphismus $\bar f$ sind. Dazu brauchen wir die lokale Trivialität von $N \times_M E \to N$, die aber aus jener von $E \to M$ folgt, da Einschränken mit Zurückziehen vertauscht.

Für $U \subseteq M$ gilt:

$$\begin{aligned}
(f|_{f^{-1}(U)})^*(E|_U) &= \Big\{(x, v) : x \in f^{-1}(U),\ v \in E|_U,\ p(v) = f(x)\Big\} \\
&= \Big\{(x, v) : x \in f^{-1}(U),\ v \in E,\ p(v) = f(x)\Big\} \\
&= f^*E|_{f^{-1}(U)} \text{ weil } p(E|_U) \supseteq f(f^{-1}(U)),
\end{aligned}$$

und weil das Pull-back eines trivial Bündels trivial ist, also für trivialisierende Umgebungen U folgendes gilt:

$$f^*|_{f^{-1}(U)} \cong (f|_{f^{-1}(U)})^*(U \times \mathbb{R}^n) = f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^n$$

Das Zurückziehen von VB-Isomorphismen liefert VB-Isomorphismen. Da $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$ ist, folgt, daß $(f^*E)|f^{-1}(U) \cong f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^k$ ist. Die VB-Operationen ergeben sich aus der universellen Eigenschaft, ebenso auch die Faserlinearität von f^+ und p^*f. □

26.6 Lemma (Einschränkung als Pull-back). *Ist $p : E \to M$ ein Vektorbündel und A eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von M, dann gilt $E|_A \cong \mathrm{incl}^* E$.*

Beweis. Klarerweise hat $p|_{p^{-1}(A)} : E|_A = p^{-1}(A) \to A$ die universelle Eigenschaft von Lemma (26.5), da $p^{-1}(A)$ reguläre Teilmannigfaltigkeit von E ist (p ist Submersion). Somit ist $E|_A$ zu $\mathrm{incl}^*(E)$ isomorph. □

26.7 Lemma (Exakte Vektorbündelsequenzen splitten).
Sei $E_0 \xrightarrow{i} E_1 \xrightarrow{p} E_2$ eine kurze exakte Sequenz von VB über M. (d.h. i und p sind VB-Homomorphismen über id_M, i faserweise injektiv, p faserweise surjektiv und faserweise gelte: $\mathrm{Bild}(i_x) = \mathrm{Ker}(p_x)$). Dann gilt: $E_1 \cong E_0 \oplus E_2$.

Beweis. Konstruiere lokal einen Isomorphismus $\tilde\psi$ zwischen E^1 und $E^0 \oplus E^2$. Lokal ist $E^0|_U \cong U \times \mathbb{R}^n$ und $E^1|_U \cong U \times \mathbb{R}^m$, wie auch $E^2|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$ für geeignete n, m, $k \in \mathbb{N}$. (Wir können also ein inneres Produkt auf den Fasern von E^1 verwenden.) Da $i_x : E^0_x \to \mathrm{Bild}(i_x)$ ein Isomorphismus ist, ist $i_x^{-1}|_{\mathrm{Bild}\, i_x} : \mathrm{Bild}(i_x) \to E^0_x$ wohldefiniert und $E^1_x \cong \mathrm{Bild}(i_x) \oplus \mathrm{Bild}(i_x)^\perp$ ist ein Isomorphismus bezüglich eines inneren Produkts. Es ist $p_x : \mathrm{Bild}(i_x) \to E^2_x$, da p_x surjektiv und $\mathrm{Bild}(i_x) = \mathrm{Ker}(p_x)$ ist. Wir definieren: $\tilde\psi_x := i_x^{-1}|_{\mathrm{Bild}(i_x)} \oplus p_x$ mit $\mathrm{Bild}(i_x) \oplus \mathrm{Bild}(i_x)^\perp \to E^0_x \oplus E^2_x$, dadurch ist $\tilde\psi$ lokal ("über U") auf jeder Faser definiert. Sei nun $\{U\}$ eine Überdeckung von M mit trivialisierenden, offenen Mengen und $\{f_U\}$ eine zugehörige Partition der Eins. Ein globaler Isomorphismus von E^1 nach $E^0 \oplus E^2$ wird dann durch $\psi := \sum f_U \tilde\psi_U$ definiert. □

27. Vektorfelder

27.1 Definition (Schnitte von Bündeln)

Unter einem Schnitt σ eines Vektorbündels (oder Faserbündels) $E \xrightarrow{p} M$ versteht man eine Abbildung $\sigma : M \to E$, welche $p \circ \sigma = \mathrm{id}_M$ erfüllt. Die Schnitte des Tangentialbündels $TM \to M$ heißen Vektorfelder (VF) auf der Mannigfaltigkeit M.

Den Raum der glatten Schnitte $\{\sigma \in C^\infty(M, E) : p \circ \sigma = \mathrm{id}\}$ bezeichnet man mit $\Gamma(E \xrightarrow{p})$ oder kurz mit $\Gamma(E)$, wenn die Fußpunktabbildung klar ist.

Die Menge aller glatten Vektorfelder auf M bezeichnen wir auch mit $\mathfrak{X}(M) := \Gamma(TM \xrightarrow{\pi})$.

Schnitte können addiert und mit reellwertigen Funktionen f auf M punktweise multipliziert werden. Somit ist $\Gamma(E \xrightarrow{p} M)$ ein Vektorraum und sogar ein Modul über

$C^\infty(M,\mathbb{R})$, also ein "Vektorraum" über dem Ring $C^\infty(M,\mathbb{R})$ (anstatt über einem Körper), d.h. es gilt:

$$(f+g)\xi = f\xi + g\xi, \quad f(\xi+\eta) = f\xi + f\eta, \tag{8}$$

$$(f\cdot g)\xi = f(g\cdot\xi), \qquad 1\cdot\xi = \xi \tag{9}$$

Wir wollen mit Vektorfeldern oder allgemeiner mit Schnitten von Vektorbündeln konkret rechnen. Dazu benötigen wir lokale Darstellungen.

27.2 Lokale Beschreibung von Schnitten

Lokal ist ein Schnitt s durch eine Abbildung $\bar{s}$ der Basis M in die typische Faser $\mathbb{R}^k$ gegeben.

$$s(x) \longleftarrow \psi_U^{-1}(s(x)) = (x, \bar{s}(x))$$

$$\begin{tikzcd}
E|_U \arrow[dr, "p"'] & & U\times\mathbb{R}^k \arrow[ll, "\psi_U"'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Speziell für das Tangentialbündel erhalten wir: Dem Vektorfeld ξ entsprechen lokal Abbildungen $(\xi^i_\varphi)_{i=1}^m : M \to \mathbb{R}^m$, deren Gestalt von der Wahl der Karte φ abhängt:

$$\begin{tikzcd}
TM|\,\mathrm{Bild}\,\varphi & & \mathrm{Bild}\,\varphi\times\mathbb{R}^m \arrow[ll, "T\varphi\circ(\varphi^{-1}\times\mathbb{R}^m)"', "\cong"] \\
& \mathrm{Bild}(\varphi) \arrow[ul, "\xi|_{\mathrm{Bild}\,\varphi}"] \arrow[ur, "(\mathrm{id},(\xi^i_\varphi)_{i=1}^m)"'] &
\end{tikzcd}$$

Wir haben in (20.8) gesehen, daß falls $(u^1,\dots,u^m) = \varphi^{-1}$ lokale Koordinaten auf M sind, so ist $\big(\partial^\varphi_1|_p = \frac{\partial}{\partial u^1}|_p,\dots,\partial^\varphi_m|_p = \frac{\partial}{\partial u^m}|_p\big)$ eine Basis von T_pM für alle p im Definitionsbereich U der Karte φ und der Isomorphismus $T\varphi\circ(\varphi^{-1}\times\mathbb{R}^m)$ bildet die Standardbasis (x,e_i) auf $\frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_x$ ab. Jedes Vektorfeld ξ läßt sich also auf U als $\xi = \sum_{i=1}^m \xi^i_\varphi \partial^\varphi_i$ schreiben, wobei ∂^φ_i die Vektorfelder $p\mapsto \partial^\varphi_i|_p = \frac{\partial}{\partial u^i}|_p$ sind. Der Index φ der Komponenten ξ^i_φ von ξ bezüglich der Basis ∂^φ_i deutet die Abhängigkeit dieser Komponenten von der Basis an, die ja wiederum von φ abhängt. Zumeist werden wir diesen Index aber, wie allgemein üblich, weglassen. Wir können die Komponenten ξ^i berechnen, indem wir $\xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ auf die lokale Koordinatenfunktion u^j anwenden: $\xi(u^j) = \Big(\sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}\Big)(u^j) = \sum_i \xi^i\,\delta^j_i = \xi_j$. Also ist $\xi = \sum_i \xi(u^i)\frac{\partial}{\partial u^i}$.

27.3 Folgerung. *Ein Vektorfeld ξ ist genau dann glatt, wenn alle Komponenten ξ^i_φ glatt sind.*

Beweis. Dies folgt sofort daraus, daß die lokalen Schnitte $\frac{\partial}{\partial u^i}$ glatt sind, was wiederum aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
TM|U \arrow[d, "\pi|_U"'] & V \times \mathbb{R}^m \arrow[l, "T\varphi"'] \arrow[r, "\varphi\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & U \times \mathbb{R}^m \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] \\
U & V \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "\varphi"] & U
\end{tikzcd}$$

folgt, denn den Schnitt $\frac{\partial}{\partial u^i}$ ganz links entspricht rechts der konstante Schnitt $x \mapsto (x, e^i)$. ☐

27.4 Beispiele von Schnitten

1. Das Tangentialbündel von $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ als Teilbündel von $T\mathbb{R}^{n+1}|_{S^n} = S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ ist $TS^n = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, v\rangle = 0\}$. Insbesonders ist $TS^1 = \{(x, y, u, v) : x^2 + y^2 = 1,\ xu + yv = 0\}$, also $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ mittels $(x, y, t) \mapsto$ $(x, y$,-ty, tx). Somit ist das Tangentialbündel der S^1 trivial, und zwar ist es der Zylinder.
2. Die Projektion: Möbiusband $\to S^1$ ist auch ein VB, dessen Faser $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$ ist.
   Dieses VB ist jedoch nicht trivial, denn andernfalls hätte man eine globale Trivialisierung ψ:

   $$\begin{tikzcd}
   S^1 \times \mathbb{R} \arrow[r, "\psi", "\cong"'] \arrow[d] & \text{M"ob}. \arrow[d] \\
   S^1 \arrow[r, equal] & S^1
   \end{tikzcd}
   \qquad
   \begin{tikzcd}
   S^1 \arrow[r, "\psi(.,1)"] \arrow[d] & \text{M"ob}. \arrow[d] \\
   S^1 \arrow[r, equal] & S^1
   \end{tikzcd}$$

   mit $\psi(S^1, 1) \cap S^1 = \emptyset$. So eine Abbildung gibt es aber nicht.
3. Auch TS^2 ist ein Vektorbündel. Um die Frage, ob es auch trivial ist, beantworten zu können, nehmen wir an, es gäbe eine Trivialisierung $\psi : S^2 \times \mathbb{R}^2 \to TS^2$. Mit $\psi(., e_1)$ hätte man eine stetige Abbildung, die jedem $x \in S^2$ einen nichtverschwindenden Tangentialvektor zuordnet, so eine Abbildung existiert aber nicht (Igelsatz (50.11)).
4. Da die S^3 eine glatte Gruppenstruktur trägt, ist $TS^3 \cong S^3 \times \mathbb{R}^3$ wieder ein triviales Vektorbündel.

27.5 Definition (Linear unabhängige Vektorfelder)

Eine Familie von Vektorfeldern $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ auf M heißt überall linear unabhängig, falls $\{\xi_i|_p : 1 \le i \le k\}$ linear unabhängig in T_pM ist für alle $p \in M$.

27.6 Bemerkung (Parallelisierbare Mannigfaltigkeiten)

Eine Mannigfaltigkeit M hat ein triviales Tangentialbündel genau dann, wenn sie $m = \dim M$ überall linear unabhängige Vektorfelder besitzt. Sie heißt dann PARALLELISIERBAR. Ist TM trivial, d.h.

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[d, "\pi_M"'] & M \times \mathbb{R}^m \arrow[l, "\cong"', "\psi"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ M \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd}$$

dann sind die $\xi_i : x \mapsto \psi(x, e_i)$ für $1 \le i \le m$ linear unabhängiges Vektorfelder. Umgekehrt definiert $\psi(x, (v^i)_{i=1}^m) := \sum_i v^i \xi_i(x)$ eine Trivialisierung von TM, falls $\{\xi_i\}_{i=1}^m$ linear unabhängig ist. So besitzt S^1 ein linear unabhängig Vektorfeld, da ihr Tangentialbündel trivial ist.

Der folgende Satz gibt Auskunft darüber, wieviele linear unabhängige Vektorfelder auf den höherdimensionalen Sphären existieren ("wie trivial also das Tangentialbündel ist").

27.7 Satz (Linear unabhängige Vektorfelder auf den Sphären).
Auf der S^n können genau m Vektorfelder linear unabhängig gewählt werden, wobei $n + 1 = 2^{4a+b} \cdot c$ mit $a \in \mathbb{N}_0$, $b \in \{0, 1, 2, 3\}$, ungeraden c und $m + 1 = 8 \cdot a + b$

Ohne Beweis, siehe [**30**] und [EckmannJamesAdams]

Die Anzahl der linear unabhängigen Vektorfelder auf den Sphären hängt mit der Struktur gewisser Algebren zusammen:

27.8 Proposition. *Es sei $b : \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine bilineare Funktion, sodaß*

1. *Aus $b(v, x) = 0$ folgt $v = 0$ oder $x = 0$ (Nullteilerfreiheit),*
2. *$\exists\ v_0 \in \mathbb{R}^{k+1}$, sodaß $b(v_0, x) = x\ \forall\ x \in \mathbb{R}^{n+1}$ (Linkseinheit),*

dann existieren k linear unabhängige Vektorfelder auf der S^n.

Beweis. Sei $v \in \mathbb{R}^{k+1}$, dann ist die Abbildung $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x \mapsto b(v, x)$ linear. Mit den Abbildungen $\rho : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{o\} \to S^n$ (Radialprojektion) und $\mathrm{incl} : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ (kanonische Inklusion), kann ein glattes Vektorfeld $\xi_v : S^n \to TS^n$ wie folgt definiert werden: $\xi_v = T\rho \circ b(v, .) \circ \mathrm{incl}$. Sind $\{v_0, v_1, \dots v_k\}$ linear unabhängig im $\mathbb{R}^{k+1}$, dann sind $\{\xi_{v_1}, \dots \xi_{v_k}\}$ linear unabhängig: Sei

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \xi_{v_i}|_x = 0 \ \Rightarrow\ 0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i T_x\rho(b(v_i, x)) = T_x\rho\Big(\sum_{i=1}^k \lambda_i b(v_i, x)\Big)$$

Der Kern von $T_x\rho$ ist der von x erzeugte Teilraum im $\mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b(v_i, x) = -\lambda_0 x = -\lambda_0 b(v_0, x) \text{ für ein } \lambda_0 \in \mathbb{R} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b\Big(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i, x\Big) = 0; \text{ da } x \neq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i = 0 \;\Rightarrow \lambda_i = 0 \;\forall\; i$$

(weil die v_i linear unabhängig sind). □

27.9 Folgerungen.

1. *Die Sphären S^1, S^3 und S^7 sind parallelisierbar:*
   Als bilineare Funktionen $b : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, welche die Eigenschaften (i), (ii) von (27.8) erfüllen, können folgende $\mathbb{R}$-Algebra-Multiplikationen verwendet werden:
   $$\begin{array}{lll} n=1 & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \\ n=3 & \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 & \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H} \\ n=7 & \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8 & \mathbb{R}^8 \cong \textit{Cayley-Zahlen (Oktaven)} \end{array}$$
2. *Wenn n ungerade ist, dann besitzt S^n ein nichtverschwindendes Vektorfeld. Für $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, wobei $n+1 = 2k$ für $k \in \mathbb{N}$ ist, kann die Skalarmultiplikation mit komplexen Zahlen verwendet werden:*
   $$\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}^{2k} \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k \\ (\lambda; \lambda^1, \dots, \lambda^k) \mapsto (\lambda \cdot \lambda^1, ., \lambda \cdot \lambda^k) \end{array}$$
3. *Wenn G eine Lie-Gruppe mit neutralem Element $e \in G$ ist, so ist $TG \cong G \times T_eG$. Der Isomorphismus ist durch*
   $$\xi \mapsto (\pi(\xi), TL_{\pi(\xi)^{-1}} \cdot \xi) = (\pi(\xi), T\mu(0_{\pi(xs)^{-1}}, \xi))$$
   gegeben, für Details siehe (67.2).

28. Gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

28.1 Definition (Integralkurve)

Es sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, dann heißt $c : I \to M$ (Lösungs-kurve) Integralkurve des Vektorfeldes ξ durch p :⇔

$$c(0) = p, \quad c'(t) = \xi_{c(t)} \text{ für } t \in I.$$

Wir werden folgenden üblichen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen in Vektorräumen benutzen.

28.2 Satz über gewöhnliche Differentialgleichungen. *Sei E ein Euklidischer Vektorraum (oder bloß ein Banachraum) und $f : \mathbb{R} \times E \to E$ eine glatte Funktion. Dann existiert ein offenes Intervall I um 0 in $\mathbb{R}$ und eine offene Kugel U um 0 in E, so daß für alle $x \in U$ eine eindeutige Lösung $c_x : I \to E$ der gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$c_x'(t) = f(t, c_x(t)) \text{ mit } c_x(0) = x$$

existiert. Weiters ist $(t, x) \mapsto c_x(t)$ glatt als Abbildung $I \times U \to E$.

Ohne Beweis. Siehe z.B. [**31**, 10.8.1 und 10.8.2].

Damit können wir nun folgende globale Version auf Mannigfaltigkeiten beweisen.

28.3 Satz über gewöhnliche Differentialglg. auf Mannigfaltigkeiten.
Sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, dann gilt:

1. *Zu jedem $p \in M$ existiert eine eindeutige maximale Integralkurve c_p zu ξ durch p (d.h. jede andere Integralkurve ist eine Einschränkung von c_p), wo $c_p : (t_-^p, t_+^p) \to M$ glatt ist.*
2. *Ist $t_+^p < \infty$, dann gilt $\lim_{t \nearrow t_+^p} c(t) = \infty$, d.h. für jede kompakte Menge $K \subseteq M$ ist $c(t)$ nicht in K für t hinreichend nahe bei t_+^p.*
3. *Die Menge $U = \{(t, p); t_-^p < t < t_+^p\} \subseteq \mathbb{R} \times M$ ist eine offene Umgebung von $\{0\} \times M$. Die Abbildung $\mathrm{Fl}^\xi : U \to M$, definiert durch $\mathrm{Fl}^\xi(t, p) := c_p(t)$, ist dann C^∞ und heißt der* LOKALE FLUSS *des Vektorfeldes. Falls $q := \mathrm{Fl}^\xi(s, p)$ existiert, so existiert $\mathrm{Fl}^\xi(t + s, p)$ genau dann wenn $\mathrm{Fl}^\xi(t, q)$ existiert, und die beiden stimmen überein. Diese Gleichung heißt auch* EINPARAMETERGRUPPEN-EIGENSCHAFT, *denn wenn Fl^ξ global definiert ist, dann ist $(\mathrm{Fl}^\xi)^\vee : \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$ ein Gruppen-Homomorphismus.*

Beweis. (1) lokale Existenz: O.B.d.A. sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ glatt. Wir suchen ein c mit $c'(t) = \xi_{c(t)}$ und $c(0) = x$. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung, deren Lösung eindeutig ist, weil ξ lokal Lipschitz ist. Sie ist C^∞, da ξ glatt ist.

Globale Existenz: Seien c_1, c_2 zwei Integralkurven. Die Menge $\{t \geq 0 : c_1(t) = c_2(t)\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Dom}\, c_1 \cap \mathrm{Dom}\, c_2$. Angenommen es ist $\mathrm{Dom}\, c_1 \cap \mathrm{Dom}\, c_2 \neq \mathbb{R}$, dann gibt es o.B.d.A. ein t_0 mit $t_0 := \inf\{t \in \mathrm{Dom}\, c_1 \cap \mathrm{Dom}\, c_2 : c_1(t) \neq c_2(t)\}$. Klarerweise ist $c_1(t_0) = c_2(t_0)$. Nun sind aber $c_1(t_0 + .)$ und $c_2(t_0 + .)$ Integralkurven durch $c_1(t_0) = c_2(t_0)$, diese stimmen lokal überein. Das ist ein Widerspruch zur Eigenschaft des Infimums. Somit gibt es eine Integralkurve c_p mit $\mathrm{Dom}\, c_p = \bigcup\{\mathrm{Dom}\, c : c \text{ ist Integralkurve durch } p\}$, welche offensichtlich maximal ist. Wir setzen $(t_-^p, t_+^p) := \mathrm{Dom}\, c_p$.

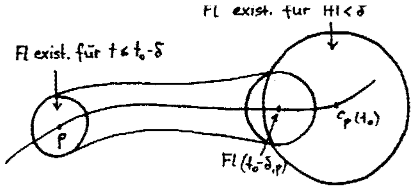
(3) Klarerweise ist $\{0\} \times M \subset U$ und $\mathrm{Fl}^\xi(0, p) = c_p(0) = p$. Es existiere $q := \mathrm{Fl}^\xi(s, p)$, d.h. $t_-^p < s < t_+^p$, da $r \mapsto \mathrm{Fl}^\xi(r, p)$ die maximale Integralkurve mit Anfangswert p ist und diese ist für $t_-^p < r < t_+^p$ definiert. Es ist $t \mapsto \mathrm{Fl}^\xi(t, \mathrm{Fl}^\xi(s, p))$ die maximale Integralkurve mit Anfangswert q. Sie ist für $t_-^q < t < t_+^q$ definiert. Für t mit $t_-^p < s + t < t_+^p$ ist $t \mapsto \mathrm{Fl}^\xi(t + s, p)$ eine Lösung mit Anfangswert $q = \mathrm{Fl}^\xi(s, p)$. Also gilt wegen der Maximalität und Eindeutigkeit von $t \mapsto \mathrm{Fl}^\xi(t, q)$ Gleichheit und $t_-^q \leq t_-^p - s < -s < t_+^p - s \leq t_+^q$. Insbesonders existiert also $\mathrm{Fl}^\xi(-s, q)$ und stimmt mit $\mathrm{Fl}^\xi(-s + s, p) = p$ überein. Also folgt aus Symmetriegründen, daß $t_-^p \leq t_-^q + s$ und

$t_+^q + s \le t_-^p$. Zusammen ergibt daß $t_-^p - t_-^q = s = t_+^p - t_+^q$ und somit existiert $\mathrm{Fl}^\xi(t+s,p)$ genau dann wenn $\mathrm{Fl}^\xi(t,q)$ existiert und die beiden stimmen überein.

Wir zeigen jetzt, daß $U \subseteq \mathbb{R}\times M$ offen in der Produkttopologie ist: Für $p \in M$ existiert nach dem Satz über Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^m$ eine offene Umgebung von $(0,p)\in\mathbb{R}\times M$, auf welcher der Fluß Fl^ξ definiert und glatt ist. Für $p\in M$ sei

$$I := \{t' \in [0,t_+^p[\,:\, \mathrm{Fl}^\xi \text{ ist auf einer offenen Umgebung von } [0,t']\times\{p\}\subseteq U \text{ definiert und glatt}\}.$$

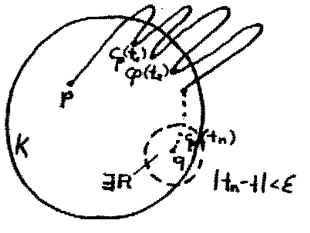
Wir zeigen nun indirekt, daß $I = [\,0, t_p^+\,[$ ist (analog geht man für t_-^p vor): Angenommen $I \subset [0,t_p^+[$. Sei $t_0 := \inf([0,t_p^+[\setminus I)$. Es ist Fl^ξ auf einer Umgebung von $(0,\mathrm{Fl}^\xi(t_0,p))$ glatt. Wir wählen ein $\delta>0$, sodaß $[0,\delta]\times\{\mathrm{Fl}^\xi(t_0-\delta,p)\}$ in dieser Umgebung enthalten ist. Es ist Fl^ξ nach Konstruktion von t_0 lokal um $[0,t_0-\delta]\times\{p\}$ glatt. Es ist $(s,q)\mapsto \mathrm{Fl}^\xi(s,\mathrm{Fl}^\xi(t_0-\delta,q)$ auf einer Umgebung von $[0,\delta]\times\{p\}$ glatt und wegen der Einparametergruppen-Eigenschaft ist $\mathrm{Fl}^\xi(s,\mathrm{Fl}^\xi(t_0-\delta,q)) = \mathrm{Fl}^\xi(s+t_0-\delta,q)$, also ist Fl^ξ lokal um $[t_0-\delta,t_0]\times\{p\}$ glatt. Insgesamt ist Fl^ξ auf einer Umgebung von $([0,t_0-\delta]\cup[t_0-\delta,t_0])\times\{p\} = [0,t_0]\times\{p\}$ glatt, also bildet $t_0\in I$ einen Widerspruch zur Annahme.



(2) Sei $K\subseteq M$ kompakt. Angenommen es existieren $(t_n)\to t_+^p<\infty$, sodaß $c_p(t_n)\in K$ für alle n. O.B.d.A. gelte $c_p(t_n)\to p'\in K$ (K ist kompakt). Der Fluß $\mathrm{Fl}^\xi(t,q)$ ist wohldefiniert für $|t|<\varepsilon$ und q nahe bei p'. Für n genügend groß seien $c(t_n)$ solche Werte für q, d.h. $\mathrm{Fl}^\xi(t,c_p(t_n))$ ist wohldefiniert für $|t|<\varepsilon$. Andererseits gilt:

$$\mathrm{Fl}^\xi(t,c_p(t_n)) = \mathrm{Fl}^\xi(t,\mathrm{Fl}^\xi(t_n,p)) = \mathrm{Fl}^\xi(t+t_n,p) = c_p(t+t_n).$$

Also ist $c_p(s)$ wohldefiniert für $0\le s<t_+^p$, aber auch für $s=t+t_n$ mit $|t|<\varepsilon$ und n beliebig, d.h. $t_n-\varepsilon<s<t_n+\varepsilon$. Sei $t_+^p-\varepsilon/2<t_n$. Dann ist c_p sicher für $0\le s<t_+^p$ und $t_n-\varepsilon<t_+^p-\varepsilon<s<t_+^p+\varepsilon/2<t_n+\varepsilon$ wohldefiniert, also insgesamt für $0\le s<t_+^p+\varepsilon/2$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß die Lösungskurven nur bis t_+^p definiert sind (Widerspruch zur Maximalität).



□

28.4 Beispiel (Exponentialabbildung)

Es sei $T \in L(n,n)$ und die Matrixmultiplikation von links $S \mapsto T \circ S$ definiere ein Vektorfeld auf $L(n,n)$. Gesucht ist die Lösungskurve $\Gamma : \mathbb{R} \to L(n,n)$, die $\Gamma'(t) = T \circ (\Gamma(t))$, als auch $\Gamma(0) = S \in L(n,n)$ erfüllt. Man definiert $\exp(T) := \sum (k!)^{-1} T^k$ und zeigt, daß die Reihe absolut konvergiert. Die Lösung obiger Differentialgleichung lautet dann $\Gamma(t) = \exp(tT) \circ S$, und der Fluß ist $Fl(t,S) = \exp(tT) \circ S$. Siehe Aufgabe (72.50).

28.5 Definition (Vollständige Vektorfelder)

Ein Vektorfeld ξ heißt VOLLSTÄNDIG, wenn Fl^ξ global definiert ist (d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$).

28.6 Bemerkungen

1. Aus Punkt 2 des vorigen Satzes folgt direkt: Ist M kompakt, so ist jedes Vektorfeld vollständig.
2. Falls M eine nichtkompakte Zusammenhangskomponente besitzt, dann existieren nichtvollständige Vektorfelder, z.B.: $M = \mathbb{R}$, $\xi(t) = 1 + t^2$, also $c'(t) = 1 + c(t)^2$. Zum Anfangswert $c(0) = 0$ ist dann die Lösung $c(t) = \tan(t)$ nur für $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ definiert.
3. Sei $M = \mathbb{R}^2$, $\xi(x,y) = y\frac{\partial}{\partial x}$ und $\eta(x,y) = (x^2/2)\frac{\partial}{\partial y}$. Wir behaupten, daß ξ und η vollständig sind:
$$\begin{aligned}&\mathrm{Fl}^\xi(t;x,y) = (x+ty, y),\\ &\mathrm{Fl}^\eta(t;x,y) = (x, y+tx^2/2), \quad \text{denn}\\ &\frac{d}{dt}\mathrm{Fl}^\xi(t;x,y) = (y,0) = y \cdot \tfrac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \tfrac{\partial}{\partial y} = \xi(Fl(t;x,y)),\end{aligned}$$
für η analog. Aber: $\xi + \eta$ ist nicht vollständig!
Es ist $(\xi+\eta)|_{(x,y)} = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}$ und sei $c(t) = (x(t), y(t))$ eine Lösungskurve. Dann ist $x'(t) = y(t)$ und $y'(t) = x^2(t)/2$, d.h. $x''(t) = x^2(t)/2 \Rightarrow x'(t)^2 = x(t)^3/3 + C$. Löst man die Differentialgleichung zum Anfangswert $(y_0^2 - x_0^3)/3 = 0$, für $x_0 > 0$, so zeigt sich, daß $\mathrm{Fl}^{\xi+\eta}$ nicht global definiert ist.
4. Sei $\mathrm{Fl}^\xi_t(p) := \mathrm{Fl}^\xi(t,p)$. Weil die Lösungskurven in einer offenen Umgebung von p existieren, gilt für kleine t : $(\mathrm{Fl}^\xi_t)^{-1} = \mathrm{Fl}^\xi_{-t}$. Der Fluß Fl^ξ_t ist also ein lokaler Diffeomorphismus.

32. Riemann-Mannigfaltigkeiten

32.2 Definition (Riemann-Mannigfaltigkeit)

Eine RIEMANN-METRIK auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine Funktion g die jedem Punkt $x \in M$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform $g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ zuordnet, sodaß für beliebige Vektorfelder $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ die Abbildung $x \mapsto g_x(\xi_x, \eta_x)$ von M nach $\mathbb{R}$ glatt ist.

Eine Riemann-Mannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer ausgezeichneten Riemann-Metrik g.

Ersetzt man die Bedingung der positiven Definitheit, durch die des nicht-Degeneriertseins, d.h. $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$ und $v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$ ist injektiv als Abbildungen $\mathbb{R}^m \to (\mathbb{R}^m)^*$, so erhält man eine Pseudo-Riemann-Metrik und als zugehörige Mannigfaltigkeiten Pseudo-Riemann-Mannigfaltigkeiten.

32.3 Definition (Länge und Distanz)

Sei (M, g) eine Riemann-Mannigfaltigkeit, dann können wir die Länge von Tangentialvektoren $\xi_x \in T_xM$ als $\sqrt{g_x(\xi_x, \xi_x)}$ definieren.

Falls $c : [0, 1] \to M$ eine glatte Kurve in M ist, so sei die Länge c definiert durch

$$L(c) := \int_0^1 \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))}\, dt.$$

Wir haben auch eine Metrik $d : M \times M \to \mathbb{R}^+$ im Sinne der Topologie:

$$d(p, q) := \inf\{L(c) : c \in C^\infty(\mathbb{R}, M);\, c(0) = p,\ c(1) = q\}.$$

Wir zeigen nun, daß diese Metrik die Topologie erzeugt:

Dazu zeigen wir zuerst, daß d stetig ist. Für jedes glatte $f : M \to N$ gilt $f(\{x : d_{f^*g}(x, x_0) < r\}) \subseteq \{y : d_g(y, f(x_0)) < r\}$ da $L_{f^*g}(f \circ c) = L_g(c)$. Verwenden wir insbesonders Karten $u : \mathbb{R}^m \supseteq U \to u(U) \subseteq M$ für f und verwenden, daß in der Kartendarstellung g lokale Ungleichungen der Form $M_1 \cdot |v|^2 \leq (u^*g)_x(v, v) \leq M_2 \cdot |v|^2$ mit $M_1, M_2 > 0$ erfüllt, so erhalten wir die Stetigkeit von d.

Umgekehrt sei $u(U)$ eine Kartenumgebung zentriert bei y_0 und V eine relativ kompakte offene Umgebung von 0 mit $\bar{V} \subseteq U$. Da d stetig ist gilt $r := d(u(\bar{V}), M \setminus u(U)) > 0$, und somit ist $\{y : d_g(y, y_0) < \varepsilon\} = u(\{x : d_{u^*g}(x, 0) < \varepsilon\})$ für alle $\varepsilon < \frac{r}{2}$. Weiters finden wir wegen

$$L_{u^*g}(c) = \int_0^1 \sqrt{(u^*g)_{c(t)}(c'(t), c'(t))}\, dt \leq M_2 \int_0^1 |c'(t)|\, dt = M_2\, L(c)$$

ein $0 < \varepsilon < \frac{r}{2}$ mit $\{x : d_{u^*g}(x, 0) \leq M_2|x| < \varepsilon\} \subseteq V$. Also ist $\{y : d_g(y, y_0) < \varepsilon\} = u(\{x : d_{u^*g}(x, 0) < \varepsilon\}) \subseteq u(\bar{V}) \subseteq u(U)$.

Interessant ist es, die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten tatsächlich zu finden. Dies ist ein Variationsproblem, welches wir in Paragraph (57) angehen werden.

33. Isometrische und konforme Diffeomorphismen

33.1 Definition (Isometrie)

Seien (M, g) und (N, h) zwei Riemann-Mannigfaltigkeiten und $f : M \mapsto N$ glatt, dann heißt f genau dann Isometrie, wenn

$$T_xf : (T_xM, g_x) \to (T_{f(x)}N, h_{f(x)})$$

für alle x eine lineare Isometrie (siehe (1.2)) ist.

Bemerkung

Falls f eine Isometrie ist und $c : \mathbb{R} \to M$ glatt ist, so gilt:

$$\begin{aligned} L_a^b(f \circ c) &= \int_a^b \sqrt{h((f \circ c)'(t), (f \circ c)'(t))}dt \\ &= \int_a^b \sqrt{g(c'(t), c'(t))}dt = L_a^b(c) \end{aligned}$$

Wir erhalten für die Distanz $d(f(x), f(y))$:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \inf\{L_0^1(c) : c \text{ verbindet } f(x) \text{ mit } f(y)\} \\ &\le \inf\{L_0^1(f \circ c) : c \text{ verbindet } x \text{ mit } y\}, \end{aligned}$$

d.h. die Isometrie kann die Distanz nicht vergrößern. Falls f ein Diffeomorphismus und eine Isometrie ist, so gilt: $d(x, y) = d(f(x), f(y))$.

Falls die Menge der Fixpunkte einer Isometrie als glatte Kurve c parametrisiert werden kann, so ist diese Kurve lokal die kürzeste Verbindung je zweier ihrer Punkte: Wir werden in (58.4) sehen, daß lokal die kürzesten Verbindungen existieren und eindeutig sind. Da aber das isometrische Bild einer solchen Kurve gleiche Länge hat, muß es in der Fixpunktmenge enthalten sein.

33.2 Satz von Nash. *Jede abstrakte und zusammenhängende Riemann-Mannigfaltigkeit (M, g) läßt sich isometrisch in einen $\mathbb{R}^n$, für $n = (2m+1)(6m+14)$ einbetten.*

Ohne Beweis, siehe [**36**].

33.3 Satz (Existenz von Riemann-Metriken).
Jede parakompakte glatte Mannigfaltigkeit besitzt (viele) vollständige Riemann-Metriken, d.h. Riemann-Metriken, deren zugehörige Metriken d auf M vollständig sind.

Beweis. Wir brauchen M nur in einen $\mathbb{R}^n$ einzubetten und dann die von der Standardmetrik induzierte Metrik zu nehmen, um eine Riemann-Metrik auf M zu erhalten.

Oder wir verwenden, daß wir mittels Karten lokal Riemann-Metriken finden können, die wir mit Hilfe einer Partition der Eins zu einer globalen Riemann-Metrik verkleben dürfen, da "eine Riemann-Metrik zu sein" eine konvexe Bedingung ist. Die Existenz vollständiger Riemann-Metriken werden wir in (62.12) zeigen. □

33.4 Satz (Lie-Gruppe der Isometrien). *Sei (M, g) eine zusammenhängende m-dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit, dann ist*

$$\mathrm{Isom}(M) := \{f \in \mathrm{Diff}(M) : f \textit{ ist Isometrie}\}$$

eine Lie-Gruppe (zu einer Lie-Gruppe machbar) der Dimension höchstens $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Die Gruppe $\mathrm{Isom}(M)$ ist also im Unterschied zur Gruppe $\mathrm{Diff}(M)$ aller Diffeomorphismen endlichdimensional.

Ohne Beweis. Siehe [**71**, 2.1.2].

Da man mittels eines inneren Produktes Winkel zwischen Vektoren durch

$$\cos\sphericalangle(x, y) := \frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}}$$

definieren kann, können wir auf jeder Riemann-Mannigfaltigkeit (M, g) Winkel α zwischen Tangentialvektoren und somit zwischen Kurven c_1 und c_2 in ihren Schnittpunkten auf folgende Weise messen:

$$\cos\alpha := \frac{g(c_1'(0), c_2'(0))}{\sqrt{g(c_1'(0), c_1'(0))}\sqrt{g(c_2'(0), c_2'(0))}}\,.$$

33.5 Definition (Konforme Abbildungen)

Eine glatte Abbildung $f : (M, g) \to (N, h)$ heißt WINKELERHALTEND (KONFORM), falls $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ für alle $x \in M$ winkelerhaltend ist.

33.6 Satz (Lie-Gruppe der konformen Diffeomorphismen). *Die Gruppe der konformen Isomorphismen einer m-dimensionalen parakompakten zusammenhängenden Riemann-Mannigfaltigkeit bilden eine Lie-Gruppe der Dimension höchstens $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.*

Ohne Beweis. Siehe [**71**, 4.6.1].

33.7 Lemma (Lineare konforme Abbildungen). *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, dann sind äquivalent:*

1. *f ist winkelerhaltend,*
2. *$\exists\, \lambda > 0 : \langle f(x), f(y)\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$;*
3. *$\exists\, \mu > 0$: μf ist Isometrie.*

Beweis. $(2 \Leftrightarrow 3)$ ist offensichtlich mit $\lambda\,\mu^2 = 1$.

$(1 \Leftarrow 2)$ Sei α der von den Vektoren x und y aufgespannte Winkel und α' der von den Vektoren $f(x)$ und $f(y)$ aufgespannte Winkel. Dann gilt:

$$\cos\alpha' = \frac{\langle f(x), f(y)\rangle}{|f(x)| \cdot |f(y)|} = \frac{\lambda\langle x, y\rangle}{\sqrt{\lambda}|x|\sqrt{\lambda}|y|} = \cos\alpha.$$

Also ist $\alpha = \alpha'$, und f winkelerhaltend.

$(1 \Rightarrow 2)$ Wir definieren $\lambda(v) \geq 0$ implizit durch $\langle f(v), f(v)\rangle =: \lambda(v)\langle v, v\rangle$.

Seien v, w orthonormale Vektoren, dann ist $(v+w) \perp (v-w)$. Da f konform ist, gilt:

$$0 = \langle f(v+w), f(v-w)\rangle = \langle f(v), f(v)\rangle - \langle f(w), f(w)\rangle = \lambda(v) - \lambda(w).$$

Also ist λ konstant auf einer Orthonormalbasis $(e_1, \dots, e_n)$ von $\mathbb{R}^n$. Wir setzen $\lambda := \lambda(e_1) = \ldots = \lambda(e_n)$. Für jeden beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

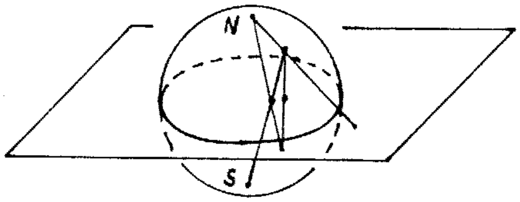
$$\begin{aligned}
& v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \\
\Rightarrow \quad & \lambda(v) \sum (v^i)^2 = \lambda(v) \left\langle \sum v^i e_i, \sum v^i e_i \right\rangle = \\
& = \left\langle f\left(\sum_i v^i e_i\right), f\left(\sum_j v^j e_j\right) \right\rangle \\
& = \sum_{i,j} v^i v^j \underbrace{\langle f(e_i), f(e_j) \rangle}_{\lambda \delta_{i,j}} = \lambda \sum_i (v^i)^2 \\
\Rightarrow \quad & \lambda(v) = \lambda \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Die Behauptung des Lemmas folgt nun aus:

$$\begin{aligned}
2\langle v, w\rangle &= \langle v+w, v+w\rangle - \langle v, v\rangle - \langle w, w\rangle \\
2\langle f(v), f(w)\rangle &= \langle f(v)+f(w), f(v)+f(w)\rangle - \langle f(v), f(v)\rangle - \langle f(w), f(w)\rangle \\
&= \lambda\langle v+w, v+w\rangle - \lambda\langle v, v\rangle - \lambda\langle w, w\rangle \\
&= 2\lambda\langle v, w\rangle. \qquad \square
\end{aligned}$$

33.8 Beispiele konformer Abbildungen

(1) Stereographische Projektion $S^n \to \mathbb{R}^n$ (siehe Aufgabe (72.40)).
(2) Spiegelung $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$ an der Einheitssphäre.



Die Abbildung f ist konform, da $f'(z)(v) = \frac{v\langle z,z\rangle - 2z\langle z,v\rangle}{\langle z,z\rangle^2}$ und somit

$$\begin{aligned}
\langle f'(z)(v), f'(z)(w)\rangle &= \left\langle \frac{v\langle z,z\rangle - 2z\langle z,v\rangle}{\langle z,z\rangle^2}, \frac{w\langle z,z\rangle - 2z\langle z,w\rangle}{\langle z,z\rangle^2} \right\rangle = \\
&= \frac{1}{\langle z,z\rangle^4}\Big(\langle v,w\rangle \,\langle z,z\rangle^2 - 4\langle z,z\rangle\langle z,v\rangle\langle z,w\rangle + 4\langle z,z\rangle\langle z,v\rangle\langle z,w\rangle\Big) = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle z,z\rangle^2}.
\end{aligned}$$

In Analogie zur Definition von holomorph in (30.9) heißt eine Funktion f ANTIHOLOMORPH, falls $f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^2$ glatt ist und $f'(z)$ konjugiert komplex-linear ist, d.h. $f'(z)(iv) = -if'(z)(v)$ für alle v, z.

33.9 Satz (Konforme Abbildungen der Ebene). *Sei $f : \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}$ ein Diffeomorphismus, dann gilt:*

f ist konform $\Leftrightarrow$ f ist holomorph oder antiholomorph. Dabei heißt f antiholomorph, wenn $\bar f$ holomorph ist.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
f = (f^1, f^2) \text{ ist konform } &\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow f'(z) \text{ ist konform} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \partial_1 f, \partial_2 f\rangle = 0 \\ \langle \partial_1 f, \partial_1 f\rangle = \langle \partial_2 f, \partial_2 f\rangle \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} f^1_1 f^1_2 + f^2_1 f^2_2 = 0 \\ (f^1_1)^2 + (f^2_1)^2 = (f^1_2)^2 + (f^2_2)^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} AB^* + BA^* = 0 \text{ wo } A := f^1_1 - f^2_2 \text{ und } B := f^1_2 + f^2_1 \\ AA^* - BB^* = 0 \text{ wo } A^* := f^1_1 + f^2_2 \text{ und } B^* := f^1_2 - f^2_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} A = B = 0 \text{ falls } (A^*)^2 + (B^*)^2 \neq 0 \\ \text{oder } (A^*)^2 + (B^*)^2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ ist holomorph} \\ \text{oder } A^* = B^* = 0, \text{ d.h. } f \text{ ist antiholomorph}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Kürzer kann man das auch so sehen: $f'(z)$ ist wegen (33.7) genau dann konform, wenn es ein Vielfaches einer Isometrie ist, also Multiplikation mit einer komplexen Zahl und eventuell noch mit der Spiegelung $z \mapsto \bar z$ zusammengesetzt. □

33.10 Proposition. *Es sei f eine glatte (nicht notwendig reguläre) Abbildung und U offen und zusammenhängend. Wir nennen sie in Verallgemeinerung zu (33.7)* konform*, falls $T_z f$ für jedes z (reelles) Vielfaches einer Isometrie ist. Dann gilt:*

1. *$f : \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}$ ist konform $\Leftrightarrow$ f oder $\bar f$ ist holomorph.*
2. *$f : S^2 \to \mathbb{C}$ ist konform $\Leftrightarrow$ f ist konstant.*
3. *$f : \mathbb{C} \supseteq U \to S^2$ ist konform $\Leftrightarrow$ bezüglich stereographischer Parametrisierung $\mathbb{C} \subseteq S^2$ ist f oder $\bar f$ meromorph, d.h. ist holomorph bis auf Pole.*
4. *$f : S^2 \to S^2$ ist konform $\Leftrightarrow$ bezüglich stereographischer Parametrisierung $\mathbb{C} \subseteq S^2$ ist f oder $\bar f$ rational, d.h. Quotient zweier Polynome.*
5. *$f : S^2 \to S^2$ ist konformer Diffeomorphismus $\Leftrightarrow$ bezüglich stereographischer Parametrisierung $\mathbb{C} \subseteq S^2$ ist f oder $\bar f$ eine Möbiustransformation, d.h. ist Quotient der Form $z \mapsto (a\,z + b)/(c\,z + d)$.*

Beweis. Die Implikationen ($\Leftarrow$) sind leicht zu verifizieren. In (5) geht das wie folgt. Es sei $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ eine Möbiustransformation. Dann ist $f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ ein konformer Diffeomorphismus, mit Inverser $w \mapsto \frac{dw-b}{-cw+a}$, denn

$$f(z) = w \Leftrightarrow az + b = (cz + d)w \Leftrightarrow z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Falls $c \neq 0$ so erweitern wir diesen nun durch $f(-d/c) := \infty$ und $f(\infty) := a/c$ zu einer Bijektion $S^2 \to S^2$. Diese Erweiterung ist holomorph bei $-d/c$, denn $z \mapsto 1/f(z) =$

$(cz+d)(az+b)$, ist holomorph nahe $z=-d/c$, da $a(-d/c)+b=-(ad-bc)/c$ und

$$z\mapsto f(1/z)=(a/z+b)/(c/z+d)=(bz+a)/(dz+c),$$

ist holomorph nahe 0, da $d\,0+c=c\neq 0$.
Falls $c=0$, so erweitern wir f durch $f(\infty):=\infty$. Dann ist die Erweiterung holomorph bei ∞, da

$$1/f(1/z)=(c/z+d)/(a/z+b)=(dz+c)/(bz+a)$$

und $a\neq 0$ wegen $ad=ad-bc\neq 0$. Also definiert jede Möbiustransformation f einen konformen Diffeomorphismus $S^2\to S^2$.

Für die umgekehrte Richtungen ($\Rightarrow$) gehen wir wie folgt vor:

(1) Jede Isometrie $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ist eine Drehung (eventuell mit einer Spiegelung zusammengesetzt. Also ist $f'(z)$ oder $\overline{f'(z)}=\overline{f}'(z)$ Multiplikation mit einer komplexen Zahl und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x}=\pm\frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}=\mp\frac{\partial v}{\partial x}$ sind für $f=:u+i\,v$ erfüllt. Daraus erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\pm\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\pm\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=0,$$

d.h. $u=\mathfrak{Re}f$ ist harmonisch. Wir suchen ein w, s.d. $u+i\,w$ holomorph ist, d.h. die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt. Es soll also $dw=\frac{\partial w}{\partial x}\,dx+\frac{\partial w}{\partial y}\,dy=-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy$ gelten, was wegen der Integrabilitätsbedingung

$$d\Big(-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy\Big)=-\Big(\frac{\partial^u}{\partial x^2}+\frac{\partial^u}{\partial y^2}\Big)\,dx\wedge dy=0$$

durch den Ansatz

$$w(z):=\int_{z_0}^{z}\frac{\partial w}{\partial x}\,dx+\frac{\partial w}{\partial y}\,dy$$

erreichbar ist. Also ist $u+iw$ holomorph und somit sind die Stellen, wo $f'(z)=0$ ist isoliert, d.h. $f=u+i\,v=u\pm i\,w$ mit konstanter Wahl von $\pm$. Also ist f oder $\bar f$ holomorph.

(2) Es sei $f:S^2\to\mathbb{C}$ konform. Dann ist auch die Zusammensetzung $\mathbb{C}\to S^2\to\mathbb{C}$ mit der stereographischen Parametrisierung konform, also holomorph oder antiholomorph nach (1). Da $f(S^2)$ kompakt ist, ist diese Zusammensetzung beschränkt, und nach dem Satz von Liouville (siehe [**15**, S.116]) konstant.

(3) Es sei $f:\mathbb{C}\supseteq U\to S^2$ konform und $z_0\in U$. Falls $f(z_0)\in\mathbb{C}\subseteq S^2$ liegt, dann ist $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ lokal konform und nach (1) also (anti) holomorph. Andernfalls ist $f(z_0)=\infty$ und somit $z\mapsto\frac{1}{z}f(z)$ holomorph und folglich lokal beschränkt und lokal $\neq 0$. Also hat f eine isolierte Singularität in z_0 und kommt lokal um z_0 den Wert 0 nicht nahe und hat folglich nach dem Satz von Casorati-Weierstrass (siehe [**15**, S. 166]) in z_0 keine wesentliche Singularität, sondern einen Pol. Also ist f oder $\bar f$ meromorph.

(4) Nach (3) ist $f|_{\mathbb{C}}:\mathbb{C}\subset S^2\to S^2$ (oder $\bar f$) meromorph und hat nur endlich viele Pole z_j, da diese auf S^2 isoliert sind. Dort ist die Laurent-Entwicklung $f(z)=\sum_{k=-n_j}^{\infty}(z-z_j)^k f_k^j$ für ein $n_j\in\mathbb{N}$. Also ist $z\mapsto f(z)-\sum_{k=1}^{n_j}(z-z_j)^{-k}f_{-k}^j$ holomorph um z_j. Falls auch ∞ ein Pol ist, dann ist die Laurent-Entwicklung $f(\frac{1}{z})=\sum_{k=-n_\infty}^{\infty}z^k f_k^\infty$,

also $f(z) - \sum_{k=1}^{n_\infty} z^k f^\infty_{-k}$ holomorph bei ∞. lokal um z_j holomorph ist. Also ist

$$z \mapsto f(z) - \sum_j \sum_{k=1}^{n_j} (z - z_j)^{-k} f^j_{-k} - \sum_{k=1}^{n_\infty} z^k f^\infty_{-k}$$

holomorph $S^2 \to \mathbb{C}$ und nach (2) konstant, d.h. f ist rational.

(5) Nach (4) ist $f = \frac{p}{q}$ für relativ prime Polynome p und q. Falls der Grad von p oder von q größer als 1 ist, dann hat $h(z) := p(z) - c\,q(z)$ für geeignete $c := f(z)$ Grad größer als 1. Da f injektiv ist, darf nur eine Lösung $z = z_0$ von $h(z) = 0$ existieren, d.h. $h(z) = k(z - z_0)^n$ für ein $n \geq 2$ und $k \neq 0$. Dann ist $p(z_0) = c\,q(z_0)$ und $p'(z_0) = c\,q'(z_0)$ und somit $f'(z_0) = \frac{q\,p' - p\,q'}{q^2}(z_0) = 0$, ein Widerspruch dazu, daß f ein Diffeomorphismus ist. □

34. Riemann-Flächen

34.1 Definition (Riemann-Fläche)

Eine Riemann-Fläche ist eine 2-dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit.

34.2 Satz von Korn-Lichtenstein. *Auf jeder Riemann-Fläche existieren konforme lokale Koordinaten (auch* isothermale Koordinaten *genannt).*

Ohne Beweis. Siehe [**76**] oder [**51**, Vol.II, Addendum 2]

34.3 Definition (Komplexe Mannigfaltigkeit)

Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem Atlas, dessen Kartenwechsel komplex differenzierbar (holomorph) sind.

Eine orientierte Mannigfaltigkeit ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem Atlas, dessen Kartenwechsel orientierungserhaltend sind. Für ein detailierteres Studium von Orientierbarkeit siehe Abschnitt (46).

34.4 Folgerung. *Jede orientierte Riemann-Fläche ist eine komplexe Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Man wähle einen Atlas, dessen Kartenwechsel konform und orientierungserhaltend, also holomorph, sind. □

34.5 Beispiele konformer Diffeomorphismen

(1) Die S^2 hat als Atlas die stereographische Projektion vom Nord- und Südpol. Der Kartenwechsel ist die Inversion am Einheitskreis, ist also konform aber vertauscht die Orientierungen. Wir ändern die Orientierung einer Karte und erhalten so einen holomorphen Atlas. Dies nennt man auch die Riemann'sche Zahlenkugel. Wir betrachten nun die Automorphismengruppe der S^2. Das ist die Menge aller biholomorphen Abbildungen $f : S^2 \to S^2$, wobei die biholomorphen Abbildungen,

genau die konformen, orientierungserhaltenden Diffeomorphismus sind. Nach (33.9) gilt bezüglich der stereographischen Projektion von $S^2 \to \mathbb{C}$ folgende Beschreibung:

$$\mathrm{Aut}(S^2) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : ad - bc = 1 \right\}.$$

Diese Gruppe der Möbiustransformationen kann man auch mit folgender Matrizengruppe bis auf eine Multiplikation mit ± 1 identifizieren:

$$\mathrm{SL}_{\mathbb{C}}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1 \right\}.$$

Die Gruppe $\mathrm{Aut}(S^2)$ ist also isomorph zu $\mathrm{SL}_{\mathbb{C}}(2)/\mathbb{Z}_2$, wobei die Untergruppe $\mathbb{Z}_2$ gegeben ist durch $\mathbb{Z}_2 := \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$. Dies ist eine Lie-Gruppe.

Die Gruppe der Möbiustransformationen wird von $z \mapsto az$, $z \mapsto z + b$ und $z \mapsto 1/z$ erzeugt.

Offensichtlich sind die angegebenen Funktionen Möbiustransformationen. Sei umgekehrt eine Möbiustransformation $f : z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ mit $ad - bc \neq 0$ gegeben. Falls $c = 0$ und damit $d \neq 0$ so ist f die Zusammensetzung $z \mapsto \frac{a}{d}z \mapsto \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Ist $c \neq 0$ und damit $f(\infty) = a/c \in \mathbb{C}$, so ist die Zusammensetzung $z \mapsto f(z) \mapsto f(z) - f(\infty) \mapsto \frac{1}{f(z)-f(\infty)}$ ein konformer Diffeomorphismus von $\mathbb{C}$ (mit $\infty \mapsto \infty$), also nach dem ersten Teil eine Zusammensetzung einer Drehstreckung und einer Translation.

(2) Die Automorphismengruppe von $\mathbb{C}$ besteht aus jenen Möbiustransformationen von $\mathrm{Aut}(S^2)$, welche $\mathbb{C} \subset S^2$ oder – äquivalent – den Nordpol $\hat{=} \infty \in \mathbb{C}$ invariant lassen: In der Tat sei f so ein Diffeomorphismus, dann ist $f_\infty : z \mapsto 1/f(1/z)$ holomorph auf der punktierten Ebene. Da f ein Diffeomorphismus ist, ist f_∞ durch $f_\infty(0) = 0$ stetig ergänzbar, also ist ∞ eine hebbare Singularität und f durch $f(\infty) := \infty$ zu einen holomorphen Diffeomorphismus $S^2 \to S^2$ erweiterbar. Wegen

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} \xrightarrow{z \to \infty} ac.$$

bildet die Möbiustransformation $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ den Punkt ∞ auf a/c ab, und somit ist ∞ genau dann invariant, wenn $c = 0$ und $a \neq 0$ ist. Die Möbiustransformation hat dann die Gestalt

$$\frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Also gilt:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{az + b : a \neq 0\ a, b \in \mathbb{C}\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \neq 0\ a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Man nennt dies auch die “$az+b$-Gruppe”, siehe (14.2). Sie ist komplex 2-dimensional.

(3) Für die offene Einheitsscheibe $\mathbb{D}$ besteht die Automorphismengruppe aus jenen Möbiustransformationen von S^2, die $\mathbb{D}$ invariant lassen, , d.h.

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} : a\bar{a} - b\bar{b} = 1 \right\} \cong SU(2,1)/\mathbb{Z}_2.$$

Es ist leicht zu sehen, daß jede solche Möbiustransformation $\mathbb{D}$ invariant läßt. Für die Umkehrung benötigen wir dafür das

Schwarz'sche Lemma. *Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann ist $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für alle z. Genauer gesagt, es tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:*

1. *$|f'(0)| < 1$ und $|f(z)| < |z|$ für $z \neq 0$;*
2. *$f(z) = e^{i\theta} z$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$ und alle z.*

Es sei f ein Automorphismus von $\mathbb{D}$ mit $f(0) = c$. Die Abbildung $z \mapsto \frac{z-c}{1-\bar{c}\,z}$ ist eine Möbiustransformation der angebenen Gestalt und setzt man f mit ihr zusammen so wird 0 invariant gelassen. O.B.d.A. ist also $f(0) = 0$. Nach dem Schwarzschen Lemma ist $|f'(0)| \leq 1$ und da f ein Diffeomorphismus ist, ist $f'(0) \neq 0$ und gleiches gilt für die Inverse f^{-1}. Wegen $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ ist also $(f^{-1})'(0) \circ f'(0) = 1$ und somit $|f'(0)| = 1$, d.h. $f(z) = e^{i\theta} z$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$ nach dem Schwarzschen Lemma. Dies ist ebenfalls eine Möbiustransformation der gesuchten Gestalt.

Es ist $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ eine 3-dimensionale Gruppe. Sei dazu $a = a_1 + i a_2$ und $b = b_1 + i b_2$. Dann ist ${a_1}^2 + {a_2}^2 - {b_1}^2 - {b_2}^2 = 1$ und durch die Beziehungen

$$r_{1,1} = a_1 + b_1 \qquad r_{1,2} = a_2 + b_2 \tag{10}$$

$$r_{2,1} = -a_2 - b_2 \qquad r_{2,2} = a_1 - b_1 \tag{11}$$

wird ein Element $\left(\begin{smallmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ r_{2,1} & r_{2,2} \end{smallmatrix}\right) \in SL(2)/\mathbb{Z}_2$ definiert. Somit erhalten wir einen Isomorphismus $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \cong SL(2)/\mathbb{Z}_2$, siehe Aufgabe (72.62).

34.6 Die Hyperbolische Scheibe

Wir definieren eine neue Riemann-Metrik auf $\mathbb{D}$ durch

$$g_z(v, w) := \frac{1}{(1 - |z|^2)^2} \langle v, w \rangle.$$

Dies ist eine konform äquivalente Metrik, d.h. $\mathrm{id} : (\mathbb{D}, \langle\cdot,\cdot\rangle) \to (\mathbb{D}, g)$ ist ein konformer Diffeomorphismus. Es ist also

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}, g) = \mathrm{Aut}(\mathbb{D}, \langle\cdot,\cdot\rangle).$$

Für $f(z) := \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$, d.h. $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, ergibt sich

$$g_z(v, v) = \frac{1}{(1 - |z|^2)^2} \langle v, v \rangle = \frac{|f'(z)(v)|^2}{(1 - |f(z)|^2)^2} = g_{f(z)}(f'(z)v, f'(z)v),$$

denn es gilt

$$(1 - |z|^2)|f'(z)v| = (1 - |f(z)|^2)|v|.$$

Es ist demnach $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}, g) = \mathrm{Isom}(\mathbb{D}, g)$, man nennt diese Riemann-Fläche $(\mathbb{D}, g)$ die hyperbolische Scheibe. Für sie ist jeder winkelerhaltende Diffeomorphismus also längenerhalten.

VIII. Hyperflächen

In diesen Kapitel kehren wir vorerst zu konkreten 2-dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$-zurück. Wir besprechen die verschiedenen Krümmungsbegriffe (wie Normal-, Haupt-, Gauß und mittlere Krümmung) und stellen die nötigen Formeln bereit. Dann untersuchen wir spezielle Klassen solcher Hyperflächen: Drehflächen, Regelflächen, Torsen und Minimalflächen. Schließlich behandeln wir noch Geodäten, die Exponentialabbildung die jedem Tangentialvektor die Geodäte mit dieser Startgeschwindigkeit zuordnet und Jacobifelder die mit der Variation von Geodäten zusammenhängen. Wir zeigen den Integralsatz von Gauß-Bonnet. Dann besprechen wir den Paralleltransport von Tangentialvektoren längs Kurven und die damit verbundene kovariante Ableitung. Schließlich führen wir noch die Riemann-, die Ricci- und die Schnittkrümmung ein und behandeln den Zusammenhang zu zuvor definierten Krümmungen.

51. Normalkrümmungen

51.1 Definition (Hyperfläche)

Eine HYPERFLÄCHE M im $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmannigfaltigkeit der Kodimension 1, d.h. der Dimension $m = n - 1$. Sie kann lokal z.B. durch eine Gleichung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oder eine Parametrisierung $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ gegeben sein.

Beispiele

Flächen im $\mathbb{R}^3$, Sphären $S^m \subset \mathbb{R}^n$ und $SL(\mathbb{R}^n) \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

51.2 Gaußabbildung

In jedem Punkt $p \in M$ haben wir genau zwei normierte Normalvektoren auf T_pM im $\mathbb{R}^n$. Falls M orientiert ist, können wir einen dieser Normalvektoren auszeichnen, nämlich so, daß $(\nu_p, e_1, \dots, e_m)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ ist, für eine (jede) positiv orientierte Orthonormalbasis $(e_1, \dots, e_m)$ von T_pM, cf. (47.11). Ist M lokal durch eine Gleichung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben, so ist der Gradient $\operatorname{Grad} f$ ein Normalvektor, den wir nur noch normieren müssen, cf. (46.8). Es gibt also lokal und für orientierte Hyperflächen sogar global eine glatte Abbildung $M \ni p \mapsto \nu_p \in S^m \subset \mathbb{R}^n$ mit $\nu_p \perp T_pM$. Ein derart gewählte Funktion ν wird GAUSS-ABBILDUNG genannt.

51.3 Normalkrümmung

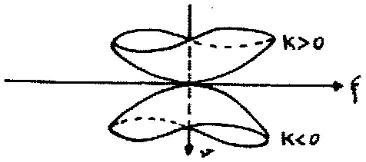
Wir wollen nun die "Krümmung einer Hyperfläche" definieren. Es sei $\nu_p \perp T_pM$ ein fix gewählter Einheits-Normalvektor und $\xi \in T_pM$ ein Einheits-Tangentialvektor. Wir betrachten nun den Schnitt der Ebene $(t,s) \mapsto p + t\nu + s\xi$ durch p mit den Richtungsvektoren ξ und ν, mit M. Sei f eine lokale reguläre Gleichung von M um p. O.B.d.A. sei $|\operatorname{Grad}_p f|$ normiert und gleichorientiert wie ν_p, also $\nu_p = \operatorname{Grad}_p f$. Der Schnitt der Ebene mit M ist dann durch die Gleichung $f(p + t\nu_p + s\xi) = 0$ in (t,s) gegeben. Wir wollen in dieser impliziten Gleichung t nach s mittels impliziten Funktionensatz (10.2) auflösen. Dies ist wegen

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} f(p + t\nu_p + s\xi)|_{s=0} = f'(p)(\nu_p) = \langle \operatorname{Grad}_p f, \nu_p\rangle = |\operatorname{Grad}_p f|^2 = 1 \neq 0.$$

möglich. Wir erhalten also als Durchschnitt lokal eine Schnittkurve $c : s \mapsto p + t(s)\nu_p + s\xi$ in M mit $c(0) = p$ und $c'(0) = \xi + t'(s)\nu_p = \xi$, da $c'(0) \in T_pM$. Von der Kurve c können wir annehmen, daß sie proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Die in (3.2) definierte signierte Krümmung der ebenen Kurve c, wobei wir als positiv orientierte Basis (ν_p, ξ) wählen, nennt man die NORMALKRÜMMUNG $K(\xi) := K_M(\xi) := K_c(0)$ von M im Punkt p und Richtung ξ. Beachte, daß $(\xi, -\nu_p)$ das Begleitbein von c im Punkte $p = c(0)$ ist! Eine Formel von $K(\xi)$ erhalten wir wie folgt: Wegen $c(t) \in M$ gilt $c'(t) \in T_{c(t)}M = {\nu_{c(t)}}^\perp$, also $\langle c'(t), \nu_{c(t)}\rangle = 0$. Durch Differenzieren an der Stelle 0 erhalten wir: $\langle c''(0), \nu_p\rangle + \langle \xi, T_p\nu \cdot \xi\rangle = 0$. Folglich gilt:

$$K(\xi) = K_c(0) = -\langle c'', \nu_p\rangle = \langle \xi, T_p\nu \cdot \xi\rangle$$

Diese Formel können wir nun auch für $|\xi| \neq 1$ verwenden.



51.4 Weingarten-Abbildung

Man nennt die Tangentialabbildung

$$L_p := T_p\nu : T_pM \to T_{\nu_p}S^m = {\nu_p}^\perp = T_pM$$

der Gauß-Abbildung $\nu : M \to S^m$ die WEINGARTEN-ABBILDUNG. Der Vektor $L_p(\xi)$ mißt also die infinitesimale Änderung der Normalen, wenn man auf M von p in Richtung $\xi \in T_pM$ geht. Es gilt also

$$K(\xi) = \langle \xi, L \cdot \xi\rangle.$$

51.5 Bemerkung

Die Weingarten-Abbildung $L_p : T_pM \to T_pM$ ist symmetrisch. Denn seien ξ_1 und ξ_2 zwei Vektorfelder auf M. Wir setzen sowohl ξ_i, als auch ν lokal um p zu Vektorfeldern des $\mathbb{R}^n$ fort. Wegen $\langle\xi_1,\nu\rangle|_M = 0$ gilt

$$\begin{aligned}0 = \langle\xi_1,\nu\rangle'(p)(\xi_p) &= \Big\langle {\xi_1}'(p)(\xi_2(p)), \nu(p)\Big\rangle + \Big\langle \xi_1(p), \nu'(p)(\xi_2(p))\Big\rangle\\ &= \Big\langle {\xi_1}'(p)(\xi_2(p)), \nu_p\Big\rangle + \Big\langle \xi_1(p), L_p(\xi_2(p))\Big\rangle.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}&\Big\langle \xi_1(p), L_p(\xi_2(p))\Big\rangle - \Big\langle \xi_2(p), L_p(\xi_1(p))\Big\rangle =\\ &\qquad = \Big\langle {\xi_2}'(p)(\xi_1(p)) - {\xi_1}'(p)(\xi_2(p)), \nu_p\Big\rangle = \Big\langle \underbrace{[\xi_1,\xi_2](p)}_{\in T_pM}, \nu_p\Big\rangle = 0\end{aligned}$$

Ein zweiter Beweis geht wie folgt: Sei $\varphi:\mathbb{R}^m \to M \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale bei p zentrierte Parametrisierung. Mit φ_i bezeichnen wir die i-te partielle Ableitung von φ. Die $\varphi_i(0)$ bilden für $i=1,\dots,m$ eine Basis von T_pM und es gilt:

$$\begin{aligned}\langle\varphi_i(0), L_p\cdot\varphi_j(0)\rangle &= \langle \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\varphi(t\,e_i), T_p\nu\cdot\tfrac{d}{ds}|_{s=0}\varphi(s\,e_j)\rangle\\ &= \langle \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\varphi(t\,e_i), \tfrac{d}{ds}|_{s=0}\nu(\varphi(s\,e_j))\rangle\\ &= \tfrac{d}{ds}|_{s=0}\langle\tfrac{d}{dt}|_{t=0}\varphi(t\,e_i+s\,e_j), \nu(\varphi(s\,e_j))\rangle\\ &\quad - \langle\tfrac{d}{ds}|_{s=0}\tfrac{d}{dt}|_{t=0}\varphi(t\,e_i+s\,e_j), \nu(\varphi(0\,e_j))\rangle\\ &= 0 - \langle\varphi_{i,j}(0), \nu_p\rangle,\end{aligned}$$

und ist somit offensichtlich symmetrisch in (i,j), da die gemischten 2-ten partiellen Ableitungen $\varphi_{i,j}$ von φ es sind.

51.6 Fundamentalformen

Die symmetrische bilinear-Form $II_p(\xi_1,\xi_2) := \langle\xi_1, L_p(\xi_2)\rangle$ auf T_pM heißt 2-TE FUNDAMENTALFORM von M. Unter der 1-TE FUNDAMENTALFORM versteht man die Riemann-Metrik, d.h. $I(\xi, et) := \langle\xi,\eta\rangle$. Wir haben in (51.3) gezeigt, daß $K(\xi) = II(\xi,\xi)$ gilt.

52. Haupt-, Gauß- und mittlere Krümmung

52.1

Jetzt wollen wir die Extremalwerte der Normalkrümmung bestimmen. Wegen der Homogenität von L macht diese Aufgabe nur Sinn, wenn wir die Abbildung K auf die Einheitssphäre $S^{m-1}\subset T_pM$ einschränken. Damit $\xi\in S^{m-1}$ ein kritischer Punkt ist, muß $T_\xi K : T_\xi S^{m-1}\to\mathbb{R}$ konstant 0 sein, d.h. $K'(\xi)(v) = 0$ für alle $v\in T_\xi S^{m-1} = \xi^\perp$. Es gilt:

$$K'(\xi)(v) = \tfrac{d}{dt}|_{t=0} II(\xi+tv, \xi+tv) \xlongequal{(51.5)} 2II(\xi,v) = 2\langle L\xi, v\rangle.$$

Es muß also $L\xi\in T_xM$ normal stehen auf alle v, welche auf ξ normal stehen, d.h. $L\xi$ muß proportional zu ξ sein. Dies zeigt den

Satz von Rodriguez. *Die kritischen Punkte ξ der Normalkrümmung sind genau die Eigenvektoren der symmetrischen, linearen Abbildung L, und der zu ξ gehörige Eigenwert λ ist gegeben durch*

$$\lambda = \lambda\langle\xi,\xi\rangle = \langle\xi,\lambda\xi\rangle = \langle\xi, L\xi\rangle = II(\xi,\xi) = K(\xi),$$

die Normalkrümmung von M in Richtung von ξ. Im Fall $m = 2$ sind die kritischen Punkte auch extremal, nämlich das Minimum und das Maximum von $K(\xi)$ für $|\xi| = 1$. Für $m > 2$ sind die kritischen Punkte nicht notwendig extremal. □

52.2 Haupt- und Gauß-Krümmung

Man nennt die Eigenwerte von L die HAUPTKRÜMMUNGEN und die zugehörigen Eigenvektoren HAUPTKRÜMMUNGSRICHTUNGEN. Da L symmetrisch ist, gibt es nur reelle Eigenwerte und dazu eine Orthonormalbasis von T_pM aus Eigenvektoren (Verwende: $0 = \langle Av, w\rangle - \langle v, Aw\rangle = (\lambda-\mu)\langle v,w\rangle$). Seien K_i die Hauptkrümmungen und ξ_i eine Orthonormalbasis von zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen. Dann gilt nach [Euler]:

$$K(\xi) = II(\xi,\xi) = II\Big(\sum_i \langle\xi,\xi_i\rangle\xi_i, \sum_j \langle\xi,\xi_j\rangle\xi_j\Big) =$$
$$= \sum_{i=j}\langle\xi,\xi_i\rangle\langle\xi,\xi_j\rangle II(\xi_i,\xi_j) = \sum_i \langle\xi,\xi_i\rangle^2 K_i.$$

Unter der GAUSS-KRÜMMUNG $K \in \mathbb{R}$ im Punkt p versteht man das Produkt aller Hauptkrümmungen, also die Determinante von L.
Die MITTLERE KRÜMMUNG $H \in \mathbb{R}$ ist das arithmetische Mittel der Hauptkrümmungen, also $\frac{1}{m}$ der Spur von L.
Eine Kurve c in M heißt KRÜMMUNGSLINIE, falls ihre Ableitung in jedem Punkt eine Hauptkrümmungsrichtung ist.
Ein Vektor $\xi \neq 0$ heißt ASYMPTOTENRICHTUNG, falls $II(\xi,\xi) = K(\xi) = 0$ ist. Eine Kurve c in M heißt ASYMPTOTENLINIE, falls ihre Ableitung in jedem Punkt eine Asymptotenrichtung ist.
Schließlich heißen zwei Vektoren $\xi_1 \neq 0$ und $\xi_2 \neq 0$ KONJUGIERT, falls $II(\xi_1,\xi_2) = 0$ ist.
Ein Punkt p heißt NABELPUNKT, falls alle Hauptkrümmungen gleich sind, L also ein Vielfaches der Identität ist. Dann ist die Normalkrümmung konstant gleich der mittleren Krümmung.
Sind alle Hauptkrümmungen 0, so spricht man von einem FLACHPUNKT.

52.3 Beispiele

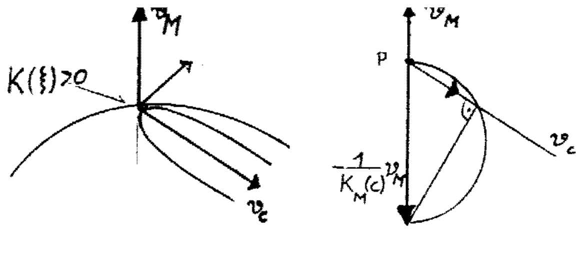
1. Hyperebene: $\mathbb{R}^m := e_0^\perp \subset \mathbb{R}^n$. Als Normalvektor verwenden wir e_0. Die Gaußabbildung ist somit konstant e_0 und die Weingarten-Abbildung $L = 0$. Also sind die oben definierten Krümmungen alle gleich 0. Alle Punkte sind Flachpunkte und alle Richtungen Hauptkrümmungsrichtungen und Asymptotenrichtungen.
2. Sphäre: $S^m = \{x : |x| = R\} \subset \mathbb{R}^n$. Hier können wir im Punkte $x \in S^m$ als Normale $\nu_x = \frac{1}{R}x$ nehmen. D.h. die Gaußabbildung ist die lineare Abbildung

$\frac{1}{R}$ id und somit ist dies auch die Weingarten-Abbildung. Also sind alle Punkte Nabelpunkte und alle Richtungen Hauptkrümmungsvektoren mit Hauptkrümmung $\frac{1}{R}$. Es gibt keine Asymptotenrichtungen. Die Gauß-Krümmung ist somit $\frac{1}{R^m}$ und die mittlere Krümmung ist $\frac{1}{R}$.

3. Zylinder: $M := \{(x,t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$. Als Normale in $(x,t) \in M$ können wir $\nu_{x,t} = (x,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ verwenden. Der Tangentialraum von M in diesem Punkt ist also $T_{(x,t)}M := \nu_{x,t}^\perp = \{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y \perp x\}$ und die Gaußabbildung ist die Einschränkung der linearen Abbildung $\mathrm{id} \oplus 0$ auf $T_x S^{m-1} \times \mathbb{R}$. Die Weingarten-Abbildung sieht somit genauso aus. Eine Hauptkrümmung ist also 0 mit Krümmungsrichtung $(0,1)$ und alle anderen Hauptkrümmungen sind 1. Die Erzeuger $\{x\} \times \mathbb{R}$ sind die Asymptotenlinien. Eine Kurve $c : s \mapsto (x(s), t(s))$ ist genau dann Krümmungslinie, wenn $s \mapsto t(s)$ konstant ist.

52.4 Lemma [53].
Ist c eine Kurve auf M mit $c(0) = p \in M$ und $c'(0) = \xi \in T_pM$, $|\xi| = 1$, so gilt:

1. $(\nu \circ c)'(0) = L_p \cdot \xi$, *d.h. $L_p \cdot \xi$ mißt die infinitesimale Änderung von ν längs c.*
2. $-\langle c''(0), \nu_p\rangle = II(\xi,\xi) = \langle L_p \cdot \xi, \xi\rangle = K(\xi)$, *d.h. die Normalkomponente der Beschleunigung hängt nur vom Geschwindigkeitsvektor ab, und ist die Normalkrümmung in dessen Richtung.*
3. *Es ist $-K_M(\xi) = K_c(0)\langle \nu_M(p), \nu_c(0)\rangle = K_c(0)\cos\theta$, wobei θ der Winkel zwischen der Flächennormale $\nu_M(p)$ und dem Hauptnormalenvektor $\nu_c(0)$ (oder äquivalent der Schmiegebene) von c in p ist und $K_c(0) \geq 0$ die Krümmung der Raumkurve c ist.*
4. *Der Schmiegkreis an c in p hat seinen Mittelpunkt auf der Sphäre um $p - \frac{1}{2K_M(\xi)}\nu_M(p)$ durch p.*



Beweis. (1) ist gerade die Definition der Weingarten-Abbildung.
(2) Dazu differenzieren wir $0 = \langle c'(t), \nu_M(c(t))\rangle$ wie in (51.3) und erhalten

$$-\Big\langle c''(0), \nu_M(c(0))\Big\rangle = \Big\langle c'(0), (\nu \circ c)'(0)\Big\rangle \overset{(1)}{=\!=} \langle \xi, L \cdot \xi\rangle = II(\xi,\xi) = K(\xi).$$

(3) Das Resultat folgt aus (2) wegen

$$-K(\xi) \overset{(51.3)}{=\!=} \Big\langle c''(0), \nu_M(p)\Big\rangle \overset{(7.1)}{=\!=} \Big\langle K_c(0)\nu_c(0), \nu_M(p)\Big\rangle = K_c(0)\Big\langle \nu_c(0), \nu_M(p)\Big\rangle.$$

(4) Aus der Theorie der Kurven (2.3) wissen wir, daß der Mittelpunkt des Schmiegkreises durch $c(0) + \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0)$ gegeben ist. Nun betrachten wir das Dreieck mit den

Ecken p, $p - \frac{1}{K(\xi)}\nu_M(p)$ und $p + \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0)$. Dieses hat einen rechten Winkel bei $c(0) + \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0)$, denn nach (3) ist

$$\Big\langle \nu_M(p), \nu_c(0) \Big\rangle = -\frac{II(\xi,\xi)}{K_c(0)} = -\frac{K_M(\xi)}{K_c(0)}$$

und somit

$$\Big\langle \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0), \frac{1}{K_M(\xi)}\nu_M(p) + \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0) \Big\rangle =$$

$$= -\frac{1}{K_c(0)K_M(\xi)}\frac{K_M(\xi)}{K_c(0)} + \frac{1}{K_c(0)^2} = 0.$$

Also liegt der Schmiegkreismittelpunkt auf dem Thaleskreis (oder in Wirklichkeit auf der Sphäre) mit der Strecke von p nach $p - \frac{1}{K_M(\xi)}\nu_M(p)$ als Durchmesser. □

52.5 Lemma (Flächen mit lauter Nabelpunkten).
Eine zusammenhängende Hyperfläche M besitzt genau dann nur Nabelpunkte, wenn sie Teil einer Ebene oder einer Sphäre ist.

Beweis. ($\Leftarrow$) Dies haben wir in (52.3) gezeigt.
($\Rightarrow$) Da jeder Punkt Nabelpunkt ist, ist die Weingarten-Abbildung proportional zur Identität, i.e. $L_{\varphi(x)} \cdot \varphi_i(x) = \lambda_x \varphi_i(x)$, wobei wir mit dem Index i die partielle Ableitung in die i-te Koordinatenrichtung bezeichnen. Wegen $la_x := \operatorname{Spur}(L_{\varphi(x)})$ ist $\lambda : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ glatt. Also ist $\nu_{i,j} := \partial_j \partial_i (\nu \circ \varphi) = \partial_j (L \cdot \varphi_i) = \partial_j (\lambda\, \varphi_i) = \lambda_j\, \varphi_i + \lambda\, \varphi_{i,j}$. Insbesondere gilt

$$\lambda_j\, \varphi_i = \nu_{i,j} - \lambda \varphi_{i,j} = \nu_{j,i} - \lambda \varphi_{j,i} = \lambda_i\, \varphi_j$$

und somit ist $\lambda_i = 0 = \lambda_j$ für $i \neq j$, d.h. λ ist konstant.

Falls $\lambda = 0$ ist, so ist $L = 0$, also ν konstant und M eine Ebene. Ist $\lambda \neq 0$, dann ist $(\lambda\, \varphi - \nu)_i = la\, \varphi_i - L \cdot \varphi_i = 0$ und somit $\xi := \frac{1}{\lambda}(\lambda\, \varphi - \nu)$ konstant, d.h. $|\varphi - \xi| = \frac{1}{|\lambda|}$. Somit liegt M lokal auf einer Sphäre um ξ. Da die Sphäre aber durch einen kleinen Teil von M eindeutig bestimmt ist, liegt M ganz auf der Sphäre. □

52.6 Satz von Dupin. *Für ein $m \geq 3$ sei $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ein lokaler Diffeomorphismus, für dessen partielle Ableitungen Φ_i orthogonal stehen, d.h. $\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$. Dann sind die Parameterlinien $t \mapsto \Phi(t \cdot e_i)$ Krümmungslinien auf jeder Hyperfläche $\Phi(e_j^\perp)$ für $i \neq j$.*

Man kann sich Φ vorstellen als m jeweils durch $t \in \mathbb{R}$ parametrisierte, paarweise orthogonal schneidende Familien von Flächen $\Phi(te_j + e_j^\perp)$ für $i = 1, \ldots, m$. Man nennt deshalb so ein Φ auch ein m-fach orthogonales Flächensystem.

Beweis. Es sei j fix gewählt. Wir müssen zeigen, daß für $i \neq j$ der Tangentenvektor der Parameterlinie $t \mapsto \Phi(t \cdot e_i)$, also die partielle Ableitung Φ_i, ein Eigenvektor der Weingarten-Abbildung L der Hyperfläche $M := \Phi(e_j^\perp)$ ist. Da $\langle \Phi_k, \Phi_j \rangle = 0$ für alle $k \neq j$ ist, ist Φ_j ein Normalvektor an den Tangentialraum der Hyperfläche M, der ja von den Φ_k mit $k \neq j$ erzeugt wird. Sei ν der normierte Normalvektor. Da $L\, \Phi_i \in TM = \Phi_j^\perp$ ist, ist Φ_i genau dann ein Eigenvektor zu L, wenn $\langle L\, \Phi_i, \Phi_k \rangle = 0$

ist für alle $k \neq i, j$.

$$\begin{aligned}
0 = \langle \Phi_k, \Phi_i \rangle &\overset{\partial_j}{\Rightarrow} \quad 0 = \langle \Phi_{k,j}, \Phi_i \rangle + \langle \Phi_k, \Phi_{i,j} \rangle \qquad (+) \\
0 = \langle \Phi_k, \Phi_j \rangle &\overset{\partial_i}{\Rightarrow} \quad 0 = \langle \Phi_{k,i}, \Phi_j \rangle + \langle \Phi_k, \Phi_{j,i} \rangle \qquad (-) \\
0 = \langle \Phi_i, \Phi_j \rangle &\overset{\partial_k}{\Rightarrow} \quad 0 = \langle \Phi_{i,k}, \Phi_j \rangle + \langle \Phi_i, \Phi_{j,k} \rangle \qquad (-)
\end{aligned}$$

Zieht man von der ersten Gleichung die beiden anderen ab, so erhält man $0 = -2\langle \Phi_{k,i}, \Phi_j \rangle$ und da Φ_j proportional zu ν ist, auch $\langle L\,\Phi_i, \Phi_k \rangle = -\langle \nu, \Phi_{k,i} \rangle = 0$, da partielles Differenzieren nach i von $\langle \nu \circ \Phi, \Phi_k \rangle$ wie im 2.ten Beweis von (51.5) die Gleichung $\langle L \cdot \Phi_i, \Phi_k \rangle + \langle \nu, \Phi_{k,i} \rangle = 0$ liefert. □

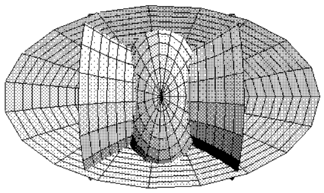
52.7 Beispiel. Die folgenden lokalen Koordinatensysteme erfüllen die Voraussetzungen des Satzes von Dupin (52.6):

1. Kartesische Koordinaten: $\Phi = \mathrm{id}$;
2. Zylinder-Koordinaten: $\Phi : (\varphi, r, z) \leftrightarrow (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi, z)$;
3. Kugel-Koordinaten: $\Phi : (\varphi, \alpha, s) \leftrightarrow (s\cos\alpha\cos\varphi, s\cos\alpha\sin\varphi, s\sin\alpha)$.

52.8 Beispiel (Elliptische Koordinaten)

Es sei: $g(t; x, y, z) := \frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} + \frac{z^2}{c-t}$ mit $0 < a < b < c$. Es ist $g(t; x, y, z) = 1$ ein

$$\begin{cases} \text{Ellipsoid} & \text{für } t < a \\ \text{einschaligen Hyperboloid} & \text{für } a < t < b \\ \text{zweischaligen Hyperboloid} & \text{für } b < t < c. \end{cases}$$



Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned}
&G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \supset U \times V \to \mathbb{R}^3 \\
&G(u, v, w; x, y, z) := \Big(g(u; x, y, z), g(v; x, y, z); g(w, x, y, z)\Big)
\end{aligned}$$

mit $U := \,]-\infty, a[\times]a, b[\times]b, c[$ und $V := \{(x, y, z) : x, y, z > 0\}$, und behaupten, daß die Lösung $\Phi : (u, v, w) \mapsto (x, y, z)$ der impliziten Gleichung $G(u, v, w; x, y, z) = (1, 1, 1)$ ein dreifach orthogonales Flächensystem ist.
Es ist $\Phi : U \to V$ bijektiv, denn durch jeden Punkt $(x, y, z) \in V \subset \mathbb{R}^3$ geht genau

1. ein Ellipsoid mit $u(x, y, z) := t \in \,]-\infty, a[$;
2. ein einschaliges Hyperboloid mit $v(x, y, z) := t \in \,]a, b[$;
3. und ein zweischaliges Hyperboloid mit $w(x, y, z) := t \in \,]b, c[$.

Um das einzusehen beachte man, daß die Gleichung $g(t;x,y,z)-1=0$ nach Ausmultiplizieren der Nenner ein kubisches Polynom γ in t wird bei fixen (x,y,z):

$$\begin{aligned}\gamma(t) := x^2(b-t)(c-t)+y^2(a-t)(c-t)+z^2(a-t)(b-t)\\ -(a-t)(b-t)(c-t).\end{aligned}$$

Für dieses Polynom gilt: $\gamma(a)>0$, $\gamma(b)<0$, $\gamma(c)>0$ und weiters

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{\gamma(t)}{(a-t)(b-t)(c-t)}=-1.$$

Also existiert in jedem der Intervalle $]-\infty,a[$, $]a,b[$ und $]b,c[$ genau eine Nullstelle. Durch Differenzieren der impliziten Gleichung erhalten wir

$$\frac{\partial(G_1,G_2,G_3)}{\partial(u,v,w)}+\frac{\partial(G_1,G_2,G_3)}{\partial(x,y,z)}\cdot\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=0.$$

Die Matrix $\frac{\partial(G_1,G_2,G_3)}{\partial(u,v,w)}$ ist von Diagonalgestalt mit Eintragungen

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,x,y,z)=\frac{x^2}{(a-t)^2}+\frac{y^2}{(b-t)^2}+\frac{z^2}{(c-t)^2}\neq 0 \text{ für } t=u,v,w.$$

Die Matrix $\frac{\partial(G_1,G_2,G_3)}{\partial(x,y,z)}$ hat als Zeilen $\frac{\partial g}{\partial(x,y,z)}=(\frac{2x}{a-t},\frac{2y}{b-t},\frac{2z}{c-t})$ für $t=u,v,w$. Diese Zeilen sind paarweise orthogonal, denn z.B.

$$\begin{aligned}&\frac{4x^2}{(a-u)(a-v)}+\frac{4y^2}{(b-u)(b-v)}+\frac{4z^2}{(c-u)(c-v)}=\\ &=\frac{4}{u-v}\left(\left(\frac{x^2}{a-u}+\frac{y^2}{b-u}+\frac{z^2}{c-u}\right)-\left(\frac{x^2}{a-v}+\frac{y^2}{b-v}+\frac{z^2}{c-v}\right)\right)\\ &=\frac{4}{u-v}(g(u;x,y,z)-g(v;x,y,z)\\ &=\frac{4}{u-v}(1-1)=0.\end{aligned}$$

Also ist der implizite Funktionensatz anwendbar und F glatt mit Jacobimatrix

$$\Phi'(u,v,w)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=-\left(\frac{\partial(G_1,G_2,G_3)}{\partial(x,y,z)}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial(G_1,G_2,G_3)}{\partial(u,v,w)}.$$

Diese hat orthogonale Spalten, also erfüllt Φ die Voraussetzungen von (52.6). Der Diffeomorphismus Φ ist übrigens explizit gegeben durch:

$$\begin{aligned}x^2(u,v,w)&=\frac{(a-u)(a-v)(a-w)}{(a-b)(a-c)}\\ y^2(u,v,w)&=\frac{(b-u)(b-v)(b-w)}{(b-a)(b-c)}\\ z^2(u,v,w)&=\frac{(c-u)(c-v)(c-w)}{(c-a)(c-b)}\end{aligned}$$

Wir wissen also nach (52.6), daß die Krümmungslinien obiger Quadriken gerade die Schnittlinien der orthogonalen Familien sind.

52.9 Beispiel (Parabolische Koordinaten)

Wir gehen analog zu (52.8) vor. Es sei nun: $g(t; x, y, z) := \frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} - 2z + c + \lambda$ mit $a > b$. Es ist $g(t; x, y, z) = 0$ für verschiedene t ein elliptisches bzw. ein hyperbolisches Paraboloid. Es seien u, v und w die Lösungen der kubischen Gleichung $g(t; x, y, x) = 0$ in t, d.h.

$$(u-t)(v-t)(w-t) = (a-t)(b-t)(2z-c-t) - x^2(b-t) - y^2(a-t),$$

also ist

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(u-a)(v-a)(w-a)}{a-b} \\ y^2 &= \frac{(u-b)(v-b)(w-b)}{b-a} \\ z &= \frac{c-a-b+u+v+w}{2} \end{aligned}$$

Die durch diese Gleichungen definierte Funktion $\Phi : (u, v, w) \mapsto (x, y, z)$ erfüllt nun auf $\{(u, v, w) : u, v, w \text{ paarweise verschieden}\}$ die Voraussetzungen des Satzes von Dupin (52.6), denn

$$\Phi'(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{x}{2(u-a)} & \frac{x}{2(v-a)} & \frac{x}{2(w-a)} \\ \frac{y}{2(u-b)} & \frac{y}{2(v-b)} & \frac{y}{2(w-b)} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir wissen also nach (52.6), daß die Krümmungslinien obiger Quadriken gerade die Schnittlinien der orthogonalen Familien sind.

52.10 Satz von Liouville. *Für $n \geq 3$ bildet jeder konforme Diffeomorphismus offener Mengen des $\mathbb{R}^n$ Sphären auf Sphären ab.*

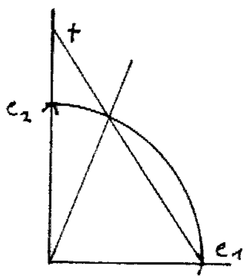
Beweis. Sei S eine Sphäre und $x \in S$ und $v \in T_xS$. O.B.d.A. sei 0 ihr Mittelpunkt. Wir wählen eine lokale orthogonale Parametrisierung φ von S um x mit $\partial_1\varphi(0) = v$ (z.B. die stereographische Projektion). Dann ist $\Phi(t; u) := t\,\varphi(u)$ eine Funktion, welche die Voraussetzungen von (52.6) erfüllt. Die Zusammensetzung $f \circ \Phi$ mit einem konformen Diffeomorphismus f muß ebenfalls die Voraussetzungen von (52.6) erfüllen, also ist $t \mapsto f(\varphi(t\,e_1))$ eine Krümmungslinie und $f'(x)(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\varphi(t\,e_1))$ eine Hauptkrümmungsrichtung. Da aber $v \in T_xS$ beliebig war, sind alle Tangentialvektoren Hauptkrümmungsrichtungen, d.h. $f(S)$ hat nur Nabelpunkte. Wegen (52.5) ist $f(S)$ also Teil einer Sphäre oder einer Ebene. Da $f(S)$ kompakt ist, ist es eine Sphäre. □

Vergleiche dieses Resultat mit den Ergebnissen über konformen Abbildungen im 2-dimensionalen ((33) und (34)).

52.11 Satz von Liouville. *Sei $m \geq 2$. Die Gruppe der konformen Diffeomorphismen des $\mathbb{R}^m$ besteht genau aus den Ähnlichkeitsabbildungen (d.h. (nicht notwendig eigentliche) Bewegungen zusammengesetzt mit Streckungen). Die Gruppe der konformen Diffeomorphismen der S^m wird durch die Ähnlichkeitsabbildungen und die Inversion $x \mapsto \frac{1}{|x|^2}x$ in einer stereographischen Karte erzeugt.*

Beweis. Den Fall $m = 2$ haben wir bereits im Kapitel über Kurven behandelt. Sei also $m > 2$ und f ein konformer Diffeomorphismus des $\mathbb{R}^m$. Nach (52.10) bildet dieser Sphären auf Sphären ab. Und ebenso zeigt man, daß er auch Hyperebenen auf solche abbildet. Da sich Geraden als Durchschnitte von $m-1$ Hyperebenen schreiben lassen, werden auch Geraden auf Geraden abgebildet. Geometrisch kann man das auch mittels des konformen Diffeomorphismuses f^{-1} sehen: Seien x_1, x_2, x_3 verschiedene Punkte einer Geraden. Angenommen die Punkte $y_i = f(x_i)$ lägen auf keiner Gerade. Dann würde eine Sphäre S existieren mit $y_i \in S$. Das Bild $f^{-1}(S)$ müßte aber wieder eine Sphäre sein, auf welcher die Punkte $x_i := f^{-1}(x_i)$ lägen, das ist unmöglich.

Eine Abbildung des $\mathbb{R}^m$, welche Geraden erhält, ist aber bereits affin: Eine solche erhält auch antipodale Punkte auf den Sphären, denn die Tangentialebenen in solchen sind parallel, i.e. sie schneiden den Durchmesser orthogonal, und diese Eigenschaft wird durch f erhalten. Damit muß f aber auch die Mittelpunkte erhalten, denn diese sind die Durchschnitte aller Durchmesser, die ja gerade antipodale Punkte verbinden. Durch Anwenden einer Translation können wir erreichen, daß $f(0) = 0$ ist und somit $f(r\,S^{m-1}) = \rho(r)\,S^{m-1}$ für alle $r > 0$ mit eine Funktion $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Durch Anwenden einer Streckung können wir $\rho(1) = 1$ erreichen. Bleibt zu zeigen, daß $\rho = \mathrm{id}$ und somit f nach (1.2) eine Isometrie ist. Wir betrachten dazu das rechtwinkelige Dreieck mit Ecken 0, e_1, $r \cdot e_2$.



Es wird auf das Dreieck mit Ecken $f(0) = 0$, $f(e_1)$, $f(e_2)$ abgebildet. Schneiden wir die Hypothenuse des ursprünglichen Dreiecks mit der Einheits-Sphäre so erhalten wir ein gleichschenkeliges Dreieck mit diesen beiden Schnittpunkten und 0 als Ecken. Dieses wird durch f auf ein ähnliches Dreieck abgebildet, da der Winkel bei 0 erhalten bleibt, und die Längen der Schenkel um den Faktor $\rho(1) = 1$ gestreckt werden. Damit muß aber auch das ursprüngliche Dreieck auf ein ähnliches abgebildet werden, denn es ist durch den Schnitt der 0 gegenüberliegenden Seite des 2.ten Dreiecks mit den beiden Koordinatenachsen eindeutig festgelegt. Für das Verhältnis der Katheten muß also gelten: $\rho(r)/\rho(1) = r/1$, und somit ist $\rho = \mathrm{id}$.

Im Fall eines konformen Diffeomorphismus f der S^m gehen wir zur Darstellung bezüglich einer stereographischen Projektion über. Diese Darstellung ist dann konform, da die stereographische Projektion Winkel erhält. Falls f den Pol der Projektion nicht invariant läßt, so verschieben wir sein Bild zuerst nach 0 in der Karte und danach wenden wir die Inversion an. Die Zusammensetzung der Kartendarstellung mit diesen beiden konformen Diffeomorphismen liefert uns somit einen konformen Diffeomorphismus $\tilde{f}$ des $\mathbb{R}^n$, welcher wegen Teil 1 eine Ähnlichkeitsabbildung sein muß. □

53. Formeln für Hyperflächen

53.1 Formeln für parametrisierte Flächen

Sei $\varphi : \mathbb{R}^m \to M \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung der Hyperfläche M. Für einen Punkt $p = \varphi(u) \in M$ ist eine Basis des Tangentialraums $T_pM = \operatorname{Bild} \varphi'(u)$ durch $(\partial_1\varphi(u), \dots, \partial_m\varphi(u))$ gegeben, wobei $\partial_i\varphi(u) = \frac{\partial}{\partial u^i}\varphi(u)$ die i-te partielle Ableitung von φ in u ist, wir wollen dafür kurz $\varphi_i(u)$ schreiben. Analog soll $\varphi_{i,j}$ die zweite partielle Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j}\varphi(u)$ sein. Es gilt $\langle(\nu \circ \varphi)(u), \varphi_i(u)\rangle = 0$ für alle i. Als j-te partielle Ableitung erhalten wir: $0 = \langle L\cdot\varphi_j, \varphi_i\rangle + \langle\nu, \varphi_{i,j}\rangle$, also $\langle L\cdot\varphi_j, \varphi_i\rangle = -\langle\nu, \varphi_{i,j}\rangle$. Falls die φ_i orthonormal sind, hätten wir damit die Matrix von L bestimmt. Auch im allgemeinen Fall müßte L durch alle diese inneren Produkte festgelegt sein. Dazu benötigen wir folgendes Lemma aus der linearen Algebra.

53.2 Lemma. *Sei $(g_1, \dots, g_m)$ eine Basis des Vektorraums V und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Sei $g_{i,j} := \langle g_i, g_j\rangle$ und $G = (g_{i,j})$ die zugehörige symmetrische Matrix, $[T] := (T^i_j)$ die Matrix von T bezüglich der Basis $(g_i, \dots, g_j)$, d.h. $Tg_j = \sum_i T^i_j g_i$, und schließlich A die Matrix mit Eintragungen $A^i_j := \langle g_i, Tg_j\rangle$. Dann gilt $[T] = G^{-1} \cdot A$.*

Beweis. Es ist also $Tg_j = \sum_i T^i_j g_i$, wobei j die Spalten und i die Zeilen zählt, und somit

$$A^k_j := \langle g_k, Tg_j\rangle = \left\langle g_k, \sum_i T^i_j g_i \right\rangle = \sum_i \langle g_k, g_i\rangle T^i_j = \sum_i g_{k,i} T^i_j$$

Also ist $A = G \cdot [T]$ und somit $[T] = G^{-1} \cdot A$. □

53.3 Folgerung (Matrixdarstellung der Weingarten-Abbildung).
Die Weingarten-Abbildung hat bezüglich der Basis $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ folgende Matrixdarstellung

$$[L] = -(\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle)^{-1} \cdot (\langle\nu, \varphi_{i,j}\rangle). \quad \square$$

53.4 Formeln für 2-Flächen

Sei nun speziell $m = 2$ (d.h. $n = 3$) und $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(t, s) \mapsto \varphi(t, s)$ eine lokale Parametrisierung. Dann setzt man:

$$\begin{gathered} E := g_{11} = \langle\varphi_t, \varphi_t\rangle, \quad F := g_{12} = \langle\varphi_t, \varphi_s\rangle, \quad G := g_{22} = \langle\varphi_s, \varphi_s\rangle \\ \nu := \frac{1}{|\varphi_t \times \varphi_s|}, \qquad |\varphi_t \times \varphi_s|^2 = |\varphi_t|^2 \cdot |\varphi_s|^2 - \langle\varphi_t, \varphi_s\rangle^2 = EG - F^2 \\ e := -\langle\nu, \varphi_{t,t}\rangle, \quad f := -\langle\nu, \varphi_{t,s}\rangle, \quad g := -\langle\nu, \varphi_{s,s}\rangle. \end{gathered}$$

Bezüglich der Basis (φ_t, φ_s) sehen die Fundamentalformen wie folgt aus:

$$[I] = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \text{ und } [II] = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Die Weingarten-Abbildung ist:

$$\begin{aligned}
[L] &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Gauß-Krümmung ist also

$$K = \det L = \frac{(eg - f^2)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

wie man auch aus $K = \det L = \det(I^{-1} \cdot II) = \det I / \det II$ sieht, und die mittlere Krümmung ist

$$2H = \operatorname{Spur} L = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & * \\ * & Eg - Ff \end{pmatrix} = \frac{Ge - 2Ff + Eg}{EG - F^2}.$$

Die Hauptkrümmungen erhalten wir als Lösung der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - \operatorname{Spur} L \cdot \lambda + \det L = 0$, also $K_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$.
Die Hauptkrümmungsrichtungen sind dann Vektoren $\xi = a_t \varphi_t + a_s \varphi_s$ mit $L(\xi) = K_i \xi$, d.h.

$$\begin{aligned}
0 = 0 \cdot (EG - F^2) &= \det\left(\binom{a_t}{a_s} \quad [L]\binom{a_t}{a_s} \right) \cdot (EG - F^2) \\
&= \det \begin{pmatrix} a_t & (Ge - Ff)a_t + (Gf - Fg)a_s \\ a_s & (Ef - Fe)a_t + (Eg - Ff)a_s \end{pmatrix} \\
&= {a_t}^2 (Ef - Fe) + a_t a_s (Eg - Ge) + {a_s}^2 (Fg - Gf) \\
&= \det \begin{pmatrix} {a_t}^2 & -a_t a_s & {a_s}^2 \\ g & f & e \\ G & F & E \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

53.5 Folgerung. *Die Krümmungslinien $c(t) = \varphi(u(t), v(t))$ sind durch folgende Differentialgleichung gegeben:*

$$(fE - eF)_{c(t)} u'(t)^2 + (gE - eG)_{c(t)} u'(t) v'(t) + (gF - fG)_{c(t)} v'(t)^2 = 0$$

Beweis. Dies folgt sofort aus (53.4) □

Beispiel. Das Heliocoid ist durch $\varphi : (u,v) \mapsto (av\cos u, av\sin u, bu)$ gegeben. Es ist

$$
\begin{aligned}
\varphi_u &= (-av\sin u, av\cos u, b)\\
\varphi_v &= (a\cos u, a\sin u, 0)\\
E &= a^2v^2 + b^2\\
F &= 0\\
G &= a^2\\
D &= a\sqrt{a^2v^2+b^2}\\
\varphi_{u,u} &= (-av\cos u, -av\sin u, 0)\\
\varphi_{u,v} &= (-a\sin u, a\cos u, 0)\\
\varphi_{v,v} &= (0,0,0)\\
e &= 0, \text{ da } v\varphi_v = -\varphi_{u,u}\\
f &= -\frac{a^2b}{D} = -\frac{ab}{\sqrt{a^2v^2+b^2}}\\
g &= 0, \text{ da } \varphi_{v,v} = 0
\end{aligned}
$$

und somit die Gleichung der Krümmungslinien

$$
\begin{aligned}
0 &= (fE-eF)_{c(t)}u'(t)^2 + (gE-eG)_{c(t)}u'(t)v'(t) + (gF-fG)_{c(t)}v'(t)^2\\
&= f(a^2v(t)^2+b^2)u'(t)^2 - fa^2v'(t)^2
\end{aligned}
$$

Wenn wir die Krümmungslinie nach v parametrisieren, d.h. $v(t) = t$ annehmen, dann erhalten wir:

$$u'[v] = \pm\frac{1}{\sqrt{v^2+(b/a)^2}}$$

also

$$u[v] := c \pm \operatorname{arsinh}\frac{a\,v}{b}$$

53.6 Lemma. *Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to M$ eine lokale Parametrisierung um einen Punkt p von M, der nicht Nabelpunkt ist, so gilt: Die Koordinatenrichtungen φ_t und φ_s sind genau dann Hauptkrümmungsrichtungen, wenn $F = I(\varphi_s,\varphi_t) = 0$ und ebenso $f = II(\varphi_t,\varphi_s) = 0$. Es gibt immer eine lokale Parametrisierung mit dieser Eigenschaft.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Da die Krümmungslinien orthogonal stehen ist $F = 0$. Setzen wir die Koordinatenrichtung φ_t in obiger Formel für die Determinante ein, so erhalten wir:

$$0 = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ & f & e\\ & 0 & E\end{pmatrix} = fE$$

und da $E = |\varphi_t|^2 \neq 0$, gilt ebenso $f = 0$.

($\Leftarrow$) Die Koordinaten-Richtungen werden durch $a_t = 0$ bzw. $a_s = 0$ beschrieben. Dann ist aber wegen $F = f = 0$ die zweite Spalte obiger Matrix 0. Somit ist deren Determinante ebenfalls 0.

Für die Existenz solch einer Parametrisierung siehe [**83**, S.40]. □

53.7 Determinatenformeln für die Krümmung

Wir wollen nun bestimmen, welche Größen intrinsisch sind, d.h. sich nicht ändern, wenn wir zu einer isometrischen Fläche übergehen. Das sind also jene Größen, die von einem in der Fläche lebenden Wesen erkannt werden können, ohne das sich diese eines umgebenden Raums bewußt sein müssen. Klarerweise können diese Längen und damit auch Winkel messen. D.h. die 1-te Fundamentalform ist intrinsisch. Nicht jedoch die 2-te Fundamentalform, da sie über die Ableitung des Normalenvektors definiert ist. Wir wissen also von vornherein von keiner der definierten Krümmungen, ob sie intrinsisch sind. Wenn wir Zylinder und Ebene vergleichen, so sehen wir, daß sowohl die Hauptkrümmungen als auch die mittlere Krümmung nicht intrinsisch sind. Wir wollen nun zeigen, daß die Gaußkrümmung es dennoch ist. Dazu benötigen wir zuerst Formeln für e, f und g, in welchen ν nicht vorkommt:

$$\begin{aligned}
e &= -\langle \nu, \varphi_{t,t}\rangle = -\left\langle \frac{\varphi_t \times \varphi_s}{|\varphi_t \times \varphi_s|}, \varphi_{t,t}\right\rangle \\
&= -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \langle \varphi_t \times \varphi_s, \varphi_{t,t}\rangle \\
&= -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,t}) \\
\text{sowie } f &= -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,s}) \\
\text{und } g &= -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{s,s}).
\end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, daß die Fläche A des von zwei Vektoren v und w im $\mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelogramms wie folgt gegeben ist:

$$\begin{aligned}
A &= |v| \cdot |w| \cdot \sin\measuredangle(v,w) = |v| \cdot |w| \cdot \sqrt{1-\cos^2\measuredangle(v,w)} \\
&= |v| \cdot |w| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle v,w\rangle^2}{|v|\cdot|w|}} = \sqrt{|v|^2 \cdot |w|^2 - \langle v,w\rangle^2}
\end{aligned}$$

Wir wollen nun versuchen die Gauß-Krümmung allein durch die Koeffizienten der 1.ten Fundamentalform, sowie deren partiellen Ableitungen darzustellen. Sei dazu $D := \sqrt{EG-F^2}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
KD^4 &\overset{(53.4)}{=\!=} (-eD)(-gD) - (-fD)^2 \\
&= \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,t}) \cdot \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{s,s}) - \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,s})^2 \\
&= \det((\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,t})^*(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{s,s})) - \det((\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,s})^*(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,s})) \\
&= \det\begin{pmatrix} \varphi_t^*\varphi_t & \varphi_t^*\varphi_s & \varphi_t^*\varphi_{s,s} \\ \varphi_s^*\varphi_t & \varphi_s^*\varphi_s & \varphi_s^*\varphi_{s,s} \\ \varphi_{t,t}^*\varphi_t & \varphi_{t,t}^*\varphi_s & \varphi_{t,t}^*\varphi_{s,s} \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} \varphi_t^*\varphi_t & \varphi_t^*\varphi_s & \varphi_t^*\varphi_{t,s} \\ \varphi_s^*\varphi_t & \varphi_s^*\varphi_s & \varphi_s^*\varphi_{t,s} \\ \varphi_{t,s}^*\varphi_t & \varphi_{t,s}^*\varphi_s & \varphi_{t,s}^*\varphi_{t,s} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \det\begin{pmatrix} E & F & \langle\varphi_t,\varphi_{s,s}\rangle \\ F & G & \langle\varphi_s,\varphi_{s,s}\rangle \\ \langle\varphi_{t,t},\varphi_t\rangle & \langle\varphi_{t,t},\varphi_s\rangle & \langle\varphi_{t,t},\varphi_{s,s}\rangle \end{pmatrix} \\
&\quad - \det\begin{pmatrix} E & F & \langle\varphi_t,\varphi_{t,s}\rangle \\ F & G & \langle\varphi_s,\varphi_{t,s}\rangle \\ \langle\varphi_{t,s},\varphi_t\rangle & \langle\varphi_{t,s},\varphi_s\rangle & \langle\varphi_{t,s},\varphi_{t,s}\rangle \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} E & F & \langle\varphi_t,\varphi_{s,s}\rangle \\ F & G & \langle\varphi_s,\varphi_{s,s}\rangle \\ \langle\varphi_{t,t},\varphi_t\rangle & \langle\varphi_{t,t},\varphi_s\rangle & \langle\varphi_{t,t},\varphi_{s,s}\rangle - \langle\varphi_{t,s},\varphi_{t,s}\rangle \end{pmatrix} \\
&\quad - \det\begin{pmatrix} E & F & \langle\varphi_t,\varphi_{t,s}\rangle \\ F & G & \langle\varphi_s,\varphi_{t,s}\rangle \\ \langle\varphi_{t,s},\varphi_t\rangle & \langle\varphi_{t,s},\varphi_s\rangle & 0 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} E & F & F_s-\frac12 G_t \\ F & G & \frac12 G_s \\ \frac12 E_t & F_t-\frac12 E_s & F_{t,s}-\frac12(E_{s,s}+G_{t,t}) \end{pmatrix} \\
&\quad - \det\begin{pmatrix} E & F & \frac12 E_s \\ F & G & \frac12 G_t \\ \frac12 E_s & \frac12 G_t & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

wegen des Entwicklungssatzes von Matrizen und weil:

$$
\begin{gathered}
E = \langle\varphi_t,\varphi_t\rangle, \quad G = \langle\varphi_s,\varphi_s\rangle, \quad F = \langle\varphi_t,\varphi_s\rangle \\
E_t = 2\langle\varphi_{t,t},\varphi_t\rangle, \quad G_t = 2\langle\varphi_{s,t},\varphi_s\rangle, \quad F_t = \langle\varphi_{t,t},\varphi_s\rangle + \langle\varphi_t,\varphi_{s,t}\rangle \\
E_s = 2\langle\varphi_{t,s},\varphi_t\rangle, \quad G_s = 2\langle\varphi_{s,s},\varphi_s\rangle, \quad F_s = \langle\varphi_{t,s},\varphi_s\rangle + \langle\varphi_t,\varphi_{s,s}\rangle, \\
F_s - \frac12 G_t = \langle\varphi_t,\varphi_{s,s}\rangle, \quad F_t - \frac12 E_s = \langle\varphi_{t,t},\varphi_s\rangle, \\
F_{t,s} - \tfrac12 E_{s,s} = \langle\varphi_{t,t,s},\varphi_s\rangle + \langle\varphi_{t,t},\varphi_{s,s}\rangle, \\
G_{t,t} = 2(\langle\varphi_{s,t,t},\varphi_s\rangle + \langle\varphi_{s,t},\varphi_{s,t}\rangle), \\
F_{t,s} - \tfrac12(E_{s,s}+G_{t,t}) = \langle\varphi_{t,t},\varphi_{s,s}\rangle - \langle\varphi_{s,t},\varphi_{s,t}\rangle.
\end{gathered}
$$

Durch Ausmultiplizieren der Determinanten obiger Formel für K erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
4(EG-F^2)^2K = {} & E(E_sG_s - 2F_tG_s + {G_t}^2) \\
& + F(E_tG_s - E_sG_t - 2E_sF_s + 4F_tF_s - 2F_tG_t) \\
& + G(E_tG_t - 2E_tF_s + {E_s}^2) \\
& - 2(EG-F^2)(E_{s,s} - 2F_{t,s} + G_{t,t}).
\end{aligned}
$$

Eine symmetrischere Formel für K ist die folgende:

$$
K = -\frac{1}{D^4}\det\begin{pmatrix} E & E_t & E_s \\ F & F_t & F_s \\ G & G_t & G_s \end{pmatrix} - \frac{1}{2D}\left(\partial_t\frac{E_s-F_t}{D} + \partial_s\frac{G_t-F_s}{D}\right)
$$

wobei wieder $D := \sqrt{EG-F^2}$. Diese kann leicht durch Auflösen der Determinante und durch Differenzieren verifiziert werden.

53.8 Theorema Egregium [**18**]**.** *Sind zwei Flächen aufeinander abwickelbar, d.h. sie sind (lokal) isometrisch, so haben sie in entsprechenden Punkten die gleiche Gauß-Krümmung. Die Gauß-Krümmung K ist also eine intrinsischer Begriff, d.h. sie hängt nur von der Metrik der Fläche und nicht vom umgebenden Raum ab.*

Für eine partielle Umkehrung siehe (60.1).

Beweis. Wegen obiger Formel in (53.7) hängt die Gauß-Krümmung nur von den Koeffizienten der Riemann-Metrik sowie deren 1.ten und 2.ten partiellen Ableitungen ab. Diese sind aber für zwei isometrische Flächen gleich, denn für eine Parametrisierung φ der einen ist $\psi = g \circ \varphi$ eine Parametrisierung der anderen, wo g die lokale Isometrie ist, also ist $\langle T_p g(\xi_1), T_p g(\xi_2)\rangle = \langle \xi_1, \xi_2\rangle$. Wählt man nun für $\xi_i = T\varphi \circ \eta_i$, so folgt das Resultat. □

53.9 Lemma (Jacobi-Gleichung). *Sind (t,s) geodätische Koordinaten auf M (d.h. für die zugehörige Parametrisierung gilt $E = 1$, $F = 0$), so erfüllt die Gauß-Krümmung die* Jacobi-Gleichung*:*

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \sqrt{G}$$

Beweis. Obige Determinanten-Formel für K liefert in diesem Fall:

$$K \cdot G^2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac12 G_t \\ 0 & G & \frac12 G_s \\ 0 & 0 & -\frac12 G_{t,t} \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & G & \frac12 G_t \\ 0 & \frac12 G_t & 0 \end{pmatrix} = -\frac12 G G_{t,t} + \frac14 {G_t}^2$$

$$\Rightarrow \quad K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \sqrt{G} \qquad \square$$

53.10 Formeln für durch Gleichung gegebene Hyperflächen

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine reguläre, lokale Gleichung für M. Der Normalvektor ν ist dann der normierte Gradient von f, i.e.

$$\nu = \frac{\operatorname{Grad} f}{|\operatorname{Grad} f|} = \frac{(f_1, \dots, f_n)}{\sqrt{{f_1}^2 + \dots + {f_n}^2}}.$$

Der Tangentialraum ist gegeben durch

$$T_x M = \operatorname{Ker} f'(x) = (\operatorname{Grad}_x f)^\perp = \left\{ (h^1, \dots, h^n) : 0 = \sum_{i=1}^n h^i f_i \right\}.$$

Für die zweite Fundamentalform gilt somit:

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_x(k,h) &= \langle k, L_x h\rangle = \langle k, \tfrac{d}{dt}\big|_0 \nu(x+th)\rangle = \langle k, \frac{d}{dt}\Big|_0 \frac{\operatorname{Grad} f(x+th)}{|\operatorname{Grad} f(x+th)|}\rangle \\
&= \langle k, \frac{d}{dt}\Big|_0 \frac{\operatorname{Grad} f(x+th)}{|\operatorname{Grad} f(x)|} + \frac{d}{dt}\Big|_0 \frac{\operatorname{Grad} f(x)}{|\operatorname{Grad} f(x+th)|}\rangle \\
&= \frac{1}{|\operatorname{Grad} f(x)|}\tfrac{d}{dt}\big|_0 \underbrace{\langle k, \operatorname{Grad} f(x+th)\rangle}_{f'(x+th)(k)} \\
&\quad + \frac{d}{dt}\Big|_0 \frac{1}{|\operatorname{Grad} f(x+th)|}\langle k, \operatorname{Grad} f(x)\rangle \\
&= \frac{1}{|\operatorname{Grad} f(x)|} f''(x)(h,k) + \tfrac{d}{dt}\big|_0 \frac{1}{|\operatorname{Grad} f(x+th)|} f'(x)(k)
\end{aligned}$$

Für $h \in T_x M$ gilt somit

$$K(h) = \mathrm{II}(h,h) = \frac{1}{|\operatorname{Grad}_x f|} f''(x)(h,h) + 0.$$

Wir wollen nun die Hauptkrümmungen, d.h. die kritischen Werte von K auf $\{h : h \perp \nu,\ |h| = 1\} = \{h \in \mathbb{R}^n : f'(x)h = 0, \langle h,h\rangle = 1\}$ bestimmen. Anstelle von K können wir wegen obiger Formel auch die auf $T_x M$ proportionale Form $h \mapsto f''(x)(h,h)$ verwenden. Wir verwenden die Methode der Lagrange-Multiplikatoren: Danach ist h mit $|h| = 1$ und $f'(x)h = 0$ genau dann ein kritischer Punkt, wenn λ und μ existieren mit

$$2\, f''(x)(h, \_) = \lambda\, 2\, \langle h, \_\rangle + \mu\, f'(x)(\_),$$

oder äquivalent

$$2\, f''(x)(h,k) = \lambda\, 2\, \langle h,k\rangle + \mu\, f'(x)(k) \text{ für alle } k \in \mathbb{R}^n.$$

Wenn wir die Hessesche Matrix $\operatorname{Hess}_x f$ von f bei x durch

$$\Big\langle \operatorname{Hess}_x f \cdot h, k \Big\rangle := f''(x)(h,k)$$

definieren, so ist diese Gleichung mit

$$2\ \operatorname{Hess}_x f \cdot h = \lambda\, 2\, h + \mu\ \operatorname{Grad}_x f$$

äquivalent. Als Matrizen-Gleichung läßt sich das zusammen mit $f'(x)h = 0$ wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Hess}_x f - \lambda\ \mathrm{id} & \operatorname{Grad}_x f \\ f'(x) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix}$$

Eine Lösung $h \neq 0$ existiert genau dann, wenn die Determinante verschwindet, denn wenn $h = 0$ ist, so muß wegen der Gleichung auch $\mu = 0$ sein. Seien die λ_i die Lösungen dieser polynomialen Gleichung in λ. Dann sind die Hauptkrümmungen durch

$$K_i = \frac{\lambda_i}{|\operatorname{Grad}_x f|} = \frac{\lambda_i}{\sqrt{{f_1}^2 + \dots + {f_n}^2}}$$

gegeben, da

$$|\operatorname{Grad}_x f|\, K(h) = f''(x)(h,h) = \lambda |h|^2 + \frac{\mu}{2} f'(x)h.$$

Im Spezialfall, wo die Hessesche Matrix Diagonalgestalt hat, d.h. $f_{i,j} = 0$ für alle $i \neq j$ ist, gilt:

$$0 = \det \begin{pmatrix} f_{1,1}-\lambda & \dots & 0 & f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & f_{n,n}-\lambda & f_n \\ f_1 & \dots & f_n & 0 \end{pmatrix} = (\text{Entwicklung n. 1.Zeile})$$

$$\begin{aligned}
&= (f_{1,1}-\lambda)\det \begin{pmatrix} f_{2,2}-\lambda & \dots & 0 & f_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & f_{n,n}-\lambda & f_n \\ f_2 & \dots & f_n & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^n f_1 \det \begin{pmatrix} 0 & f_{2,2}-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_{n,n}-\lambda \\ f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (f_{1,1}-\lambda)\det \begin{pmatrix} f_{2,2}-\lambda & \dots & 0 & f_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & f_{n,n}-\lambda & f_n \\ f_2 & \dots & f_n & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{2n-1} {f_1}^2 \det \begin{pmatrix} f_{2,2}-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f_{n,n}-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (f_{1,1}-\lambda)\det \begin{pmatrix} f_{2,2}-\lambda & \dots & 0 & f_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & f_{n,n}-\lambda & f_n \\ f_2 & \dots & f_n & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad - {f_1}^2 \prod_{j\neq 1} (f_{j,j}-\lambda)
\end{aligned}$$

Da die Determinante bei einer Permutation der Koordinaten des $\mathbb{R}^n$ unverändert bleibt, muß der Koeffizient von f_i^2 analog zu jenem von f_1^2 sein, und so erhalten wir für sie weiter

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{i=1}^n {f_i}^2 \prod_{j\neq i}(f_{j,j}-\lambda) \\
&= -\Big((-\lambda)^{n-1}\sum_i {f_i}^2 + (-\lambda)^{n-2}\sum_i {f_i}^2 \sum_{j\neq i} f_{j,j} + \dots + \sum_i {f_i}^2 \prod_{j\neq i} f_{j,j}\Big).
\end{aligned}$$

Somit ist die Gauß-Krümmung

$$K = \prod_{i=1}^{m} K_i = \prod_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{|\operatorname{Grad}_x f|} = \sum_i {f_i}^2 \prod_{j \neq i} f_{j,j} \left(\sum_i {f_i}^2 \right)^{-(1+\frac{m}{2})}$$

und die mittlere Krümmung

$$mH = \sum_{i=1}^{m} K_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{|\operatorname{Grad}_x f|} = \sum_i {f_i}^2 \sum_{j \neq i} f_{j,j} \left(\sum_i {f_i}^2 \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

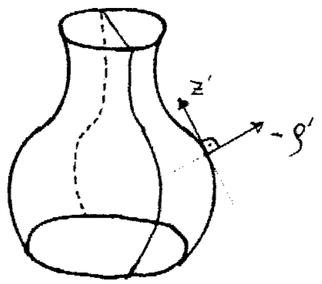
Speziell im $\mathbb{R}^3$ gilt, daß $h = (h^1, h^2, h^3)$ genau dann ein Hauptkrümmungsvektor ist, wenn $f'(x)h = \sum_i h^i f_i = 0$ und $\det(\operatorname{Grad}_x f, h, \operatorname{Hess}_x f \cdot h) = 0$, denn

$$\begin{aligned}
& h = (h^1, h^2, h^3) \quad \text{ist ein Hauptkrümmungsvektor} \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & h \in T_x M \text{ und } \{L_x h, h\} \text{ sind linear abhängig} \\
\Leftrightarrow \quad & h \in T_x M \text{ und } L_x h \times h = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & h \in T_x M \text{ und } \langle L_x h \times h, \nu \rangle = \det(L_x h, h, \nu) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_i h^i f_i = 0 \text{ und } 0 = \det(\nu, h, Lh) = \\
& = \det\left(\frac{\operatorname{Grad} f}{|\operatorname{Grad} f|}, h, \frac{1}{|\operatorname{Grad} f|} \operatorname{Hess}_x f \cdot h + \mathbb{R} \cdot \operatorname{Grad} f \right) \\
& = \frac{1}{(\operatorname{Grad} f)^2} \det\left(\operatorname{Grad} f, h, \operatorname{Hess}_x f \cdot h \right).
\end{aligned}$$

54. Drehflächen

54.1 Definition (Drehfläche)

Unter einer Drehfläche versteht man jenes Gebilde, das entsteht, wenn eine Kurve in der (x, z)-Ebene um die z-Achse gedreht wird. Sei also $c : s \mapsto (r(s), z(s))$ diese Kurve, von der wir annehmen dürfen, daß sie nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Dann ist die davon erzeugte Drehfläche M durch $\{(r(s)x, z(s)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : x \in S^{m-1}\}$ gegeben. Ist also speziell $m = 2$, so können wir S^1 durch $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ parametrisieren und erhalten somit eine Parametrisierung $\varphi : (s, \theta) \mapsto (r(s)\cos\theta, r(s)\sin\theta, z(s))$ von M.



Wir wollen nun die Gauß-Krümmung berechnen. Die partiellen Ableitungen von φ sind

$$\left.\begin{aligned}\varphi_s(s,\theta) &= (r'(s)\cos\theta, r'(s)\sin\theta, z'(s))\\ \varphi_\theta(s,\theta) &= (-r(s)\sin\theta, r(s)\cos\theta, 0)\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} E &= r'(s)^2 + z'(s)^2 = 1\\ F &= 0\\ G &= r(s)^2\end{aligned}\right\} \quad \xrightarrow{\text{Jacobi-Glg.}}$$

$$\Rightarrow \quad K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2(\sqrt{G}) = -\frac{1}{r(s)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2(r(s)) = -\frac{r''(s)}{r(s)}.$$

Wir wollen nun den Satz von Dupin (52.6) verwenden um die Krümmungslinien auf Drehflächen zu bestimmen. Sei dazu $c = (r,z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, welche durch Rotation die Drehfläche erzeugt. Es sei $\Psi(u^1,u^2) := c(u^1) + u^2\,\nu(u^1) = (r(u^1) - u^2\,z'(u^1), r(u^1) + u^2\,r'(u^1))$, wobei ν die Einheitsnormale an c bezeichnet. Dann ist

$$\Psi_1(u^1,u^2) = c'(u^1) + u^2\,\nu'(u^1) = (1 - u^2\,K(u^2))\,\tau(u^1) \perp \nu(u^1) = \Psi_2(u^1,u^2).$$

Folglich erfüllt $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\begin{aligned}\Phi(u^1,u^2,u^3) &:=\\ &= ((r(u^1) - u^2\,z'(u^1))\,\cos u^3, (r(u^1) - u^2\,z'(u^1))\,\sin u^3, r(u^1) + u^2\,r'(u^1)),\end{aligned}$$

die Voraussetzungen von (52.6). Folglich sind sowohl die MERIDIANe $s \mapsto \Phi(s,0,\theta) = \varphi(s,\theta)$ als auch BREITENKREISE $\theta \mapsto \Phi(s,0,\theta) = \varphi(s,\theta)$ Krümmungslinien. Ein Meridian ist der Schnitt von M mit einer Ebene durch die z-Achse. Die Schnittkrümmung in Richtung ξ des Meridians ist also gerade die Krümmung des Meridians bzw. der erzeugenden Kurve c, wenn wir als ν_M gerade $-\nu_c = (z', -r')$ wählen. Das dies eine Hauptkrümmung ist, sieht man übrigens auch direkt: Der Normalvektor an die Fläche in einem Punkt des Meridians liegt in dieser Ebene. Wenn wir ihn also in Richtung ξ des Meridians differenzieren, liegt das Resultat $L\,\xi$ wieder in der Ebene, muß also proportional zu ξ sein. Da c nach der Bogenlänge parametrisiert ist, gilt: $(r'',z'') = K_c(-z',r')$ und somit ist $K_1 := K(\xi) = -\frac{r''}{z'} = \frac{z''}{r'}$. Daß die Breitenkreise ebenfalls Krümmungslinien sind, folgt auch direkt daraus, daß sie normal auf die Meridiane stehen. Für die zweite Hauptkrümmung ergibt sich somit: $K_2 = \frac{K}{K_1} = \frac{z'}{r} = -\frac{r''\,r'}{z''\,r}$. Der Satz von Meusnier (52.4) liefert aber auch eine geometrische Methode die zweite Hauptkrümmung und damit die Gauß-Krümmung zu berechnen: Die Einheitsnormale an die Fläche ist bis auf eine Drehung um die z-Achse um den Winkel θ gerade $(z',0,-r')$. Die Hauptnormale an den Breitenkreis ist der ebenso gedrehte Vektor $(-1,0,0)$. Die Krümmung des Breitenkreises ist $\frac{1}{r}$ und die Normalkrümmung in Richtung seiner Tangente also $K_2 = -\frac{1}{r}\langle(z',0,-r'),(-1,0,0)\rangle = \frac{z'}{r}$.

Asymptotenrichtungen $\xi = \xi^1\varphi_s + \xi^2\varphi_\theta$ sind durch

$$\begin{aligned}0 = K(\xi) = \langle\xi, L\xi\rangle &= \langle\xi^1\varphi_s + \xi^2\varphi_\theta, \xi^1K_1\varphi_s + \xi^2K_2\varphi_\theta\rangle\\ &= (\xi^1)^2K_1E + (\xi^2)^2K_2G + \xi^1\xi^2(K_1+K_2)F\\ &= K_1\,(\xi_1)^2 + G\,K_2\,(\xi^2)^2\end{aligned}$$

gegeben. Für

$$\begin{aligned}1 = |\xi|^2 &= \langle \xi^1\varphi_s + \xi^2\varphi_\theta, \xi^1\varphi_s + \xi^2\varphi_\theta\rangle\\ &= E(\xi^1)^2 + G(\xi^2)^2 + 2F\xi^1\xi^2\\ &= (\xi^1)^2 + G\,(\xi^2)^2\end{aligned}$$

und $K = K_1\,K_2 < 0$ bedeutet dies

$$\begin{aligned}(\xi^1)^2 &= -\frac{K_2}{K_1}\,G\,(\xi^2)^2 = \frac{\frac{K_2}{K_1}}{-1+\frac{K_2}{K_1}} = \frac{K_2}{K_2-K_1}\\ (\xi^2)^2 &= \frac{1}{G}\,\frac{1}{1-\frac{K_2}{K_1}} = \frac{1}{G}\,\frac{K_1}{K_1-K_2}.\end{aligned}$$

54.2 Beispiel. Wir betrachten den Torus mir Radius A der Seele und Radius $a < A$ der Meridiane. Dieser wird durch Rotation der bogenlängenparametrisierten Kurve

$$c(s) := \Big(A, 0\Big) + a\,\Big(\cos(\frac{s}{a}), \sin(\frac{s}{a})\Big)$$

erzeugt. Folglich ist die eine Hauptkrümmung $K_1 := \frac{1}{a} > 0$, die Gaußkrümmung

$$K = -\frac{r''(s)}{r(s)} = \frac{\cos(s/a)/a}{A + a\cos(s/a)},$$

und schließlich die zweite Hauptkrümmung

$$K_2 := \frac{K}{K_1} = \frac{\cos(s/a)}{A + a\cos(s/a)} = \frac{1}{a + A/\cos(s/a)}.$$

Somit verschwindet die Gaußkrümmung am Nord- und am Südpolkreis ($s = \pm\pi/2$). Sie ist positiv auf dem äußeren Hemi-Torus und negativ am inneren. Am äußeren Hemi-Torus existieren keine Asymptotenrichtungen. Die Pol-Kreise sind Asymptotenlinien. In jedem Punkt des inneren Hemi-Torus existieren genau zwei Asymptotenrichtungen $\xi = \xi^1\varphi_s + \xi^2\varphi_\theta$ mit

$$\begin{aligned}(\xi^1)^2 &= \frac{K_2}{K_2-K_1} = \frac{\frac{1}{a+A/\cos(s/a)}}{\frac{1}{a+A/\cos(s/a)} - \frac{1}{a}} = -\frac{a\cos(s/a)}{A}\\ (\xi^2)^2 &= \frac{1}{G}\,\frac{K_1}{K_1-K_2}\\ &= \frac{1}{A(A+a\cos(s/a))}\end{aligned}$$

54.3 Drehflächen konstanter Gauß-Krümmung

Um Drehflächen zu finden, die konstante Gauß-Krümmung $K = -\frac{r''}{r}(s)$ haben, müssen wir also das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}r''(s) + K r(s) &= 0\\ r'(s)^2 + z'(s)^2 &= 1\end{aligned}$$

lösen. Die erste Gleichung hat als lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung einen 2-dimensionale linearen Lösungsraum.

Der Fall $K = 0$ ist nicht sehr interessant, denn dann ist $r'' = 0$, d.h. $r(s) = as + b$ und somit $z(s) = \sqrt{1-a^2}\, s$. Also ist die Lösung ein Kegel für $0 < a < 1$ und in den degenerierten Fällen $a = 0$ ein Zylinder, bzw. für $a = 1$ eine Ebene.

Für $K \neq 0$ erhält man ein Erzeugendensystem durch den Ansatz $r(s) := e^{\lambda\, s}$, woraus sich $\lambda^2 = -K$ ergibt.

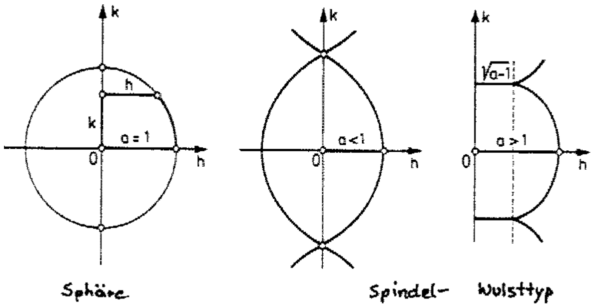
Betrachten wir zuerst den Fall $K > 0$, dann ist $s \mapsto e^{\pm i\sqrt{K}s}$ ein Erzeugendensystem der Lösungen. Die allgemeine reelle Lösung ist also $r : s \mapsto a\cos(\sqrt{K}s) + b\sin(\sqrt{K}s)$. Wenn wir $(a, b) =: r_0(\cos(-\sqrt{K}s_0), \sin(-\sqrt{K}s_0))$ mit $r_0 \geq 0$ setzen, dann ist

$$r(s) = r_0 \cos(\sqrt{K}(s - s_0)).$$

O.B.d.A. ist $s_0 = 0$ (nach einer Zeitverschiebung) und $r_0 > 0$ (sonst parametrisiert φ keine Fläche). Folglich ist

$$z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - r'(\sigma)^2}d\sigma = \int_0^s \sqrt{1 - r_0^2 K \sin^2(\sqrt{K}\ \sigma)}d\sigma,$$

ein Legendre-Integral. Für $r_0^2 K = 1$ liefert das eine Sphäre. Für $r_0^2 K > 1$ eine sogenannte WULSTFLÄCHE, und für $r_0^2 K < 1$ eine SPINDELFLÄCHE. Diese sind alle lokal isometrisch, aber nicht ineinander durch Bewegungen überführbar.



Nun betrachten wir den Fall $K < 0$, dann ist die allgemeine Lösung der ersten Gleichung

$$r(s) = ae^{\sqrt{-K}s} + be^{-\sqrt{-K}s}$$

mit beliebigem a und b.

Falls $ab = 0$, so können wir durch eine Spiegelung der Zeitachse erreichen, daß $a = 0$ ist. Durch eine Zeitverschiebung um $-\ln(b)/\sqrt{-K}$ können wir $b = 1/\sqrt{-K}$ erreichen und durch eine Streckung um $\sqrt{-K}$ und gleichzeitige Umparametrisierung mit Faktor $1/\sqrt{-K}$ ist die Lösung dann

$$r(s) = e^{-s}, \quad z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - e^{-2\sigma}}\, d\sigma \text{ für } s \geq 0.$$

Das ist die Bogenlängen-Parametrisierung der Traktrix. Die zugehörige Drehfläche heißt Pseudosphäre. Man kann $z(s)$ wie folgt ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-e^{-2s}}\,ds &= \int -\sqrt{1-r^2}\,\frac{dr}{r}\\
&= \int -\sqrt{1-\left(\tfrac{2u}{1+u^2}\right)^2}\,\frac{1+u^2}{2u}\,\frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\,du\\
&= \int \frac{(1-u^2)^2}{u(1+u^2)^2}\,du = \int \frac{1}{u} - \frac{4u}{(1+u^2)^2}\,du\\
&= c + \ln u + \frac{2}{1+u^2} = c + \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r}\right) + 1 - \sqrt{1-r^2}\\
&= c + 1 + \operatorname{Arcosh}(\frac{1}{r}) - \sqrt{1-r^2}
\end{aligned}$$

Also

$$z(s) = \operatorname{Arcosh}(\frac{1}{r(s)}) - \sqrt{1-r(s)^2}$$

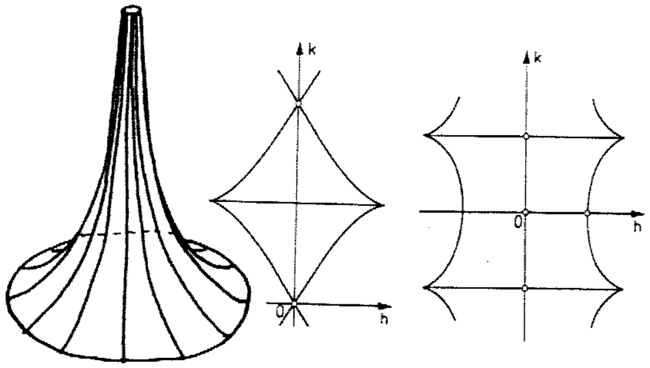
Im Fall $ab \neq 0$ kann man erreichen, daß $a = -b$ oder $a = b$ ist, indem wir s durch $s-c$ ersetzen: Dann ist

$$r(s-c) = a\,e^{-\sqrt{-K}c}\,e^{\sqrt{-K}s} + b\,e^{\sqrt{-K}c}\,e^{-\sqrt{-K}s}.$$

Wählen wir $e^{2\sqrt{-K}c} = |\frac{a}{b}|$, dann ist $|a\,e^{-\sqrt{-K}c}| = |b\,e^{\sqrt{-K}c}|$.
Die entstehenden Flächen

$$\begin{aligned}
r(s) &:= a\,\cosh(\sqrt{-K}s), &\quad z(s) &:= \int_0^s \sqrt{1+a^2K\sinh^2(\sqrt{-K}\sigma)}\,d\sigma;\\
r(s) &:= a\,\sinh(\sqrt{-K}s), &\quad z(s) &:= \int_0^s \sqrt{1+a^2K\cosh^2(\sqrt{-K}\sigma)}\,d\sigma
\end{aligned}$$

nennt man Flächen vom Kegeltyp bzw. vom Kehltyp.



Pseudosphäre Kegel- Kehltyp

54.4 Geodätische Koordinaten der Poincaré'schen Halbebene

Die Poincaré'sche Halbebene M ist die oberer Halbebene $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ versehen mit der Riemann-Metrik $g : (ds)^2 = \frac{1}{y^2}((dx)^2 + (dy)^2)$.

Die Geodäten sind die Kreise mit Mittelpunkt auf der x-Achse, also jene Kreise, die die x-Achse rechtwinklig schneiden. Die Kreise durch ∞ sind dabei die zur y-Achse parallele Geraden. Wir wollen letztere nach Bogenlänge parametrisieren. Sei also $c(t) := (x, t)$. Dann ist die Bogenlänge

$$s(t) = \int |c'(t)|_{c(t)}\, dt = \int \frac{dt}{t} = \ln(t)$$

mit Umkehrfunktion $t(s) = e^s$. Als Parametrisierung von M verwenden wir nun

$$\varphi : (r, \theta) \mapsto (\theta, e^r).$$

Die Ableitung von φ ist somit

$$\varphi'(r, \theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^r & 0 \end{pmatrix}$$

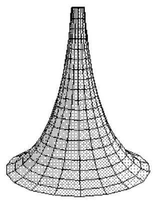
und für die Koeffizienten der Metrik erhalten wir:

$$E = g(\partial_r\varphi, \partial_r\varphi) = 1, \quad F = g(\partial_r\varphi, \partial_\theta\varphi) = 0, \quad G = g(\partial_\theta\varphi, \partial_\theta\varphi) = e^{-2r}.$$

Es gilt somit

$$\sqrt{G}(0, \theta) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}(0, \theta) = -1, \quad K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \sqrt{G} = -1.$$

54.5 Geodätische Koordinaten der Pseudosphäre



Die Pseudosphäre ist die Drehfläche M die bei Rotation der Traktrik $\tau : z = \operatorname{Arcosh}(\frac{1}{\rho}) - \sqrt{1-\rho^2} = \ln\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} - \sqrt{1-\rho^2}$ für $0 < \rho \leq 1$ um die z-Achse entsteht (siehe (54.3)). Die Bogenlängen-Parametrisierung der Traktrix ist durch $\rho = e^{-s}$ gegeben und beschreibt somit nach (57.3.4) eine Geodäte (einen Meridian) auf der Pseudosphäre. Geodätische Koordinaten erhalten wir somit durch den Ansatz:

$$\varphi(r, \theta) = (e^{-r}\cos\theta, e^{-r}\sin\theta, \tau(e^{-r})).$$

Die Ableitung ist somit

$$\varphi'(r, \theta) = \begin{pmatrix} -e^{-r}\cos\theta & -e^{-r}\sin\theta \\ -e^{-r}\sin\theta & e^{-r}\cos\theta \\ -e^{-r}\tau'(e^{-r}) & 0 \end{pmatrix}$$

und für die Koeffizienten der Metrik erhalten wir wegen $\tau'(\rho) = -\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}$:

$$E = \langle \partial_r\varphi, \partial_r\varphi\rangle = 1, \quad F = \langle \partial_r\varphi, \partial_\theta\varphi\rangle = 0, \quad G = \langle \partial_\theta\varphi, \partial_\theta\varphi\rangle = e^{-2r}.$$

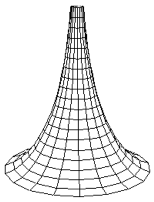
und somit wie in (54.4)

$$\sqrt{G}(0,\theta) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}(0,\theta) = -1, \quad K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2\sqrt{G} = -1.$$

Diese Koordinaten stimmen mit den in (54.4) konstruierten für die Poincaré'sche Halbebene überein, also erhalten wir wie folgt eine Isometrie der Teilmenge $\{(x,y) : y \geq 1\}$ der Poincaré'sche Halbebene auf die Pseudosphäre:

$$\begin{tikzcd}
\text{Poincaré'sche Halbebene} \arrow[rr] & & \text{Pseudosphäre} \\
(x,y) \arrow[rr] & & (\frac{\cos x}{y}, \frac{\sin x}{y}, \tau(\frac{1}{y})) \\
(\theta, e^r) \arrow[rr] & & (e^{-r}\cos\theta, e^{-r}\sin\theta, \tau(e^{-r})) \\
& (r,\theta) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& \mathbb{R}^2 &
\end{tikzcd}$$

Dies kann auch mit einer direkten Rechnung verifiziert werden.



54.6 Geodätische Koordinaten der hyperbolische Scheibe

Die hyperbolische Scheibe ist nach (34.6) die offene Einheitsscheibe $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ versehen mit der Riemann-Metrik

$$g : (ds)^2 = \frac{1}{(1-(x^2+y^2))^2}((dx)^2 + (dy)^2).$$

Geodäten sind jene Kreise (und Geraden), die den Einheitskreis orthogonal treffen. Wir wollen die Geodäten durch 0 wieder nach Bogenlänge parametrisieren. Sei also $c(t) := (t, 0)$. Dann ist die Bogenlänge

$$s(t) = \int |c'(t)|_{c(t)}\, dt = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

mit Umkehrfunktion $t(s) = \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} = \tanh(s)$. Als Parametrisierung von $\mathbb{D}$ verwenden wir nun

$$\varphi : (r, \theta) \mapsto (\theta, \tanh r) \mapsto (\tanh r \cos\theta, \tanh r \sin\theta).$$

Die Ableitung ist somit

$$\varphi'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta/\cosh^2 r & -\tanh r \cdot \sin\theta \\ \sin\theta/\cosh^2 r & \tanh r \cdot \cos\theta \end{pmatrix}$$

und für die Koeffizienten der Metrik erhalten wir:

$$E = g(\partial_r\varphi, \partial_r\varphi) = 1, \quad F = g(\partial_r\varphi, \partial_\theta\varphi) = 0, \quad G = g(\partial_\theta\varphi, \partial_\theta\varphi) = \cosh^2 r.$$

Es gilt somit

$$\sqrt{G}(0,\theta) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}(0,\theta) = 0, \quad K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \sqrt{G} = -1.$$

Dies sind gerade die Koeffizienten einer Fläche von Kehltyp mit Koordinaten

$$r(s) := \frac{1}{2}\left(e^s + e^{-s}\right) = \cosh s, \text{ und } z(s) := \int_0^s \sqrt{1 - r'(\sigma)^2}\, d\sigma$$

aus (54.3). Also erhalten wir analog zu (54.5) eine Isometrie der hyperbolischen Scheibe mit einer Fläche von Kehltyp.

54.7 Eine andere Beschreibung der hyperbolischen Scheibe

Wir wollen die hyperbolische Scheibe nun durch einen Diffeomorphismus so verzerren, daß die Geodäten genau die Geraden werden. Dieser Diffeomorphismus soll die Scheibe invariant lassen und ihren Mittelpunkt und ihren Rand punktweise fix lassen. Dazwischen müssen wir also die Kreise die den Rand orthogonal treffen so deformieren, daß sie Geraden durch die gleichen Schnittpunkte mit den Rand werden. Eine elementar-geometrische Überlegung zeigt, daß dies in Polarkoordinaten durch $(r, \theta) \mapsto (\frac{2r}{1+r^2}, \theta)$ erreicht wird. Unseren gewünschten Diffeomorphismus erhalten wir also durch folgende Zusammensetzung:

$$\begin{tikzcd}
(r,\theta) \arrow[r] \arrow[d, equal] & (\frac{2r}{1+r^2}, \theta) \arrow[d, "\text{kart.Koord.}"] \\
(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}) & (\frac{2r}{1+r^2}\cos\theta, \frac{2r}{1+r^2}\sin\theta) \arrow[d, equal] \\
(x,y) \arrow[u, "\text{Pol.Koord.}"] & (\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2})
\end{tikzcd}$$

Beachte noch, daß die Ableitung von $r \mapsto \frac{2r}{1+r^2}$ durch $r \mapsto \frac{2(1-r^2)}{(1+r^2)^2}$ und die Umkehrfunktion durch $\frac{1-\sqrt{1-r^2}}{r} \leftarrow\!\shortmid r$ gegeben ist (die Wahl der Lösung der quadratische Gleichung ergibt sich dabei aus $r < \frac{2r}{1+r^2}$). Beachte aber, daß wir auf diese Weise keine geodätischen Koordinaten erhalten, denn dazu müßten wir die radialen Geodäten wie in (54.6) zurückparametrisieren.

54.8 Die Poincaré'sche Halbebene ist isomorph zur hyperbolischen Scheibe

Wir betrachten die Möbius-Transformation $\mu : z \mapsto (az+b)/(cz+d)$, die folgende speziellen Werte hat:

$$0 \mapsto -i, \quad i \mapsto 0, \quad \pm 1 \mapsto \pm 1, \quad \infty \mapsto i.$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir: $d = ib$, $b = -ia$, $c = -ia$ und wegen $1 = ad - bc = 2a^2$ schließlich $a = d = 1/\sqrt{2}$ und $b = c = -i/\sqrt{2}$, oder (wenn wir mit $i\sqrt{2}$ erweitern)

$$z \mapsto \frac{iz+1}{z+i}.$$

Sie bildet die obere Halbebene auf die Einheitsscheibe ab. Ihre Umkehrfunktion ist durch $w \mapsto (w+i)/(iw+1)$ gegeben. Wenn wir nun die hyperbolische Metrik auf $\mathbb{D}$ mittels μ auf die obere Halbebene zurückziehen, so erhalten wir die Metrik:

$$|v|_z = |\mu'(z)v|_{\mu(z)} = \frac{|\mu'(z)|}{1-|\mu(z)|^2}\,|v| = \frac{|v|}{i(\bar{z}-z)} = \frac{|v|}{2\mathfrak{Im}(z)}.$$

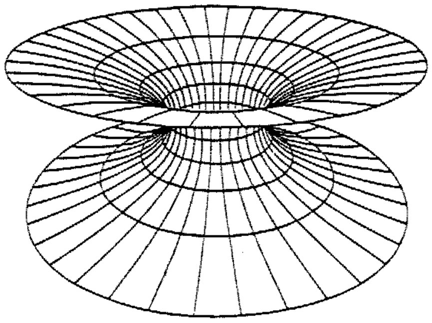
Dies ist bis auf den Faktor 1/2 die Metrik der Poincaré'schen Halbebene aus (54.4).

54.9 Minimale Drehflächen

Wir wollen jene Drehflächen bestimmen, die $H = 0$ erfüllen, siehe Abschnitt (56). Da die beiden Hauptkrümmungen $-\frac{r''}{z'}$ und $\frac{z'}{r}$ sind, müssen wir das Differentialgleichungssystem $r''r = (z')^2 = 1 - (r')^2$ lösen. Dies ist äquivalent zu

$$(\frac{r^2}{2})'' = rr'' + (r')^2 = 1 \text{ mit der einzigen Lösung } r(s)^2 = (s+a)^2 \pm b^2.$$

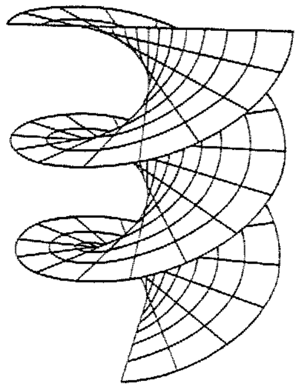
Nach Zeitverschiebung erhalten wir für $r(s)^2 = s^2 - b^2$ mit $b > 0$, daß $r'(s) = \frac{s}{r(s)}$ und somit ist $r'(s)^2 > 1$ also liefert dies keine Lösung. Für $b = 0$ erhalten wir nach Zeitverschiebung (und Spiegelung) die Lösung $r(s) = s$ und $z(s) = 0$, eine Ebene. Für $r(s)^2 = s^2 + b^2$ mit $b > 0$ erhalten wir $z(s) = \int_0^s \frac{b}{\sqrt{\sigma^2+b^2}}\,d\sigma = b\,\mathrm{Arsinh}(s/b)$, d.h. $s = b\sinh(z/b)$ und $r = b\sqrt{1+\sinh^2(z/b)} = b\cosh(z/b)$. Dies ist also gerade die Bogenlängen-Parametrisierung der Kettenlinie $r/b = \cosh(z/b)$.



55. Regelflächen und Torsen

55.1 Definition (Regelflächen und Torsen)

Unter einer Regelfläche versteht man eine 2-Fläche, die sich lokal durch $\varphi : (s,\theta) \mapsto c(\theta) + s\ w(\theta)$ parametrisieren läßt. Damit φ regulär ist muß man offensichtlich voraussetzen, daß $\varphi_s(s,\theta) = w(\theta)$ und $\varphi_\theta(s,\theta) = c'(\theta) + s\ w'(\theta)$ linear unabhängig sind. Durch jeden Punkt einer Regelfläche geht also ein Geradenstück $\theta \mapsto c(\theta) + s\ w(\theta)$. Diese Gerade heißt Erzeugende. Ist der Normalvektor längs jeder Erzeugenden konstant, so spricht man von einer Torse.



55.2 Bemerkung

Wir wollen nun die Parametrisierung $\varphi : (s,\theta) \mapsto c(\theta) + s\, w(\theta)$ einer Regelfläche in 3 Schritten noch etwas verbessern.

1) O.B.d.A. $|w|$=1, denn

$$\bar\varphi(\bar s,\theta) := c(\theta) + \bar s\, \bar w(\theta) = \varphi(s,\theta)$$
$$\text{mit } \bar w(\theta) := \frac{w(\theta)}{|w(\theta)|}, \quad \bar s(s,\theta) := s\,|w(\theta)|$$

2) O.B.d.A. ist zusätzlich $c' \perp w$, denn

$$\bar\varphi(\bar s,\theta) := \bar c(\theta) + \bar s\, w(\theta) = \varphi(s,\theta)$$
$$\text{mit } \bar c(\theta) := c(\theta) + g(\theta)\, w(\theta), \quad \bar s(s,\theta) := s - g(\theta),$$

wobei $0 = \langle \bar c', w\rangle = \langle c' + g'\, w + g\, w', w\rangle = \langle c', w\rangle + g'$, d.h. $g(\theta) := g(0) - \int_0^\theta \langle c', w\rangle$.
3) O.B.d.A. ist zusätzlich $|c'| = 1$, denn

$$\bar\varphi(s,\bar\theta) := \bar c(\bar\theta) + s\, \bar w(\bar\theta) = \varphi(s,\theta)$$
$$\text{mit } \bar c(\bar\theta) := c(\theta), \quad \bar w(\bar\theta) := w(\theta), \quad \bar\theta'(\theta) := |c'(\theta)|$$

Alle diese Annahmen wollen wir im folgenden an die lokale Parametrisierung einer Regelfläche stellen.

55.3 Ein Begleitbein für c

Wir haben in jedem Punkt θ der Kurve c die Orthonormalbasis $(c'(\theta), w(\theta), \nu_{c(\theta)})$ des $\mathbb{R}^3$. Dabei sei M so orientiert, daß diese Basis positiv orientiert ist. Wir wollen für das Begleitbein $(c', w, v := \nu \circ c)$ der Kurve c das Analogon zu den Frenetschen Ableitungsgleichungen herleiten, d.h. die Ableitungen dieser Vektoren in eben dieser Basis ausdrücken. Dazu beachten wir noch, daß $v'(\theta) = T\nu \cdot c'(\theta) = L\, c'(\theta)$ ist, und rechnen:

$$\begin{aligned}
& 1 = \langle w, w\rangle = \langle c', c'\rangle = \langle v, v\rangle \\
\Rightarrow\quad & 0 = \langle w', w\rangle = \langle c'', c'\rangle = \langle v', v\rangle \\
\text{Sei}\quad & \begin{cases} p(\theta) & := \langle c'', w\rangle(\theta) = -\langle c', w'\rangle(\theta) \\ r(\theta) & := \langle c'', v\rangle(\theta) = -\langle c', v'\rangle(\theta) \\ q(\theta) & := \langle w', v\rangle(\theta) = -\langle w, v'\rangle(\theta) \end{cases} \\
\Rightarrow\quad & \begin{cases} c'' & = \langle c'', w\rangle w + \langle c'', v\rangle v = p\, w + r\, v \\ w' & = \langle w', c'\rangle c' + \langle w', v\rangle v = -p\, c' + q\, v \\ v' & = \langle v', c'\rangle c' + \langle v', w\rangle w = -r\, c' - q\, w \end{cases} \\
\text{Kurz also:}\quad & \frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix} c' \\ w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p & r \\ -p & 0 & q \\ -r & -q & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c' \\ w \\ v \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Obige Rechnung läßt sich auch für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve c auf einer allgemeinen Fläche durchführen. Dann ist w ein tangentiales Einheits-Vektorfeld, welches normal auf c' steht. Die Funktion p heißt dann auch Geodätische Krümmung, r Normalkrümmung und q relative Torsion von c.

Für unsere Parametrisierung bedeutet das:

$$\begin{aligned}
\varphi &= c + s\, w \\
\varphi_s &= w \\
\varphi_\theta &= c' + s\, w' = c' + s(-p\, c' + q\, v) = (1 - s\, p)c' + s\, q\, v \\
\varphi_{s,s} &= 0 \\
\varphi_{s,\theta} &= w' = -p\, c' + q\, v
\end{aligned}$$

Somit sind dies geodätische Koordinaten mit

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = (1 - s\, p)^2 + (s\, q)^2, \qquad D^2 = EG - F^2 = G$$

$$e = -\frac{1}{D}\det(\varphi_s, \varphi_\theta, \varphi_{s,s}) = 0$$

$$f = -\frac{1}{D}\det(\varphi_s, \varphi_\theta, \varphi_{s,\theta}) = -\frac{1}{D}\begin{pmatrix} 0 & 1-sp & -p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & sq & q \end{pmatrix} = \frac{q}{D}$$

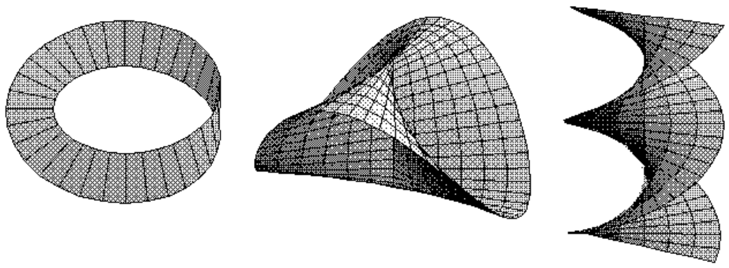
Die Gauß-Krümmung einer Regelfläche ist somit

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{q^2}{G^2} = -\frac{q^2}{((1 - s\, p)^2 + (s\, q)^2)^2} \le 0.$$

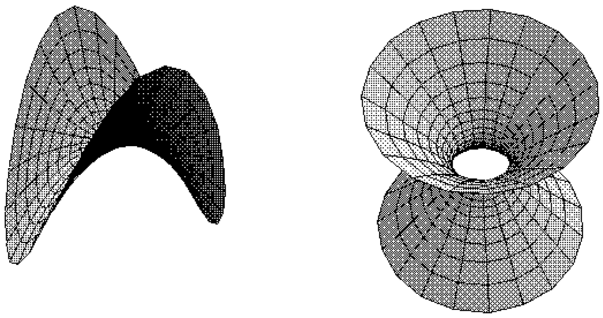
Die Erzeuger $s \mapsto s\,w(\theta)$ sind als Geraden natürlich Asymptotenlinien.

Beispiele von Regelflächen sind:

1. Möbiusband: $\varphi(s,\theta) := ((2-\theta\sin\frac{s}{2})\sin s, (2-\theta\sin\frac{s}{2})\cos s, \theta\cos\frac{s}{2})$.
2. Plückers Kegel: $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$ mit Erzeuger $z =$konstant, d.h. $\frac{y}{x} = \frac{1}{z} \pm \sqrt{\frac{1}{z^2}-1}$.
3. Helicoid oder Wendelfläche: $\tan\frac{z}{a} = \frac{y}{x}$ mit Erzeuger $z = konstant$, d.h. $\frac{y}{x} = \tan\frac{z}{a}$.

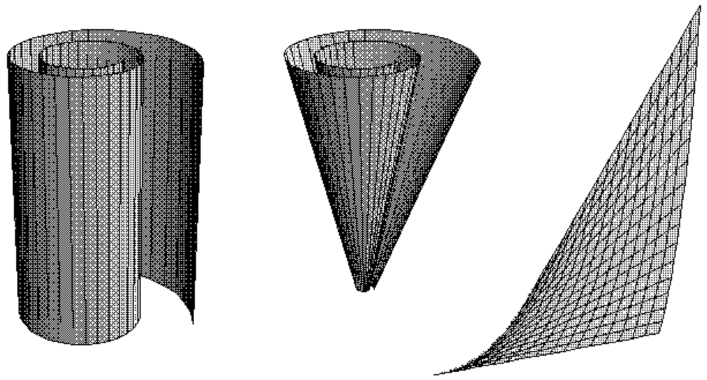


4. hyperbolisches Paraboloid: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, oder parametrisiert durch $\varphi : (t,s) \mapsto (a\,(t+s), \pm b\,s, t^2+2t\,s)$
5. einschaliges Hyperboloid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, oder parametrisiert durch $\varphi : (t,s) \mapsto (a\,(\cos t \mp s\,\sin t), b\,(\sin t \pm s\,\cos t), \pm c\,s)$.



Beispiele von Torsen sind:

1. (verallgemeinerter) Kegel; parametrisiert durch $\varphi(s,\theta) := c_0 + s\,w(\theta)$ für $s \neq 0$ mit $w'(s) \times w(s) \neq 0$.
2. (verallgemeinerter) Zylinder; parametrisiert durch $\varphi(s,\theta) := c(\theta) + s\,w_0$ mit $w_0 \times c'(s) \neq 0$.
3. Tangentialfläche einer regulären Raum-Kurve c mit nirgends verschwindender Krümmung K_c; parametrisiert durch $\varphi(s,\theta) := c(\theta) + sc'(\theta)$ für $s \neq 0$.



55.4 Satz (Charakterisierung von Torsen). *Für eine Regelfläche M, parametrisiert durch $\varphi(s,\theta) = c(\theta) + sw(\theta)$ mit $|w| = |c'| = 1$ und $w \perp c'$, sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *M ist eine Torse;*
2. *$K = 0$;*
3. *$q(\theta) := \langle w'(\theta), v(\theta)\rangle = 0$ für alle θ;*
4. *$L_{\varphi(s,\theta)}\, w(\theta) = 0$ für alle θ und $s(= 0)$;*
5. *$w(\theta)$ ist Hauptkrümmungsrichtung im Punkt $\varphi(s,\theta)$ für alle θ und $s(= 0)$;*
6. *$w'(\theta) \in T_{\varphi(s,\theta)}M$ für alle θ und $s(= 0)$;*

Beweis. Es ist $\varphi_s = w$, $\varphi_\theta = (1 - s\,p)c' + s\,q\,v$ und somit

$$\nu_{\varphi(s,\theta)} = \frac{\varphi_\theta \times \varphi_s}{|\varphi_\theta \times \varphi_s|}(s,\theta) = \frac{(s\,p(\theta) - 1)\,v(\theta) + s\,q(\theta)\,c'(\theta)}{\sqrt{s^2\,q(\theta)^2 + (s\,p(\theta) - 1)^2}}$$

($1 \Leftrightarrow 3$) Es bleibt ν genau dann konstant längs jedes Erzeugers, wenn $(\varphi_\theta \times \varphi_s)(s,\theta) = (s\,p(\theta) - 1)\,v(\theta) + s\,q(\theta)\,c'(\theta)$ konstante Richtung bei variierenden s hat, also wenn $(s\,p(\theta) - 1) : (s\,q(\theta)) = (p(\theta) - \frac{1}{s}) : q(\theta)$ konstant in t ist, d.h. $q(\theta) = 0$ ist.

($3 \Leftrightarrow 2$) Klar, da $K = -\left(\frac{q}{(1-s\,p)^2+(s\,q)^2}\right)^2$.

($1 \Rightarrow 4$) $L_{\varphi(s,\theta)}\, w(\theta) = \frac{\partial}{\partial s}\nu(c(\theta) + s\,w(\theta)) = 0$.

($4 \Rightarrow 3$) Klar, da $L\,w \in TM$, und $\langle w, L\,w\rangle = K(s \mapsto c(\theta) + s\,w(\theta)) = 0$. Also gilt $L_{\varphi(0,\theta)} \cdot w(\theta) = 0 \Leftrightarrow 0 = \langle Lw, c'\rangle = \langle w, Lc'\rangle = \langle w, v'\rangle = -\langle w', v\rangle = q$ wegen (55.3).

($4 \Leftrightarrow 5$) Aus $L\,w = \lambda\,w$ folgt $\lambda = \langle w, L\,w\rangle = K(w) = 0$.

($3 \Leftrightarrow 6$) Es ist $w'(\theta) \in T_{\varphi(s,\theta)}M \Leftrightarrow 0 = \langle w'(\theta), (\varphi_\theta \times \varphi_s)(s,\theta)\rangle = \langle q\,v - p\,c', (s\,p - 1)\,v + s\,q\,c'\rangle = -q(\theta)$ □

55.5 Folgerung (Verschwindende Gauß-Krümmung).
Eine Fläche ohne Nabelpunkte ist genau dann eine Torse, wenn die Gauß-Krümmung überall verschwindet.

Beweis. Da keine Nabelpunkte existieren, können wir orthonormale Vektorfelder von Hauptkrümmungsrichtungen auf M finden. Da $K = 0$, sind die Lösungskurven (Krümmungslinien) des Vektorfelds mit zugehöriger Hauptkrümmung 0 Geraden, also ist M eine Regelfläche. Wegen (55.4) ist M sogar eine Torse. □

Bemerkung

Für Flächen mit Nabelpunkten ist obige Folgerung nicht gültig. Ein Beispiel einer Fläche mit $K = 0$, die aber keine Torse ist, findet sich in [**83**, S.53].

55.6 Lemma (Schmiegtorse). *Sei c eine Kurve in M, für welche es ein Vektorfeld w in TM längs c gibt, mit $II(c', w) = 0$ und $\{c', w\}$ linear unabhängig. Dann ist $(s, \theta) \mapsto c(\theta) + sw(\theta)$ eine Torse, die sogenannte* Schmiegtorse, *da sie die Fläche längs c berührt.*

Falls $II(c', c')(\theta) \neq 0$ für alle θ, so existiert ein solches w, da $c' \notin \{w : II(c', w) = 0\}$.

Beweis. O.B.d.A. sei $|w| = 1$. Es ist $\varphi_{s,\theta} = w'$, also $\langle v, w'\rangle = -\langle(\nu \circ c)', w\rangle = -\langle L\, c', w\rangle = -II(c', w) = 0$, somit parametrisiert φ eine Torse nach (55.4). □

55.7 Folgerung. *Die Hauptnormale an eine nach der Bogenlänge parametrisierte Krümmungslinie c auf M erzeugt eine Schmiegtorse.*

Beweis. Für ein normales Tangentialvektorfeld w an c gilt $II(c', w) = \langle L\, c', w\rangle = K(c')\langle c', w\rangle = 0$. □

55.8 Proposition. *Eine Kurve c auf einer Fläche M ist genau dann eine Krümmungslinie, wenn $\varphi(s, \theta) := c(\theta) + s\nu(c(\theta))$ eine Torse parametrisiert.*

Beweis. Die Kurve c ist genau dann Krümmungslinie, wenn zu jedem θ ein λ existiert mit $L \cdot c'(\theta) = \lambda c'(\theta)$. Wegen $L \cdot c'(\theta) = (\nu \circ c)'(\theta) = w'(\theta)$ ist das genau dann der Fall, wenn $w'(\theta) \in TM$, da $\langle w', w\rangle = 0$, also nach (55.4) genau dann wenn φ eine Torse parametrisiert. □

55.9 Lemma (Generische Torsen). *Jede Torse ist in einer offenen und dichten Teilmenge lokal ein Zylinder, ein Kegel oder die Tangentialfläche an eine Kurve.*

Beweis. Sei $\varphi(s, \theta) = c(\theta) + s\, w(\theta)$ eine lokale Parametrisierung einer Torse mit $|c'| = 1 = |w|$ und $c' \perp w$. Falls w lokal konstant ist, so ist M lokal ein Zylinder. Falls andernfalls $0 \neq w'(= q\, v - p\, c')$ gilt, so ist für Torsen $p = -\langle w', c'\rangle \neq 0$ wegen $q = 0$ nach (55.4). In diesem Fall versuchen wird die Regelfläche so umzuparametrisieren, daß $|c'| = 1 = |w|$ und $c' \perp w'$ gilt. Dazu machen wir den Ansatz $\bar\varphi(\bar s, \theta) = \bar c(\theta) + \bar s \bar w(\theta) = \varphi(s, \theta)$ mit $\bar c(\theta) := c(\theta) + g(\theta)\, w(\theta)$ und $\bar s = s - g(\theta)$, wobei

$$0 = \langle w'(\theta), \bar c'(\theta)\rangle = \underbrace{\langle w'(\theta), c'(\theta)\rangle}_{-p(\theta)} + g(\theta) \underbrace{\langle w'(\theta), w'(\theta)\rangle}_{p(\theta)^2 + q(\theta)^2} + g'(\theta) \underbrace{\langle w'(\theta), w(\theta)\rangle}_{0},$$

d.h. $g := \frac{p}{p^2+q^2}$. Die Kurve $\bar c$ heißt auch Striktionslinie der Regelfläche.

Wir können nun noch wie in (55.2) erreichen, daß $|\bar c'| = 1$ gilt.

Für jede Torse gilt $q = 0$ nach (55.4). Somit ist $\bar c(\theta) = c(\theta) + \frac{1}{p(\theta)}\, w(\theta)$ und

$$\bar c'(\theta) = c'(\theta) + \frac{1}{p(\theta)} \underbrace{w'(\theta)}_{p(\theta)\, c'(\theta)} - \frac{p'(\theta)}{p(\theta)^2}\, w(\theta) = -\frac{p'(\theta)}{p(\theta)^2}\, w(\theta)$$

Es ist also die Striktionslinie $\bar c$ genau dann konstant und somit M lokal ein (verallgemeinerter) Kegel, wenn $p' = 0$ gilt. Falls andererseits p' lokal nicht verschwindet, dann ist $\bar c$ regulär und $\bar c'$ proportional zu w, also M lokal die Tangentialfläche zu $\bar c$.

Die Menge der θ, wo eine der folgenden drei Bedingungen gilt, ist offensichtlich offen und auch dicht,

1. $p = 0$ lokal (dann ist M lokal ein verallgemeinerter Zylinder);
2. $0 \neq p$ lokal konstant (dann ist M lokal ein verallgemeinerter Kegel);
3. $p(\theta)\, p'(\theta) \neq 0$ (dann ist M lokal eine Tangentialfläche):

Falls nämlich eine Umgebung von θ_0 im Komplement dieser Menge liegt, so ist $p\,p' = 0$ lokal und somit, falls $p(\theta) \neq 0$ ist, $p' = 0$ lokal um θ, d.h. p lokal konstant wäre, ein Widerspruch. □

55.10 Taille, Striktions- oder Kehl-Linie

Wir wollen nun noch andere Beschreibungen der Striktionslinieaus (55.9) einer nicht zylindrischen Regelfläche geben. Es seien zwei windschiefe Geraden $t \mapsto a_j + t w_j$ für $j = 0, 1$ gegeben, d.h. $w_1 \times w_2 \neq 0$. Der Abstand zweier Punkte mit Parameter t_0 und t_1 auf ihnen ist

$$d(t_0, t_1) := |a_0 - a_1 + t_0 w_0 - t_1 w_1|.$$

Der kritische Wert muß

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt_0} d(t_0, t_1)^2 = \langle a_0 - a_1 + t_0 w_0 - t_1 w_1, w_0\rangle \quad \text{und} \\ 0 &= \frac{d}{dt_1} d(t_0, t_1)^2 = \langle a_0 - a_1 + t_0 w_0 - t_1 w_1, w_1\rangle \end{aligned}$$

erfüllen. Wegen

$$\det \begin{pmatrix} \langle w_0, w_0\rangle & -\langle w_1, w_0\rangle \\ \langle w_0, w_1\rangle & -\langle w_1, w_1\rangle \end{pmatrix} = -(\langle w_0, w_0\rangle\langle w_1, w_1\rangle - \langle w_0, w_1\rangle^2) = -|w_0 \times w_1|^2 \neq 0$$

existiert eine eindeutige Lösung und zwar ist

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{\langle v_0, a_0 - a_1\rangle\langle v_1, v_1\rangle - \langle v_1, a_0 - a_1\rangle\langle v_0, v_1\rangle}{\langle w_0, w_1\rangle^2 - \langle w_0, w_0\rangle\langle w_1, w_1\rangle} \\ &= \frac{\langle\langle v_1, v_1\rangle v_0 - \langle v_0, v_1\rangle v_1, a_0 - a_1\rangle}{|w_0 \times w_1|^2} \\ &= \frac{\langle v_1 \times (v_0 \times v_1), a_0 - a_1\rangle}{|w_0 \times w_1|^2} = \frac{\det(v_1, v_0 \times v_1, a_0 - a_1)}{|w_0 \times w_1|^2}. \end{aligned}$$

Sei nun $\varphi : (s, \theta) \mapsto c(\theta) + s\, w(\theta)$ Parametrisierung eine Regelfläche mit $|w| = 1$ und $w'(\theta) \neq 0$. Dann ist der Punkt auf dem Erzeuger durch $c(\theta)$ der vom Erzeuger $c(\theta+\varepsilon)$ minimalen Abstand hat, durch

$$c(\theta) - \frac{\det(w(\theta+\varepsilon), w(\theta) \times w(\theta+\varepsilon), c(\theta+\varepsilon) - c(\theta))}{|w(\theta) \times w(\theta+\varepsilon)|^2}\, w(\theta)$$

gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\det(w(\theta+\varepsilon), w(\theta)\times w(\theta+\varepsilon), c(\theta+\varepsilon)-c(\theta))}{|w(\theta)\times w(\theta+\varepsilon)|^2} = \\
&\quad= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\det(w(\theta+\varepsilon), w(\theta)\times \frac{w(\theta+\varepsilon)-w(\theta)}{\varepsilon}, \frac{c(\theta+\varepsilon)-c(\theta)}{\varepsilon})}{|w(\theta)\times \frac{w(\theta+\varepsilon)-w(\theta)}{\varepsilon}|^2} \\
&\quad= \frac{\det(c'(\theta), w(\theta), w(\theta)\times w'(\theta))}{|w(\theta)\times w'(\theta)|^2} = \frac{\langle c'(\theta)\times w(\theta), w(\theta)\times w'(\theta)\rangle}{|w(\theta)\times w'(\theta)|^2} \\
&\quad= \frac{\langle c'(\theta), w(\theta)\rangle\langle w(\theta), w'(\theta)\rangle - \langle c'(\theta), w'(\theta)\rangle\langle w(\theta), w(\theta)\rangle}{|w(\theta)\times w'(\theta)|^2} \\
&\quad= -\frac{\langle c'(\theta), w'(\theta)\rangle}{|w(\theta)\times w'(\theta)|^2}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Identitäten:

$$\begin{aligned}
\det(a,b,c) &= \langle a\times b, c\rangle \\
a\times(b\times c) &= \langle a,c\rangle b - \langle a,b\rangle c \\
\langle a\times b, c\times d\rangle &= \langle a,c\rangle\langle b,d\rangle - \langle a,d\rangle\langle b,c\rangle
\end{aligned}$$

verwendet. Dabei folgt die erste Gleichung durch Interpretation als Volumen des Parallelipipeds; die zweite, da $a\times(b\times c)$ normal auf $b\times c$ und damit im Erzeugnis $\langle\{b,c\}\rangle$ liegt; die dritte durch

$$\begin{aligned}
\langle a\times b, c\times d\rangle &\overset{(1)}{=} \det(a,b,c\times d) = \det(b, c\times d, a) \overset{(1)}{=} \langle b\times(c\times d), a\rangle \\
&\overset{(2)}{=} \langle\langle b,d\rangle c - \langle b,c\rangle d, a\rangle = \langle a,c\rangle\langle b,d\rangle - \langle a,d\rangle\langle b,c\rangle.
\end{aligned}$$

Der Grenzpunkt

$$c(\theta) - \frac{\langle c', w'\rangle}{|w\times w'|^2}(\theta)\, w(\theta) = c(\theta) + \frac{p(\theta)}{p(\theta)^2+q(\theta)^2}\, w(\theta)$$

heißt der ZENTRALE PUNKT am Erzeuger. Die Verbindungskurve der zentralen Punkte ist genau die Striktionslinie.

Wir wollen nun die Punkte der Erzeuger mit minimaler Gauß-Krümmung $K = -\big(q/((1-s\,p)^2+(s\,q)^2)\big)^2$ bestimmen. Dazu müssen wir $s(\theta)$ so bestimmen, daß der Nenner $1-2s\,p(\theta)+s^2\big(p(\theta)^2+q(\theta)^2\big)\geq 0$ möglichst klein wird, d.h. $s(\theta) = p(\theta)/p(\theta)^2+q(\theta)^2$. Diese Punkte sind also genau die zentralen Punkte und für die Gauß-Krümmung in diesen Punkten gilt:

$$\begin{aligned}
K &= -\left(\frac{q}{(1-\frac{p^2}{p^2+q^2})^2+(\frac{pq}{p^2+q^2})^2}\right)^2 = -\left(\frac{q(p^2+q^2)^2}{q^4+p^2q^2}\right)^2 \\
&= -\left(\frac{p(\theta)^2+q(\theta)^2}{q(\theta)}\right)^2
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also folgendes Theorem gezeigt:

55.11 Theorem (Kehllinie). *Die Gauß-Krümmung einer Regelfläche mit $w'(\theta) \neq 0$ ist auf den Erzeugern genau in den zentralen Punkten von maximalem Betrag und zwar $K = -\left(\frac{p(\theta)^2+q(\theta)^2}{q(\theta)}\right)^2$. Die zentralen Punkte sind gegeben durch:*

$$c(\theta) + \frac{p(\theta)}{p^2(\theta)+q^2(\theta)} w(\theta),$$

und sind genau jene Punkte x, wo $w' \perp T_xM$, bzw. jene, die infinitesimal von benachbarten Erzeugern minimalen Abstand haben. □

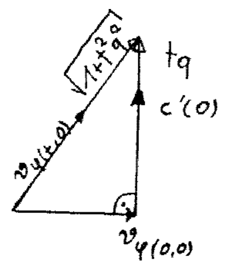
55.12 Satz [Chasle1839]**.** *Sei M eine Regelfläche, $c(0)$ der zentrale Punkt, dann gilt*

$$\tan \sphericalangle(\nu_{c(0)}, \nu_{c(0)+s\,w(0)}) = -s\,q(0).$$

Es ist also der Anstieg der Normalen relativ zur Normalen im zentralen Punkt proportional zur Distanz vom zentralen Punkt.

Beweis. Sei also $x := c(0)$ ein zentraler Punkt.

$$\begin{aligned}
w'(0) \perp T_xM \quad &\Rightarrow \quad 0 = \langle w', \varphi_\theta\rangle = \langle w', c'\rangle = -\langle w, c''\rangle = -p \\
&\Rightarrow \quad \varphi_\theta(s,0) = c'(0) + s\,q(0)v(0) \\
&\Rightarrow \quad \nu_{\varphi(s,0)} = \frac{\varphi_s \times \varphi_s}{|\varphi_\theta \times \varphi_s|}(s,0) \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{|c'(0) + s\,q(0)\,v(0)|} w(0) \times (c'(0) + s\,q(0)\,v(0)) \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{1+s^2q^2(0)} (\nu_{c(0)} - s\,q(0)\,c'(0)) \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{1+s^2q^2(0)}\,\nu_{\varphi(s,0)} = \nu_{c(0)} - s\,q(0)\,c'(0) \\
&\Rightarrow \quad \tan \sphericalangle(\nu_{\varphi(0,0)}, \nu_{\varphi(s,0)}) = -s\,q(0) \quad \square
\end{aligned}$$



56. Minimalflächen

56.1 Definition (Minimalfläche)

Eine Fläche heißt Minimalfläche, falls sie (lokal) ein kritischer Punkt für die Oberfläche ist, d.h. wenn wir sie nur lokal (bzw. auf einem kompakten Teil) variieren. Wir brauchen also nicht die gesamte Oberfläche (die unendlich sein kann), sondern nur jenen Teil, der sich ändert, betrachten.

56.2 Satz, [53]. *Eine Fläche ist genau dann eine Minimalfläche, wenn $H = 0$.*

Beweis. Das vorliegende Variationsproblem besteht also darin, die lokalen Minima der Funktion $M \mapsto \operatorname{vol}(M) := \int_M \operatorname{vol}_M \in \mathbb{R}$ zu bestimmen. Sei die Fläche M ein kritischer Punkt dieses Funktionals. Jede in der Nähe von M liegende Fläche läßt sich per Definition als $\{x + f(x)\nu(x) : x \in M\}$ mit einer reellwertigen glatten Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ darstellen. Somit muß $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \operatorname{vol}(M^t) = 0$ sein, wobei M^t die Fläche $\{x + t\, f(x)\nu(x)\}$ ist. Dazu müssen wir $\frac{d}{dt}\Big|_0 \operatorname{vol}_{M^t}$ bestimmen. Wir wählen eine lokale Parametrisierung $\varphi : U \to M$ von M mit zugehörigen lokalen Koordinaten $(u^1, \dots, u^m)$. Eine lokale Parametrisierung von M^t ist dann $\varphi^t(u) = \varphi(u) + t\, f(\varphi(u))\nu(\varphi(u))$. Lokal ist

$$vol_{M^t} = \sqrt{\det(g^t_{i,j})}\, du^1 \wedge \dots \wedge du^m,$$

wobei

$$g_i^t := \partial_i \varphi^t = \partial_i \varphi + t\Big(\partial_i(f\circ\varphi)\cdot(\nu\circ\varphi) + (f\circ\varphi)\cdot\partial_i(\nu\circ\varphi)\Big)$$

und $g_{i,j} := \langle g_i, g_j\rangle$. Also ist

$$\tfrac{d}{dt}\big|_0\, g_i^t = \Big(\partial_i(f\circ\varphi)\cdot(\nu\circ\varphi) + (f\circ\varphi)\cdot L(\partial_i\varphi)\Big) = \Big(\tfrac{\partial f}{du^i}\cdot\nu + f\cdot L(g_i)\Big)$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\big|_0\, g^t_{i,j} &= \langle g_i, \tfrac{d}{dt}\big|_0\, g^t_j\rangle + \langle \tfrac{d}{dt}\big|_0\, g^t_i, g_j\rangle \\ &= f\cdot\Big(\langle L(\partial_i\varphi), \partial_j\varphi\rangle + \langle\partial_i\varphi, L(\partial_j\varphi)\rangle\Big) =: 2f\, h_{i,j},\end{aligned}$$

und weiters

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\big|_0 \sqrt{\det(g^t_{i,j})} &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\det(g_{i,j})}}\det(g_{i,j})\operatorname{Spur}\Big((g_{i,j})^{-1}(\tfrac{d}{dt}\big|_0\, g^t_{i,j})\Big) \\ &= \sqrt{\det(g_{i,j})}(f\circ\varphi)\operatorname{Spur}\Big((g_{i,j})^{-1}(h_{i,j})\Big) \\ &= \sqrt{\det(g_{i,j})}(f\circ\varphi)\operatorname{Spur} L \\ &= m\sqrt{\det(g_{i,j})}(f\circ\varphi)\, H.\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, daß $\det'(A)(B) = \det A\cdot\operatorname{Spur}(A^{-1}B)$. Also:

$$\tfrac{d}{dt}\big|_0 \operatorname{vol}_{M^t} = mf\, H\, \operatorname{vol}_M$$

Schlußendlich gilt:

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \operatorname{vol}(M^t) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}\int \operatorname{vol}_{M^t} &= \int \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \operatorname{vol}_{M^t} \\ &= m\int_M f\, H\, vol_M.\end{aligned}$$

Soll das für alle in der Nähe von M liegenden Flächen gelten, d.h. für alle $f : M \to \mathbb{R}$, so muß $H = 0$ sein (wähle $f = H$). □

56.3 Plateausches Problem

Sei $c : S^1 \to \mathbb{R}^3$ eine einfachgeschlossene rektifizierbare Kurve. Gesucht ist eine Minimal-Fläche $\varphi : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(S^1) = c(S^1)$. [RadoDouglas1930] haben gezeigt, daß es eine Lösung mit eventuellen, isolierten Singularitäten gibt. [**65**] zeigte, daß die absoluten Minima keine Singularitäten besitzen. Nach [**69**] ist φ auch am Rand differenzierbar, falls c differenzierbar ist.

Folgendes Lemma stellt einen, wegen der Schwingungsgleichung erwarteten, Zusammenhang zwischen Minimalflächen und dem Laplaceoperator her.

56.4 Lemma (Minimalfläche via isothermale Koordinaten).
Eine Fläche M ist genau dann eine Minimalfläche, wenn alle Komponenten einer (jeder) isothermalen Parametrisierung φ harmonisch sind.

Beweis. Eine isothermale Parametrisierung erfüllt $E = G$, $F = 0$. Also ist

$$\begin{aligned}
&2H = \frac{Ge - 2Ff + Eg}{EG - F^2} = \frac{E(e+g)}{E^2} = \frac{e+g}{E}.\\
&\langle \varphi_1, \varphi_1\rangle = E = G = \langle \varphi_2, \varphi_2\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \varphi_{1,1}, \varphi_1\rangle = \langle \varphi_{2,1}, \varphi_2\rangle.\\
&\langle \varphi_1, \varphi_2\rangle = F = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \varphi_{1,2}, \varphi_2\rangle = -\langle \varphi_1, \varphi_{2,2}\rangle.\\
\Rightarrow \quad &\langle \varphi_{1,1} + \varphi_{2,2}, \varphi_1\rangle = 0 \text{ und analog } \langle \varphi_{1,1} + \varphi_{2,2}, \varphi_2\rangle = 0.\\
\Rightarrow \quad &\varphi_{1,1} + \varphi_{2,2} = \lambda\nu \text{ und } e + g = -\langle \varphi_{1,1} + \varphi_{2,2}, \nu\rangle = -\langle \lambda\nu, \nu\rangle = -\lambda.\\
\Rightarrow \quad &\Delta\varphi := \varphi_{1,1} + \varphi_{2,2} = -(e+g)\nu = -2H\,E\,\nu \text{ mit } E = |\varphi_1|^2 = |\varphi_2|^2 > 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun $H = 0 \Leftrightarrow \Delta\varphi := 0$. □

Das führt natürlich in die komplexe Analysis, denn eine Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist genau dann harmonisch, wenn sie der Realteil (oder äquivalent der Imaginärteil) einer holomorphen Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist.

56.5 Lemma (konforme Gaußabbildung). *Die Gauß-Abbildung einer zusammenhängenden Fläche ist genau dann konform, wenn M eine Sphäre oder eine Minimalfläche ist.*

Beweis. Falls M Teil einer Sphäre ist, so ist die Gaußabbildung proportional zur Identität, also konform.

Sei M eine Minimal-Fläche, d.h. $H = 0$. Dann gilt für die Hauptkrümmungen $K_1 = -K_2$, und somit ist $K \le 0$. Nun benutzen wir die charakteristische Gleichung $L^2 - 2H\,L + K\,\mathrm{id} = 0$ für L. Also ist $L^2 = -K \cdot \mathrm{id}$, d.h. $\langle Lv, Lw\rangle = -K\langle v, w\rangle$, und somit ist die Gaußabbildung konform.

Sei umgekehrt die Gaußabbildung konform, d.h. $\langle Lv, Lw\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$, i.e. $L^2 = \lambda \cdot \mathrm{id}$. Also gilt $2\,H\,L = (K + \lambda)\cdot \mathrm{id}$ wegen der charakteristischen Gleichung von L. Falls in einem Punkt $H \ne 0$ ist, dann ist $L = (K + \lambda)/H \cdot \mathrm{id}$, d.h. auf dieser offenen Menge sind alle Punkte Nabelpunkte, also muß nach (52.5) M dort Teil einer Sphäre (oder eine Ebene) sein, und somit H konstant sein. Falls H konstant 0 ist, so liegt eine Minimalfläche vor. □

56.6 Historisches über Minimalflächen

In [Lagrange1760] wurden erstmals Minimalflächen betrachtet, und zwar waren dies solche, die Graph einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind. Die charakterisierende Differentialgleichung ist dann

$$f_{x,x}(1 + f_y^2) - 2 f_x f_y f_{x,y} + f_{y,y}(1 + f_x^2) = 0.$$

Dann zeigte [**53**], daß eine Fläche genau dann minimal ist, wenn ihre mittlere Krümmung verschwindet. Er fand auch heraus, daß die einzigen Minimalflächen mit Geraden als Niveaulinien die Ebene und die Wendelfläche sind, und daß die einzige minimale Drehfläche durch die Kettenlinie entsteht, also das Katenoid, gegeben durch $\varphi(t,s) = (a \cosh s \cos t, a \cosh s \cos t, bs)$, ist.

[**28**] suchte nach Funktionen $z = f(x,y) = g(x) + h(y)$, deren Graph eine Minimalfläche ist und fand $g(x) = \frac{1}{a} \ln \cos ax$, $h(y) = \frac{1}{a} \ln \sin ay$ und somit $f(x,y) = \frac{1}{a} \ln(\frac{\cos ax}{\cos ay})$: In der Tat ist

$$f_{x,x} = g'', \quad f_{x,y} = 0, \quad f_{y,y} = h''$$

für $f(x,y) := g(x) + h(y)$ und somit ist die obige Differentialgleichung

$$g''(x)\,(1 + h'(y)^2) + h''(y)\,(1 + g'(x)^2) = 0$$

Also ist

$$\frac{h''(y)}{1 + h'(y)^2} = a = -\frac{-g''(x)}{1 + g'(x)^2},$$

für eine Konstante a, also

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{a} \log \cos(a\,x) \\ h(y) &= \quad \frac{1}{a} \log \cos(a\,y) \end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel einerMinimalfläche ist, ist Enneper's Fläche $(u,v) \mapsto (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2)$.

[**9**] gelang es schließlich zu zeigen, daß die Wendelfläche die einzige Minimalfläche ist, die eine Regelfläche ist.

[**84**] fand die erste allgemeine Konstruktion für Minimalflächen.

[**67**] zeigte, daß der Graph einer auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten Funktion nur dann eine Minimalfläche ist, wenn er eine Ebene ist.

[**16**] konnte schließlich zeigen, daß die Gaußabbildung einer Minimalfläche, die nicht eine Ebene ist, höchstens 6 Punkte auf der S^2 ausläßt. Ennepers Fläche läßt einen aus. Das Katenoid 2, Scherk's Fläche 4, und es gibt auch Beispiele (Chen's und Voss's Fläche), wo die Gaußabbildung keinen bzw. 3 Punkte ausläßt. Ob es ein Beispiel für 5 bzw. 6 ausgelassene Punkte wirklich gibt, ist unbekannt.

Für dies und vieles andere mehr siehe [**39**].

Für das folgende siehe auch [**46**, S.431]: Sei M eine Riemann-Fläche, $\nu : M \to S^2$ eine meromorphe Funktion und ω eine meromorphe 1-Form auf M. Wir setzen

$$x(p) := \mathfrak{Re} \int_{p_0}^{p} (1 - \nu^2(z))\, \omega(z)$$
$$y(p) := \mathfrak{Re} \int_{p_0}^{p} i(1 + \nu^2(z))\, \omega(z)$$
$$z(p) := \mathfrak{Re} \int_{p_0}^{p} 2\nu(z)\, \omega(z)$$

Dann ist $p \mapsto (x(p), y(p), z(p))$ eine Immersion $M \to \mathbb{R}^3$, deren Bild eine immersierte Minimalfläche ist. Jede immersierte Minimalfläche läßt sich so erhalten: Die geometrische Bedeutung von ν ist die der stereographischen Projektion der Gaußabbildung. Die Gauß-Krümmung ist

$$\int_M K \ \mathrm{vol}_M = \text{Fläche}(\nu(M)) = -\left(\frac{4|\nu'|}{|f|(1+|\nu|^2)^2}\right)^2$$

[**63**]. Eine symmetrischere Gestalt obiger Formeln ist: Seien ω_j holomorphe 1-Formen ohne reelle Perioden, mit $\sum_{j=1}^3 \omega_j^2 = 0$, d.h. falls $\omega_j = \varphi_j(z)\, dz$ ist, so soll $\sum_j \varphi_j^2 = 0$ gelten, und $\sum_{j=1}^3 |\omega_j|^2 > 0$. Dann ist $x_j := \mathfrak{Re}(\int \omega_j)$ die Parametrisierung einer Minimalfläche.

56.7 Folgerung. *Die Gauß-Krümmung einer Minimalfläche ist nirgends positiv. Es gibt keine kompakte Minimalfläche im $\mathbb{R}^3$.*

Beweis. Daß $K \leq 0$ gilt, haben wir im Beweis von (56.5) gezeigt. Und, da nach (60.6) jede kompakte Fläche im $\mathbb{R}^3$ Punkte mit positiver Gauß-Krümmung besitzt, gibt es keine kompakten Minimalflächen. □

57. Geodäten

Wir wollen nun auf allgemeinen Hyperflächen das Problem der kürzesten Verbindungswege lösen.

57.1 Definition (Geodäte)

Unter einer GEODÄTE versteht man eine Kurve in M, welche ein kritischer Punkt für die Bogenlänge ist.

57.2 Satz (Charakterisierung der Geodäten).
Eine Kurve c ist genau dann eine Geodäte, wenn für eine Parametrisierung von c gilt: $c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$ für alle t, d.h. die Beschleunigung nur dazu dient, daß die Kurve auf der Mannigfaltigkeit bleibt. Diese Parametrisierung ist dann automatisch proportional zur Bogenlänge.

Beweis. Sei $c : [a, b] \to M$ eine Kurve, o.B.d.A. nach der Bogenlänge parametrisiert. Diese ist ein kritischer Punkt der Bogenlänge, wenn für alle 1-PARAMETER-FAMILIEn von Kurven (c^s) mit $s \in \mathbb{R}$, die Ableitung $\frac{d}{ds}\big|_{s=0} L(c^s)$ gleich 0 ist. Unter

1-Parameter-Familien von Kurven versteht man Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to M$, $(t,s) \mapsto c^s(t)$, welche $c^s(a) = c(a)$, $c^s(b) = c(b)$ $\forall$ s und $c^0 = c$ erfüllen. Berechnen wir also diese Ableitung, wobei wir $c(t,s) := c^s(t)$ setzen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(c^s) &= \tfrac{d}{ds}\big|_{s=0} \int_a^b |\tfrac{\partial}{\partial t} c(t,s)| dt = \int_a^b \tfrac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} |\tfrac{\partial}{\partial t} c(t,s)| dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} \langle \frac{\partial}{\partial t} c(t,s), \frac{\partial}{\partial t} c(t,s)\rangle}{\underbrace{|\frac{\partial}{\partial t} c(t,0)|}_{=1}} dt \\
&= \int_a^b \Big\langle \tfrac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} \tfrac{\partial}{\partial t} c(t,s), \tfrac{\partial}{\partial t} c(t,0) \Big\rangle dt \\
&= \int_a^b \Big\langle \tfrac{\partial}{\partial t} \tfrac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} c(t,s), \tfrac{\partial}{\partial t} c(t,0) \Big\rangle dt = \qquad \text{(part.Integr.)} \\
&= \Big[\Big\langle \tfrac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} c(t,s), \tfrac{\partial}{\partial t} c(t,0) \Big\rangle \Big]_{t=a}^b \\
&\qquad - \int_a^b \Big\langle \tfrac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} c(t,s), \big(\tfrac{\partial}{\partial t}\big)^2 c(t,0) \Big\rangle dt \\
&= 0 - \int_a^b \langle \eta(t), c''(t)\rangle dt = \int_a^b h \underbrace{\big(\langle c'', \nu\circ c\rangle^2 - \langle c'', c''\rangle\big)}_{\leq 0 \text{ (Cauchy-Schwarz)}}
\end{aligned}$$

Wobei wir $\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} c(t,s) =: \eta(t)$ so gewählt haben, daß

$$\eta(t) = h(t)\Big(c''(t) - \big\langle c''(t), \nu(c(t))\big\rangle\, \nu(c(t))\Big) \in T_{c(t)}M$$

gilt, für eine glatte Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ mit $h(a) = 0 = h(b)$. Dies ist möglich, da η ein Vektorfeld auf M längs c ist, welches nur $\eta(a) = 0 = \eta(b)$ erfüllen muß.

Die Ableitung verschwindet also für solche η genau dann, wenn in der Cauchy-Schwarz Ungleichung Gleichheit gilt: $\langle c'', c''\rangle = \langle c'', \nu\circ c\rangle^2$, i.e. $c''(t) \parallel \nu(c(t))$. Mit anderen Worten, falls $c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$ für alle t.

Umgekehrt sei c eine Parametrisierung, welche $c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$ erfüllt. Dann ist insbesonders $c''(t) \perp c'(t)$ und somit $\langle c'(t), c'(t)\rangle$ konstant, also c proportional zur Bogenlänge parametrisiert. D.h. obige Argumente sind auf c anwendbar. □

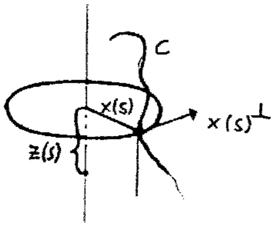
57.3 Beispiele

1. In einer Hyperebene sind offensichtlich die Geraden die Geodäten.
2. Allgemeiner: Die Erzeugenden einer Regelfläche sind Geodäten.
3. Jeder Großkreis auf der Sphäre S^m, d.h. Schnitt einer Ebene durch 0 mit S^m, ist eine Geodäte, denn die 2.Ableitung eines Kreises zeigt zum Mittelpunkt, also genau in Richtung des Normalvektors an die Sphäre.
4. Auf einer Drehfläche sind die Meridiane Geodäten. Auch jene Breitenkreise, welche kritische Punkte für den Radius sind, sind Geodäten.

5. Auf einem Zylinder können wir auch leicht Geodäten in andere Richtungen angeben, nämlich: $t \mapsto (\cos\varphi\; c(t), a \sin\varphi)$, wobei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte der Äquatorialsphäre ist.
6. Allgemeiner: Man kann die Geodäten einer Torse leicht bestimmen, indem man die Torse in der Ebene aufwickelt, denn dort sind sie Geraden.

57.4 Satz von Clairaut. *Auf jeder Drehfläche ist das Produkt aus dem Abstand von der Drehachse mit dem Cosinus des Winkels zwischen einer Geodäte und dem Breitenkreis konstant längs der Geodäte.*

$$\cos \sphericalangle(\textit{Geodäte,Breitenkreis}) \cdot \textit{Radius} = \text{konst}$$



Beweis. Sei $c : t \mapsto (x(t); z(t)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte auf M, d.h. $c''(t) \perp T_{c(t)}M$. Es ist $(x(t)^\perp, 0)$ tangential an den Breitenkreis durch $c(t)$ und $|c'(t)| = 1$, folglich gilt

$$\begin{aligned}
&\Big(\text{Radius} \cdot \cos \sphericalangle(\text{Geodäte,Breitenkreis})\Big)'(t) = \\
&\quad = \frac{d}{dt}\Big(|x(t)| \cdot \frac{1}{|c'(t)|\,|x(t)|} \cos \sphericalangle\Big(c'(t), \begin{pmatrix} x(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix}\Big)\Big) \\
&\quad = \frac{d}{dt}\Big\langle \begin{pmatrix} x'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \Big\rangle \\
&\quad = \Big\langle \begin{pmatrix} x''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \Big\rangle + \Big\langle \begin{pmatrix} x'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \Big\rangle \\
&\quad = \langle c''(t), \begin{pmatrix} x(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \rangle + \langle x'(t), x'(t)^\perp \rangle = 0 + 0,
\end{aligned}$$

da $c''(t) \in T_{c(t)}M$ und somit $c''(t) \perp (x(t)^\perp, 0)$ gilt. Folglich ist der behauptete Ausdruck konstant. □

57.5 Folgerung (Äquator auf Drehflächen). *Unter einem* Äquator *einer Drehfläche versteht man einen Breitenkreis der (lokal) maximalen Radius besitzt. Sei c eine Geodäte, welche den Äquator zum Zeitpunkt* 0 *im Winkel* γ_0 *schneidet. Dann oszilliert die Geodäte um den Äquator genau dann, wenn sie einen Breitenkreis mit Radius* $r(0)\cos\gamma_0$ *sowohl für ein* $t > 0$ *als auch ein* $t < 0$ *trifft.*

Beweis. Es sei $\varphi : (s, \theta) \mapsto (r(s)\cos\theta, r(s)\sin\theta, z(s))$ eine Parametrisierung von M wie in (54.1). Jeder Breitenkreis, dessen Radius ein kritischer Punkt ist (d.h. es gilt $r' = 0$), ist offensichtlich eine Geodäte. Insbesonders gilt das für einen Äquator. Sei nun $c(t) = \varphi(s(t), \theta(s))$ eine Bogenlängen-Parametrisierung einer Geodäte, $r(t) := r(s(t))$ und $\gamma(t) := \sphericalangle(c'(t), \text{Breitenkreis})$. Nach (57.4) ist der Ausdruck “$\cos \sphericalangle$(Geodäte,Breit konstant, also ist $\frac{r(0)}{r(t)}\cos\gamma_0 = \cos\gamma(t) \le 1$. Nach (58.4) stimmen zwei Geodäten, die sich berühren, überein. Falls $\cos\gamma_0 = 0$ ist, so schneidet die Geodäte den Breitenkreis orthogonal, berührt also den Meridian (der nach (57.3.4) eine Geodäte ist), und stimmt somit mit ihm überein. Andernfalls ist $\langle x'(t), x(t)^\perp\rangle = r(t)\cos\gamma(t) = r(0)\cos\gamma_0 \neq 0$ und o.B.d.A. größer als 0. Es ist

$$\begin{aligned}\langle x'(t), x(t)^\perp\rangle &= \langle \frac{d}{dt}\Big(r(s(t))\begin{pmatrix}\cos(\theta(t))\\ \sin(\theta(t))\end{pmatrix}\Big), r(s(t))\begin{pmatrix}-\sin(\theta(t))\\ \cos(\theta(t))\end{pmatrix}\rangle\\ &= r(s(t))^2\,\frac{d}{dt}\theta(t).\end{aligned}$$

Wenn wir $1 = |c'(t)|^2 = |\varphi_s|^2\,(s')^2 + |\varphi_\theta|^2\,(s')^2 = (s')^2 + (r\,\theta')^2$ verwenden, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$(s')^2 = 1 - \Big(\frac{r(0)\cos\gamma_0}{r(s(t))^2}\Big)^2$$

Es wird $\gamma(t_0)$ genau dann 0, wenn $1 = \cos(\gamma(t_0)) = \frac{r(0)}{r(t_0)}\cos\gamma_0$ ist, d.h. $c(t_0)$ auf einem Breitenkreis mit Radius $r(t_0) = r(0)\,\cos\gamma_0$ liegt, und diesen wegen $\gamma(t_0) = 0$ folglich berührt, d.h. $r'(t_0) = 0$ da $r(t) \le r(0)\,\cos\gamma_0$. Falls dieser Radius ein kritischer Punkt ist, so ist dieser Breitenkreis eine Geodäte, und zwar nach (58.4) die einzige Geodäte, die ihm berührt, d.h. r ist konstant und $\gamma = 0$. Andernfalls ist $\frac{d}{ds}r(s) \neq 0$ und somit ist $s'(t) = 0$ wegen $0 = \frac{d}{dt}(r(s(t))) = \frac{d}{ds}r(s)\,\frac{d}{dt}s(t)$. Wegen $s' = 0$ und $\varphi_s \perp \varphi_\theta$ bedeutet

$$c'' = (s')^2\,\varphi_{s,s} + 2\,s'\,\theta'\,\varphi_{s,\theta} + (\theta')^2\,\varphi_{\theta,\theta} + s''\,\varphi_s + \theta''\,\varphi_\theta \perp \varphi_s,$$

daß $-(\theta')^2\,r\,r' + s'' = 0$. Also ist $s'' = (\theta')^2\,r\,r' \neq 0$ und somit nimmt s ein lokales Extremum bei t_0 an. Dies läßt sich direkter auch wie folgt zeigen: Falls eine Geodäte einen Breitenkreis zum Zeitpunkt t_0 berührt, so muß $t \mapsto s(t+t_0) - s(t_0)$ symmetrisch und $t \mapsto \theta(t+t_0) - \theta(t_0)$ schiefsymmetrisch sein: O.B.d.A. ist nämlich $t_0 = 0$ sowie $\theta(t_0) = 0$ und mit $c : t \mapsto \varphi(s(t), \theta(t))$ ist auch $t \mapsto \varphi(s(-t), -\theta(-t))$ eine Geodäte mit gleicher Ableitung bei t_0, da $s'(t_0) = 0$ ist. Nach (58.4) stimmen diese beiden Geodäten überein und, da φ injektiv ist, gelten die behaupteten Symmetrien. □

58. Exponentialabbildung

Wir haben gezeigt: c ist Geodäte $\Leftrightarrow\ \forall\, t : c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$, also genau dann, wenn folgende Differentialgleichung erfüllt ist:

$$c''(t) = \langle c''(t), \nu_{c(t)}\rangle \nu_{c(t)} = -\langle c'(t), L\,c'(t)\rangle \nu_{c(t)}.$$

Diese wollen wir nun in lokalen Koordinaten beschreiben. Dazu entwickeln wir die zweiten partiellen Ableitungen der Parametrisierung φ in der Basis $(\varphi_1, \dots, \varphi_m; \nu)$ von $\mathbb{R}^n$:

58.1 Bemerkung. Es sei M ein Fläche im $\mathbb{R}^3$ und E, F, G die Koeffizienten der 1-ten Fundamentalform, d.h.

$$\begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2}\\ g_{2,1} & g_{2,2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \begin{pmatrix} g^{1,1} & g^{1,2}\\ g^{2,1} & g^{2,2}\end{pmatrix} = \frac{1}{D^2}\begin{pmatrix} G & -F\\ -F & E\end{pmatrix},$$

wobei $D := \sqrt{E\,G - F^2}$. Die Christoffelsymbole 1-ter Ordnung haben dann folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i,j,k} &:= \frac{1}{2}\,\Big(\partial_i(g_{j,k}) + \partial_j(g_{i,k}) - \partial_k(g_{i,j})\Big)\\
\Gamma_{1,1,1} &:= \frac{1}{2}\,E_1\\
\Gamma_{1,2,1} &:= \frac{1}{2}\,E_2\\
\Gamma_{2,2,1} &:= \frac{1}{2}\,(2F_2 - G_1)\\
\Gamma_{1,1,2} &:= \frac{1}{2}\,(2F_1 - E_2)\\
\Gamma_{1,2,2} &:= \frac{1}{2}\,G_1\\
\Gamma_{2,2,2} &:= \frac{1}{2}\,G_2
\end{aligned}$$

Und für jene zweiter Ordnung gilt:

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{i,j} &:= \Gamma_{i,j,1}\,g^{1,k} + \Gamma_{i,j,2}\,g^{2,k}\\
\Gamma^1_{1,1} &:= \Gamma_{1,1,1}\,g^{1,1} + \Gamma_{1,1,2}\,g^{2,1}\\
&= \frac{E_1}{2}\,\frac{G}{D^2} + (F_1 - \frac{E_2}{2})\,\frac{-F}{D^2} = \frac{G\,E_1 - 2\,F\,F_1 + F\,E_2}{2\,D^2}\\
\Gamma^1_{1,2} &:= \Gamma_{1,2,1}\,g^{1,1} + \Gamma_{1,2,2}\,g^{2,1}\\
&= \frac{E_2}{2}\,\frac{G}{D^2} + \frac{G_1}{2}\,\frac{-F}{D^2} = \frac{G\,E_2 - F\,G_1}{2\,D^2}\\
\Gamma^1_{2,2} &:= \Gamma_{2,2,1}\,g^{1,1} + \Gamma_{2,2,2}\,g^{2,1}\\
&= (F_2 - \frac{G_1}{2})\,\frac{G}{D^2} + \frac{G_2}{2}\,\frac{-F}{D^2} = \frac{2\,G\,F_2 - G\,G_1 - F\,G_2}{2\,D^2}\\
\Gamma^2_{1,1} &:= \Gamma_{1,1,1}\,g^{1,2} + \Gamma_{1,1,2}\,g^{2,2}\\
&= \frac{E_1}{2}\,\frac{-F}{D^2} + (F_1 - \frac{E_2}{2})\,\frac{E}{D^2} = \frac{-F\,E_1 + 2\,E\,F_1 - E\,E_2}{2\,D^2}\\
\Gamma^2_{1,2} &:= \Gamma_{1,2,1}\,g^{1,2} + \Gamma_{1,2,2}\,g^{2,2}\\
&= \frac{E_2}{2}\,\frac{-F}{D^2} + \frac{G_1}{2}\,\frac{E}{D^2} = \frac{-F\,E_2 + E\,G_1}{2\,D^2}\\
\Gamma^2_{2,2} &:= \Gamma_{2,2,1}\,g^{1,2} + \Gamma_{2,2,2}\,g^{2,2}\\
&= (F_2 - \frac{G_1}{2})\,\frac{-F}{D^2} + \frac{G_2}{2}\,\frac{E}{D^2} = \frac{-2\,F\,F_2 + F\,G_1 + E\,G_2}{2\,D^2}
\end{aligned}$$

58.2 Ableitungsgleichungen für Flächen.
Die zweiten partiellen Ableitungen einer lokalen Parametrisierung φ besitzen folgende

Entwicklung in der Basis $(\varphi_1,\dots,\varphi_m,\nu)$*:*

$$\varphi_{i,j}(u)=\sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k(u)\varphi_k(u)-h_{i,j}(u)\nu_{\varphi(u)},$$

wobei $h_{i,j}:=-\langle\varphi_{i,j},\nu\rangle=\langle\varphi_i,L\,\varphi_j\rangle$ *und* $\Gamma_{i,j}^k$ *die entsprechend gewählten Koeffizienten sind, diese heißen auch* CHRISTOFFELSYMBOLE DER 2-TEN ART.
Die Christoffelsymbole $\Gamma_{i,j}^k$ *der 2-ten Art können aus den* CHRISTOFFELSYMBOLEN DER 1-TEN ART

$$\Gamma_{i,j,k}:=\langle\varphi_{i,j},\varphi_k\rangle=\tfrac{1}{2}(\partial_j g_{i,k}+\partial_i g_{k,j}-\partial_k g_{i,j})$$

wie folgt berechnet werden:

$$\Gamma_{i,j}^k=\sum_{l=1}^m \Gamma_{i,j,l}g^{l,k}\quad \textit{mit } (g^{l,k}):=(g_{l,k})^{-1} \textit{ und } g_{l,k}:=\langle\varphi_l,\varphi_k\rangle.$$

Beweis. Um die Koeffizienten der Entwicklung von $\varphi_{i,j}$ zu berechnen, bilden wir zuerst das innere Produkt mit ν und erhalten $\langle\varphi_{i,j},\nu\rangle=0-h_{i,j}\cdot 1$ für den Koeffizienten von ν. Indem wir das innere Produkt mit φ_l berechnen erhalten wir:

$$\Gamma_{i,j,l}:=\langle\varphi_{i,j},\varphi_l\rangle=\left\langle\sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k(u)\varphi_k(u),\varphi_l(u)\right\rangle+0=\sum_{k=1}^m\Gamma_{i,j}^k g_{k,l}.$$

Durch Multiplikation mit der inversen Matrix $(g^{l,p})$ ergibt sich:

$$\sum_{l=1}^m \Gamma_{i,j,l}g^{l,p}=\sum_{l=1}^m\sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k g_{k,l}g^{l,p}=\sum_{k=1}^m\Gamma_{i,j}^k\delta_k^p=\Gamma_{i,j}^p.$$

Es gilt:

$$\partial_k g_{i,j}=\partial_k\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle=\langle\varphi_{i,k},\varphi_j\rangle+\langle\varphi_i,\varphi_{j,k}\rangle.$$

Durch zyklisches Vertauschen erhalten wir:

$$\begin{aligned}\partial_i g_{j,k}&=\langle\varphi_{j,i},\varphi_k\rangle+\langle\varphi_j,\varphi_{k,i}\rangle\\ \partial_j g_{k,i}&=\langle\varphi_{k,j},\varphi_i\rangle+\langle\varphi_k,\varphi_{i,j}\rangle.\end{aligned}$$

Die alternierende Summe dieser 3 Gleichungen ist

$$2\Gamma_{k,j,i}=2\langle\varphi_{k,j},\varphi_i\rangle=\partial_j g_{k,i}-\partial_i g_{j,k}+\partial_k g_{i,j}.\qquad\square$$

58.3 Die Differentialgleichung für Geodäten $c:=\varphi\circ u$ mit lokaler Darstellung $u(t)=(u^1(t),\dots,u^m(t))$ sieht in lokalen Koordinaten nun so aus:

$$c(t)=(\varphi\circ u)(t)\quad\Rightarrow\quad c'(t)=\sum_i\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}\cdot\frac{du^i}{dt}$$

$$\Rightarrow\quad c''(t)=\sum_i\left(\sum_j\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i\partial u^j}\cdot\frac{du^i}{dt}\cdot\frac{du^j}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}\cdot\frac{d^2u^i}{dt^2}\right)\tag{58.2}$$

$$\in\sum_k\left(\sum_{i,j}\Gamma_{i,j}^k\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}+\frac{d^2u^k}{dt^2}\right)\varphi_k+\mathbb{R}\cdot\nu.$$

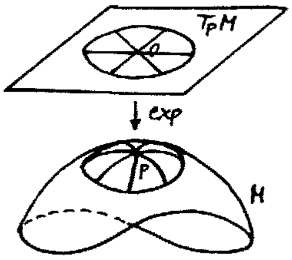
Also ist c eine Geodäte, d.h. $c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$ genau dann, wenn

$$\frac{d^2u^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^m \Gamma^k_{i,j} \frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0 \qquad \text{für } k = 1, \dots, m.$$

Dieses System gewöhnlicher Differentialgleichungen 2.ter Ordnung hat bei vorgegebenen Anfangsdaten $u^k(0)$ und $\frac{du^k}{dt}(0)$ lokal eine eindeutig bestimmte Lösung.

58.4 Lemma. Die Exponentialabbildung.
Zu jedem $x \in M$ und $\xi \in T_xM$ existiert eine eindeutige Geodäte $c : I \to M$ mit maximalen Definitionsintervall $I \subseteq \mathbb{R}$, mit konstanter skalarer Geschwindigkeit und Anfangsbedingung $c(0) = x$, $c'(0) = \xi$.

Ordnet man nun $\xi \in TM$ den Wert $c(1)$ der Geodäte c mit Anfangsbedingung ξ 1 zu, so nennt man das Ergebnis $\exp(\xi)$. Die Exponentialfunktion $\exp$ *ist auf einer offenen Umgebung des Nullschnitts M in TM definiert. Sie ist dort glatt, hat Werte in M und erfüllt: $exp_x(0_x) = x$ und $T_{0_x}(\exp_x) = \mathrm{id}_{T_xM}$, wobei* $\exp_x := \exp|_{T_xM} : T_xM \to M$. *Die Geodäte c mit Anfangswert ξ ist dann durch $c(t) = \exp(t\,xs)$ gegeben.*



Der Grund für die Bezeichnungsweise exp ist, daß für $M := S^1 \subset \mathbb{C}$ mit $TM = \{(x, t\,x^\perp) : |x| = 1, t \in \mathbb{R}\} \cong S^1 \times \mathbb{R}$ die Exponentialabbildung gegeben ist durch $\exp(x, t\,x^perp) = x\,e^{i\,t}$. Für allgemeine Liegruppen anstelle von S^1 siehe auch (67.6).

Beweis. Die lokale Formel aus (58.3) für die Geodätengleichung zeigt, daß exp durch eine gewöhnliche Differentialgleichung 2.ter Ordnung gegeben ist. Aus der glatten Abhängigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen von den Anfangsdaten folgt, daß die Exponentialfunktion auf einer offenen Umgebung von M in TM definiert und dort glatt ist.

Eine andere Möglichkeit dies zu sehen ohne dabei lokale Koordinaten zu verwenden, geht wie folgt:
Falls c eine Geodäte ist, so gilt $c''(t) = \lambda(t) \cdot \nu_{c(t)}$, wobei

$$\lambda(t) = \langle c''(t), \nu(c(t))\rangle = \langle c'(t), (\nu \circ c)'(t)\rangle = -\langle c', L \circ c'\rangle(t) = -K(c'(t)),$$
$$\text{d.h.: } c \text{ ist Geodäte } \Leftrightarrow c'' = -\langle c', (\nu \circ c)'\rangle(\nu \circ c).$$

Wählen wir eine lokale Gleichung f für M, dann ist $\nu = \frac{1}{|\operatorname{Grad} f|} \operatorname{Grad} f$ und macht nicht nur auf M sondern auch lokal im umgebenden $\mathbb{R}^n$ Sinn. Somit ist die obige Geodätengleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung 2.ter Ordnung am $\mathbb{R}^n$, besitzt also bei vorgegebener Anfangsbedingung für $c(0)$ und $c'(0)$ eine eindeutige Lösung $c : I \to \mathbb{R}^n$, welche glatt von den Anfangsdaten abhängt.
Es ist noch zu zeigen, daß die Kurve c in M bleibt. Da für eine Lösung $\langle c', \nu \circ c\rangle' =$

$\langle c'', \nu \circ c\rangle + \langle c', (\nu \circ c)'\rangle = 0$ gilt, ist $\langle c', \nu \circ c\rangle$ konstant und zwar gleich $\langle c'(0), \nu_{c(0)}\rangle = \langle \xi, \nu_x\rangle = 0$. Somit gilt:

$$(f \circ c)'(t) = \langle \mathrm{Grad}_{c(t)} f, c'(t)\rangle = |\,\mathrm{Grad}_{c(t)} f| \cdot \langle \nu_{c(t)}, c'(t)\rangle = 0,$$

Es ist also $f \circ c$ konstant gleich $f(c(0)) = f(x) = 0$, d.h. $c(t) \in f^{-1}(0) = M$.

Falls c_ξ die Geodäte mit Anfangswert $c'(0) = \xi$ bezeichnet, so ist für $t \in \mathbb{R}$ die Kurve $s \mapsto c_\xi(t\,s)$ die Geodäte mit Anfangswert $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} c_\xi(t\,s) = t\,c'_\xi(0) = t\,\xi$ also gilt folgende Homogenitätsrelation

$$c_\xi(t\,s) = c_{t\,\xi}(s).$$

Es ist somit $c_\xi(t) = c_{t\,\xi}(1) = \exp(t\,\xi)$ und damit $\exp(0_x) = c_{0_x}(0) = x$ und $T_{0_x} \exp_x \cdot \xi = \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp_x(t\,xs) = \frac{d}{dt}\Big|_0 c_\xi(t) = \xi$. □

58.5 Geodätische Polarkoordinaten

Wir können nun die Existenz von lokalen Koordinaten φ auf jeder Riemann-Fläche zeigen, welche $E = 1$ und $F = 0$ erfüllen.

Seien dazu Polarkoordinaten in T_xM gewählt. Wegen $T_{0_x} exp_x = \mathrm{id}_{T_xM}$, ist $\exp_x$ ein lokaler Diffeomorphismus von T_xM nach M und wir erhalten eine Parametrisierung

$$\varphi(r, \theta) := \exp_x(r(\cos\theta \cdot v + \sin\theta \cdot v^\perp)) \quad \text{mit } \varphi(0, \theta) = p,$$

wobei v ein Einheitsvektor in T_xM ist.

Da $t \mapsto \exp(tw)$ die Geodäte mit Anfangswert $w \in T_xM$ ist, ist $r \mapsto \varphi(r, \theta)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte mit Anfangsrichtung $v_\theta := \cos\theta \cdot v + \sin\theta \cdot v^\perp$, $|v_\theta| = 1$, eine sogenannte radiale Geodäte. Also gilt:

$$\left.\begin{aligned} E = |\varphi_r|^2 = |v_\theta|^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad \langle \varphi_r, \varphi_{r,\theta}\rangle = 0 \\ \varphi_{r,r} \perp TM \quad &\Rightarrow \quad \langle \varphi_{r,r}, \varphi_\theta\rangle = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r}\langle \varphi_r, \varphi_\theta\rangle = \langle \varphi_{r,r}, \varphi_\theta\rangle + \langle \varphi_r, \varphi_{\theta,r}\rangle = 0.$$

Außerdem ist $\varphi(0, \theta) = x$ und somit $\varphi_\theta(0, \theta) = 0$, also $F = \langle \varphi_r(r, \theta), \varphi_\theta(r, \theta)\rangle = \langle \varphi_r(0, \theta), \varphi_\theta(0, \theta)\rangle = 0$. Schließlich ist $G = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta\rangle \geq 0$.

Die geschlossenen Kurven $\theta \mapsto \varphi(r, \theta)$ nennt man geodätische Kreise. Diese sind im allgemeinen keine Geodäten!

58.6 Satz. Geodätische Parallelkoordinaten.
Die Koeffizienten einer Riemann-Metrik haben genau dann lokal die Gestalt $E = 1$, $F = 0$ und $G > 0$, wenn $t \mapsto \varphi(t, s)$ nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäten sind, welche die Kurven $s \mapsto \varphi(t, s)$ orthogonal schneiden. Insbesondere ist also die Länge ihrer Segmente von $s = s_1$ bis $s = s_2$ gerade $s_2 - s_1$, und somit unabhängig von s.

Zu jeder Kurve $c : \mathbb{R} \to M$ existieren längs c eindeutig bestimmte lokale Koordinaten φ mit obigen Eigenschaften und $\varphi(0, s) = c(s)$.

Für einen geodätischen Kreis c sind das gerade die geodätischen Polarkoordinaten aus (58.5).

Beweis. Zuerst die Existenz: Dafür wählen wir ein Einheitsvektorfeld ξ längs c, welches normal steht auf c' und definieren eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch $\varphi(t,s) := \exp_{c(s)}(t\xi(s))$. Dann ist $\varphi(0,s) = c(s)$ und $t \mapsto \varphi(t,s)$ ist die bogenlängenparametrisierte Geodäte mit Anfangsvektor $\xi(s)$. Also gilt: $\varphi_s(0,s) = c'(s)$ sowie $\varphi_t(0,s) = \xi(s)$ und somit ist φ ein lokaler Diffeomorphismus.
Da $t \mapsto \varphi(t,s)$ Geodäten sind, ist $E = g_{1,1} = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = 1$ und

$$\tfrac{d^2u^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{i,j} \tfrac{du^i}{dt} \tfrac{du^j}{dt} = 0,$$

i.e. $0 = \Gamma^1_{1,1}$ und $0 = \Gamma^2_{1,1}$. Also wegen $g_{1,1} = 1$ auch

$$\begin{aligned}
0 = \Gamma^1_{1,1} &= \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \Gamma_{1,1,i} g^{i,1} = \tfrac{1}{2} \sum_i (\tfrac{d}{du^1} g_{i,1} + \tfrac{d}{du^1} g_{1,i} - \tfrac{d}{du^i} g_{1,1}) g^{i,1} \\
&= \tfrac{d}{du^1} g_{1,2} g^{2,1} = (\tfrac{d}{du^1} g_{1,2})(-g_{1,2} \tfrac{1}{\det g_{i,j}}) = -\tfrac{1}{2} \tfrac{1}{\det g_{i,j}} \tfrac{d}{du^1} (g_{1,2})^2 \\
\Rightarrow \qquad 0 &= \tfrac{d}{du^1} (g_{1,2})^2
\end{aligned}$$

Wegen $g_{1,2}(0,u^1) = 0$ also $F = g_{1,2} = 0$.
Ist umgekehrt $E = 1$ und $F = 0$, so ist nach (59.2) $\Gamma^1_{1,1} = \Gamma^2_{1,1} = 0$. Damit sind die Kurven mit konstantem u^2 bogenlängenparametrisierte Geodäten, welche die Kurven mit konstantem u^1 orthogonal schneiden. □

58.7 Lemma. *Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to M$ eine Parametrisierung nach geodätischen Parallelkoordinaten, dann ist jede Geodäte $t \mapsto \varphi(t,s)$ für $t \in [t_1, t_2]$ kürzer als jede Kurve $\varphi \circ u$ mit einer Kurve u in U welche (t_1, s) mit (t_2, s) verbindet.*

Dieses Resultat liefert also, daß gewisse Geodäten unter allen hinreichend nahen Kurven minimal sind. Global muß das nicht stimmen, wie ein Bogen eines Großkreises auf der Sphäre von Länge größer als π zeigt.

Beweis. Sei $c_0(t) := \varphi(t,s)$ und $c_1(r) := \varphi(u(r))$, dann gilt

$$\begin{aligned}
L(c_1) &= \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{(\tfrac{du^1}{dr})^2 + (G\tfrac{du^2}{dr})^2} dr \geq \\
&\geq \int_{r_1}^{r_2} |\tfrac{du^1}{dr}| dr = u^1(r_2) - u^1(r_1) = t_1 - t_0 = L(c_0) \qquad \square
\end{aligned}$$

59. Integralsatz von Gauß-Bonnet

Es gelten folgende geometrische Formeln für die Gauß-Krümmung:

59.1 Satz (Gauß-Krümmung als Störung der Maße von Kreisen). *Seien geodätische Polarkoordinaten φ um $x \in M$ gewählt. Mit $L(r)$ bezeichnen wir die Länge bzw. mit $A(r)$ die Fläche des Inneren der geodätischen Kreise $\theta \mapsto \varphi(r,\theta)$ so gilt:*

1. $K_x = \frac{3}{\pi} \lim_{r \searrow 0} \frac{2r\pi - L(r)}{r^3}$ [BertrandPuiseaux1848]
2. $K_x = \frac{12}{\pi} \lim_{r \searrow 0} \frac{r^2\pi - A(r)}{r^4}$ [Diquet1848]

Die Gauß-Krümmung mißt also infinitesimal um wieviel der Umfang, beziehungsweise die Fläche eines geodätischen Kreises im Vergleich zu einem Euklidischen Kreis zu klein ist.

Beweis. Wir wissen bereits folgendes über die Funktion $\sqrt{G}$: Die Funktion $G = |\varphi_\theta|^2$ ist glatt und verschwindet nur für $r = 0$. Also ist auch $\sqrt{G}$ glatt für $r \neq 0$ aber nicht notwendigerweise für $t = 0$. Wir müssen aber das Verhalten bei 0 studieren. Dazu verwenden wir die Jacobi-Gleichung $K\sqrt{G} + \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \sqrt{G} = 0$ aus (53.9).
Wir behaupten zunächst: $\lim_{r\searrow 0} \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}(r,\theta) = 1$. Sei dazu $v_\theta := \cos\theta \cdot v + \sin\theta \cdot v^\perp$. Dann erhalten wir durch partielle Integration der Funktion $r \mapsto \exp_x(rv_\theta) = \varphi(r,\theta)$ (bzw. Taylorformel mit Integralrestglied):

$$\begin{aligned}
f(x) - f(0) &= \int_0^1 (1-t)^0 f'(tx)(x)dt = \qquad \text{(part.Int.)} \\
&= -[(1-t)^1 f'(tx)(x)]_{t=0}^1 + \int_0^1 (1-t)f''(tx)(x,x)dt \\
&= f'(0)(x) + \int_0^1 (1-t)f''(tx)(x,x)dt \\
\varphi(r,\theta) &= \exp_x(rv_\theta) \\
&= \underbrace{\exp_x(0)}_{=x} + \underbrace{\exp_x'(0)(rv_\theta)}_{=rv_\theta} + \int_0^1 (1-t)\exp_x''(trv_\theta)(rv_\theta)(rv_\theta)dt.
\end{aligned}$$

Durch partielles Differenzieren nach θ ergibt sich:

$$\varphi_\theta(r,\theta) = r\tfrac{\partial}{\partial\theta}v_\theta + r^2 \cdot \underbrace{\int_0^1 (1-t)\tfrac{\partial}{\partial\theta} exp_x''(trv_\theta)(v_\theta,v_\theta)dt}_{\text{lokal beschränkt}}.$$

Also gilt für die rechtsseitige Ableitung bei 0:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}(0,\theta) &= \lim_{r\searrow 0} \frac{\sqrt{G}(r,\theta) - \sqrt{G}(0,\theta)}{r} \\
&= \lim_{r\searrow 0} \frac{|\varphi_\theta(r,\theta)| - 0}{r} = |\frac{\partial}{\partial\theta}v_\theta| = 1.
\end{aligned}$$

Aus der Jacobi-Gleichung folgt, daß $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \sqrt{G}(0,\theta)$ existiert und 0 ist. Machen wir nun den Potenzreihen-Ansatz für $\sqrt{G}$:

$$\sqrt{G} = a_0 + a_1 r + \tfrac{a_2}{2}r^2 + \tfrac{a_3}{6}r^3 + o(r^3),$$

so erhalten wir aus der Jacobi-Differentialgleichung $a_2 + K\,a_0 = 0$, $a_3 + K\,a_1 = 0$, und wegen $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ somit:

$$\sqrt{G} = r - \tfrac{K(x)}{6}r^3 + o(r^3).$$

Exakter ist die folgende Argumentation: Durch partielles Differenzieren der Jacobi-Gleichung nach r erhalten wir:

$$\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial r^3}(r,\theta) = -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\,K - \sqrt{G}\,\frac{\partial K}{\partial r}.$$

Bilden wir den Limes für $r \searrow 0$ so erhalten wir: $\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial r^3}(0,\theta) = -1\,K(x) + 0$ gleichmäßig in θ.

Als nächstes behaupten wir

$$\frac{\sqrt{G}(r,\theta) - r + \frac{K(x)}{6}r^3}{r^3} \to 0 \text{ für } r \searrow 0 \quad \text{gleichmäßig in } \theta$$

Wegen des allgemeinen Mittelwertsatzes

$$\frac{f(r,\theta) - f(0,\theta)}{g(r,\theta) - g(0,\theta)} = \frac{f_r(\lambda(r,\theta),\theta)}{g_r(\lambda(r,\theta),\theta)}$$

gilt die Regel von l'Hospital gleichmäßig in θ, die wir nun 3mal anwenden:

$$\begin{aligned}
\lim_{r\searrow 0}\frac{\sqrt{G}(r,\theta) - r + \frac{K(x)}{6}r^3}{r^3} &= \lim_{r\searrow 0}\frac{\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G} - 1 + \frac{K(x)}{2}r^2}{3r^2}\\
&= \lim_{r\searrow 0}\frac{\frac{\partial^2}{\partial r^2}\sqrt{G} + K(x)r}{6r}\\
&= \lim_{r\searrow 0}\frac{\frac{\partial^3}{\partial r^3}\sqrt{G} + K(x)}{6}\\
&= 0 \qquad \text{gleichmäßig in } \theta
\end{aligned}$$

Zur Berechnung des Umfangs:

$$\begin{aligned}
L(r) &= \int_0^{2\pi} |\varphi_\theta| = \int_0^{2\pi} \sqrt{G}d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}(r - \frac{K(x)}{6}r^3)d\theta + \int_0^{2\pi} o(r^3)d\theta\\
&= 2\pi(r - \frac{K(x)}{6}r^3) + o(r^3).
\end{aligned}$$

Also ist $K(x) = \frac{3}{\pi}\frac{2r\pi - L(r)}{r^3} + \frac{o(r^3)}{r^3}$.

Schließlich gilt für die Fläche:

$$\begin{aligned}
A(r) &= \int_{r\mathbb{D}} \mathrm{vol} = \int_0^{2\pi}\int_0^r \sqrt{G}(\rho,\theta)d\rho\,d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^r \left(\rho - \frac{K(x)}{6}\rho^3\right)d\rho\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^r o(\rho^3)d\rho\,d\theta\\
&= 2\pi\left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{K(x)}{24}r^4\right) + o(r^4)
\end{aligned}$$

Also ist $K(x) = \frac{12}{\pi}\frac{r^2\pi - A(r)}{r^4} + o(r^4)$. □

59.2 Christoffel-Symbole in geodätischen Koordinaten

Wir wählen eine geodätische Parametrisierung φ auf M, d.h. $E = 1$ und $F = 0$, mit zugehörigen lokalen Koordinaten $(r, \theta) = (u^1, u^2)$. Dann gilt für die Koeffizienten der Riemann-Metrik (siehe auch (58.1)):

(12) $$g_{1,1} = E = 1 \qquad g^{1,1} = 1$$

(13) $$g_{1,2} = g_{2,1} = F = 0 \qquad g^{1,2} = g^{2,1} = 0$$

(14) $$g_{2,2} = G > 0 \qquad g^{2,2} = \tfrac{1}{G}.$$

Für die Christoffelsymbole erster Art (58.2) ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,2,2} &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial G}{\partial \theta} \\ \Gamma_{1,2,2} = \Gamma_{2,1,2} &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial G}{\partial r} \\ \Gamma_{2,2,1} &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial G}{\partial r} \\ \Gamma_{i,j,k} &= 0 \qquad \text{für alle anderen } i,\ j,\ k. \end{aligned}$$

Für jene zweiter Art:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{2,2} &= -\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial G}{\partial r} \\ \Gamma^2_{1,2} = \Gamma^2_{2,1} &= \tfrac{1}{2G}\tfrac{\partial G}{\partial r} \\ \Gamma^2_{2,2} &= -\tfrac{1}{2G}\tfrac{\partial G}{\partial \theta} \\ \Gamma^k_{i,j} &= 0 \qquad \text{für alle anderen } i,\ j,\ k. \end{aligned}$$

Eine Geodäte muß also folgende Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2u^1}{dt^2} + \Gamma^1_{2,2}\tfrac{du^2}{dt}\tfrac{du^2}{dt} &= 0 \\ \tfrac{d^2u^2}{dt^2} + 2\Gamma^2_{1,2}\tfrac{du^1}{dt}\tfrac{du^2}{dt} + \Gamma^2_{2,2}\tfrac{du^2}{dt}\tfrac{du^2}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2u^1}{dt^2} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial G}{\partial r}\left(\tfrac{du^2}{dt}\right)^2 &= 0 \\ \tfrac{d^2u^2}{dt^2} + \tfrac{1}{G}\tfrac{\partial G}{\partial r}\tfrac{du^1}{dt}\tfrac{du^2}{dt} + \tfrac{1}{2G}\tfrac{\partial G}{\partial \theta}\left(\tfrac{du^2}{dt}\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

59.3 Geodätische Krümmung, ein Spezialfall

Seien $(u^1, u^2) = (r, \theta)$ lokale geodätische Koordinaten wie in (59.2). Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte $t \mapsto u(t) = (u^1(t), u^2(t)) = (r(t), \theta(t))$ sei der Winkel zwischen $u'(t)$ und $\frac{\partial}{\partial r}$ mit $\Theta(t)$ bezeichnet, i.e.

$$\begin{aligned} \cos\Theta(t) &= \langle u'(t), \tfrac{\partial}{\partial r}\rangle \\ &= \left\langle \tfrac{dr(t)}{dt}\tfrac{\partial}{\partial r} + \tfrac{d\theta(t)}{dt}\tfrac{\partial}{\partial \theta},\ \ \tfrac{\partial}{\partial r}\right\rangle = \tfrac{dr(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial G}{\partial r}\left(\tfrac{du^2}{dt}\right)^2 = \tfrac{d^2u^1}{dt^2} = \tfrac{d}{dt}\cos\Theta(t) = -\sin\Theta(t)\tfrac{d\Theta(t)}{dt}.$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}\sin\Theta(t) &= \operatorname{vol}(\tfrac{\partial}{\partial r}, u'(t))\\ &= \sqrt{G}\,(dr\wedge d\theta)(\tfrac{\partial}{\partial r}, \tfrac{dr(t)}{dt}\tfrac{\partial}{\partial r} + \tfrac{d\theta(t)}{dt}\tfrac{\partial}{\partial\theta}) = \sqrt{G}\tfrac{d\theta}{dt} = \sqrt{G}\tfrac{du^2}{dt}.\end{aligned}$$

Schlußendlich erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial G}{\partial r}\left(\tfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\sin\Theta(t)\,\tfrac{d\Theta}{dt} = -\sqrt{G}\tfrac{d\theta}{dt}\tfrac{d\Theta}{dt}, \text{ d.h. } \tfrac{d\Theta}{dt} = -\tfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\tfrac{d\theta}{dt}$$

59.4 Theorema elegantissimum von Gauß.
Sei Δ ein geodätisches Dreieck in M mit Innenwinkeln α, β und γ, d.h. ein Dreieck dessen Seiten Geodäten sind, dann gilt:

$$\int_\Delta K \operatorname{vol}_M = \alpha+\beta+\gamma-\pi.$$

Insbesondere liefert das für die Ebene den Satz, daß die Winkelsumme im Dreieck 180 Grad (d.h. π) ist.

Beweis. Wir setzen vorerst voraus, daß das geodätische Dreieck ganz im Kartenbereich für geodätische Polarkoordinaten φ um die Ecke C enthalten ist.

Die beiden Seiten a und b entsprechen in Polarkoordinaten zwei Geraden durch 0. Und wir können die 0-Richtung so wählen, daß sie die Tangente an die Seite b ist. Die Seite c läßt sich in Polarkoordinaten dann durch eine Gleichung der Form $r = r(\theta)$ mit $\theta\in[0,\gamma]$ beschreiben. Sei $\Theta(\theta)$ der Winkel zwischen $\frac{\partial}{\partial r}$ und der Seite c. Klarerweise ist $\Theta(0) = \pi-\alpha$ und $\Theta(\gamma) = \beta$. Also gilt:

$$\begin{aligned}\int_\Delta K\operatorname{vol}_M &= \int_{\theta^{-1}(\Delta)} \theta^*(K\operatorname{vol}_M) = && \text{wegen (53.9)}\\ &= \int_{\theta^{-1}(\Delta)} -\tfrac{1}{\sqrt{G}}\tfrac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}\sqrt{G}\,dr\wedge d\theta\\ &= \int_0^\gamma\int_0^r -\tfrac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}(r,\theta)\,dr\,d\theta = && \text{wegen (53.9), siehe auch (60.1)}\\ &= \int_0^\gamma 1-\tfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}(r(\theta),\theta)\,d\theta = && \text{wegen (59.2)}\\ &= \int_0^\gamma 1+\tfrac{d\Theta}{d\theta}(\theta)\,d\theta = \gamma+\Theta(\gamma)-\Theta(0) = \gamma+\beta-(\pi-\alpha).\end{aligned}$$

Für ein allgemeines geodätisches Dreieck folgt das Resultat, durch Unterteilen in kleinere geodätische Dreiecke: Denn addiert man die Resultate für die Teildreiecke, so erhält man auf der linken Seite $\int_\Delta K\operatorname{vol}_M$. Die Summe aller Winkel ist die Summe der Winkel an den ursprünglichen Ecken plus π mal die Anzahl der übrigen Randecken plus 2π mal die Anzahl der inneren Ecken. Davon muß man noch π mal die Anzahl der Teilungs-Dreiecke abziehen. Da jeder weitere innere Punkt zwei weitere Dreiecke, und jeder zusätzliche Randpunkt ein weiters Dreieck hinzufügt, gilt: Summe der Randpunkte plus 2 mal Summe der Inneren Punkte ist Anzahl der Dreiecke minus 1. Somit ergibt diese Kombination von π's gerade $-\pi$ und die Formel gilt auch im allgemeinen Fall. □

Seien A, B und C die Ecken des geodätischen Dreiecks, a, b, c die Längen der Seiten und seien $\bar\alpha$, $\bar\beta$ und $\bar\gamma$ die Winkel des Euklidischen Dreiecks mit den Seiten a, b, c so gilt:

$$\alpha - \bar{\alpha} = \frac{\mathrm{vol}(\Delta)}{3} K + o\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

und analog für die anderen Winkel, siehe [**46**, S.387].

59.5 Folgerung. Globale Version von Gauß-Bonnet.
Sei M eine kompakte orientierte Riemann-Fläche so gilt:

$$\int_M K\ \mathrm{vol}_M = 2\,\pi\,\chi(M).$$

Beweis. Wir zerlegen die Fläche in lauter kleine geodätische Dreiecke. Dann gilt für die Euler-Charakteristik nach (44.5.9):

$$\chi(M) = \#\text{Ecken} - \#\text{Kanten} + \#\text{Flächen}.$$

Da jede Kante zu genau zwei Flächen gehört und jede Fläche durch genau 3 Kanten berandet ist, gilt

$$2 \cdot \#\text{Kanten} = 3 \cdot \#\text{Flächen}$$

und somit ist

$$\chi(M) = \#\text{Ecken} - \frac{1}{2} \cdot \#\text{Flächen}.$$

Auf der anderen Seite gilt:

$$\begin{aligned}\int_M K\ \mathrm{vol}_M &= \sum_\Delta \int_\Delta K\ \mathrm{vol}_M\\ &= \text{Summe aller Innen-Winkel} - \pi \cdot \text{Anzahl der } \Delta\\ &= 2\,\pi \cdot \text{Anzahl der Ecken} - \pi \cdot \text{Anzahl der Flächen}\\ &= 2\,\pi\,\chi(M). \qquad \square\end{aligned}$$

Falls K konstant und negativ ist, so gilt $\mathrm{vol}(M) = 4\pi\frac{1}{K^2}(1-g)$, da dann $\chi(M) = 2\,(1-g)$ für das Geschlecht g gilt.

59.6 Folgerung. *Sei M eine kompakte Riemann-Fläche, dann gilt:*

1. *Es gibt Punkte $p \in M$ mit $\mathrm{sgn}(K(p)) = \mathrm{sgn}(\chi(M))$.*
2. *Ist $K \geq 0$ aber nicht konstant 0, so ist $\chi(M) = 2$, d.h. M ist diffeomorph zur Sphäre S^2 oder zur projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$.*
3. *Ist $K = 0$, so ist $\chi(M) = 0$, d.h. M ist diffeomorph zum Torus oder zur Kleinschen Flasche.*
4. *Ist $K \leq 0$ aber nicht konstant 0, so ist $\chi(M) < 0$, d.h. M ist diffeomorph zu einer Sphäre mit mindestens 2 Henkeln oder mindestens 3 Möbiusbändern.*

Beweis. Ist M nicht orientiert, so geht man zur Orientierungsüberlagerung über. Die Eulercharakteristik können wir aus (59.5) ablesen. Die zweiten Teile der Aussagen folgen dann aus den Klassifizierungssatz für kompakte orientierbare Flächen, als Sphären mit $g \geq 0$ Henkeln (wobei $\chi(M) = 2\,(1-g)$ für das Geschlecht g gilt), und aus jenen für nicht orientierbare Flächen, als Sphären an denen $g > 0$ Möbiusbänder geklebt sind (wobei $\chi(M) = 2 - g$ für das Geschlecht g gilt). $\square$

Wir wollen die Integral-Formel von Gauß-Bonnet nun auf Flächen mit nicht geodätischem Rand verallgemeinern.

59.7 Bemerkung

Wir wählen geodätische Koordinaten φ auf M, d.h. $E = 1$ und $F = 0$. Somit ist $e_1 := \varphi_1$, $e_2 := \frac{1}{\sqrt{G}}\varphi_2$ eine Orthonormalbasis. Sei $t \mapsto u(t)$ die lokale Darstellung einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve c. Sei τ der Einheits-Tangentialvektor und ξ ein Tangentialvektor von M, welcher normal auf τ steht. Sei schließlich $K_g(t)$ die geodätische Krümmung $K_g(t) := \langle c''(t), \xi(t)\rangle$, vgl. (55.3). Beachte, daß $K_g = 0$ genau dann gilt, wenn $c''(t) \perp T_{c(t)}M$ ist, d.h. c eine Geodäte ist.

Lemma. *Es existiert eine bis auf $2\pi\mathbb{Z}$ eindeutige Funktion $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\tau(t) = \cos\Theta(t)\, e_1(u(t)) + \sin\Theta(t)\, e_2(u(t))$ und es gilt:*

$$K_g(t) = \Theta'(t) + \tfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u^1}\tfrac{du^2}{dt}.$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der entsprechenden Formel $K(s) = \Theta'(s)$ für Kurven in der Ebene.

Beweis. Wie in (3.9) ergibt sich die Existenz und Eindeutigkeit der Funktion Θ. Dann gilt

$$\xi(t) = -sin(\Theta(t))e_1(u(t)) + \cos(\Theta(t))e_2(u(t)).$$

Aus $g(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$ folgt: $g(\frac{d}{dt}e_i, e_j)+g(e_i, \frac{d}{dt}e_j) = 0$. Setzen wir nun die Darstellungen für $\tau' = c''$ und für ξ in der Formel für die geodätische Krümmung ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
K_g(t) &= \Big\langle \Theta'(t)\xi(t) + \cos\Theta(t)\tfrac{d}{dt}e_1(u(t)) + \sin\Theta(t)\tfrac{d}{dt}e_2(u(t)), \xi(t)\Big\rangle \\
&= \Theta'\,\langle \xi, xs\rangle + \cos^2\Theta\langle \tfrac{d}{dt}e_1, e_2\rangle - \sin^2\Theta\langle \tfrac{d}{dt}e_2, e_a\rangle + \\
&\qquad + \sin\Theta\cos\Theta(\langle \tfrac{d}{dt}e_2, e_2\rangle - \langle \tfrac{d}{dt}e_1, e_1\rangle) \\
&= \Theta'(t) + \Big\langle \tfrac{d}{dt}e_1(u(t)), e_2(u(t))\Big\rangle.
\end{aligned}$$

und weiters:

$$\begin{aligned}
\big\langle \tfrac{d}{dt}e_1, e_2\big\rangle &= \Big\langle \varphi_{1,1}\tfrac{du^1}{dt} + \varphi_{1,2}\tfrac{du^2}{dt}, \tfrac{1}{\sqrt{G}}\varphi_2\Big\rangle \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{G}}\Big(\Gamma_{1,1,2}\tfrac{du^1}{dt} + \Gamma_{1,2,2}\tfrac{du^2}{dt}\Big) = \tfrac{1}{2\sqrt{G}}\tfrac{\partial G}{\partial r}\tfrac{du^2}{dt} = \tfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\tfrac{du^2}{dt}
\end{aligned}$$

und damit

$$K_g(t) = \Theta'(t) + \tfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u^1}\tfrac{du^2}{dt}. \qquad \square$$

59.8 Satz. Gauß-Bonnet für Polygone.

Sei $\varphi : U \to M$ eine Karte von M und sei P ein Polygon in U und α_i die Außenwinkel von $\varphi(P)$. Dann gilt:

$$\int_{\varphi(P)} K\ \mathrm{vol}_M + \int_{\varphi(\partial P)} K_g + \sum_i \alpha_i = 2\pi.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, daß sich ganz $\varphi(P)$ durch geodätische Polarkoordinaten parametrisieren läßt. Es gilt dann

$$K = -\tfrac{1}{\sqrt{G}}\tfrac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2} = \tfrac{1}{\sqrt{G}}\Big(\tfrac{\partial}{\partial r}\,(\sqrt{G}\cdot(-\tfrac{1}{\sqrt{G}}\tfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}) + \tfrac{\partial}{\partial\theta}\,0\Big) = \operatorname{div}\xi,$$

wobei $\xi := (-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r})\frac{\partial}{\partial r} + 0\frac{\partial}{\partial\theta}$. Also gilt nach dem Greenschen Satz:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(P)} K\,\mathrm{vol}_M &= \int_{\varphi(P)} \operatorname{div}\xi\,\mathrm{vol}_M\\ &= \int_{\varphi(\partial P)} \langle \xi, \nu_{\varphi(\partial P)}\rangle\,\mathrm{vol}_{\varphi(\partial P)}\\ &= \int_{\varphi(\partial P)} \sqrt{G}\,\xi^r\,d\theta - \sqrt{G}\,\xi^\theta\,dr\\ &= -\int_{\varphi(\partial P)} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}d\theta.\end{aligned}$$

Verwenden wir nun die Formel aus dem Lemma in (59.7) für die geodätische Krümmung der Randkurve, so erhalten wir für jede Seite I des Polygons:

$$-\int_{\varphi(I)} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}d\theta = \int_I \Theta'(t)dt - \int_I K_g(t)dt.$$

Wegen des Umlaufsatzes in der Ebene gilt im Falle der Euklidischen Metrik $G = 1$:

$$\sum_i \Big(\int_{I_i} \Theta'(t)dt + \alpha_i\Big) = 2\pi.$$

Eine allgemeine Riemann-Metrik können wir durch $G^s := s + (1-s)G$ affin mit der Euklidischen Metrik verbinden, und erhalten analog die Funktion Θ^s und die Winkel α_i^s, und diese hängen stetig von s ab. Da aber

$$\sum_i \Big(\int_{I_i} (\Theta^s)' + \alpha_i^s\Big) = \sum \Big(\Theta^s(\max I_i) - \Theta^s(\min I_i) + \alpha_i^s\Big) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

gilt, muß dieser Ausdruck konstant in s sein, und stimmt somit überall mit seinem Wert 2π für $s = 1$ überein.

Liegt das Polygon nicht gänzlich in einer Karte, so unterteilt man es fein genug und wendet das Resultat für die einzelnen Teile an. Die Summe der Integrale über innere Kanten fällt weg, da diese genau zweimal und zwar mit entgegengesetzter Orientierung durchlaufen werden. Die Außenwinkel schreiben wir als π minus Innenwinkel, und erhalten für die Summe der Außenwinkel: Die Summe der Innenwinkel an den Randecken plus 2π mal die Anzahl E^0 der inneren Ecken, vermindert um 2π mal die Anzahl K^0 der inneren Kanten, plus π mal die Anzahl der Randkanten. Da genauso viele Randecken wie Randkanten existieren, d.h. $K - K^0 = E - E^0$ ist, und die Summe der 2π auf der rechten Seite gerade $2\pi F$ ist, folgt so die allgemeine Formel. □

60. Flächen konstanter Krümmung

60.1 Satz von Minding. *Zwei Riemann-Flächen gleicher konstanter Gauß-Krümmung sind lokal isometrisch.*

Beweis. Wir wählen mittels (58.5) geodätische Polarkoordinaten in Punkten $p \in M$ und $\overline{p} \in \overline{M}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} G &= \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle, & \overline{G} &= \langle \bar\varphi_\theta, \bar\varphi_\theta \rangle, \\ G(0,\theta) &= 0, & \overline{G}(0,\theta) &= 0, \\ \tfrac{\partial}{\partial r}\Big|_{r=0} \sqrt{G}(r,\theta) &= 1, & \tfrac{\partial}{\partial r}\Big|_{r=0} \sqrt{\overline{G}}(r,\theta) &= 1. \end{aligned}$$

Sowohl $\sqrt{G}(.,\theta)$ als auch $\sqrt{\overline{G}}(.,\theta)$ sind Lösungen der Jacobi-Gleichung (53.9)

$$\tfrac{\partial^2}{\partial r^2} x(r) = -K \cdot x(r).$$

Eine solche ist durch Vorgabe von $x(0) = 0$ und $x'(0) = 1$ eindeutig bestimmt. Also haben die Riemann-Metriken in geodätischen Polarkoordinaten die gleichen Koeffizienten, und somit sind die Flächen lokal isometrisch.

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[d, "\exp"', "\cong"] & \mathbb{R}^2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dl, "\varphi"] \arrow[dr, "\overline{\varphi}"'] & T_{\overline{p}}\overline{M} \arrow[d, "\cong"', "\overline{\exp}"] \\ M \arrow[rr, dotted, "\cong"] & & \overline{M} \end{tikzcd}$$

□

Wir versuchen nun eine globale Version obigen Satzes zu geben. Ganz allgemein kann das aber nicht gelten. Z.B. ist die Ebene und die Kreisscheibe lokal aber nicht global isometrisch.

60.2 Definition (geodätisch vollständig)

Eine Riemann-Mannigfaltigkeit M heißt GEODÄTISCH VOLLSTÄNDIG, falls alle Geodäten unendlichlang sind. Da für die Länge einer nach der Bogenlänge parametrisierten Geodäte $c : [a,b] \to M$ folgendes gilt: $L(c) = \int_a^b |c'(t)| dt = \int_a^b 1 dt = b - a$, ist die Geodäte genau dann unendlichlang, wenn ihr Parameterintervall ganz $\mathbb{R}$ ist.

60.3 Satz. *Je zwei abstrakte, einfachzusammenhängende, geodätisch vollständige Riemann-Flächen mit gleicher konstanter Gauß-Krümmung sind isometrisch isomorph.*

Beweis. Wegen der Einfachzusammenhängendheit folgt dies aus den lokalen Resultat (60.1). □

60.4 Folgerung

Jede einfachzusammenhängende, geodätisch vollständige, abstrakte Riemann-Fläche mit $K = 1$ ist bis auf Isometrien die Sphäre. Jede solche mit $K = -1$ ist bis auf Isometrien die Poincarésche Halbebene (bzw. hyperbolischen Scheibe) und jede derartige mit $K = 0$ ist die Ebene. Vergleiche das mit dem Riemannschen Abbildungssatz (35.1) sowie dem Uniformisierungssatz (36.2).

Durch Übergang zur universellen Überlagerung folgt wegen des Klassifizierungssatzes, daß jede Riemann-Fläche der Orbitraum einer auf einer einfachzusammenhängenden Riemann-Fläche mit diskret wirkenden Gruppe von konformen Abbildungen ist.

Die einzige nicht triviale, auf der Sphäre diskret wirkende Gruppe, ist die von der Antipodalabbildung erzeugte. Es gibt also nur zwei Flächen mit konstanter Gauß-Krümmung $K > 0$, nämlich die Sphäre und die projektive Ebene. Die Geometrie der projektiven Ebene wird auch elliptisch genannt, in ihr sind alle Geodäten geschlossen.

Es gibt auf der Ebene nur folgende diskret wirkende Gruppen:

1. die von einer Translation erzeugten,
2. die von einer Translation und einer Spiegelung erzeugten,
3. die von zwei Translationen erzeugten,
4. die von zwei Translationen und einer Spiegelung erzeugten.

Im Falle $K = 0$ gibt es also nur auf dem Zylinder, dem Möbiusband, dem Torus und der Kleinschen Flasche eine Metrik mit verschwindender Gauß-Krümmung.

Jede kompakte Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ besitzt eine Metrik mit konstant negativer Krümmung, siehe [**46**, S. 408].

Nach [CohnVossen1927] und [**17**] (siehe [**83**, S.105]) können zwei isometrische Flächen im $\mathbb{R}^3$ von strikt positiver Gauß-Krümmung durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden.

Kann man eine Fläche deformieren ohne ihre Metrik zu ändern? Ein Gegenbeispiel dazu wurde von [Efimov] gegeben: $\varphi(t, s) := t^9 + \lambda t^7 s^2 + s^9$ kann nicht einmal lokal deformiert werden falls λ transzendent ist, siehe [**46**, S.428].

60.5 Theorem (Flächen konstanter Krümmung).
Sei M eine abgeschlossene, zusammenhängende 2-Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit konstanter Gauß-Krümmung K, dann gilt:

1. *Ist $K > 0$, so ist M eine Sphäre* [**24**].
2. *Ist $K = 0$, so ist M ein verallgemeinerter Zylinder* [Massey1962], [Hartman-Nirenberg1959].
3. *Ist $K < 0$, so existiert M nicht* [**13**]. *Dies wurde durch* [Efimov] *verallgemeinert zu: Es gibt keine abgeschlossene Fläche mit einer, nach oben durch ein Konstante $k < 0$ beschränkte Gauß-Krümmung.*

Ohne Beweis.

60.6 Lemma. *Ist M kompakt, so existiert ein Punkt wo die Gauß-Krümmung positiv ist.*

Beweis. Das ist offensichtlich, da die Fläche in jedem Berührpunkt mit der "Umsphäre" positive Krümmung hat. □

60.7 Folgerung. *Es gibt keine kompakte Minimalfläche.*

61. Paralleltransport

Als nächstes versuchen wir irgendeine Kurve c auf der Fläche entlangzugehen und dabei einen Vektor möglichst parallel zu bewegen, d.h. seine Richtung so wenig wie möglich zu verändern.

61.1 Definition (Paralleles Vektorfeld)

Ein Vektorfeld längs einer Kurve c heißt PARALLEL, falls seine skalare Geschwindigkeit in den Punkt minimal ist.

61.2 Lemma (Charaktersierung von parallelen Vektorfeldern).
Ein Vektorfeld w längs einer Kurve c auf M ist genau dann parallel, wenn $w'(t) \in T_{c(t)}M^\perp$ für alle t.

Beweis. Aus $w(t) \in T_{c(t)}M$ folgt $\langle w(t), v(t)\rangle = 0$, mit $v(t) := \nu(c(t))$. Differenzieren wir diese Gleichung nach t, so erhalten wir

$$\langle w'(t), v(t)\rangle + \langle w(t), v'(t)\rangle = 0.$$

Damit $|w'(t)|$ minimal wird muß wegen

$$|w'(t)|^2 = |w'(t) - \langle w'(t), v(t)\rangle v(t)|^2 + |\langle w'(t), v(t)\rangle|^2$$

bei vorgegebener Normalprojektion $\langle w'(t), \nu(t)\rangle = -\langle w(t), v'(t)\rangle$ auf $v(t)$ der tangentiale Anteil $w'(t) - \langle w'(t), v(t)\rangle\, v(t)$ möglichst klein, am besten 0 werden, d.h. es ist $w'(t) = \langle w'(t), v(t)\rangle v(t)$, oder mit anderen Worten $w'(t) \in T_{c(t)}M^\perp$. □

Insbesondere gilt:

61.3 Lemma. *Eine proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve c ist genau dann eine Geodäte, wenn das Vektorfeld c' parallel längs c ist.*

61.4 Parallele Vektorfelder in lokalen Koordinaten

Sei φ eine lokale Parametrisierung von M und $t \mapsto u(t)$ die lokale Darstellung einer Kurve $c = \varphi\circ u$. Die Differentialgleichung für ein längs c paralleles Vektorfeld $t \mapsto w(t)$ bestimmen wir wie folgt:

$$w(t) = \sum_{i=1}^m w^i(t) \cdot (\partial_i \varphi)(u(t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad w' = \sum_i \tfrac{dw^i}{dt} \cdot \varphi_i + \sum_{i,j} w^i \cdot \varphi_{i,j} \tfrac{du^j}{dt} \in \qquad \text{wegen (58.2)}$$

$$\in \sum_k \left(\tfrac{dw^k}{dt} + \sum_{i,j} w^i \tfrac{du^j}{dt} \Gamma^k_{i,j} \right) \varphi_k + \mathbb{R}\cdot\nu.$$

Also ist w parallel längs c genau dann, wenn

$$\tfrac{dw^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^m w^i \Gamma^k_{i,j} \tfrac{du^j}{dt} = 0 \text{ für } k = 1, \dots, m.$$

Dieses System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen hat bei vorgegebenen Anfangsdaten $w^k(0)$ eine eindeutige globale Lösung.

61.5 Lemma (Existenz paralleler Vektorfelder). *Zu jeder glatten Kurve $c : \mathbb{R} \to M$ und Anfangsvektor $w_0 \in T_{c(0)}M$ existiert eine eindeutig bestimmte parallele Kurve $w : \mathbb{R} \to TM$ mit $w(t) \in T_{c(t)}M$ und $w(0) = w_0$.*

Wir bezeichnen mit $\mathrm{ptp}(c,t)(v_0)$ *die parallele Kurve* v *über* c *mit Anfangswert* v_0 *zum Zeitpunkt* t. *Man nennt das auch den* PARALLELTRANSPORT *längs* c. *Für diesen gilt:*

1. $\mathrm{ptp}(c,t) : T_{c(0)}M \to T_{c(t)}M$ *ist eine Isometrie*
2. $\mathrm{ptp}(c,t)^{-1} = \mathrm{ptp}(c(.+t), -t)$
3. $\mathrm{ptp}(c,g(t)) = \mathrm{ptp}(c\circ g, t)\circ \mathrm{ptp}(c, g(0))$ *für* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Beweis. Eine zweite Möglichkeit die Existenz und Eindeutigkeit zu zeigen ist die folgende: w ist eine parallele Kurve genau dann, wenn $0 = \nabla w := w' - \langle w', \nu\circ c\rangle \nu\circ c$. Das ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 1.ter Ordnung, und somit existiert eine, durch den Anfangswert eindeutig bestimmte, globale Lösung w.

Verbleibt zu zeigen, daß $w(t)\in T_{c(t)}M$:
Da $\langle w, \nu\circ c\rangle' = \langle w', \nu\circ c\rangle + \langle w, (\nu\circ c')\rangle = 0$ für eine Lösung ist, ist $\langle w, \nu\circ c\rangle$ konstant gleich $\langle w, \nu\circ c\rangle(0) = \langle w_0, \nu_{c(0)}\rangle = 0$. D.h. $w(t)\in {\nu_{c(t)}}^{\perp} = T_{c(t)}M$.

(1) Klarerweise ist die Lösung $\mathrm{ptp}(c,.)(v_0)$ einer linearen Differentialgleichung vom Anfangswert v_0 linear abhängig. Es gilt

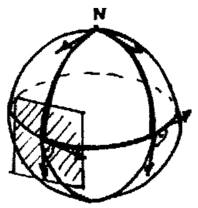
$$\langle \xi, \eta\rangle' = \langle \xi', \eta\rangle + \langle \xi, \eta'\rangle = 0 + 0,$$

falls ξ und η parallele Vektorfelder längs c sind, d.h $\xi', \eta' \in TM^{\perp}$. Also ist $\langle \xi, \eta\rangle$ konstant und $\mathrm{ptp}(c,t)$ eine Isometrie.

(2) und (3) folgen leicht aus der Eindeutigkeit der Lösungen von linearen Differentialgleichungen. □

61.6 Beispiel

1. In jeder Hyperebene sind genau die konstanten Vektorfelder die parallelen, da die Ableitung eines Vektorfelds wieder in der Ebene liegt.
2. Allgemeiner sind auf Torsen die parallelen Vektorfelder, gerade die konstanten Vektorfelder in einer Abwicklung der Torse in die Ebene.
3. Parallele Vektorfelder längs geschlossener Kurven können sehr wohl verschiedene Anfangs- und Endwerte besitzen: Man starte auf dem Nordpol der Sphäre und transportiere einen Vektor in Richtung eines Meridians bis zum Äquator. Dann transportiere man diesen auf den Äquator normal stehenden Vektor entlang des Äquators bis zu einem anderen Meridian, und transportiere ihn schließlich längs dieses anderen Meridians wieder zum Nordpol. Dort schließt der transportierte Vektor mit seiner Ausgangslage genau den Winkel der beiden Meridiane ein.



Eine allgemeine Konstruktionsmöglichkeit für parallele Vektorfelder ist die folgende:

61.7 Satz (Parallelität via Schmiegtorse).
Sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine Kurve auf M dann gilt: Ein Vektorfeld ist parallel längs c in M genau dann, wenn es parallel längs c in der Schmiegtorse ist.

Beweis. Die Schmiegtorse ist nach (55.6) lokal durch $\varphi(t,s) = c(s) + t\xi(s)$ gegeben, wobei ξ ein (das) Vektorfeld längs c ist, welches normal auf $L\,c'$ steht. Klarerweise ist der Tangentialraum in $c(t)$ von M identisch mit jenem der Schmiegtorse und somit ein Vektorfeld η längs c tangential an M genau dann, wenn es tangential an die Schmiegtorse ist. Und die kovariante Ableitung längs c stimmt auch für beide Flächen überein. Also sieht die Bedingung "parallel zu sein" für beide Flächen gleich aus. □

61.8 Definition (Holonomie)

Die Untergruppe

$$\{\mathrm{ptp}(c, 2\pi) : c \text{ ist geschlossene Kurve durch } x\}$$

der Gruppe $O(T_x M)$ heißt HOLONOMIE-GRUPPE von M (bei x). Sie ist eine Lie-Gruppe und für verschiedene x in einem zusammenhängenden M sind diese Untergruppen isomorph. Z.B. ist die Holonomiegruppe der S^2 gerade die $S0(2) \cong S^1$.

Wir werden in (64.12) charakterisieren, wann diese Gruppe trivial ist.

62. Kovariante Ableitung

Leider steckt in den obigen Beschreibungen für die Geodäten und die parallelen Vektorfelder noch die Flächen-Normale und damit der umgebende Vektorraum. Diese Begriffe sollten aber auch für abstrakte Riemann-Mannigfaltigkeiten Sinn machen.

Anstatt zu sagen, daß ein Vektor wie w' normal auf die Fläche steht, können wir auch sagen, daß seine tangentiale Komponente, d.h. seine Projektion auf den Tangentialraum verschwindet.

62.1 Definition (Kovariante Ableitung)

Sei w ein Vektorfeld längs einer Kurve c in M. Dann wollen wir die Normal-Projektion auf den Tangentialraum der Ableitung des Vektorfelds die KOVARIANTE ABLEITUNG ∇ (sprich "Nabla" oder "Del") nennen und mit

$$\nabla w : t \mapsto w'(t) - \langle w'(t), \nu_{c(t)}\rangle \nu_c(t) \in T_{c(t)} M$$

bezeichnen. Diese mißt also die infinitesimale Änderung von w, wie sie in M gesehen wird, und ignoriert jene Komponente, die auf M normal steht.

Die Formel für die kovariante Ableitung ∇ eines Vektorfelds w längs einer Kurve $c = \varphi \circ u$ sieht in lokalen Koordinaten wie folgt aus:

$$\nabla w = \sum_{k=1}^{m} \left(\tfrac{dw^k}{dt} + \sum_{i,j}^{m} \Gamma^k_{i,j} w^i \tfrac{du^j}{dt} \right) \tfrac{\partial}{\partial u^k},$$

wobei $w = \sum_k w^k \frac{\partial}{\partial u^k}$.

Man beachte, daß die Geodäten genau die Lösungen der Gleichung $\nabla c' = 0$ sind (wobei c' als Vektorfeld längs c aufzufassen ist), und die Vektorfelder w, die parallel längs einer Kurve c sind, genau die Lösungen der Gleichung $\nabla w = 0$ sind.
Es gelten folgende Formeln für ∇:

$$\begin{aligned}\nabla(\xi+\eta) &= \nabla\xi + \nabla\eta\\ \nabla(f\cdot\xi) &= f\cdot\nabla\xi + f'\cdot\xi\\ \langle\xi,\eta\rangle' &= \langle\nabla\xi,\eta\rangle + \langle\xi,\nabla\eta\rangle,\end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}\nabla(f\,\xi) &= (f'\,\xi + f\,\xi') - \langle f'\,\xi + f\,\xi',\nu\rangle\,\nu = f'\,\xi - 0 + f\,\nabla\xi,\\ \langle\xi,\eta\rangle' &= \langle\xi',\eta\rangle + \langle\xi,\eta'\rangle = \langle\nabla\xi + \langle\xi',\nu\rangle\nu,\eta\rangle + \langle\xi,\nabla\eta + \langle\eta',\nu\rangle\,\nu\rangle\\ &= \langle\nabla\xi,\eta\rangle + \langle\xi,\nabla\eta\rangle \quad \text{da } \langle\nu,\eta\rangle = 0 = \langle\xi,\nu\rangle.\end{aligned}$$

62.2 Gaußgleichung. *Für den Nabla-Operator gilt:*

$$\nabla w = w' + \langle L\,c', w\rangle\,\nu\circ c.$$

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus $\langle w,\nu\circ c\rangle = 0$ durch Differenzieren. □

62.3 Definition

Seien nun zwei Vektorfelder ξ und η auf M gegeben, dann können wir $\nabla_\eta\xi \in \mathfrak{X}(M)$ als $(\nabla_\eta\xi)(x) = \nabla(\xi\circ c)(0)$ definieren, wobei c eine Integralkurve des Vektorfelds η mit der Anfangsbedingung $c(0) = x$ ist.
Das läßt sich auch wie folgt schreiben:

$$(\nabla_\eta\xi)_x = T_x\xi\cdot\eta_x - \langle T_x\xi\cdot\eta_x,\nu_x\rangle\nu_x.$$

62.4 Lemma (Eigenschaften der kovarianten Ableitung). *Der Operator ∇ geht von $\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)$ nach $\mathfrak{X}(M)$ und hat folgende Eigenschaften.*

1. *∇ ist bilinear.*
2. *$\nabla_\eta\xi$ ist $C^\infty(M,\mathbb{R})$-linear in η.*
3. *$\nabla_\eta(f\xi) = f\nabla_\eta\xi + \eta(f)\,\xi$.*
4. *$\nabla_\eta\xi - \nabla_\xi\eta = [\eta,\xi]$.*
5. *$\eta\,\langle\xi_1,\xi_2\rangle = \langle\nabla_\eta\xi_1,\xi_2\rangle + \langle\xi_1,\nabla_\eta\xi_2\rangle$.*

Beweis. (1) und (2) sind klar. Zu (3):

$$\begin{aligned}&\big(\nabla_\eta(f\xi)\big)(x) =\\ &\quad = \nabla\big((f\xi)\circ c\big)(0) = \big(f(c(0)\big)\nabla(\xi\circ c)(0) + (f\circ c)'(0)\,\xi\big(c(0)\big)\\ &\quad = f(x)\cdot(\nabla_\eta\xi)(x) + T_xf(\eta_x)\cdot\xi_x = \big(f\nabla_\eta\xi + \eta(f)\,\xi\big)(x).\end{aligned}$$

Zu (4): Wegen der Gaußgleichung und der Symmetrie von L gilt:

$$\begin{aligned}(\nabla_\eta\xi - \nabla_\xi\eta)(x) &= \big(T_x\xi\cdot\eta_x + \langle L_x\eta_x,\xi_x\rangle\nu_x\big) - \big(T_x\eta\cdot\xi_x - \langle L_x\xi_x,\eta_x\rangle\nu_x\big)\\ &= [\eta,\xi](x) + 0.\end{aligned}$$

Zu (5):

$$\begin{aligned}\big(\eta\,\langle\xi_1,\xi_2\rangle\big)(x) &= \big(\langle\xi_1,\xi_2\rangle\circ c\big)'(0)\\ &= \big\langle\nabla(\xi_1\circ c)(0),(\xi_2\circ c)(0)\big\rangle + \big\langle(\xi_1\circ c)(0),\nabla(\xi_2\circ c)(0)\big\rangle\\ &= \big(\langle\nabla_\eta\xi_1,\xi_2\rangle+\langle\xi_1,\nabla_\eta\xi_2\rangle\big)(x). \qquad \square\end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, daß es so einen Differentialoperator auch auf abstrakten Riemann-Mannigfaltigkeiten gibt, und er durch die obigen Eigenschaften eindeutig bestimmt ist.

62.5 Satz (Levi-Civita Ableitung).
Sei M eine (abstrakte) Riemann-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau eine Abbildung $\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$, welche obige Eigenschaften (1)-(5) erfüllt, wobei das innere Produkt in (5) durch die Riemann-Metrik zu ersetzen ist. Diese Abbildung heißt KOVARIANTE ABLEITUNG, *oder auch* LEVI-CIVITA-ZUSAMMENHANG.

(Koordinatenfreie) Beweis. Wegen (5) gilt:

$$\begin{aligned}\xi_1\,g(\xi_2,\xi_3) &= g(\nabla_{\xi_1}\xi_2,\xi_3)+g(\xi_2,\nabla_{\xi_1}\xi_3) &&(+)\\ \xi_2\,g(\xi_3,\xi_1) &= g(\nabla_{\xi_2}\xi_3,\xi_1)+g(\xi_3,\nabla_{\xi_2}\xi_1) &&(+)\\ \xi_3\,g(\xi_1,\xi_2) &= g(\nabla_{\xi_3}\xi_1,\xi_2)+g(\xi_1,\nabla_{\xi_3}\xi_2) &&(-).\end{aligned}$$

Daraus folgt durch Addieren der ersten beiden und Subtrahieren der 3.ten Gleichung unter Verwendung von (4):

$$\begin{aligned}&\xi_1\,g(\xi_2,\xi_3)+\xi_2\,g(\xi_3,\xi_1)-\xi_3\,g(\xi_1,\xi_2)=\\ &\quad= g(\nabla_{\xi_1}\xi_2+\nabla_{\xi_2}\xi_1,\xi_3)+g(\nabla_{\xi_1}\xi_3-\nabla_{\xi_3}\xi_1,\xi_2)+g(\nabla_{\xi_2}\xi_3-\nabla_{\xi_3}\xi_2,\xi_1)\\ &\quad= g(2\nabla_{\xi_1}\xi_2-[\xi_1,\xi_2],\xi_3)-g([\xi_3,\xi_1],\xi_2)+g([\xi_2,\xi_3],\xi_1).\end{aligned}$$

Und somit

$$\begin{aligned}2\,g(\nabla_{\xi_1}\xi_2,\xi_3) &= \xi_1\,g(\xi_2,\xi_3)+\xi_2\,g(\xi_3,\xi_1)-\xi_3\,g(\xi_1,\xi_2)\\ &\quad+g([\xi_1,\xi_2],\xi_3)-g([\xi_2,\xi_3],\xi_1)+g([\xi_3,\xi_1],\xi_2).\end{aligned}$$

Da die rechte Seite linear in ξ_3 ist, ist $\nabla_{\xi_1}\xi_2$ durch diese implizite Gleichung wohldefiniert. Da die rechte Seite auch bilinear in (ξ_1,ξ_2) ist, hat ∇ die Eigenschaft (1).

Nun zur Eigenschaft (2):

$$\begin{aligned}
2\,g(\nabla_{f\xi_1}\xi_2,\xi_3) &= f\xi_1\, g(\xi_2,\xi_3) + \xi_2\, g(\xi_3, f\xi_1) - \xi_3\, g(f\xi_1,\xi_2)\\
&\qquad + g([f\xi_1,\xi_2],\xi_3) - g([\xi_2,\xi_3], f\xi_1) + g([\xi_3, f\xi_1],\xi_2)\\
&= f\xi_1\, g(\xi_2,\xi_3) + f\xi_2\, g(\xi_3,\xi_1) + \xi_2(f) g(\xi_3,\xi_1)\\
&\qquad - f\xi_3\, g(\xi_1,\xi_2) - \xi_3(f) g(\xi_1,\xi_2)\\
&\qquad + g(f[\xi_1,\xi_2] - \xi_2(f)\xi_1,\xi_3) - f\, g([\xi_2,\xi_3],\xi_1)\\
&\qquad + g(f[\xi_3,\xi_1] + \xi_3(f)\xi_1,\xi_2)\\
&= f\xi_1\, g(\xi_2,\xi_3) + f\xi_2\, g(\xi_3,\xi_1) + \xi_2(f) g(\xi_3,\xi_1)\\
&\qquad - f\xi_3\, g(\xi_1,\xi_2) - \xi_3(f) g(\xi_1,\xi_2)\\
&\qquad + f\, g([\xi_1,\xi_2],\xi_3) - \xi_2(f) g(\xi_1,\xi_3) - f\, g([\xi_2,\xi_3],\xi_1)\\
&\qquad + f\, g([\xi_3,\xi_1],\xi_2) + \xi_3(f) g(\xi_1,\xi_2)\\
&= f\big(\xi_1\, g(\xi_2,\xi_3) + \xi_2\, g(\xi_3,\xi_1) - \xi_3\, g(\xi_1,\xi_2)\\
&\qquad + g([\xi_1,\xi_2],\xi_3) - g([\xi_2,\xi_3],\xi_1) + g([\xi_3,\xi_1],\xi_2)\big)\\
&= 2\, f\, g(\nabla_{\xi_1}\xi_2,\xi_3).
\end{aligned}$$

Eine sehr ähnliche Rechnung zeigt die Eigenschaft (3).
Weiter zu Eigenschaft (4):

$$\begin{aligned}
&2\,g(\nabla_{\xi_1}\xi_2 - \nabla_{\xi_2}\xi_1,\xi_3) =\\
&\quad = \xi_1\, g(\xi_2,\xi_3) + \xi_2\, g(\xi_3,\xi_1) - \xi_3\, g(\xi_1,\xi_2)\\
&\qquad + g([\xi_1,\xi_2],\xi_3) - g([\xi_2,\xi_3],\xi_1) + g([\xi_3,\xi_1],\xi_2)\\
&\qquad - \xi_2\, g(\xi_1,\xi_3) - \xi_1\, g(\xi_3,\xi_2) + \xi_3\, g(\xi_2,\xi_1)\\
&\qquad - g([\xi_2,\xi_1],\xi_3) + g([\xi_1,\xi_3],\xi_2) - g([\xi_3,\xi_2],\xi_1)\\
&\quad = 2\, g([\xi_1,\xi_2],\xi_3).
\end{aligned}$$

Schlußendlich Eigenschaft (5):

$$\begin{aligned}
&2\langle\nabla_{\xi_1}\xi_2,\xi_3\rangle + 2\langle\xi_2,\nabla_{\xi_1}\xi_3\rangle =\\
&\quad = \xi_1\, g(\xi_2,\xi_3) + \xi_2\, g(\xi_3,\xi_1) - \xi_3\, g(\xi_1,\xi_2)\\
&\qquad + g([\xi_1,\xi_2],\xi_3) - g([\xi_2,\xi_3],\xi_1) + g([\xi_3,\xi_1],\xi_2)\\
&\qquad + \xi_1\, g(\xi_3,\xi_2) + \xi_3\, g(\xi_2,\xi_1) - \xi_2\, g(\xi_1,\xi_3)\\
&\qquad + g([\xi_1,\xi_3],\xi_2) - g([\xi_3,\xi_2],\xi_1) + g([\xi_2,\xi_1],\xi_3)\\
&\quad = 2\,\xi_1\, g(\xi_2,\xi_3). \qquad \square
\end{aligned}$$

Koordinatenbeweis. Es ist zu zeigen, daß der lokale Ausdruck für ∇ unabhängig von den gewählten Koordinaten ist.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u^i} &:= \varphi_i\\
\frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}} &= \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}}\,\frac{\partial}{\partial u^i}\\
g_{i,j} &:= \langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\rangle := g(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j})\\
\bar g_{\bar i,\bar j} &= \Big\langle \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}}\,\frac{\partial}{\partial u^i}, \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial}{\partial u^j}\Big\rangle = \sum_{i,j} \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}}\,\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\, g_{i,j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i,j,k} &:= \frac12\Big(\partial_i(g_{j,k}) + \partial_j(g_{i,k}) - \partial_k(g_{i,j})\Big)\\
\frac{\partial \bar g_{\bar j,\bar k}}{\partial \bar u^{\bar i}} &= \frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}}\Big(\sum_{j,k} \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\, g_{j,k}\Big)\\
&= \sum_{j,k}\Big(\frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}}\Big(\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\Big)\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\, g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}}\Big(\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\Big) g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\,\frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}}(g_{j,k})\Big)\\
&= \sum_{j,k}\Big(\frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar u^{\bar i}\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\, g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial^2 u^k}{\partial \bar u^{\bar i}\partial \bar u^{\bar k}}\, g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\,\sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}}\,\frac{\partial g_{j,k}}{\partial u^i}\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar\Gamma_{\bar i,\bar j,\bar k} &= \frac12\Big(\frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}}(g_{\bar j,\bar k}) + \frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar j}}(g_{\bar i,\bar k}) - \frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar k}}(g_{\bar i,\bar j})\Big)\\
&= \frac12\Big(\sum_{j,k}\Big(\underbrace{\frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar u^{\bar i}\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\, g_{j,k}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial^2 u^k}{\partial \bar u^{\bar i}\partial \bar u^{\bar k}}\, g_{j,k}}_{(2)} + \underbrace{\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\,\sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}}\,\frac{\partial g_{j,k}}{\partial u^i}\Big)}_{(3)}\\
&\quad + \sum_{i,k}\Big(\underbrace{\frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar u^{\bar j}\partial \bar u^{\bar i}}\,\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\, g_{i,k}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}}\,\frac{\partial^2 u^k}{\partial \bar u^{\bar j}\partial \bar u^{\bar k}}\, g_{i,k}}_{(4)} + \underbrace{\frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}}\,\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\,\sum_j \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial g_{i,k}}{\partial u^j}\Big)}_{(3)}\\
&\quad - \sum_{j,i}\Big(\underbrace{\frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar u^{\bar k}\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}}\, g_{j,i}}_{(4)} + \underbrace{\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar u^{\bar k}\partial \bar u^{\bar i}}\, g_{j,i}}_{(2)} + \underbrace{\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}}\,\sum_k \frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\,\frac{\partial g_{j,i}}{\partial u^k}\Big)}_{(3)}\Big)\\
&= \sum_{j,k}\underbrace{\frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar u^{\bar i}\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\, g_{j,k}}_{(1)} + \sum_{i,j,k}\underbrace{\frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}}\,\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\,\frac12\Big(\frac{\partial g_{j,k}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i,k}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{j,i}}{\partial u^k}\Big)}_{(3)}\\
&= \sum_{j,k}\frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar u^{\bar i}\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\, g_{j,k} + \sum_{i,j,k}\frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}}\,\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\,\Gamma_{i,j,k}
\end{aligned}$$

$$\delta_i^j = \sum_{\bar{i}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i}$$

$$\delta_k^i =: \sum_j g^{i,j}\, g_{j,k}$$

$$\bar{g}^{\bar{i},\bar{j}} = \sum_{i,j} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j}\; g^{i,j}, \text{ denn}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\bar{j}} \bar{g}^{\bar{i},\bar{j}}\, \bar{g}_{\bar{j},\bar{k}} &= \sum_{\bar{j}} \sum_{i,j} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j}\, g^{i,j} \; \sum_{l,k} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}\, g_{l,k} \\ &= \underbrace{\sum_{i,k} \underbrace{\sum_{j,l} \underbrace{\sum_{\bar{j}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}}_{\delta_j^l}\, g^{i,j}\, g_{l,k}}_{\delta_k^i} \; \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}}_{\delta_{\bar{k}}^{\bar{i}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{i,j}^k :&= \sum_l \Gamma_{i,j,l}\, g^{l,k} \\ \bar{\Gamma}_{\bar{i},\bar{j}}^{\bar{l}} &= \sum_{\bar{k}} \bar{\Gamma}_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}}\, \bar{g}^{\bar{k},\bar{l}} \\ &= \sum_{\bar{k}} \Big(\sum_{j,k} \frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}\, g_{j,k} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}\, \Gamma_{i,j,k} \Big) \; \sum_{p,q} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^p} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^q}\, g^{p,q} \\ &= \sum_{j,q} \frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^q} \; \underbrace{\sum_{k,p} \underbrace{\sum_{\bar{k}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^p}}_{=\delta_p^k}\, g_{j,k} g^{p,q}}_{=\delta_j^q} \\ &\quad + \sum_{i,j,q} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^q} \; \underbrace{\sum_{p,k} \underbrace{\sum_{\bar{k}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^p}}_{=\delta_p^k}\, \Gamma_{i,j,k} g^{p,q}}_{=\Gamma_{i,j}^q} \\ &= \sum_{i,j,l} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l}\, \Gamma_{i,j}^l + \sum_l \frac{\partial^2 u^l}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\delta^i_j &= \sum_{\bar i} \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \, \frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^j} \qquad \Rightarrow \\
0 &= \frac{\partial}{\partial u^k} \delta^i_j \\
&= \sum_{\bar i} \Big(\frac{\partial}{\partial u^k} \Big(\frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \Big) \, \frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^j} + \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \, \frac{\partial^2 \bar u^{\bar i}}{\partial u^j \partial u^k} \Big) \\
&= \sum_{\bar i, \bar k} \frac{\partial \bar u^{\bar k}}{\partial u^k} \, \frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar k}} \Big(\frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \Big) \, \frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^j} + \sum_{\bar i} \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \, \frac{\partial^2 \bar u^{\bar i}}{\partial u^j \partial u^k} \\
&= \sum_{\bar i, \bar k} \frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar u^{\bar i} \partial \bar u^{\bar k}} \, \frac{\partial \bar u^{\bar k}}{\partial u^k} \, \frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^j} + \sum_{\bar i} \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \, \frac{\partial^2 \bar u^{\bar i}}{\partial u^j \partial u^k} \qquad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\bar\Gamma^{\bar k}_{\bar i, \bar j} = \sum_{i,j,k} \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \, \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}} \, \frac{\partial \bar u^{\bar k}}{\partial u^k} \, \Gamma^k_{i,j} - \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \bar u^{\bar k}}{\partial u^i \partial u^j} \, \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \, \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}
$$

Sei nun eine Kurve $c : \mathbb{R} \to M$ gegeben in lokalen Koordinaten durch

$$
c(t) = \varphi(u^1(t), \dots, u^m(t)) = \bar\varphi(\bar u^1(t), \dots, \bar u^m(t))
$$

und $w : \mathbb{R} \to TM$ ein Vektorfeld längs c, d.h. $w(t) \in T_{c(t)}M$. In lokalen Koordinaten ist

$$
w(t) = \sum_i w^i(t) \, \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_{\bar i} \bar w^{\bar i}(t) \, \frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}} = \sum_{\bar i, i} \bar w^{\bar i}(t) \, \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \, \frac{\partial}{\partial u^i}
$$

und Koeffizientenvergleich liefert

$$
w^i(t) = \sum_{\bar i} \bar w^{\bar i}(t) \, \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}}.
$$

Die Normalprojektion der Ableitung von w auf den Tangentialraums ist in den lokalen Koordinaten $(u^1, \dots, u^m)$ durch

$$
\sum_i \left(\frac{dw^i(t)}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k}(u(t)) w^j(t) \frac{du^k(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^i}
$$

gegeben. In den Koordinaten $(\bar u^1,\dots,\bar u^m)$ ist

$$\sum_{\bar i}\left(\frac{d\bar w^{\bar i}(t)}{dt}+\sum_{\bar j,\bar k}\Gamma^{\bar i}_{\bar j,\bar k}(u(t))\bar w^{\bar j}(t)\frac{d\bar u^{\bar k}(t)}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}}=$$

$$=\sum_{\bar i}\left(\frac{d}{dt}\sum_i\frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^i}(u(t))\,w^i(t)+\right.$$
$$+\sum_{\bar j,\bar k}\left(\sum_{j,k,i}\Gamma^i_{j,k}(u(t))\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^i}-\sum_{j,k}\frac{\partial^2\bar u^{\bar i}}{\partial u^j\partial u^k}\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\right)\cdot$$
$$\left.\cdot\sum_l\frac{\partial \bar u^{\bar j}}{\partial u^l}\,w^l(t)\frac{d\bar u^{\bar k}(t)}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}}$$

$$=\sum_{\bar i}\left(\sum_{i,j}\frac{\partial^2\bar u^{\bar i}}{\partial u^i\partial u^j}(u(t))\,\frac{du^j(t)}{dt}\,w^i(t)+\sum_i\frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^i}(u(t))\,\frac{dw^i(t)}{dt}+\right.$$
$$+\sum_{\bar j,\bar k}\left(\sum_{j,k,i}\Gamma^i_{j,k}(u(t))\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^i}-\sum_{j,k}\frac{\partial^2\bar u^{\bar i}}{\partial u^j\partial u^k}\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\right)\cdot$$
$$\left.\cdot\sum_l\frac{\partial \bar u^{\bar j}}{\partial u^l}\,w^l(t)\frac{d\bar u^{\bar k}(t)}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}}$$

$$=\sum_{\bar i}\left(\sum_{i,j}\frac{\partial^2\bar u^{\bar i}}{\partial u^i\partial u^j}\,\frac{du^j}{dt}\,w^i+\sum_i\frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^i}(u(t))\,\frac{dw^i(t)}{dt}\right.$$
$$+\sum_{k,i}\sum_{l,j}\Gamma^i_{j,k}\underbrace{\sum_{\bar j}\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\frac{\partial \bar u^{\bar j}}{\partial u^l}}_{\delta^j_l}\,w^l\,\underbrace{\sum_{\bar k}\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\frac{d\bar u^{\bar k}}{dt}}_{\frac{du^k}{dt}}\frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^i}$$
$$\left.-\sum_k\underbrace{\sum_{\bar k}\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\frac{d\bar u^{\bar k}}{dt}}_{\frac{du^k}{dt}}\sum_{j,l}\frac{\partial^2\bar u^{\bar i}}{\partial u^j\partial u^k}\underbrace{\sum_{\bar j}\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\frac{\partial \bar u^{\bar j}}{\partial u^l}}_{\delta^j_l}\,w^l\right)\frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}}$$

$$=\sum_i\left(\frac{dw^i(t)}{dt}+\sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}(u(t))w^j(t)\frac{du^k(t)}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial u^i}$$

also ist dieser Ausdruck auch für eine abstrakte Riemann-Mannigfaltigkeit wohldefiniert. Wir nennen diesen Ausdruck die kovariante Ableitung ∇w eines Vektorfelds w längs einer Kurve c, d.h.

$$\nabla w(t):=\sum_i\left(\frac{dw^i(t)}{dt}+\sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}(u(t))w^j(t)\frac{du^k(t)}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial u^i}(u(t)).$$

Für Vektorfelder X und Y auf M können wir nun ein Vektorfeld $\nabla_X Y$ durch

$$(\nabla_X Y)_x := \nabla(Y \circ c),$$

wobei c die Integralkurve von X durch x ist. Es ist somit $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ eine wohldefinierte bilineare Abbildung. In Koordinaten haben wir

$$\nabla_X Y = \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Y^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Y^j X^k \right) \frac{\partial}{\partial u^i}. \quad \square$$

62.6 Lokale Formeln für ∇

Wählen wir für ξ_1, ξ_2 und ξ_3 Basisvektorfelder $g_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$, $g_j := \frac{\partial}{\partial u^j}$ und $g_k := \frac{\partial}{\partial u^k}$, so erhalten wir eine lokale Formel für ∇:

$$2g(\nabla_{g_i} g_j, g_k) = \tfrac{\partial}{\partial u^i} g_{j,k} + \tfrac{\partial}{\partial u^j} g_{k,i} - \tfrac{\partial}{\partial u^k} g_{i,j} + 0 =: 2\Gamma_{i,j,k}$$

Das ist gerade die Formel für die Christoffelsymbole der 1.ten Art.
Bezeichnen wir die Koeffizienten von $\nabla_{g_i} g_j$ bezüglich der Basis (g_l) mit $\Gamma^l_{i,j}$, also

$$\nabla_{g_i} g_j = \sum_{k=1}^m \Gamma^k_{i,j} g_k,$$

so erhalten wir:

$$\Gamma_{i,j,k} = g(\nabla_{g_i} g_j, g_k) = g\left(\sum_l \Gamma^l_{i,j} g_l, g_k \right) = \sum_l \Gamma^l_{i,j} g_{l,k}.$$

D.h. die $\Gamma^l_{i,j}$ sind die Christoffel-Symbole der 2.ten Art (siehe (58.2)).
Man beachte noch, daß aus der Symmetrie von $g_{i,j}$ folgende Umkehrformel für die partiellen Ableitungen der Koeffizienten der Riemann-Metrik folgt:

$$\tfrac{\partial}{\partial u^i} g_{j,k} = \Gamma_{i,j,k} + \Gamma_{i,k,j}.$$

Wegen Eigenschaft (62.4.2) ist $\nabla_X Y$ tensoriell in Y, d.h. $(\nabla_X Y)(p)$ hängt nur von X_p und Y ab. Sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine Kurve mit $c'(0) = X_p$. Dann ist $(\nabla_{c'(0)} Y)(p)$ wohldefiniert und in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$\begin{aligned}
(\nabla_{c'(0)} Y)(p) &= \nabla_{\sum_j \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial u^j}(p)} \Big(\sum_{i=1}^m Y^i \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big)(p) = \\
&= \sum_{j,i} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) \cdot \Big(\frac{\partial}{\partial u^j}\Big|_p Y^i \cdot \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_p + Y^i(p) \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}(p)} \frac{\partial}{\partial u^i}(p) \Big) \\
&= \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial}{\partial u^j}\Big|_p Y^i \cdot \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_p \\
&\quad + \sum_{i,j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0)\, Y^i(p)\, \Gamma^k_{j,i}|_p \, \frac{\partial}{\partial u^k}\Big|_p
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck macht aber sogar für ein Vektorfeld Y längs c Sinn, d.h. $Y(t) \in T_{c(t)}M$ für alle $t \in \mathbb{R}$, denn dann ist nach der Kettenregel

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial u^j}\Big|_{c(t)} Y^i \cdot \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t) = \frac{dY^i}{dt}(t)$$

und somit ist

$$(\nabla_{c'(t)}Y)(t) = \sum_i \Big(\frac{dY^i}{dt}(t) + \sum_{j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t)\, Y^k(t)\, \Gamma^i_{j,k}|_{c(t)} \Big) \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_{c(t)}.$$

62.7 Bemerkung

Wenn wir die entsprechenden Differentialgleichungen $0 = \nabla_{c'}X$ für parallele Vektorfelder X längs Kurven c und $0 = \nabla_{c'}c'$ für Geodäten c in lokalen Koordinaten aufschreiben, so erhalten wir

$$0 = \frac{dX^i}{dt}(t) + \sum_{j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t)\, X^k(t)\, \Gamma^i_{j,k}|_{c(t)}$$
$$0 = \frac{d^2(u^i \circ c)}{dt^2}(t) + \sum_{j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t)\, \frac{d(u^k \circ c)}{dt}(t)\, \Gamma^i_{j,k}|_{c(t)}.$$

Das zeigt, daß die Exponentialabbildung $\exp : TM \to M$ und der Paralleltransport $\mathrm{ptp} : C^\infty(\mathbb{R}, M) \times_M TM \to TM$ auch für abstrakte Riemann-Mannigfaltigkeiten existieren und die entsprechenden Eigenschaften besitzen.

62.8 Lemma. *Die Abbildung $(\pi, \exp) : TM \to M \times M$ ist ein Diffeomorphismus einer Umgebung U des Nullschnitts $M \subseteq TM$ auf eine Umgebung der Diagonale $\{(x,x) : x \in M\} \subseteq M \times M$.*

Beweis. Man beachte zuerst, daß der Tangentialraum von TM in einem Punkt 0_x des Nullschnitts gerade $T_xM \oplus T_xM$ ist. Dabei ist der erste Faktor durch die Tangentialvektoren an Kurven in $M \subseteq TM$ gegeben. Der zweite durch Geschwindigkeitsvektoren von Kurven im Vektorraum $T_xM \subseteq TM$. Diese beiden Teilräume haben trivialen Durchschnitt, und ergeben zusammen die richtige Dimension. Nun berechnen wir die partiellen Ableitungen von $(\pi, \exp)$. Auf dem Nullschnitt ist $(\pi, \exp) : TM \supset M \to M \times M$ gerade die Diagonal-Abbildung $x \mapsto (x,x)$ und auf der Faser T_xM ist $(\pi, \exp) : TM \supset T_xM \to M \times M$ die Abbildung $(\mathrm{konst}_x, \exp_x)$. Also sieht die Tangentialabbildung von $(\pi, \exp)$ in 0_x wie folgt aus:

$$T_{0_x}(\pi, \exp) = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ \mathrm{id} & T_0 \exp_x \end{pmatrix} : T_xM \times T_xM \to T_xM \times T_xM.$$

Wegen $T_0 \exp_x = \mathrm{id}_{T_xM}$ ist also $(\pi, \exp)$ ein lokaler Diffeomorphismus für Punkte nahe dem Nullschnitt.

Wir wählen für jedes $x \in M$ eine offene 0-Umgebung U_x in TM, so daß $(\pi, \exp) : U_x \to (\pi, \exp)(U_x)$ ein Diffeomorphismus ist, und die Fasern $U_x \cap T_yM$ Kugeln um 0 sind. Die Vereinigung $U := \bigcup_{x \in M} U_x$ ist dann eine offene Umgebung des Nullschnitts in TM. Und $(\pi, \exp) : U \to V := (\pi, \exp)(U)$ ist ein lokaler Diffeomorphismus.

Bleibt nur noch die Injektivität zu zeigen: Aber falls zwei Tangentialvektoren verschiedene Fußpunkte besitzen, so können wir sie durch die erste Komponente $\pi : TM \to M$ trennen, und falls sie den gleichen Fußpunkt $x \in M$ haben, so trennt sie die zweite Komponente $\exp_x$, da sie in einer der Kugeln $U_y \cap T_xM$ enthalten sind. □

62.9 Tubuläre Umgebung. *Sei $M \subseteq N$ eine Teilmannigfaltigkeit der Riemann-Mannigfaltigkeit N. Mit $TM^\perp$ bezeichnen wir das Normalbündel von M in N, d.h. jenes Vektorbündel über M, welches als Faser über $x \in M$ das orthogonale Komplement $(T_xM)^\perp$ von T_xM in T_xN bezüglich der Riemann-Metrik von N hat. Dann ist $\exp_N$ ein Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung des Nullschnitts $M \subseteq TM^\perp$ auf eine offene Umgebung von M in N. Die Bilder von Schnitten konstanter Länge schneiden die radialen Geodäten orthogonal.*

Beweis. Analog zum Beweis von Satz (62.8) können wir den Tangentialraum von $TM^\perp$ in einem Punkt x des Nullschnitts als $T_xM \oplus T_xM^\perp$ schreiben. Und die Tangential-Abbildung von $\exp_N$ hat die Gestalt

$$(\mathrm{id}_{T_xM}, T_0 \exp_x|_{(T_xM)^\perp}) = \mathrm{id}_{T_xN}\,.$$

Also ist exp genauso ein lokaler Diffeomorphismus, und auch die Injektivität kann wie im Beweis von Satz (62.8) erhalten werden.

Sei nun $X : \mathbb{R} \to TM^\perp$ ein Vektorfeld längs einer Kurve $c = \pi \circ X : \mathbb{R} \to M$ von konstanter Länge, so schneidet $\exp \circ X$ die radiale Geodäte $s \mapsto \exp_{c(t)}(sX(t))$ normal in t, wie der Beweis von (58.6) zeigt. □

Wählt man für M einen Punkt und in T_xM eine Orthonormalbasis, dann sind das gerade die Riemannschen-Normalkoordinaten. Ein anderer Spezialfall ist der einer -nach der Bogenlänge parametrisierten- dopppelpunktfreien Kurve $c : \mathbb{R} \to M$.

In (60.2) haben wir eine Riemann-Mannigfaltigkeit (M, g) als geodätisch vollständig bezeichnet, wenn jede Geodäte unendliche Länge hat, oder äquivalent, auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Der folgende Satz liefert nun den Zusammenhang mit der Vollständigkeit im Sinne der Metrik, wie wir ihm in (33.2) verwendet haben.

62.10 Satz von Hopf-Rinow.
Für eine Riemann-Mannigfaltigkeit sind die ersten 3 Aussagen äquivalent und die 4.te folgt aus den anderen:

1. *M ist geodätisch vollständig.*
2. *M ist als metrischer Raum vollständig, d.h. Cauchyfolgen konvergieren.*
3. *Jede in der Metrik beschränkte und abgeschlossene Menge ist kompakt.*
4. *Je zwei Punkte lassen sich durch eine Geodäte minimaler Länge verbinden.*

Beweis. ($3 \Rightarrow 2$) Dies ist ein allgemeiner Satz aus der Topologie.

($2 \Rightarrow 1$) Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte und $]a, b[$ ihr maximaler Definitionsbereich. Sei z.B. $b < +\infty$, und betrachten wir eine Folge $b_n \nearrow b$, dann ist $c(b_n)$ eine Cauchyfolge, denn

$$d(c(t_1) - c(t_2)) < L(c|_{[t_1,t_2]}) = |t_2 - t_1|.$$

Nach (2) existiert also $\lim_{n\to\infty} c(b_n) =: c(b)$. Aus (62.8) wissen wir, daß eine Umgebung U von $c(b)$ existiert und ein $\rho > 0$, sodaß $\exp_x$ für alle $x \in U$ und alle Vektoren der Länge kleiner als ρ definiert ist. Wählen wir nun n so groß, daß $b - b_n < \frac{\rho}{2}$ und

$c(b_n) \in U$. Dann ist die Geodäte mit Anfangsrichtung $c'(b_n)$ für $|t| < \frac{\rho}{2}$ definiert, also über b hinaus, Widerspruch.

($1 \Rightarrow 4$) Es sei $r := d(x,y) > 0$. Wir wählen ein $0 < \rho < r$, so daß $\exp_x : B_\rho(0) \to M$ injektiv ist. Sei $0 < \rho_1 < \rho$ und $S := \exp_x(\partial B_{\rho_1}(0))$. Da S kompakt ist, existiert ein $x_1 \in S$ mit $d(x_1, y)$ minimal. Sei $v \in T_x M$ mit $|v| = 1$ und $x_1 := \exp_x(\rho_1 v)$, Wir behaupten, daß $\exp_x(rv) = y$, also $c(t) := \exp_x(tv)$ eine minimale Geodäte von x nach y ist.

Zuerst zeigen wir: $d(c(t), y) = r - t$ für $0 \leq t \leq r$. Offensichtlich stimmt diese Gleichung für $t = \rho_1$, denn da jede Kurve von x nach y die Menge S trifft, gilt:

$$r = d(x,y) = \min_{s \in S}(d(x,s) + d(s,y)) = \rho_1 + d(x_1, y) = \rho_1 + d(c(\rho_1), y).$$

Sei nun t_0 das Infimum jener t, für welche die Gleichung nicht stimmt. Da die Bedingung abgeschlossen ist, gilt für t_0 die Gleichung. Inbesondere ist also $t_0 < r$. Sei S_0 ein geodätischer Kreis um $c(t_0)$ mit Radius $\rho_0 < r - t_0$, sei weiters x_0 ein Punkt auf S_0 mit minimalem Abstand von y, und sei c_0 eine Geodäte minimaler Länge von $c(t_0)$ nach x_0. Dann gilt:

$$d(c(t_0), y) = \min_{s \in S_0}(d(c(t_0), s) + d(s, y)) = \rho_0 + d(x_0, y)$$

und somit $d(x_0, y) = (r - t_0) - \rho_0$. Weiters ist

$$d(x, x_0) \geq d(x,y) - d(x_0, y) = r - (r - t_0) + \rho_0 = t_0 + \rho_0,$$

also hat die Kurve $c|_{[0,t_0]}$ gefolgt von c' die Länge $t_0 + \rho_0 \leq d(x, x_0)$ und somit gilt $d(x, x_0) = t_0 + \rho_0$. Und somit gilt die Gleichung auch noch für $t_0 + \rho_0$ für alle kleinen ρ. Das ist ein Widerspruch dazu, daß t_0 das Infimum jener t ist, für die die Gleichung falsch ist.

($1 \Rightarrow 3$) Sei $A \subseteq M$ abgeschlossen und beschränkt, i.e.

$$\sup\{d(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in A\} =: r < \infty.$$

Dann gilt nach (4): $B := \exp_x\{B_r(0)\} \supseteq A$, und B ist als stetiges Bild der kompakten Menge $B_r(0)$ kompakt, also auch A. □

62.11 Satz. *Sei (M, g) eine vollständige Riemann-Mannigfaltigkeit, und sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein bezüglich g beschränktes Vektorfeld. Dann ist X vollständig, d.h. hat einen globalen Fluß.*

Beweis. Sei $|X(x)|_g \leq R$ für alle $x \in M$ und sei c eine Lösungskurve von X, dann gilt:

$$L(c|_{[a,b]}) = \int_a^b |c'(t)|_g \, dt = \int_a^b |X(c(t))|_g \, dt \leq |b - a| \, R$$

Also bleibt c auf endlichen Intervallen innerhalb einer beschränkten, und wegen der Vollständigkeit innerhalb einer kompakten Menge. Dies ist ein Widerspruch zu (28.3). □

62.12 Satz von Nomitzu-Ozeki. *Zu jeder Riemann-Metrik gibt es immer eine konform äquivalente, die geodätisch vollständig ist.*

Beweis. Sei (M, g) eine Riemann-Mannigfaltigkeit und d die assoziierte Metrik zu g. Sei $B_r(X) := \{y \in M : d(x, y) < r\}$. Dann setzen wir

$$r(x) := \sup\{\rho > 0 : B_\rho(x) \text{ ist kompakt }\}.$$

Aus der Dreiecksungleichung für d folgt sofort $|r(x_1) - r(x_2)| < d(x_1, x_2)$. Also ist r stetig, und falls $r(x) = +\infty$ für ein x, so auch für alle anderen $x \in M$, und damit jede abgeschlossene beschränkte Menge kompakt, also ist M nach (62.10) vollständig. Wir dürfen also annehmen, daß $r : M \to \mathbb{R}$. Nun wählen wir mittels Partition der 1 eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $f(x) > \frac{1}{r(x)}$ für alle $x \in M$. Und betrachten die konform äquivalente Metrik $d_f := f^2\, g$.

Bleibt zu zeigen, daß g_f vollständig ist. Dafür genügt es die Inklusion $B^{g_f}_{1/3}(x) \subseteq B^g_{r(x)/2}(x)$ zu beweisen, denn dann hat jede Geodäte mindestens Länge $\frac{1}{3}$, und somit durch aneinanderstückeln unendliche Länge. D.h. g_f ist vollständig.

Sei also $y \in B^g_{r(x)/2}(x)$ und $c : [a, b] \to M$ eine glatte Kurve von x nach y dann gilt: $L^g(c) = \int_a^b |c'(t)|_g\, dt \geq d(x, y) > \frac{r(x)}{2}$ und

$$\begin{aligned} L^{g_f}(c) &= \int_a^b |c'(t)|_{g_f}\, dt \\ &= \int_a^b f(c(t))\, |c'(t)|_g\, dt = \qquad \text{(nach dem Mittelwertsatz)} \\ &= f(c(\tau)) \int_a^b |c'(t)|_g\, dt \\ &= f(c(\tau))\, L^g(c) > \frac{L(c)}{r(c(\tau))}. \end{aligned}$$

Wegen $|r(x) - r(c(\tau))| \leq d(x, c(\tau)) \leq L^g(c)$ gilt $r(c(\tau)) \leq r(x) + L^g(c)$ und somit

$$L^{g_f}(c) > \frac{L^g(c)}{r(c(\tau))} \geq \frac{L^g(c)}{r(x) + L^g(c)} > \frac{L^g(c)}{2L^g(c) + L^g(c)} = \frac{1}{3} \qquad \square$$

62.13 Lemma (Divergenz via kovarianter Ableitung). *Sei ξ ein Vektorfeld auf der orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M so gilt:*

$$\operatorname{div} \xi = \operatorname{Spur}(\eta \mapsto \nabla_\eta \xi).$$

Beweis. Für die Divergenz, die wir aus der äußeren Ableitung durch Anwendung des Hodge-Stern-Operators gewonnen haben, und die wir auch mittels Lie-Ableitung der Volumsform beschrieben haben, gilt folgende lokale Formel:

$$\operatorname{div} \xi = \tfrac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^m \tfrac{\partial}{\partial u^i} \Big(\sqrt{G} \xi^i \Big) = \sum_{i=1}^m \Big(\tfrac{\partial}{\partial u^i} \xi^i + \xi^i \tfrac{1}{2G} \tfrac{\partial}{\partial u^i} G \Big).$$

Für ∇_ξ haben wir die lokale Formel:

$$\begin{aligned}\nabla_{g_i}\xi &= \sum_{j=1}^m \left(\xi^j \nabla_{g_i} g_j + \tfrac{\partial}{\partial u^i}(\xi^j) g_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^m \left(\xi^j \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k g_k + \tfrac{\partial}{\partial u^i}(\xi^j) g_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \xi^k \Gamma_{i,k}^j + \tfrac{\partial}{\partial u^i}\xi^j\right) g_j.\end{aligned}$$

Für die Spur von $\eta \mapsto \nabla_\eta \xi$ erhalten wir also

$$\mathrm{Spur}(\nabla_. \xi) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \xi^k \Gamma_{i,k}^i + \tfrac{\partial}{\partial u^i}\xi^i\right).$$

Wegen $\det'(A)(B) = \det(A) \cdot \mathrm{Spur}(A^{-1}B)$ gilt schließlich:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2G}\tfrac{\partial}{\partial u^k} G &= \tfrac{1}{2G} G\,\mathrm{Spur}((g^{i,j})(\tfrac{\partial}{\partial u^k} g_{i,j}))\\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m g^{j,i}(\Gamma_{k,i,j} + \Gamma_{k,j,i}) = \sum_{i=1}^m \Gamma_{k,i}^i = \sum_{i=1}^m \Gamma_{i,k}^i.\end{aligned}$$ □

63. Jacobi-Felder

63.1 Bemerkung

Sei $c : [0,a] \to M$ eine Geodäte in einer Riemannschen Fläche. Diese läßt sich als radiale Geodäte der Form $c(t) = \exp_{c(0)}(t\,c'(0))$ schreiben. Sei dazu $x := c(0)$ und $v := c'(0)$. Wir wollen benachbarte radiale Geodäten diskutieren. Es gibt eine Umgebung um $[0,a] \times \{v\} \subset \mathbb{R} \times T_x M$, auf welcher exp wohldefiniert ist. Damit existieren auf dem Intervall $[0,a]$ die radialen Geodäten, welche bei x in eine Richtung nahe v starten. Betrachten wir nun die Variation $(t,w) \mapsto \exp_x(t(v+w))$ mit $w \perp v$. Die Richtungsableitung $\xi(t) := (T_{tv}\exp_x)(tw)$ an der Stelle $(t,0)$ in Richtung $(0,w)$ definiert ein Vektorfeld ξ längs c.

Wir wollen nun zeigen, daß das Vektorfeld ξ die Jacobi-Gleichung

$$\nabla^2\xi(t) + K(c(t))\,\xi(t) = 0$$

mit den Anfangswerten $\xi(0) = 0$ und $\nabla\xi(0) = w$ erfüllt.

Da

$$\varphi : (r,\theta) \mapsto \exp_x(r(\cos\theta v + \sin\theta w)) \text{ für } |w| = 1 = |v|$$

geodätische Parallelkoordinaten sind, also $E = 1$, $F = 0$, $G > 0$ erfüllen, gilt die Jacobi-Gleichung $K = -\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \sqrt{G}$ aus (53.9).

$$\begin{aligned}\text{Für } \xi(t) :&= \tfrac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \exp_x(t(v+sw))\\ &= \tfrac{\partial}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} \exp_x(t\cos\theta v + t\sin\theta w) = \partial_2\varphi(t,0)\end{aligned}$$

ist $|\xi|^2 = |\partial_2\varphi|^2 = G$.

Das Vektorfeld ξ steht normal auf c', da die radialen Geodäten die geodätischen Sphären orthogonal schneiden, also läßt sich ξ als $\lambda(t)\nu(t)$ schreiben, wobei ν das Einheitsnormalenfeld zu c' in TM ist. Folglich gilt $\lambda'' + (K \circ c)\lambda = 0$. Da c eine Geodäte ist, ist c' ein paralleles Vektorfeld (siehe (61.1)) längs c und ebenso ν. Also gilt für die kovariante Ableitung von ξ:

$$\nabla\xi = \nabla(\lambda\,\nu) = \lambda\,\nabla\nu + \lambda'\,\nu = \lambda'\,\nu \quad \Rightarrow\Rightarrow \quad \nabla^2\xi = \lambda''\,\nu \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \nabla^2\xi + K\,\xi = \lambda''\,\nu + K\,\lambda\,\nu = (\lambda'' + k\,\lambda)\nu = 0$$

63.2 Definition (Jacobi-Felder)

Wir nennen ein Vektorfeld ξ längs einer Geodäte c ein JACOBI-FELD falls es die JACOBI-GLEICHUNG

$$\nabla^2\xi + (K \circ c)\,\xi = 0$$

erfüllt und orthonormal auf die Geodäte steht.

63.3 Lemma. *Die Jacobi-Felder ξ längs einer Geodäte c mit Anfangsbedingung $\xi(0) = 0$ sind genau jene Vektorfelder, welche sich als $\xi(t) := (T_{tc'(0)} \exp_{c(0)})(tw)$ mit $w \in c'(0)^\perp \subset T_{c(0)}M$ schreiben lassen.*

Beweis. Wir haben gerade gezeigt, daß so darstellbare Vektorfelder Jacobi-Felder sind. Berechnen wir nun noch deren Anfangswerte. Klarerweise ist

$$\xi(0) = (T_{0c'(0)} \exp_{c(0)})(0w) = 0.$$

Bezüglich der Koordinaten $(u^1, u^2) \mapsto \exp_x(u^1\,v + u^2\,w)$ gilt $u^1(t) = t$, $u^2(t) = 0$, $\xi^1(t) = 0$ und $\xi^2(t) = t$. Also ist

$$\nabla\xi(0) = \sum_{k=1}^{2} \left(\tfrac{\partial}{\partial u^2} + \Gamma^k_{2,1} \cdot t \cdot 1 \cdot \tfrac{\partial}{\partial u^k}\right) = \tfrac{\partial}{\partial u^2} = w.$$

Da die lineare Differentialgleichung 2.ter Ordnung $\lambda'' + (K \circ c)\,\lambda = 0$ aber zu jedem Anfangswert eine eindeutige Lösung hat, muß diese obige Gestalt besitzen. □

Sei nun M eine vollständige Riemann-Mannigfaltigkeit und c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte in M. Wir haben gesehen, daß Kurven die in geodätischen Parallelkoordinaten nahe an c liegen, keine kürzere Bogenlänge haben können. Wir untersuchen nun die Frage, wann wir geodätische Polarkoordinaten um $c(0)$ finden können, welche bis zu $c(t)$ reichen. Dazu folgende

63.4 Definition (Konjugierte Punkte)

Es sei $c(t) = \exp_{c(0)}(tc'(0))$ eine Geodäte in M. Ein Punkt $c(t)$ heißt KONJUGIERT zu $c(0)$ falls das Differential $T_{tc'(0)}(exp_{c(t)})$ der Exponentialabbildung bei $tc'(0) \in T_{c(0)}M$ kein Isomorphismus von $T_{c(0)}M = T_{tc'(0)}T_{c(0)}M$ nach $T_{c(t)}M$ ist.

63.5 Satz (Konjugierte Punkte). *Für eine Geodäte c in einer vollständigen Riemannschen Fläche sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *$c(t)$ ist konjugiert zu $c(0)$ längs c.*

2. *Es existiert ein nicht-verschwindendes Jacobi-Vektorfeld* ξ *längs* c *mit* $\xi(t) = 0 = \xi(0)$.

Beweis. Nach (63.3) können wir ein nichttriviales Jacobi-Feld mit Anfangsbedingung $\xi(0) = 0$ und $\nabla\xi(0) = \xi_0 \perp c'(0)$ finden, dieses ist gegeben durch:

$$\xi(t) := (T_{tc'(0)} \exp_{c(0)})(t\xi(0)).$$

Also ist $\xi(t) = 0$ genau dann, wenn $t\xi(0)$ im Kern von $T_{tc'(0)} \exp_x$ liegt. Nun brauchen wir nur noch zu beachten, daß $(T_{tv} \exp_x)(v) = c'(t) \neq 0$ und $(T_{tv} \exp_x)(w) \perp c'(t)$ für alle $w \perp v$ gilt. Also ist der Kern von $(T_{tv} \exp_x)(w)$ die Menge $\{\xi(t) : \xi$ ist ein Jacobi-Feld längs $c\}$. Da $\exp_x : T_xM \to M$ eine Abbildung zwischen gleichdimensionalen Räumen ist, ist die Aussage $\operatorname{Ker}(T_{tv} \exp_x) = 0$ damit äquivalent, daß $T_{tv} \exp_x$ ein Isomorphismus ist. □

63.6 Folgerung. *Sei* c *eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte. Falls* c *im Inneren eines Parameterintervalls* $[t_1, t_2]$ *keine konjugierte Punkte enthält, so gilt* $L(c_1) \geq L(c)$ *für jede nahe* c *gelegene Kurve* c_1.

Es gilt auch die Umkehrung, siehe [**70**].

Beweis. Wie im Beweis von (63.3) betrachten wir eine Abbildung φ nach geodätischen Polarkoordinaten um $c(0)$. Wegen (63.5) ist diese Abbildung ein lokaler Diffeomorphismus in jedem Punkt von $]t_1, t_0[\times \{0\}$. Also haben wir, abgesehen von den Randpunkten, geodätische Parallelkoordinaten längs c. Nach (58.7) ist dann die Länge jeder nahe c gelegenen Kurve mindestens so groß wie jene von c. □

Durch Abschätzen der Lösungen der linearen Jacobi-Gleichung erhält man:

63.7 Folgerung. *Sei* c *eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte, so daß* $K_0 \leq K(c(t)) \leq K_1$. *Dann liegt in jedem offenen Intervall der Länge* $\frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$ *kein Paar konjugierter Punkte. In jedem abgeschlossenen Intervall der Länge* $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ *hingegen liegt ein Paar konjugierter Punkte.*

Ohne Beweis, siehe [**83**, S.118].

63.8 Theorem von Bonnet. *Ist* M *eine vollständige Riemannsche Fläche und* $K \geq K_0 > 0$, *so ist der geodätischen Abstand je zweier Punkte höchstens* $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$. *Insbesondere ist* M *kompakt.*

Beweis. Wegen (63.7) enthält jeder geodätische Bogen, dessen Länge größer als $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ ist, konjugierte Punkte, und somit kann er nicht die kürzeste Verbindung darstellen. Damit sind seine Endpunkte aber höchstens $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ entfernt. Insbesondere ist der Durchmesser

$$d(M) := \inf\{d(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in M\} \leq \frac{\pi}{\sqrt{K_0}},$$

und somit ist M nach (62.10) M kompakt. □

63.9 Theorem [**32**]. *Die Exponential-Abbildung jeder vollständigen Riemann-Fläche mit* $K \leq 0$ *ist für jedes* $x \in M$ *eine Überlagerung* $\exp_x : T_xM \to M$. *Ist also* M *zusätzlich einfachzusammenhängend, so ist* $\exp_x : T_xM \to M$ *ein Diffeomorphismus.*

Ohne Beweis, siehe [**83**, 6.6.4].

Auf allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten sieht die Jacobi-Gleichung wie folgt aus:

$$\nabla^2\xi + R(\xi, c')c' = 0$$

Ihre Lösungen heißen wieder Jacobi-Felder, die genau die Richtungsableitung von 1-Parameter-Variationen der Geodäte c sind. Die Darstellung für Jacobi-Felder ξ mit $\xi(0) = 0$ via der Ableitung von $\exp_{c(0)}$ gilt genau wie im 2-Dimensionalen. Der Randwert dieser Jacobi-Felder beschreibt den Kern der Exponentialabbildung, und somit konjugierte Punkte. Ebenso gilt dann (63.6) und (63.8) [Myres1935] und (63.9) [ECartan1928]. Für Beweise dieser Resultate siehe z.B. [**60**].

64. Riemann-, Ricci- und Schnittkrümmung

Seien 2 Vektorfelder ξ und η im $\mathbb{R}^n$ gegeben. Dann gilt für die übliche Ableitung des Vektorfelds ξ in Richtung η, die wir hier auch mit $D_\eta\xi : x \mapsto \xi'(x)(\eta(x))$ bezeichnen wollen:

$$[D_\xi, D_\eta] := D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi = D_{[\xi,\eta]},$$

denn

$$\begin{aligned}(D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi)\Big((\zeta^i)_{i=1}^m\Big) &= \big(\xi(\eta(\zeta^i)) - \eta(\xi(\zeta^i))\big)_{i=1}^m\\ &= [\xi,\eta](\zeta^i)_{i=1}^m = D_{[\xi,\eta]}\big((\zeta^i)_{i=1}^m\big)\end{aligned}$$

64.1 Satz (Godazzi-Mainardi-Gleichung).
Sei M eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ und seien ξ, η, ζ Vektorfelder im $\mathbb{R}^n$, welche längs M tangential an M sind. Dann ist

1. $\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta - \nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \nabla_{[\xi,\eta]}\zeta = \langle L\,\eta, \zeta\rangle L\,\xi - \langle L\,\xi, \zeta\rangle L\,\eta,$
2. $\nabla_\xi L\,\eta - \nabla_\eta L\,\xi = L[\xi, \eta].$

Die erste Gleichung wird auch als Gauss-Gleichung *und die zweite als* Godazzi-Mainardi-Gleichung *bezeichnet.*

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}0 &= D_\xi D_\eta\zeta - D_\eta D_\xi\zeta - D_{[\xi,\eta]}\zeta \overset{(62.2)}{=\!=}\\ &= D_\xi\Big(\nabla_\eta\zeta - \langle L\,\eta,\zeta\rangle\nu\Big) - D_\eta\Big(\nabla_\xi\zeta - \langle L\,\xi,\zeta\rangle\nu\Big) - D_{[\xi,\eta]}\zeta\\ &= D_\xi\nabla_\eta\zeta - \xi(\langle L\,\eta,\zeta\rangle)\nu - \langle L\eta,\zeta\rangle D_\xi\nu\\ &\quad - D_\eta\nabla_\xi\zeta + \eta(\langle L\,\xi,\zeta\rangle)\nu + \langle L\xi,\zeta\rangle D_\eta\nu\\ &\quad - \nabla_{[\xi,\eta]}\zeta + \langle L\,[\xi,\eta],\zeta\rangle\nu\\ &= \nabla_\xi\nabla_\eta\zeta - \langle L\,\xi, \nabla_\eta\zeta\rangle\nu - \xi(\langle L\,\eta,\zeta\rangle)\nu - \langle L\,\eta,\zeta\rangle L\,\xi\\ &\quad - \nabla_\eta\nabla_\xi\zeta + \langle L\,\eta, \nabla_\xi\zeta\rangle\nu + \eta(\langle L\,\xi,\zeta\rangle)\nu + \langle L\,\xi,\zeta\rangle L\,\eta\\ &\quad - \nabla_{[\xi,\eta]}\zeta + \langle L\,[\xi,\eta],\zeta\rangle\nu.\end{aligned}$$

Der Tangentialanteil hiervon ist:

$$0 = \nabla_\xi\nabla_\eta\zeta - \nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \nabla_{[\xi,\eta]} - \langle L\,\eta,\zeta\rangle L\,\xi + \langle L\,\xi,\zeta\rangle L\,\eta$$

Und der Normalanteil ist:

$$\begin{aligned}0 &= -\langle \nabla_\eta \zeta, L\,\xi\rangle - \xi\langle L\,\eta, \zeta\rangle + \langle \nabla_\xi \zeta, L\,\eta\rangle + \eta\langle L\,\xi, \zeta\rangle + \langle L\,[\xi,\eta], \zeta\rangle \\ &= \Big\langle -\nabla_\xi(L\,\eta) + \nabla_\eta(L\,\xi) + L\,[\xi,\eta], \zeta\Big\rangle. \qquad \square\end{aligned}$$

64.2 Definition (Riemann-Krümmung)

Die Riemann-Krümmung $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to L(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$ einer Riemann-Mannigfaltigkeit ist definiert durch die linke Seite der Gauß-Gleichung:

$$R(\xi,\eta) := [\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi,\eta]}.$$

Die Motivation hierfür ist, daß die rechte Seite auf η angewandt und ins innner Produkt mit ξ genommen für orthonormale Vektoren ξ und η gerade die Gaußkrümmung liefert:

$$\begin{aligned}&\langle \langle L\,\eta, \eta\rangle L\,\xi - \langle L\,\xi, \eta\rangle L\,\eta, \xi\rangle = \\ &\qquad = \langle L\,\eta, \eta\rangle\langle L\,\xi, \xi\rangle - \langle L\,\xi, \eta\rangle\langle L\,\eta, \xi\rangle = \det(L) = K.\end{aligned}$$

64.3 Lemma (Die Riemann-Krümmung ist Tensorfeld).

Die Riemann-Krümmung ist ein 3-fach ko- und 1-fach kontravariantes Tensorfeld auf M, d.h. $R \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes TM$.

(Koordinatenfreier) Beweis. Dazu muß man nur zeigen, daß die Abbildung $(\xi,\eta,\zeta) \mapsto R(\xi,\eta)(\zeta)$ in allen Variablen $C^\infty(M,\mathbb{R})$-homogen ist.

$$\begin{aligned}R(f\xi,\eta) &= [\nabla_{f\xi}, \nabla_\eta] - \nabla_{[f\xi,\eta]} \\ &= [f\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{f[\xi,\eta]-\eta(f)\xi} \\ \\ &= (f\nabla_\xi)\nabla_\eta - \nabla_\eta(f\nabla_\xi) - f\nabla_{[\xi,\eta]} + \eta(f)\nabla_\xi \\ &= f\nabla_\xi\nabla_\eta - f\nabla_\eta\nabla_\xi - \eta(f)\nabla_\xi - f\nabla_{[\xi,\eta]} + \eta(f)\nabla_\xi \\ &= f\left([\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi,\eta]}\right) + 0 \\ &= f\,R(\xi,\eta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(\xi,\eta)(f\zeta) &= \left([\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi,\eta]}\right)(f\zeta) \\ &= \nabla_\xi(f\nabla_\eta\zeta + \eta(f)\zeta) - \nabla_\eta(f\nabla_\xi\zeta + \xi(f)\zeta) \\ &\qquad - f\nabla_{[\xi,\eta]}\zeta - [\xi,\eta](f)\zeta \\ &= f\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta + \xi(f)\nabla_\eta\zeta + \eta(f)\nabla_\xi\zeta + \xi(\eta(f))\zeta \\ &\qquad - f\nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \eta(f)\nabla_\xi\zeta - \xi(f)\nabla_\eta\zeta - \eta(\xi(f))\zeta \\ &\qquad - f\nabla_{[\xi,\eta]}\zeta - \xi(\eta(f))\zeta + \eta(\xi(f))\zeta \\ &= f\left(\nabla_\xi\nabla_\eta - \nabla_\eta\nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]}\right)\zeta \\ &= f\,R(\xi,\eta)(\zeta). \qquad \square\end{aligned}$$

Koordinatenbeweis.

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= \nabla_X\left(\sum_i\left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}Y^k + \sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}Z^jY^k\right)\frac{\partial}{\partial u^i}\right) \\
&\quad - \nabla_Y\left(\sum_i\left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}X^k + \sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}Z^jX^k\right)\frac{\partial}{\partial u^i}\right) \\
&\quad - \nabla_{\sum_{i,j}\left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial u^i}\right)\frac{\partial}{\partial u^j}}Z \\
&= \sum_i\left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}Y^k + \sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}Z^jY^k\right)\nabla_X\frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad + X\left(\sum_i\left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}Y^k + \sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}Z^jY^k\right)\right)\frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_i\left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}X^k + \sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}Z^jX^k\right)\nabla_Y\frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - Y\left(\sum_i\left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}X^k + \sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}Z^jX^k\right)\right)\frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_{i,j}\left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial u^i}\right)\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}Z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i \Big(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Z^j Y^k \Big) \sum_l X^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^l}} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad + \sum_i \Big(\sum_k X(\frac{\partial Z^i}{\partial u^k}) Y^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X(Y^k) \\
&\quad + \sum_{j,k} X(\Gamma^i_{j,k}) Z^j Y^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} X(Z^j) Y^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Z^j X(Y^k) \Big) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_i \Big(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Z^j X^k \Big) \sum_l Y^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^l}} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_i \Big(\sum_k Y(\frac{\partial Z^i}{\partial u^k}) X^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y(X^k) \\
&\quad + \sum_{j,k} Y(\Gamma^i_{j,k}) Z^j X^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Y(Z^j) X^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Z^j Y(X^k) \Big) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_{i,j} \Big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \Big) \sum_l \Big(Z^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^l} + \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i \Big(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Z^j Y^k \Big) \sum_l X^l \sum_p \Gamma^p_{l,i} \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&\quad + \sum_i \Big(\sum_k \sum_p X^p \frac{\partial \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}}{\partial u^p} Y^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \sum_p X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \\
&\quad + \sum_{j,k} \sum_p X^p \frac{\partial \Gamma^i_{j,k}}{\partial u^p} Z^j Y^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} \sum_p X^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} Y^k \\
&\quad + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Z^j \sum_p X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \Big) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_i \Big(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Z^j X^k \Big) \sum_l Y^l \sum_p \Gamma^p_{i,l} \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&\quad - \sum_i \Big(\sum_k \sum_p Y^p \frac{\partial \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}}{\partial u^p} X^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \sum_p Y^p \frac{\partial X^k}{\partial u^p} \\
&\quad + \sum_{j,k} \sum_p Y^p \frac{\partial \Gamma^i_{j,k}}{\partial u^p} Z^j X^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} \sum_p Y^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} X^k \\
&\quad + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Z^j \sum_p Y^p \frac{\partial X^k}{\partial u^p} \Big) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_{i,j} \Big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \Big) \sum_l \Big(Z^l \sum_p \Gamma^p_{j,l} \frac{\partial}{\partial u^p} + \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,k,l,p} X^l\, Y^k\, \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, \Gamma^p_{l,i}\, \frac{\partial}{\partial u^p} + \sum_{i,j,k,l,p} X^l\, Y^k\, Z^j\, \Gamma^i_{j,k}\, \Gamma^p_{l,i}\, \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&\quad + \sum_{i,k,p} X^p\, Y^k\, \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p}\, \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,k,p} X^p\, \frac{\partial Y^k}{\partial u^p}\, \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad + \sum_{i,j,k,p} X^p\, Y^k\, Z^j\, \frac{\partial \Gamma^i_{j,k}}{\partial u^p}\, \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,k,p} X^p\, Y^k\, \frac{\partial Z^j}{\partial u^p}\, \Gamma^i_{j,k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad + \sum_{i,j,k,p} X^p\, \frac{\partial Y^k}{\partial u^p}\, Z^j\, \Gamma^i_{j,k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_{i,k,l,p} X^k\, Y^l\, \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, \Gamma^p_{i,l}\, \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,l,p} X^k\, Y^l\, Z^j\, \Gamma^i_{j,k}\, \Gamma^p_{i,l}\, \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&\quad - \sum_{i,k,p} X^k\, Y^p\, \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p}\, \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p}\, Y^p\, \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_{i,j,k,p} X^k\, Y^p\, Z^j\, \frac{\partial \Gamma^i_{j,k}}{\partial u^p}\, \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,k,p} X^k\, Y^p\, \frac{\partial Z^j}{\partial u^p}\, \Gamma^i_{j,k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_{i,j,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p}\, Y^p\, Z^j\, \Gamma^i_{j,k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_{i,j,l,p} X^i\, \frac{\partial Y^j}{\partial u^i}\, Z^l\, \Gamma^p_{j,l}\, \frac{\partial}{\partial u^p} + \sum_{i,j,l,p} \frac{\partial X^j}{\partial u^i}\, Y^i\, Z^l\, \Gamma^p_{j,l}\, \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&\quad - \sum_{i,j,l} X^i\, \frac{\partial Y^j}{\partial u^i}\, \frac{\partial Z^l}{\partial u^j}\, \frac{\partial}{\partial u^l} + \sum_{i,j,l} \frac{\partial X^j}{\partial u^i}\, Y^i\, \frac{\partial Z^l}{\partial u^j}\, \frac{\partial}{\partial u^l}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \sum_{i,j,k,p} X^p\, Y^k\, Z^j\, \frac{\partial \Gamma^i_{j,k}}{\partial u^p}\, \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,k,p} X^k\, Y^p\, Z^j\, \frac{\partial \Gamma^i_{j,k}}{\partial u^p}\, \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& + \sum_{i,j,k,l,p} X^l\, Y^k\, Z^j\, \Gamma^i_{j,k}\, \Gamma^p_{l,i}\, \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,l,p} X^k\, Y^l\, Z^j\, \Gamma^i_{j,k}\, \Gamma^p_{i,l}\, \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& + \sum_{i,k,l,p} X^l\, Y^k\, \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, \Gamma^p_{l,i}\, \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,p} X^k\, Y^p\, \frac{\partial Z^j}{\partial u^p}\, \Gamma^i_{j,k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& + \sum_{i,j,k,p} X^p\, Y^k\, \frac{\partial Z^j}{\partial u^p}\, \Gamma^i_{j,k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,l,p} X^k\, Y^l\, \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, \Gamma^p_{i,l}\, \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& + \sum_{i,j,k,p} X^p\, \frac{\partial Y^k}{\partial u^p}\, Z^j\, \Gamma^i_{j,k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,l,p} X^i\, \frac{\partial Y^j}{\partial u^i}\, Z^l\, \Gamma^p_{j,l}\, \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& - \sum_{i,j,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p}\, Y^p\, Z^j\, \Gamma^i_{j,k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,l,p} \frac{\partial X^j}{\partial u^i}\, Y^i\, Z^l\, \Gamma^p_{j,l}\, \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& + \sum_{i,k,p} X^p\, \frac{\partial Y^k}{\partial u^p}\, \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,l} X^i\, \frac{\partial Y^j}{\partial u^i}\, \frac{\partial Z^l}{\partial u^j}\, \frac{\partial}{\partial u^l} \\
& - \sum_{i,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p}\, Y^p\, \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,l} \frac{\partial X^j}{\partial u^i}\, Y^i\, \frac{\partial Z^l}{\partial u^j}\, \frac{\partial}{\partial u^l} \\
& + \sum_{i,k,p} X^p\, Y^k\, \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p}\, \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,p} X^k\, Y^p\, \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p}\, \frac{\partial}{\partial u^i} \\
= & \sum_p \sum_{i,j,k} X^i\, Y^j\, Z^k\, \underbrace{\left(\frac{\partial \Gamma^p_{k,j}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^p_{k,i}}{\partial u^j} + \sum_l \Big(\Gamma^l_{k,j}\, \Gamma^p_{i,l} - \Gamma^l_{k,i}\, \Gamma^p_{l,j} \Big) \right)}_{=:R^p_{i,j,k}} \frac{\partial}{\partial u^p} \\
= & \sum_p \sum_{i,j,k} X^i\, Y^j\, Z^k\, R^p_{i,j,k}\, \frac{\partial}{\partial u^p} \qquad \square
\end{aligned}
$$

64.4 Bemerkung

In lokalen Koordinaten haben wir von

$$R = \sum_{i,j,k,l} R^l_{i,j,k}\, du^i \otimes du^j \otimes du^k \otimes \tfrac{\partial}{\partial u^l}$$

$$\text{mit} \quad R^l_{i,j,k} = \tfrac{\partial}{\partial u^i} \Gamma^l_{j,k} - \tfrac{\partial}{\partial u^j} \Gamma^l_{i,k} + \sum_{p=1}^m (\Gamma^p_{j,k} \Gamma^l_{i,p} - \Gamma^p_{i,k} \Gamma^l_{j,p})$$

Beziehungsweise für $R(\xi,\eta,\zeta,\chi) := \langle R(\xi,\eta)\zeta,\chi\rangle$

$$
\begin{aligned}
R &= \sum_{i,j,k,l} R_{i,j,k,l}\; du^i\otimes du^j\otimes du^k\otimes du^l\\
\text{mit}\quad R_{i,j,k,l} &= \sum_{p=1}^m R^p_{i,j,k} g_{p,l}\\
&= \tfrac12\Big(\tfrac{\partial^2}{\partial u^i\partial u^k} g_{l,j} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^i\partial u^l} g_{j,k} + \tfrac{\partial^2}{\partial u^j\partial u^l} g_{i,k} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^j\partial u^k} g_{l,i}\Big)\\
&\quad + \sum_{p=1}^m\sum_{q=1}^m g^{p,q}(\Gamma_{i,k,q}\Gamma_{j,p,l} - \Gamma_{j,k,q}\Gamma_{i,l,p}).
\end{aligned}
$$

Beweis. Wir rechnen wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^m R^l_{i,j,k}\tfrac{\partial}{\partial u^l} &= R(\tfrac{\partial}{\partial u^i},\tfrac{\partial}{\partial u^j})\tfrac{\partial}{\partial u^k} = \left(\left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}},\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\right] - \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right]}\right)\tfrac{\partial}{\partial u^k}\\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\left(\sum_{l=1}^m \Gamma^l_{j,k}\tfrac{\partial}{\partial u^l}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\left(\sum_{l=1}^m \Gamma^l_{i,k}\tfrac{\partial}{\partial u^l}\right) + 0\\
&= \sum_{l=1}^m\left(\Gamma^l_{j,k}\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\tfrac{\partial}{\partial u^l} + \tfrac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma^l_{j,k})\tfrac{\partial}{\partial u^l}\right)\\
&\quad - \sum_{l=1}^m\left(\Gamma^l_{i,k}\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\tfrac{\partial}{\partial u^l} + \tfrac{\partial}{\partial u^j}(\Gamma^l_{i,k})\tfrac{\partial}{\partial u^l}\right)\\
&= \sum_{l=1}^m\left(\Gamma^l_{j,k}\sum_{p=1}^m\Gamma^p_{i,l}\tfrac{\partial}{\partial u^p} + \tfrac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma^l_{j,k})\tfrac{\partial}{\partial u^l}\right)\\
&\quad - \sum_{l=1}^m\left(\Gamma^l_{i,k}\sum_{p=1}^m\Gamma^p_{j,l}\tfrac{\partial}{\partial u^p} + \tfrac{\partial}{\partial u^j}(\Gamma^l_{i,k})\tfrac{\partial}{\partial u^l}\right)\\
&= \sum_{l=1}^m\sum_{p=1}^m\left(\Gamma^p_{j,k}\Gamma^l_{i,p} - \Gamma^p_{i,k}\Gamma^l_{j,p}\right)\tfrac{\partial}{\partial u^l}\\
&\quad + \sum_{l=1}^m\left(\tfrac{\partial}{\partial u^i}\Gamma^l_{j,k} - \tfrac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^l_{i,k}\right)\tfrac{\partial}{\partial u^l}.
\end{aligned}
$$

Also gilt:

$$
R^l_{i,j,k} = \tfrac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma^l_{j,k}) - \tfrac{\partial}{\partial u^j}(\Gamma^l_{i,k}) + \sum_{p=1}^m(\Gamma^p_{j,k}\Gamma^l_{i,p} - \Gamma^p_{i,k}\Gamma^l_{j,p}).
$$

Nun berechnen wir $R_{i,j,k,l} := \sum_{p=1}^m R^p_{i,j,k} g_{p,l}$:

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^m \tfrac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma^p_{j,k})g_{p,l} &= \tfrac{\partial}{\partial u^i}\left(\sum_{p=1}^m \Gamma^p_{j,k} g_{p,l}\right) - \sum_{p=1}^m \Gamma^p_{j,k}\tfrac{\partial}{\partial u^i}(g_{p,l})\\ &= \tfrac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma_{j,k,l}) - \sum_{p=1}^m \Gamma^p_{j,k}(\Gamma_{i,p,l}+\Gamma_{i,l,p}).\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}R_{i,j,k,l} &:= \langle R(\tfrac{\partial}{\partial u^i},\tfrac{\partial}{\partial u^j})\tfrac{\partial}{\partial u^k},\tfrac{\partial}{\partial u^l}\rangle = \langle \textstyle\sum_{p=1}^m R^p_{i,j,k}\tfrac{\partial}{\partial u^p},\tfrac{\partial}{\partial u^l}\rangle = \textstyle\sum_{p=1}^m R^p_{i,j,k} g_{p,l}\\ &= \textstyle\sum_{p=1}^m \Big(\tfrac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma^p_{j,k}) - \tfrac{\partial}{\partial u^j}(\Gamma^p_{i,k}) + \sum_{q=1}^m(\Gamma^q_{j,k}\Gamma^p_{i,q} - \Gamma^q_{i,k}\Gamma^p_{j,q})\Big) g_{p,l}\\ &= \tfrac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma_{j,k,l}) - \textstyle\sum_{p=1}^m \Gamma^p_{j,k}(\underbrace{\Gamma_{i,p,l}}_{(1)} + \underbrace{\Gamma_{i,l,p}}_{(2)})\\ &\quad - \tfrac{\partial}{\partial u^j}(\Gamma_{i,k,l}) + \textstyle\sum_{p=1}^m \Gamma^p_{i,k}(\underbrace{\Gamma_{j,p,l}}_{(3)} + \underbrace{\Gamma_{j,l,p}}_{(4)})\\ &\quad + \textstyle\sum_{q=1}^m(\underbrace{\Gamma^q_{j,k}\Gamma_{i,q,l}}_{(1)} - \underbrace{\Gamma^q_{i,k}\Gamma_{j,q,l}}_{(3)})\\ &= \tfrac12\tfrac{\partial}{\partial u^i}(\tfrac{\partial}{\partial u^j}g_{k,l} + \tfrac{\partial}{\partial u^k}g_{l,j} - \tfrac{\partial}{\partial u^l}g_{j,k}) - \tfrac12\tfrac{\partial}{\partial u^j}(\tfrac{\partial}{\partial u^i}g_{k,l} + \tfrac{\partial}{\partial u^k}g_{l,i} - \tfrac{\partial}{\partial u^l}g_{i,k})\\ &\quad + \textstyle\sum_{p=1}^m(\underbrace{\Gamma^p_{i,k}\Gamma_{j,l,p}}_{(4)} - \underbrace{\Gamma^p_{j,k}\Gamma_{i,l,p}}_{(2)})\\ &= \tfrac12\Big(\tfrac{\partial^2}{\partial u^i\partial u^k}g_{l,j} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^i\partial u^l}g_{j,k} + \tfrac{\partial^2}{\partial u^j\partial u^l}g_{i,k} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^j\partial u^k}g_{l,i}\Big)\\ &\quad + \textstyle\sum_{p=1}^m\sum_{q=1}^m g^{p,q}(\Gamma_{i,k,q}\Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k,q}\Gamma_{i,l,p}). \qquad\square\end{aligned}$$

64.5 Lemma (Symmetrie der Riemann-Krümmung).
Die Riemann-Krümmung erfüllt folgende Identitäten:

1. $R(X,Y)Z + R(Y,X)Z = 0$
2. $\langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle R(X,Y)W,Z\rangle = 0$
3. $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,W)X,Y\rangle$
4. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$
5. $(\nabla_Z R)(X,Y,W) + (\nabla_X R)(Y,Z,W) + (\nabla_Y R)(Z,X,W) = 0.$

Die Gleichungen (4) und (5) heißen 1.te und 2.te Bianchi Identität.

Beweis.
(1) ist klar wegen der Definition $R(X,Y) := \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$.

(2) ist äquivalent zu $\langle R(X,Y)Z,Z\rangle = 0$ für alle X,Y,Z. Es ist:

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,Z) = &\underbrace{\langle\nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle}_{X\langle\nabla_Y Z,Z\rangle - \langle\nabla_Y Z,\nabla_X Z\rangle} - \langle\nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle - \langle\nabla_{[X,Y]}Z,Z\rangle\\
&= X(\frac{1}{2}Y(\langle Z,Z\rangle)) - \langle\nabla_Y Z,\nabla_X Z\rangle - Y(\frac{1}{2}X(\langle Z,Z\rangle)) + \langle\nabla_X Z,\nabla_Y Z\rangle\\
&\quad - \langle\nabla_{[X,Y]}Z,Z\rangle\\
&= \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle - \langle\nabla_Y Z,\nabla_X Z\rangle + \langle\nabla_X Z,\nabla_Y Z\rangle - \langle\nabla_{[X,Y]}Z,Z\rangle\\
&= 0
\end{aligned}$$

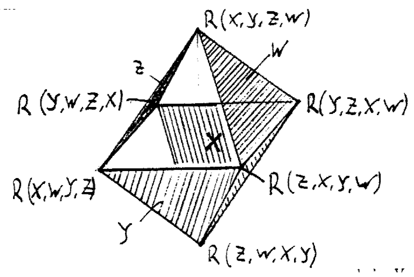
(4) Da der Levi-Civita Zusammenhang ∇ torsionsfrei ist, gilt $\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y,Z]$ und durch Anwenden von ∇_X erhalten wir:

$$\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Y,Z]}X = \nabla_X[Y,Z] - \nabla_{[Y,Z]}X = [X,[Y,Z]]$$

Der zyklische Ausdruck läßt sich nun wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = &\\
= &\underbrace{\nabla_X\nabla_Y Z}_{(1)} - \underbrace{\nabla_Y\nabla_X Z}_{(2)} - \underbrace{\nabla_{[X,Y]}Z}_{(3)}\\
&+ \underbrace{\nabla_Y\nabla_Z X}_{(2)} - \underbrace{\nabla_Z\nabla_Y X}_{(3)} - \underbrace{\nabla_{[Y,Z]}X}_{(1)}\\
&+ \underbrace{\nabla_Z\nabla_X Y}_{(3)} - \underbrace{\nabla_X\nabla_Z Y}_{(1)} - \underbrace{\nabla_{[Z,X]}Y}_{(2)}\\
= &\underbrace{[X,[Y,Z]]}_{(1)} + \underbrace{[Y,[Z,X]]}_{(2)} + \underbrace{[Z,[X,Y]]}_{(3)}\\
= &\,0 \qquad \text{(wegen der Jacobi-Identität).}
\end{aligned}$$

(3) folgt rein algebraisch aus (1), (2) und (4):
Man setzt $R(X,Y,Z,W) := \langle R(X,Y)Z,W\rangle$. Nun betrachtet man einen Oktaeder und bezeichne 4 der Seitenflächen (die sich nur in Ecken schneiden) mit X, Y, Z, W. Die Ecken des Oktaeders, welche z.B. der Schnitt der Flächen X und Y ist, wird mit $R(Z,W,X,Y)$ bezeichnet, da von dieser Ecke aus betrachtet die Flächen X, W, Y, Z aufeinander folgen. Wegen (1) und (2) ist es egal, ob man von X oder von Y aus zu zählen beginnt. Nun beachte man, daß die Summen der Ecken der Dreiecke X, Y, Z, W wegen (4) Null sind. Zählt man diese Summen für die Dreiecke Z und W zusammen und zieht jene für X und Y ab, so erhält man, daß das Doppelte von der Differenz aus der Ecke $W \cap Z$ und der Ecke $X \cap Y$ Null ist, d.h. (3) gilt.



In Detail bedeutet dies:

$$
\begin{aligned}
(+)\quad & \underbrace{R(X,Y,Z,W)}_{(1)} + \underbrace{R(Y,Z,X,W)}_{(2)} + \underbrace{R(Z,X,Y,W)}_{(3)} = 0\\
(-)\quad & \underbrace{R(W,X,Y,Z)}_{(4)} + \underbrace{R(X,Y,W,Z)}_{(1)} + \underbrace{R(Y,W,X,Z)}_{(5)} = 0\\
(-)\quad & \underbrace{R(Z,W,X,Y)}_{(6)} + \underbrace{R(W,X,Z,Y)}_{(4)} + \underbrace{R(X,Z,W,Y)}_{(3)} = 0\\
(+)\quad & \underbrace{R(Y,Z,W,X)}_{(2)} + \underbrace{R(Z,W,Y,X)}_{(6)} + \underbrace{R(W,Y,X,Z)}_{(5)} = 0\\
\Rightarrow\quad & \underbrace{2\,R(X,Y,Z,W)}_{(1)} - \underbrace{2\,R(Z,W,X,Y)}_{(6)} = 0
\end{aligned}
$$

(5) Um diesem Punkt überhaupt Sinn zu geben, muß man ∇_Z auf Tensorfelder ausdehnen. Das geht mittels Produkt-Regel, i.e.

$$
\begin{aligned}
(\nabla_Z R)(X,Y,W) &:= \\
&= \nabla_Z(R(X,Y)W) - R(\nabla_Z X,Y)W - R(X,\nabla_Z Y)W - R(X,Y)\nabla_Z W\\
&= \nabla_Z(R(X,Y)W) + R(Y,\nabla_Z X)W - R(X,\nabla_Y Z + [Z,Y])W - R(X,Y)\nabla_Z W.
\end{aligned}
$$

Mit $\sum_{\text{zykl.}}$ bezeichnen wir die zyklische Summe bezüglich der Variablen X, Y und Z. Dann gilt

$$
\sum_{\text{zykl.}} (\nabla_Z R)(X,Y,W) =
$$

$$
= -\sum_{\text{zykl.}} \nabla_Z(R(X,Y)W) - \sum_{\text{zykl.}} R(X,-[Y,Z])W - \sum_{\text{zykl.}} R(X,Y)\nabla_Z W
$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\text{zykl.}} \nabla_Z\Big([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}\Big)W \\
&\quad + \sum_{\text{zykl.}} \Big([\nabla_X, \nabla_{[Y,Z]}]W - \nabla_{[X,[Y,Z]]}W\Big) \\
&\quad - \sum_{\text{zykl.}} \Big([\nabla_X, \nabla_Y]\nabla_Z W - \nabla_{[X,Y]}\nabla_Z W\Big) \\
&= -\nabla_{\sum_{\text{zykl.}}[X,[Y,Z]]}W \\
&\quad + \sum_{\text{zykl.}} \Big(\nabla_Z[\nabla_X, \nabla_Y]W - [\nabla_X, \nabla_Y]\nabla_Z W\Big) + 0 \\
&= 0 + \left(\sum_{\text{zykl.}} \big[[\nabla_X, \nabla_Y], \nabla_Z\big]\right) W \\
&= 0 \qquad \text{wegen der Jacobi-Identität.} \qquad \square
\end{aligned}$$

64.6 Folgerung (Polarisierungsformel. *Für die Riemannkrümmung gilt:*

$$\begin{aligned}
4!\, R(X,Y,Z,W) &= \\
&= -R(Z{+}X, Y{+}W, Y{+}W, Z{+}X) + R(Z{+}X, Y{-}W, Y{-}W, Z{+}X) \\
&\quad + R(Z{-}X, Y{+}W, Y{+}W, Z{-}X) - R(Z{-}X, Y{-}W, Y{-}W, Z{-}X) \\
&\quad + R(Z{+}Y, X{+}W, X{+}W, Z{+}Y) - R(Z{+}Y, X{-}W, X{-}W, Z{+}Y) \\
&\quad - R(Z{-}Y, X{+}W, X{+}W, Z{-}Y) + R(Z{-}Y, X{-}W, X{-}W, Z{-}Y)
\end{aligned}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
R(X, Y{+}Z, Y{+}Z, X) - R(X, Y{-}Z, Y{-}Z, X) &= \\
&= 2(R(X,Y,Z,X) + R(X,Z,Y,X)) \\
&\overset{(1,2)}{=} 2\,(R(X,Y,Z,X) + R(Z,X,X,Y)) \\
&\overset{(3)}{=} 4\,R(X,Y,Z,X)
\end{aligned}$$

und weiters

$$\begin{aligned}
R(X{+}W, Y, Z, X{+}W) - R(X{-}W, Y, Z, X{-}W) &= \\
&= 2\,(R(X,Y,Z,W) + R(W,Y,Z,X))
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
&R(Y,Z,X,W) = \\
&\quad\overset{(1,2)}{=} R(Z,Y,W,X) \\
&\quad\overset{(7)}{=} -R(X,Y,W,Z) + \frac{1}{2}\big(R(Z{+}X,Y,W,Z{+}X) - R(Z{-}X,Y,W,Z{-}X)\big) \\
&\quad\overset{(2,6)}{=} R(X,Y,Z,W) \\
&\qquad\quad + \frac{1}{8}\big(R(Z{+}X,Y{+}W,Y{+}W,Z{+}X) - R(Z{+}X,Y{-}W,Y{-}W,Z{+}X) \\
&\qquad\qquad - R(Z{-}X,Y{+}W,Y{+}W,Z{-}X) + R(Z{-}X,Y{-}W,Y{-}W,Z{-}X)\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&R(Z,X,Y,W) = \\
&\quad\overset{(2)}{=} -R(Z,X,W,Y) \\
&\quad\overset{(7)}{=} R(Y,X,W,Z) - \frac{1}{2}\big(R(Z{+}Y,X,W,Z{+}Y) - R(Z{-}Y,X,W,Z{-}Y)\big) \\
&\quad\overset{(1,2,6)}{=} R(X,Y,Z,W) \\
&\qquad\quad - \frac{1}{8}\big(R(Z{+}Y,X{+}W,X{+}W,Z{+}Y) - R(Z{+}Y,X{-}W,X{-}W,Z{+}Y) \\
&\qquad\qquad - R(Z{-}Y,X{+}W,X{+}W,Z{-}Y) + R(Z{-}Y,X{-}W,X{-}W,Z{-}Y)\big)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
0 &\overset{(4)}{=} R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) \\
&= R(X,Y,Z,W) \\
&\quad + R(X,Y,Z,W) \\
&\qquad + \frac{1}{8}\big(R(Z{+}X,Y{+}W,Y{+}W,Z{+}X) - R(Z{+}X,Y{-}W,Y{-}W,Z{+}X) \\
&\qquad\quad - R(Z{-}X,Y{+}W,Y{+}W,Z{-}X) + R(Z{-}X,Y{-}W,Y{-}W,Z{-}X)\big) \\
&\quad + R(X,Y,Z,W) \\
&\qquad - \frac{1}{8}\big(R(Z{+}Y,X{+}W,X{+}W,Z{+}Y) - R(Z{+}Y,X{-}W,X{-}W,Z{+}Y) \\
&\qquad\quad - R(Z{-}Y,X{+}W,X{+}W,Z{-}Y) + R(Z{-}Y,X{-}W,X{-}W,Z{-}Y)\big)
\end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
&4!\,R(X,Y,Z,W) = \\
&\quad = -R(Z{+}X,Y{+}W,Y{+}W,Z{+}X) + R(Z{+}X,Y{-}W,Y{-}W,Z{+}X) \\
&\qquad + R(Z{-}X,Y{+}W,Y{+}W,Z{-}X) - R(Z{-}X,Y{-}W,Y{-}W,Z{-}X) \\
&\qquad + R(Z{+}Y,X{+}W,X{+}W,Z{+}Y) - R(Z{+}Y,X{-}W,X{-}W,Z{+}Y) \\
&\qquad - R(Z{-}Y,X{+}W,X{+}W,Z{-}Y) + R(Z{-}Y,X{-}W,X{-}W,Z{-}Y) \qquad \square
\end{aligned}$$

64.7 Bemerkung. Wir wollen nun die Ausdrücke der Form $R(X,Y,Y,X)$ in der Polarisierungsformel (64.6) weiter untersuchen. Sei dazu

$$\begin{aligned} X' &= a\,X + b\,Y \\ X'' &= c\,X + d\,Y \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Wegen der Schiefsymmetrie (1) und (2) in (64.5) ist

$$R(X',Y',Y',X') = \det(A)\,R(X,Y,Y',X') = \det(A)^2\,R(X,Y,Y,X).$$

Das gleiche Transformationsverhalten hat auch $|X|^2\,|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2$, da dies das Quadrat der Fläche des von X und Y erzeugten Parallelogramms ist, siehe dazu (53.4). Folglich ist der Ausdruck

$$\frac{R(X,Y,Y,X)}{|X|^2\,|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}$$

unabhängig von der Wahl eines Erzeugendensystems des von X und Y erzeugten 2-dimensionalen Teilraums F von T_pM. Wir nennen diese Zahl die Schnittkrümmung von F und bezeichnen sie mit $K(F)$. Die Polarisierungsformel zeigt, daß die Riemannkrümmung sich aus der Schnittkrümmung berechnen läßt.

64.8 Satz (Gauß-Krümmung versus Schnitt-Krümmung).
Für jede Riemann-Fläche M ist die Gaußkrümmung ident mit der Schnittkrümmung (des ganzen 2-dimensionalen Tangentialraums).

Beweis für Hyperflächen im $\mathbb{R}^3$. Sei (ξ,η) eine Orthonormalbasis von T_xM. Dann ist

$$\begin{aligned} K(T_xM) &\overset{(64.1)}{=\!=\!=} \langle R_x(\xi_x,\eta_x)\eta_x,\xi_x\rangle \\ &\overset{(64.1)}{=} \langle\langle L_x\eta_x,\eta_x\rangle L_x\xi_x - \langle L_x\xi_x,\eta_x\rangle L_x\eta_x,\xi_x\rangle \\ &= \langle L_x\eta_x,\eta_x\rangle\langle L_x\xi_x,\xi_x\rangle - \langle L_x\xi_x,\eta_x\rangle\langle L_x\eta_x,\xi_x\rangle \\ &= det(L_x) = K_x \end{aligned}$$

Beweis für abstrakte Riemann-Flächen.
Es seien (u^1,u^2) lokale Koordinaten auf M. Dann ist nach (64.4)

$$\begin{aligned} D^2\,K(T_xM) &= D^2\,\frac{R\left(\frac{\partial}{\partial u^1},\frac{\partial}{\partial u^2},\frac{\partial}{\partial u^2},\frac{\partial}{\partial u^1}\right)}{|\frac{\partial}{\partial u^1}|^2|\frac{\partial}{\partial u^1}|^2 - |\langle\frac{\partial}{\partial u^1},\frac{\partial}{\partial u^2}\rangle|^2} = R_{1,2,2,1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\tfrac{\partial^2}{\partial u^1\partial u^2}g_{1,2} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^1\partial u^1}g_{2,2} + \tfrac{\partial^2}{\partial u^2\partial u^1}g_{1,2} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^2\partial u^2}g_{1,1}\right) \\ &\quad + g^{1,1}\,(\Gamma_{1,2,1}\Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2,1}\Gamma_{1,1,1}) \\ &\quad + g^{1,2}\,(\Gamma_{1,2,2}\Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2,2}\Gamma_{1,1,1}) \\ &\quad + g^{2,1}\,(\Gamma_{1,2,1}\Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2,1}\Gamma_{1,1,2}) \\ &\quad + g^{2,2}\,(\Gamma_{1,2,2}\Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2,2}\Gamma_{1,1,2}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\,(F_{s,\theta} - G_{s,s} + F_{\theta,s} - E_{\theta,\theta}) \\
&\quad + \frac{G}{D^2}\,(E_\theta E_\theta - (2F_\theta - G_s)E_s) \\
&\quad - \frac{F}{D^2}\,(G_s E_\theta - G_\theta E_s) \\
&\quad - \frac{F}{D^2}\,(E_\theta G_s - (2F_\theta - G_s)(2F_s - E_\theta)) \\
&\quad + \frac{E}{D^2}\,(G_s G_s - G_\theta(2F_s - E_\theta)) \\
&= \frac{E}{4D^2}\,(E_\theta G_\theta - 2F_s G_\theta + {G_s}^2) \\
&\quad + \frac{F}{4D^2}\,(E_s G_\theta - E_\theta G_s - 2E_\theta F_\theta + 4F_s F_\theta - 2F_s G_s) \\
&\quad + \frac{G}{4D^2}\,(E_s G_s - 2E_s F_\theta + {E_\theta}^2) \\
&\quad - \frac{1}{2}\,(E_{\theta,\theta} - 2F_{s,\theta} + G_{s,s}) \\
&\overset{(53.7)}{=} D^2\,K
\end{aligned}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
R_{i,j,k,l} &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{l,j} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} + \tfrac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{l,i}\right) \\
&\quad + \sum_{p=1}^{m} (\Gamma^p_{i,k}\Gamma_{j,l,p} - \Gamma^p_{j,k}\Gamma_{i,l,p})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{1,2,2,1} &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} g_{1,2} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^1} g_{2,2} + \tfrac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^1} g_{1,2} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^2} g_{1,1}\right) \\
&\quad + (\Gamma^1_{1,2}\Gamma_{2,1,1} - \Gamma^1_{2,2}\Gamma_{1,1,1}) \\
&\quad + (\Gamma^2_{1,2}\Gamma_{2,1,2} - \Gamma^2_{2,2}\Gamma_{1,1,2}) \\
&= \tfrac{1}{2}\,(F_{s,\theta} - G_{s,s} + F_{\theta,s} - E_{\theta,\theta}) \\
&\quad + \frac{E_\theta\,G - G_s\,F}{2D^2} \cdot \frac{E_\theta}{2} \\
&\quad - \frac{2\,F_\theta\,G - G_s\,G - G_\theta\,F}{2D^2} \cdot \frac{E_s}{2} \\
&\quad + \frac{-E_\theta\,F + G_s\,E}{2D^2} \cdot \frac{G_s}{2} \\
&\quad - \frac{-2\,F_\theta\,F + G_s\,F + G_\theta\,E}{2D^2} \cdot \frac{2\,F_s - E_\theta}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{E}{4D^2}\left(E_\theta G_\theta - 2F_s G_\theta + {G_s}^2\right)\\
&\quad + \frac{F}{D^2}\left(E_s G_\theta - E_\theta G_s - 2E_\theta F_\theta + 4F_s F_\theta - 2F_s G_s\right)\\
&\quad + \frac{G}{D^2}\left(E_s G_s - 2E_s F_\theta + {E_\theta}^2\right)\\
&\quad - \frac{1}{2}(E_{\theta,\theta} - 2F_{s,\theta} + G_{s,s})\\
&\overset{(53.7)}{=} D^2\, K. \quad \square
\end{aligned}
$$

64.9 Definition (Normalkoordinaten)

Unter RIEMANNSCHEN NORMALKOORDINATEN versteht man die Parametrisierung

$$\varphi : (u^1, \ldots, u^m) \mapsto \exp_p\Big(\sum_{i=1}^m u^i X_i\Big)$$

für eine Orthonormalbasis $(X_1, \ldots, X_m)$ von T_pM.

64.10 Lemma (Christoffelsymbole in Normalkoordinaten). *In Riemannschen Normalkoordinaten verschwinden alle Christoffelsymbole bei p.*

Beweis. Offensichtlich gilt

$$g_{i,j}(p) := \left\langle \tfrac{\partial}{\partial u^i}, \tfrac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle(p) = \langle X_i, X_j\rangle = \delta_{i,j}.$$

Die radialen Geodäten $t \mapsto \exp_p(tX)$ erfüllen die Geodäten-Gleichung

$$\tfrac{d^2u^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^m \Gamma^k_{i,j}\, \tfrac{du^i}{dt}\, \tfrac{du^j}{dt} = 0.$$

Für $u(t) := tX_j$ gilt wegen $u^k(t) = \delta^k_j\, t$ somit $\Gamma^k_{j,j}(p) = 0$. Und da $\Gamma^k_{i,j}$ symmetrisch in (i,j) ist, ist $\Gamma_p = 0$ $\square$

64.11 Lemma. *Sei M eine Riemann-Mannigfaltigkeit und $F < T_xM$ ein 2-dimensionaler Teilraum. Dann ist die Schnittkrümmung $K(F)$ genau die Gauß-Krümmung der Fläche die lokal durch $\exp(F)$ gegeben ist.*

Beweis. Wegen (64.8) genügt es zu zeigen, daß die Riemann-Krümmung R_N der Fläche N mit der Riemann-Krümmung R_M auf M übereinstimmt. Wobei N durch $(t,s) \mapsto \exp_p(tX_p + sY_p)$ parametrisiert wird und die von M induzierte Metrik trägt. Dazu wählt man Riemann-Normalkoordinaten, d.h. die Parametrisierung

$$\varphi : (u^1, \ldots, u^m) \mapsto \exp_p(\sum_{i=1}^m u^i X_i)$$

für eine Orthonormalbasis $(X_1, \ldots, X_m)$ des Tangentialraums T_pM. Dann verschwinden nach (64.10) alle Christoffelsymbole bei p. Da die Koeffizientenfunktionen $g_{i,j}$ für M und N übereinstimmen, gilt das auch für

$$R_{i,j,k,l} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial^2}{\partial^j \partial^l} g_{i,k} + \tfrac{\partial^2}{\partial^i \partial^k} g_{j,l} - \tfrac{\partial^2}{\partial^j \partial^k} g_{i,l} - \tfrac{\partial^2}{\partial^i \partial^l} g_{j,k}\right) + 0. \quad \square$$

64.12 Satz (Ungekrümmte Räume). *Für eine Riemann-Mannigfaltigkeit sind äquivalent:*

1. $R = 0$.
2. *M ist lokal isometrisch zum Euklidischen Raum.*
3. *Der Paralleltransport ist lokal wegunabhängig.*

Der Punkt (3) ist global nicht allgemein gültig wie das Möbiusband mit flacher Metrik zeigt.

Beweis. ($1 \Rightarrow 3$) Indem wir eine Karte verwenden, können wir annehmen, daß M eine offene Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^m$ ist, allerdings mit einer allgemeinen Riemann-Metrik g. Wir wollen zu gegebenem Anfangswert X_0 ein Vektorfeld X finden, welches längs jeder Kurve parallel ist. Dazu genügt es, daß $\nabla_{\partial_i} X = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ ist. Zuerst finden wir ein längs der u^1-Achse paralleles Vektorfeld $u^1 \mapsto X(u^1, 0, \dots, 0)$. Zu jedem u^1 finden wir längs der Kurve $u^2 \mapsto (u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ ein paralleles Vektorfeld $u^2 \mapsto X(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ mit Anfangswert $X(u^1, 0, \dots, 0)$. Und somit erhalten wir ein Vektorfeld $(u^1, u^2) \mapsto X(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ längs der 2-Fläche $\psi : (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, 0, \dots, 0)$. Dieses erfüllt: $\nabla_{\partial_2} X = 0$ längs ψ und $\nabla_{\partial_1} X = 0$ längs $u^1 \mapsto \psi(u^1, 0)$. Es gilt $\nabla_{\partial_1}\nabla_{\partial_2} X - \nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_1} X = R(\partial_1, \partial_2)X = 0$, da $[\partial_s, \partial_t] = 0$ ist, weil die Flüsse $t \mapsto (t, s)$ und $s \mapsto (t, s)$ miteinander kommutieren.

Somit ist $\nabla_{\partial_2}\nabla_{\partial_1} X = 0$, d.h. $\nabla_{\partial_1} X$ ist parallel längs $u^2 \mapsto \psi(u^1, u^2)$. Aus $\nabla_{\partial_1} X = 0$ längs $u^1 \mapsto \psi(u^1, 0)$ folgt $\nabla_{\partial_1} X = 0$ längs ψ. Es ist also X parallel längs aller Kurven in der 2-Fläche ψ.

Nun kann man obigen Prozeß fortsetzen, um das gewünschte parallele Vektorfeld X zu erhalten. Dies zeigt, daß der Paralleltransport wegunabhängig ist.

($3 \Rightarrow 2$) Wählt man als Anfangswert die Vektoren einer Basis von $T_0\mathbb{R}^m$, so erhält man parallele Vektorfelder X_i, welche punktweise eine Basis bilden. Für diese gilt $[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0$. Diese können integriert werden, um eine Karte φ zu erhalten, welche $\varphi_i = X_i$ erfüllt, siehe (29.12). In dieser Karte hat die Riemann-Metrik dann aber Koeffizienten $\delta_{i,j}$, d.h. φ ist eine lokale Isometrie zwischen dem flachen $\mathbb{R}^m$ und M.

($2 \Rightarrow 1$) Da die kovariante Ableitung und somit die Riemann-Krümmung eine intrinsische Größe ist, also nur von der Riemann-Metrik abhängt, genügt es R für den Euklidischen Raum zu berechnen, dort ist aber $R = 0$. □

64.13 Definition (Krümmungen)

Unter der Ricci-Krümmung einer Riemann-Mannigfaltigkeit versteht man

$$\mathrm{Ricci}(\xi, \eta) = \mathrm{Spur}(\zeta \mapsto R(\xi, \zeta)(\eta)).$$

In lokalen Koordinaten gilt:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ricci}\Big(\sum_i X^i \tfrac{\partial}{\partial u^i}, \sum_j Y^j \tfrac{\partial}{\partial u^j}\Big) &= \\
&= \sum_{i,j} X^i Y^j \operatorname{Ricci}\Big(\tfrac{\partial}{\partial u^i}, \tfrac{\partial}{\partial u^j}\Big) \\
&= \sum_{i,j} X^i Y^j \sum_k \underbrace{\Big\langle R\Big(\tfrac{\partial}{\partial u^i}, \tfrac{\partial}{\partial u^k}\Big)\tfrac{\partial}{\partial u^j}, \tfrac{\partial}{\partial u^k}\Big\rangle}_{R_{i,k,j,k}} \\
&= \sum_{i,j,k} X^i Y^j \Bigg(\tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} g_{k,k} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{k,j} + \tfrac{\partial^2}{\partial u^k \partial u^k} g_{i,j} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^k \partial u^j} g_{k,i}\Big) \\
&\qquad + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m g^{p,q}(\Gamma_{i,j,q}\Gamma_{k,p,k} - \Gamma_{k,j,q}\Gamma_{i,k,p})\Bigg).
\end{aligned}
$$

Unter der Skalarkrümmung versteht man $\operatorname{Spur}_g(\xi \mapsto (\operatorname{Ricci}(\xi, .))^\flat)$, wobei

$$T_x M \xrightarrow[\operatorname{Ricci}_x]{} (T_x M)^* \xrightarrow[\flat]{\cong} T_x M.$$

Beachte, daß dies wegen der Symmetrieeigenschaften (64.6) alle nicht trivialen Spuren sind, welche man aus der Riemannkrümmung bilden kann.

65. Rückblick auf Krümmungen

Bei ebenen Kurven, haben wir die Krümmung als die Kraft interpretiert, die notwendig ist, um einen Massenpunkt mit konstanter skalarer Geschwindigkeit auf einer Kurve zu halten.

Bei Hyperflächen im $\mathbb{R}^3$ haben wir zuerst die Normalkrümmung einer Fläche in Richtung ξ als Krümmung der Schnittkurve mit der, von der Flächennormale und ξ aufgespannten Ebene kennengelernt. Dies ist gleichzeitig die Krümmung der Geodäte in Richtung ξ, siehe (52.4). Die kritische Punkte der Normalkrümmung sind die Hauptkrümmungen, deren Produkt die Gauss-Krümmung ist.

Bei einer allgemeinen Riemann-Mannigfaltigkeit kann die Schnittkrümmung als die Gauß-Krümmung einer 2-dimensionalen Fläche, welche durch die Exponentialabbildung parametrisiert wird, aufgefaßt werden. Die Riemann-Krümmung ist schließlich das zur Schnittkrümmung gehörige Tensorfeld (i.e. 4-lineare Abbildung).

72. Aufgaben

72.1. Krümmung in Polarkoordinaten Sei $r = r(\varphi)$ die Polarkoordinatendarstellung einer Kurve und sei $r' := \frac{dr}{d\varphi}$. Zeige, daß:

(a). Die Bogenlänge gegeben ist durch: $\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$.

(b). Die Krümmung gegeben ist durch: $\frac{r^2+2(r')^2-rr''}{(r^2+(r')^2)^{3/2}}$.

72.2. Krümmung für implizite Funktionen Sei $f(x, y) = 0$ eine implizite Darstellung einer Kurve und sei $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_{xy} := \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, etc.. Zeige, daß die Krümmung von c gegeben ist durch

$$\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

(Hinweis: Impliziter Funktionensatz (10.3))

Ad (72.3)-(72.14):

Diskutiere die folgenden klassischen Kurven. Skizziere sie, und berechne insbesondere neben der Krümmung falls möglich die Bogenlänge und bestimme etwaige Scheitel. Falls mehrere Darstellungen angegeben sind, zeige daß sie die gleiche Kurve beschreiben:

72.3. Kegelschnittlinien
Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ und Parabel $y^2 = 2px$.

72.4. Trochoiden (verlängerte und verkürzte Zykloiden):

$$x = a(t - \lambda \sin t), \ y = a(1 - \lambda \cos t).$$

Insbesondere die Zykloiden ($\lambda = 1$), explizit gegeben durch:

$$x = a \arccos \tfrac{a-y}{a} - \sqrt{y(2a - y)}.$$

72.5. Zykloiden Die Epi- ($a > 0$) und Hypo- ($a < 0$) Zykloiden:

$$x = (A + a) \cos \varphi - a \cos(\tfrac{A+a}{a}\varphi),$$
$$y = (A + a) \sin \varphi - a \sin(\tfrac{A+a}{a}\varphi).$$

Insbesondere die Astroide $A = -4a$, explizit gegeben durch:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

72.6. Cassinische Kurven $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$,
bzw. in Polardarstellung $r^2 = c^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4 \cos^2 2\varphi + (a^4 - c^4)}$.
Insbesondere die Lemniskate ($a = c$).

72.7. Spiralen Die Archimedische Spirale $r = a\varphi$, die hyperbolische Spirale $r = \frac{a}{\varphi}$ und die logarithmische Spirale $r = ae^{k\varphi}$.

72.8. Kettenlinie $y = a \cosh \frac{x}{a} = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$.

72.9. Traktrix oder Schleppkurve $x = a \operatorname{Arcosh} \frac{a}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$.

72.10. Kartesisches Blatt $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, oder implizit $x^3 + y^3 = 3axy$, oder in Polarkoordinaten $r = \frac{3a \sin\varphi \cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$.

72.11. Zissoide $x = \frac{at^2}{1+t^2}$, $y = \frac{at^3}{1+t^2}$, oder implizit $y^2(a-x) = x^3$, oder in Polarkoordinaten $r = \frac{a \sin^2\varphi}{\cos\varphi}$.

72.12. Strophoide $x = a\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $y = at\frac{t^2-1}{t^2+1}$, oder
implizit $y^2(a-x) = x^2(a+x)$, oder in Polarkoordinaten $r = -a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$.

72.13. Konchoide des Nikomedes $x = a + l\cos\varphi$, $y = a\tan\varphi + l\sin\varphi$, oder implizit $(x-a)^2(x^2+y^2) - l^2x^2 = 0$,
oder in Polarkoordinaten $r = \frac{a}{\cos\varphi} \pm l$
Ebenso die **Konchoide des Kreises** (**Pascalsche Schnecke**)
$x = a\cos^2\varphi + l\cos\varphi$, $y = a\cos\varphi\sin\varphi + l\sin\varphi$, oder implizit
$(x^2+y^2-ax)^2 = l^2(x^2+y^2)$, oder in Polarkoordinaten $r = a\cos\varphi + l$.
Speziell die Kardioide (Herzkurve) $(a = l)$. Sie ist auch eine Epizykloide für $(A = a)$.

72.14. Die Versiera der Agnesi $y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$.
Ebenso die Neilsche (semikubische) Parabel: $x = t^2$, $y = at^3$,
oder implizit $y^2 = a^2x^3$.

72.15. Frenetsche Ableitungsgleichungen Unter dem Begleitbein an die nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve c versteht man die Kurven τ und ν, gegeben durch Einheitstangentialvektor und Einheitsnormalvektor. Zeige die Frenetschen Ableitungsgleichungen: $\tau' = K \cdot \nu$, $\nu' = -K \cdot \tau$.

72.16. Evolute Unter welchen Bedingungen an eine Bogenlängen-parametrisierte Kurve c definiert die Evolute $e_c(s) := c(s) + \frac{1}{K(s)}\nu(s)$ wieder eine (geometrische) Kurve. Zeige, daß die Krümmung der Evolute gegeben ist durch $\frac{K^3(s)}{|K'(s)|}$.

72.17. Involute Unter welchen Bedingungen an eine Bogenlängen-parametrisierte Kurve c definiert die Involute $i_c(s) := c(s) - s\tau(s)$ wieder eine (geometrische) Kurve. Zeige, daß die Krümmung der Evolute gegeben ist durch $\operatorname{sign}(sK(s))\frac{1}{s}$.

72.18. [ChristianHuygens1673]. Zeige, daß für eine Bogenlängen-parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ folgendes gilt:

(a). Unter den in Beispiel (72.16) behandelten Bedingungen ist die Evolute der Involute von c wieder c.
(b). Unter den in Beispiel (72.17) behandelten Bedingungen existiert eine Bogenlängenparametrisierung der Evolute von c, so daß deren Involute wieder c ist.

72.19. "Dog Walk Theorem" Beweise: Gilt für zwei geschlossene Kurven c_0 und c_1 die Ungleichung $|c_0(t) - a| > |c_0(t) - c_1(t)|$ so ist $W_a(c_0) = W_a(c_1)$. (Hinweis: Homotopie)

72.20. Sei $c : S^1 \to S^1$ eine geschlossene Kurve mit $W_0(c) \neq 0$, so ist c surjektiv.

72.21. Sei $c : S^1 \to S^1$ eine injektive geschlossene Kurve, so ist $W_0(c) = \pm 1$.

72.22. Zeige, daß die in der Vorlesung angegebenen Beschreibungen der Äquivalenz geschlossener Kurven wirklich äquivalent sind.

72.23. Wie ändern sich die Krümmungen K_i bei einen Orientierungswechsel des $\mathbb{R}^{n+1}$ bzw. des Parameterintervalls.

72.24. Zeige, eine Kurve parametrisiert genau dann eine Gerade, wenn ihre Tangenten einen Punkt gemeinsam haben.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf Kurven im $\mathbb{R}^3$, die hinreichend regulär sind:

72.25. Zeige, daß Krümmung und Torsion einer beliebig parametrisierte Kurve c gegeben sind durch: $K = |c' \times c''|/|c'|^3$ und $T = \det(c', c'', c''')/|c' \times c''|^2$.

72.26. Sei c nach der Bogenlänge parametrisiert.

(a). Für den Winkel $\varphi(s_1, s_2)$ von $\tau(s_1)$ nach $\tau(s_2)$ gilt: $\frac{\varphi(s_1,s_2)}{s_2-s_1} \to K(s)$ für $s_1, s_2 \to s$, $s_2 > s_1$. (Hinweis: $\varphi \sim 2\sin\frac{\varphi}{2} = |\tau(s_1) - \tau(s_2)|$.)

(b). Für den Winkel $\varphi(s_1, s_2)$ von $\beta(s_1)$ nach $\beta(s_2)$ gilt: $\frac{\varphi(s_1,s_2)}{s_2-s_1} \to |T(s)|$ für $s_1, s_2 \to s$, $s_2 > s_1$.

(c). Wogegen konvergiert $\frac{\varphi(s_2,s_1)}{s_1-s_2}$ für $s_1, s_2 \to s$, $s_2 > s_1$, wenn $\varphi(s_1, s_2)$ der Winkel von $\nu(s_1)$ nach $\nu(s_2)$ ist?

72.27. [Darboux] Finde eine Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\nu_i' = v \times \nu_i$ für $i = 0, 1, 2$ (Setze $v := T\tau + K\beta$).

72.28. Zeige, eine Kurve ist genau dann eine Gerade, wenn $K = 0$. Eine Kurve mit $K \neq 0$ liegt genau dann in einer Ebene, wenn $T = 0$.

72.29. Zeige, daß eine Kurve, deren Schmiegebenen einen Punkt gemeinsam haben, eine ebene Kurve ist.

72.30. Zeige, daß eine Kurve, deren Hauptnormalen einen Punkt gemeinsam haben, auf einem Kreis liegt.

72.31. Zeige, daß eine Kurve genau dann auf einer Sphäre liegt, wenn ihre Normalebenen einen Punkt gemeinsam haben.

72.32. Berührsphäre Zeige, daß die Sphäre welche eine Kurve c von Ordnung 3 bei s berührt $(c + \frac{1}{K}\nu + \frac{1}{T}(\frac{1}{K})'\beta)(s)$ als Mittelpunkt M und $R^2 = (\frac{1}{K^2} + (\frac{1}{T}(\frac{1}{K})')^2)(s)$ als Radius R hat (Hinweis: man differenziere $g(s) := |c(s) - M|^2$).

72.33. Sphärische Kurven Zeige, daß eine Kurve genau dann auf einer Sphäre mit Radius R liegt, falls $(\frac{1}{K^2} + (\frac{1}{T}(\frac{1}{K})')^2)(s) = R^2$. Sie liegt genau dann auf irgendeiner Sphäre, wenn $\frac{T}{K} + \left(\left(\frac{1}{K}\right)' \frac{1}{T}\right)' = 0$ ist.

72.34. Helix Zeige, daß folgende Aussagen für eine Kurve äquivalent sind:

1. τ schließt mit einen festen Vektor einen fixen Winkel ein.
2. β schließt mit einen festen Vektor einen fixen Winkel ein.
3. ν liegt immer in einer fixen Ebene.
4. K und T sind proportional.
5. c läßt sich schreiben als $c(t) = c_0(t) + tv$, wobei c_0 eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in einer Ebene ist, und v ein fixer Vektor (welcher normal auf diese Ebene gewählt werden kann).

So eine Kurve c heißt Helix. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Krümmung und Torsion von c und c_0.
(Hinweis: $K = T\tan\alpha \Rightarrow \tau\cos\alpha + \beta\sin\alpha$ ist konstant).

72.35. Zeige: eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve ist genau dann eine Helix falls $\det(c'', c''', c'''') = 0$.

72.36. Zeige, daß $t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt)$ eine Helix ist und berechne K und T.

72.37. Zeige, daß die Kurve $t \mapsto (at, bt^2, t^3)$ genau dann eine Helix ist, wenn $4\,b^4 = 9\,a^2$ ist.

72.38. Bertrand Kurven Zeige, daß es zu einer Kurve eine zweite gibt, welche die gleiche Hautnormale (als Gerade im $\mathbb{R}^3$) besitzt, genau dann wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt mit $aK + bT = 1$.
(Hinweis: Sei c eine Bogenlängenparametrisierte Kurve mit Begleitbein τ, ν, β. Daß eine Kurve $\bar{c}$ die gleiche Hauptnormale besitzt bedeutet $\bar{c}(s) = c(s) + a(s)\nu(s)$. Schließe aus $\bar{c}' \perp \nu$, daß a konstant ist. Daß $\bar{c}''$ im Erzeugnis von $\bar{\tau}$ und ν liegt, liefert eine Differentialgleichung für K und T deren Lösung $1 = aK + bT$ erfüllt).

72.39. Zeige: falls es mehr als 2 Kurven mit gleicher Hauptnormalen gibt, so gibt es unendlich viele (und diese sind Helixen).

72.40. Konformität der stereographischen Projektion Zeige, daß die stereographische Projektion $S^n \to \mathbb{R}^n$ Winkel erhält. (Hinweis: zeige, daß die Umkehrabbildung $h : \mathbb{R}^n \to S^n$ konform ist)

72.41. Zeige, daß die stereographische Projektion $S^n \to \mathbb{R}^n$ alle $(n-1)$-Sphären auf $(n-1)$-Sphären und Hyperebenen im $\mathbb{R}^n$ abbildet. (Hinweis: Die Gleichung einer $(n-1)$-Sphäre bzw. Hyperebene ist

$$\alpha(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n + \gamma = 0$$

mit $4\alpha\gamma < \beta_1^2 + \cdots + \beta_n^2$ und die stereographische Projektion bildet $(y_1, \dots, y_{n+1})$ auf $(x_1, \dots, x_n)$ ab mit $x_i = \frac{y_i}{1-y_{n+1}}$.)

72.42. Kugelprojektionen Berechne für die folgenden Projektionen der Sphäre auf einen Kegel mit Basiswinkel α den Abstand des Bildpunktes vom Berührkreis:

(a). Die Zentralprojektion vom Kugelmittelpunkt.
(b). Die Normalprojektion auf die Kegelerzeugende.
(c). Eine Winkelerhaltende Projektion.
(d). Eine Flächenerhaltende Projektion.

Beschreibe soweit existent (c) und (d) in den degenerierten Fällen des Kegels (Tangential-Ebene und Zylinder).

72.43. Zeige, daß die Hopffaserung $S^3 \to S^2$ glatt ist.

72.44. Zeige, daß für die folgenden Lie-Gruppen G die Komposition $G \times G \to G$ glatt ist (Hinweis: $Komp : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ist bilinear). $G = GL(\mathbb{R}^n), SL(\mathbb{R}^n), O(\mathbb{R}^n)$ und $SO(\mathbb{R}^n)$

72.45. Zeige, daß für die Gruppen in (72.44) die Inversion $G \to G$ glatt ist (Hinweis: Impliziter Funktionensatz angewendet auf $\mathrm{inv}(x) \cdot x = e$).

72.46. Quadrik Sei $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilinear und symmetrisch und sei $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear. Finde Bedingungen unter welchen die Quadrik $M := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x,x) + a(x) = 1\}$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ ist. Identifiziere Ellipsoid, Hyperboloid und Paraboloid als Spezialfall.

72.47. Zeige, daß das Tangentialbündel $T(N \times M)$ eines Produkts zweier Mannigfaltigkeiten isomorph zum Produkt $TN \times TM$ der Tangentialbündel ist. (Hinweis: Der Isomorphismus ist $(T\,\mathrm{pr}_N, T\,\mathrm{pr}_M) : T(N \times M) \to TN \times TM$).

72.48. Zeige, daß das Tangentialbündel jeder Lie-Gruppe G trivial ist.
(Die partielle Ableitung $T_eG \times G \hookrightarrow TG \times TG \cong T(G \times G) \xrightarrow{T(mult)} TG$ der Multiplikation $G \times G \to G$ liefert eine globale Vektorbündelkarte.)

72.49. Transformationsverhalten von Vektorfeldern und 1-Formen
Seinen $(u^i)_{i=1}^m$ und $(v^i)_{i=1}^m$ lokale Koordinaten um x auf M. Die Jacobimatrix des Kartenwechsels $v \circ u^{-1}$ im Punkt $v(x)$ ist dann $(\frac{\partial v^i}{\partial u^j})$.

1. Sei $\xi = \sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_{i=1}^m \eta^i \frac{\partial}{\partial v^i} \in T_xM$. Wie lassen sich die Koordinaten ξ^i von w bezüglich der Basis $(\frac{\partial}{\partial u^i})$ aus den Koordinaten η^i bezüglich $(\frac{\partial}{\partial v^i})$ ausrechnen?
2. Sei $w = \sum_{i=1}^m \xi_i du^i = \sum_{i=1}^m \eta_i dv^i \in (T_xM)^*$. Wie lassen sich die Koordinaten ξ_i von w bezüglich der Basis (du^i) aus den Koordinaten η_i bezüglich (dv^i) ausrechnen.

72.50. Exponentialabbildung Für fixes $A \in L(\mathbb{R}^n) := L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ betrachte auf dem Vektorraum $L(\mathbb{R}^n)$ das Vektorfeld $\xi_A : B \mapsto A \circ B$. Zeige: sein Fluß Fl^{ξ_A} ist gegeben durch $(t, B) \mapsto \exp(tA) \circ B$, wobei $\exp(A) := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k$. Berechne den Kommutator $[\xi_{A_1}, \xi_{A_2}]$. Zeige, daß $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Spur}(A)}$ und $\exp(A_1)\exp(A_2) = \exp(A_1 + A_2)$ falls A_1 und A_2 kommutieren. Folgere daraus, daß $\exp : L(\mathbb{R}^n) \to GL(\mathbb{R}^n)$ ein lokaler Diffeomorphismus um 0 ist und seine Einschränkung lokale Diffeomorphismen von $\{A \in L(\mathbb{R}^n) : \mathrm{Spur}(A) = 0\}$ nach $SL(\mathbb{R}^n)$ und von $\{A \in L(\mathbb{R}^n) : A^t + A = 0\}$ nach $O(\mathbb{R}^n)$ liefert.

72.51. Universelle Überlagerung Zeige, daß zu jeder zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M eine einfachzusammenhängende Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$, die sogenannte universelle Überlagerung, konstruiert werden kann, welche M überlagert.

(Hinweis: Man wähle einen fixen Punkt x_0 in M und definiere $\tilde{M}$ als die Menge aller Homotopieklassen von Kurven $c : [0, 1] \to X$, mit $c(0) = x_0$, wobei die Homotopie die Randpunkte festhalten soll. Die Überlagerungsabbildung ist dann durch $[c] \mapsto c(1)$ gegeben. Für jede einfach zusammenhängende offene Menge $U \subset M$ (z.B. Karte $\varphi : V \to U$ der Mannigfaltigkeit M mit V einer offenen Kugel um 0 in $\mathbb{R}^m$) und jede Kurve c von x nach $\varphi(0)$ erhält man eine Karte $\varphi_{c,U} : U \to \tilde{M}$, $x \mapsto [c_x \bullet c]$, wobei c_x eine Kurve in U ist die $c(1)$ und x verbindet und "$\bullet$" das Aneinanderhängen von Wegen bezeichnet. Es gilt $p \circ \varphi_{c,U} = \mathrm{id}$ und der Kartenwechsel ist definiert auf einer offene Teilmenge und dort die Identität. Außerdem zerfällt $p^{-1}U$ in die Bilder der Karten $\varphi_{U,c}$, wobei c alle Homotopieklassen von Kurven, die x_0 mit einen fixen Punkt $x_1 \in U$ verbinden, durchläuft.)

72.52. Orbitraum Zeige, wenn eine Gruppe G von Diffeomorphismen auf M diskontinuierlich wirkt, daß der Raum der Orbits M/G zu einer Mannigfaltigkeit gemacht werden kann, so daß $M \to M/G$ eine Überlagerung wird und G die Gruppe der Decktransformationen wird. Dabei sagt man, daß die Gruppe G diskontinuierlich auf M wirkt, falls für jedes $x \in M$ eine Umgebung $U_x \subset M$ existiert mit $U_x \cap g(U_x) = \emptyset$ für alle $g \neq e$ in G. Unter dem Orbit von $x \in M$ versteht man die Menge $\{g(x) : g \in G\}$.

(Hinweis: Sei $p : M \to M/G$ die Abbildung, welche jedem $x \in M$ seinen Orbit zuordnet. Auf U_x ist p injektiv, kann also als Karte von M/G verwendet werden. Zeige der Kartenwechsel ist durch Anwenden eines $g \in G$ gegeben.)

72.53. Projektive Räume Verwende (72.52) um zu zeigen, daß der projektive Raum $\mathbb{P}^n$ aller Geraden im $\mathbb{R}^{n+1}$ eine Mannigfaltigkeit ist (Hinweis: $\mathbb{P}^n = S^n/\mathbb{Z}_2$, wobei $\mathbb{Z}_2 = \{\mathrm{id}, \text{Antipodalabbildung}\}$). Was ist die universelle Überlagerung von $\mathbb{P}^n$?

72.54. Zeige, daß der Raum $\mathbb{P}^n$ der Geraden im $\mathbb{R}^{n+1}$ in den $\mathbb{R}^{2n}$ einbettbar ist. (Sei $h : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ gegeben durch

$$(x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_n) \mapsto \Big(\sum_{i+j=0}^{k} x_i y_j \Big)_{k=0}^{n} =$$

$$= \Big(x_0 y_0, x_0 y_1 + x_1 y_0, \dots, \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}, \dots, x_{n-1} y_n + x_n y_{n-1}, x_n y_n \Big)$$

und sei $g : S^n \to S^{2n}$ gegeben durch $g(x) = \frac{h(x,x)}{|h(x,x)|}$. Dann gilt $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1 = \pm x_2$ (falls $h(x,x) = \lambda h(y,y)$ so betrachte $h(x+\lambda y, x+\lambda y)$) und liefert also eine injektive Abbildung $\mathbb{P}^n \to S^{2n}$.)

72.55. Blow-up=Explosion Zeige, die Menge

$$M := \{(x, [y]) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1} : \forall\, i, j : x_i y_j = x_j y_i\}$$

ist eine Teilmannigfaltigkeit, $\mathrm{pr}_1 : M \to \mathbb{R}^n$ ist glatt und einerseits ist pr_1 ein Diffeomorphismus von $\mathrm{pr}_1^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ auf $\mathbb{R}^n$ aber andererseits ist $\mathrm{pr}_1^{-1}(0) = \mathbb{P}^{n-1}$.

72.56. Sei G die Untergruppe von $Aut(\mathbb{C})$, welche durch die beiden Translationen $z \mapsto z + 2\pi i$ und $z \mapsto z + 2\pi$ erzeugt wird. Welche Mannigfaltigkeit ist M/G ? (Hinweis: Betrachte $\{(x, y) : 0 \le x, y \le 2\pi\}$)

72.57. Sei G die Untergruppe der Diffeomorphismen von $\mathbb{R}^2$, welche durch die Translationen $z \mapsto z + 2\pi i$ und die Abbildung $z \mapsto \bar{z} + 2\pi$ erzeugt wird. Welche Mannigfaltigkeit ist M/G ? (Hinweis: Betrachte $\{(x, y) : |x| \le \pi, 0 \le y \le 2\pi\}$)

72.58. Stiefel-Mannigfaltigkeit Zeige, daß für $k \le n$ der Raum aller orthonormalen k-Beine im $\mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit, die sogenannte Stiefel-Mannigfaltigkeit $V(k, n)$. (Hinweis: Ein orthonormales k-Bein ist ein k-Tupel orthonormaler Vektoren im $\mathbb{R}^n$, und kann als Abbildung $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ aufgefaßt werden, welche $A^t \circ A = \mathrm{id} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ erfüllt. Zeige, daß diese Gleichung regulär ist).

72.59. Grassmann-Mannigfaltigkeit Zeige, daß für $k \le n$ der Raum der k-dimensionalen Teilräume des $\mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit ist, die sogenannte Grassmann-Mannigfaltigkeit $G(k, n)$. (Hinweis: Für einen fixen k-dimensionalen Teilraum $E < \mathbb{R}^n$ sei U_E die Menge aller solchen Teilräume welche sich als Graph einer Abbildung $E \to E^\perp$ darstellen lassen, und sei eine Karte $L(E, E^\perp) \to U_E \subset G(k, n)$ gegeben durch $T \mapsto Graph(T)$. Berechne den Kartenwechsel.)

72.60. Zeige, daß die Abbildung $E \mapsto E^\perp$ von $G(k, n) \to G(n-k, n)$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesonders ist $G(n-1, n) \cong G(1, n) = \mathbb{P}^{n-1}$

72.61. Zeige, daß die Abbildung, die jedem k-Bein im $\mathbb{R}^n$ den davon erzeugten Teilraum zuordnet, glatt ist von $V(k, n) \to G(k, n)$ (siehe (72.58) und (72.59)).

72.62. Die Poincaré'sche Halbebene Zeige, daß die Möbiustransformation $h : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ ein Diffeomorphismus mit Inversen $h^{-1} : z \mapsto \frac{1}{i}\frac{z+1}{z-1}$ von der oberen Halbebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ auf $\mathbb{D}$ ist. Bestimme eine Riemann-Metrik (die Poincaré-Metrik) auf der Halbebene, sodaß h eine Isometrie auf die hyperbolische Scheibe wird. Nun bestimme die Gruppe der konformen Diffeomorphismen und die der isometrischen Diffeomorphismen. (Hinweis: Jene der hyperbolischen Scheibe wurden in der Vorlesung angegeben)

72.63. Die Isometrien des $\mathbb{R}^n$ In den ersten Vorlesungsstunden haben wir gezeigt, daß jede Isometrie (Bewegung) des $\mathbb{R}^n$ gegeben ist durch $z \mapsto Rz + b$ mit $R \in O(\mathbb{R}^n)$ und $z \in \mathbb{R}^n$. Zeige, daß die Lie-Gruppe der Isometrien $O(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ ist, wobei die Gruppenmultiplikation durch $(R_1, b_1) \cdot (R_2, b_2) = (R_1 \circ R_2, R_1(b_2) + b_1)$ gegeben ist.

72.64. Die Isometrien der S^n Verwende, daß die Distanz bezüglich der üblichen Riemannschen Metrik auf S^n gegeben ist durch den Winkel den die Radiusvektoren der Punkte einschließen, um zu zeigen, daß die Gruppe der Isometrien der S^n gerade die $O(\mathbb{R}^{n+1})$ ist. (Hinweis: Sei $g : S^n \to S^n$ eine Isometrie, so ist $\tilde{g} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $x \mapsto |x| g(\frac{x}{|x|})$ eine Isometrie des $\mathbb{R}^{n+1}$. Nun verwende (72.63))

72.65. Quaternionen Man zeige: Die Menge $\left\{\left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) : a, b \in \mathbb{C}\right\}$ ist Teilring der komplexen 2×2-Matrizen und sogar ein Körper. Identifiziert man $\mathbb{C}^2$ mit diesen Körper, vermöge der linearen Abbildung $(a, b) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)$, so wird auch $\mathbb{C}^2$ ein Schiefkörper, der Körper $\mathbb{H}$ der Quaternionen. Die Norm von (a, b) ist die Determinante von $\left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)$. Somit gilt für die Multiplikation $|(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)| = |(a_1, b_1)| \cdot |(a_2, b_2)|$ und die Menge der Einheitsquaternionen S^3 ist eine Untergruppe von $\mathbb{H}$. Identifiziert man $\mathbb{C}^2$ mit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, so nimmt die Multiplikation die folgende Gestalt an: $(t, x) \cdot (s, y) = (ts - \langle x, y \rangle, ty + sx + x \times y)$ für $(t, x), (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Zeige weiters, daß $(\forall\, x \in \{0\} \times \mathbb{R}^3 : xy = yx) \Rightarrow y \in \mathbb{R} \times \{0\}$ und $(\forall\, x \in \mathbb{H} : xy = zx) \Rightarrow y = z \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Durch Differenzieren der Gleichung $xx^{-1} = 1$ berechne die Ableitung der Abbildung $\operatorname{inv} : x \mapsto x^{-1}$.

72.66. Universelle Überlagerung der $SO(\mathbb{R}^3)$ Man fasse S^3 auf als Gruppe der Einheitsquaternion und $\mathbb{R}^3$ als Teilraum $\{0\} \times \mathbb{R}^3$ von $\mathbb{H}$. Zeige, die Abbildung $p : S^3 \ni x \mapsto p(x) \in SO(\mathbb{R}^3)$ definiert durch $p(x)(y) = xyx^{-1}$ ein glatter Gruppenhomomorphismus, und hat als Kern $\{x : p(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\} = \{1, -1\}$. Berechne auch die Tangentialabbildung $T_1 p$, und zeige daß sie bijektiv ist. p ist dann die gewünschte universelle Überlagerung. Folgere, daß $\mathbb{P}^3 \cong SO(3)$ (benütze (72.65)).

72.67. Universelle Überlagerung der $SO(\mathbb{R}^4)$
In Analogie zu (72.66) betrachte man den Gruppenhomomorphismus $p : S^3 \times S^3 \to SO(4)$ definiert durch $p(x, y)(z) := xzy^{-1}$. Zeige, daß $\{(1, 1), (-1, -1)\}$ der Kern von p ist und daß $T_{(1,1)} p$ bijektiv ist.

72.68. Jacobi-Identität Beweise für die Lieklammer von Vektorfeldern:

$$[\xi_1, [\xi_2, \xi_3]] + [\xi_2, [\xi_3, \xi_1]] + [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]] = 0 \text{ für alle } \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathcal{X}(M)$$

72.69. Produktregeln Zeige für Riemann-Mannigfaltigkeiten:

$$\begin{aligned}\operatorname{Grad}(f\cdot g) &= f\cdot \operatorname{Grad} g + g\cdot \operatorname{Grad} f\\ \operatorname{div}(f\cdot\xi) &= f\cdot\operatorname{div}\xi + \xi\cdot f = f\cdot\operatorname{div}\xi + \langle \operatorname{Grad} f,\xi\rangle\\ \Delta(f\cdot g) &= \Delta f\cdot g + f\cdot\Delta g + 2\langle\operatorname{Grad} f,\operatorname{Grad} g\rangle\end{aligned}$$

72.70. Hodge-Stern-Operator Zeige:

$$*\circ * = (-1)^{k(m-k)}\,\mathrm{id}\qquad \text{auf } \Omega^k(M).$$

(Hinweis: Dies kann punktweise in $\bigwedge^k T_x^*M$ nachgerechnet werden, dort verwende man eine Orthonormalbasis $(e^1,\dots,e^m)$)

72.71. Kommutatoren Zeige folgende Formeln für Kommutatoren von graduierten Derivationen:

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}_\xi,\mathcal{L}_\eta] &= \mathcal{L}_{[\xi,\eta]}\\ [\mathcal{L}_\xi, d] &= 0\\ [\mathcal{L}_\xi, i_\eta] &= i_{[\xi,\eta]}\end{aligned}$$

72.72. Divergenz Zeige die Formel für die Divergenz in lokalen Koordinaten:

$$\operatorname{div}\xi = \frac{1}{\sqrt{G}}\sum_{i=1}^m \frac{\partial(\sqrt{G}\xi^i)}{\partial u^i}.$$

72.73. Laplace-Operator Zeige die Formel für den Laplace-Operator angewandt auf eine Funktion f in lokalen Koordinaten:

$$\begin{aligned}-\Delta f &= \frac{1}{\sqrt{G}}\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial u^i}(\sqrt{G}\frac{\partial f}{\partial u^j}g^{i,j})\\ &= \sum_{i,j=1}^m\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial u^j}g^{i,j} + \frac{\partial f}{\partial u^j}\left(g^{i,j}\frac{\partial G}{\partial u^i}\frac{1}{\sqrt{G}} + \frac{\partial g^{i,j}}{\partial u^i}\right)\right).\end{aligned}$$

72.74. Euler-Formel Zeige folgende Formel für die Normalkrümmung in Termen der Hauptkrümmungen sowie der Hauptkrümmungsrichtungen (Euler). Seien dazu K_i die Hauptkrümmungen und ξ_i eine Orthonormalbasis von zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen. Dann gilt

$$K(\xi) = \sum_{i=1}^m K_i\langle\xi_i,\xi\rangle^2.$$

72.75. Nabelpunkte Zeige, daß auf einer 2-dimensionalen Fläche ein Nabelpunkt vorliegt genau dann, wenn $H^2 = K$.

72.76. Bewegungsinvarianz Sei M eine Fläche und B eine Bewegung des $\mathbb{R}^3$. Zeige, daß M die bewegte Fläche $B(M)$ in entsprechenden Punkten die gleiche 1.te und 2.te Fundamentalform besitzen.

72.77. Torus Berechne die Krümmungen des Torus (Drehfläche !)

72.78. Isometrien Zeige, daß jede konforme Flächenerhaltende Abbildung eine Isometrie ist.

72.79. Regeflächen Zeige, daß folgende Flächen Regelflächen sind und berechne wenn möglich ihre Gauß-Krümmung.

1. hyperbolisches Paraboloid: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
2. einblättriges Hyperboloid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
3. Sattelfläche: $z = xy$
4. Möbiusband: $\varphi(t,s) := ((2 - s\sin\frac{t}{2})\sin t, (2 - s\sin\frac{t}{2})\cos t, \cos\frac{t}{2})$

72.80. Torsen Zeige, daß folgende Flächen Torsen sind und berechne wenn möglich ihre Gauß-Krümmung.

1. allgem. Kegel, parametrisiert durch $\varphi(t,s) := c_0 + s\, v(t)$
2. allgem. Zylinder, parametrisiert durch $\varphi(t,s) := c(t) + s\, v_0$
3. Tangentialfläche, einer Kurve c parametrisiert durch $\varphi(t,s) := c(t) + sc'(t)$

72.81. Ist die Regelfläche $\varphi(t,s) := (t^2 + 2ts, t + s, t^3 + 3t^2 s)$ eine Torse?

72.82. Schmiegtorse Sei c Kurve auf M, Y tangentiales Vektorfeld längs c, sodaß $II(Y, c') = 0$ und c', Y linear unabhängig sind. Dann ist $\varphi(t,s) = c(t) + s\, Y(t)$ eine Torse.

72.83. Minimalflächen Zeige, daß folgende Flächen Minimalflächen sind und berechne wenn möglich ihre Gauß-Krümmung.

1. Katenoid: $\varphi(t,s) = (a\cosh s\cos t, a\cosh s\sin t, bs)$
2. Scherk's Fläche: $e^z = \frac{\cos y}{\cos x}$
3. Enneper's Fläche: $(u,v) \mapsto (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2)$
4. Wendelfläche: $\varphi(t,s) = (s\cos t, s\sin t, at)$
5. die Fläche
   $\varphi(t,s) = (at + \sin t\cosh s, s + a\cos t\sinh s, 1 - a^2\cos t\cosh s)$

72.84. Hyperbolische Scheibe Berechne die Gaußkrümmung der hyperbolischen Scheibe (äquivalent der Poincaré Ebene).

72.85. Geodäten der projektiven Ebene Man verwende, daß die projektive Ebene $\mathbb{P}^2$ der Orbitraum der Sphäre S^2 bezüglich der Antipodalabbildung ist um die Geodäten auf $\mathbb{P}^2$ zu bestimmen. Als Karten verwende man entweder die Zentralprojektion vom Mittelpunkt der Sphäre auf eine Tangentialebene (Geodäten sind Geraden), oder die stereographische Projektion auf die Einheitsscheibe in einer Tangentialebene (Geodäten sind Geraden durch 0 sowie Kreise die durch antipodale Punkte am Einheitskreis gehen). Welche Länge haben alle diese periodischen Geodäten.

72.86. Geodäten der Poincaréschen Halbebene Zeige, daß die Geodäten der Poincaréschen Halbebene die Geraden parallel zur y-Achse sind und die Halbkreise, welche die x-Achse orthogonal treffen, siehe [**83**, 5.1.7].

72.87. Geodäten der hyperbolischen Scheibe Zeige, daß die Geodäten der Einheitsscheibe mit der hyperbolischen Metrik Geraden durch 0 sind oder Kreise, die den Rand orthogonal schneiden.

Literaturverzeichnis

[1] Kervaire Michel A. A manifold which doesn't admit a differentiable structure. *Comm. Math. Helv.*, 35:1–14, 1961.

[2] Beardon A.F. *A primer on Riemann Surfaces.* Cambridge Univ.Press, London, 1984.

[3] Morin B. and Petit J-P. Let retournement de la sphére. *CRAS.*, 287:767–770, 791–794, 879–882, 1978.

[4] Brown. Smooth n-manifolds immerse in $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$. *Contemp. Math*, 12:73–79, 1982. 113

[5] Bankwitz C. über die Fundamentalgruppe des inversen Knotens und des gerichteten Knotens. *Ann.of Math*, 31:129–130, 1930.

[6] Fefferman C. The Bergman kernel of biholomorphic mappings of pseudo convex domains. *Inv. Math.*, 26:1–65, 1974.

[7] Gordon C. and Wilson E. Isospektral deformations of compact solvmanifolds. *J. Diff. Geom.*, 19:241–256, 1984.

[8] Carathéodory. über die gegenseitigen Beziehungen der Ränder bei konformen Abbildungen des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis. *Math. Annal.*, 73:305–320, 1913.

[9] Catalan. *Jornal de Mathém.*, 7:203, 1842. 177

[10] Papakyriakopoulos C.D. On Dehn's lemma and the asphericity of knots. *Ann. of Math.*, 66:1–26, 1957.

[11] Hsiung Chuan-Chih. *A First Course in Differential Geometry.* John Wiley &Sons, New York, 1981.

[12] Cohen. A proof of the immersion conjecture. *Proced. Math. Acad. Soc.*, 79:3390–3392, 1982. 113

[13] Hilbert D. über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung. *Trans.AMS.*, 2:87–99, 1901. . 195

[14] Gompf Robert E. Three exotic $\mathbb{R}^4$'s and other anomalies. *Journal of Differential Geom. 18.2*, pages 317–328, 1983.

[15] Peschl E. *Funktionentheorie.* Bibliographisches Inst., Mannheim, 1967. 136

[16] Xavier F. The Gauss map of a complete, non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere. *Annals of Math.*, 113:211–214, 1981. 177

[17] Herglotz G. über die Starrheit der Eilflächen. *Abh. Math.Sem.Univ.Hamburg*, 15:127–129, 1943. 195

[18] Gauß. Disquisitiones generales circa superficies curvas. *Comm. Soc. Regiae Sci. Gottingensis Rec.*, 6, 1828. 155

[19] Gleason. Groups without small subgroups. *Ann. of Math.*, 56:193–212, 1952.

[20] Fischer G.M. On the group of all homeomorphisms of a manifold. *Trans. AMS*, 97:193–212, 1960.

[21] Federer H. *Geometric Measure Theory.* Springer, Berlin, 1969.

[22] Hopf H. and Rinow W. über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Flächen. *Math. Ann.*, 116:749–766, 1938.

[23] Jarchow H. *Locally convex spaces.* Teubner, Stuttgart, 1981.

[24] Liebmann H. Eine neue Eigenschaft der Kugel. *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math. Phys.*, pages 44–55, 1899. 195

[25] Whitney H. The selfintersections of a smooth n-manifold in $2n$-space. *Annals of Math.*, 45:220–446, 1944. 113

[26] Yamabe H. On an arcwise connected subgroup of a Liegroup. *Osaka M.J.*, 2:14–15, 1950.

[27] Haeflinger and Reeb. Varietés a une dimension et structures feulletés de plan. *l'Enseignement Math*, 2:107–125, 1957.

[28] Scherk H.F. Bermerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen. *Crellés Journal f. reine und angew. Math.*, 13:185–208, 1835. 177

[29] Guggenheimer H.W. *Differential Geometry.* Dover Publ., New York, 1963.

[30] James I.M. Whitehead products and vector fields on spheres. *Proc. Cambridge*, 53:817–820, 1957. 126

[31] Dieudonné J. *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press, New York, 1960. 62, 128

[32] Hadamard J. Les surfaces á corbures opposées. *J.Math.Pures Appl.*, 4:27–73, 1889. 213

[33] Milnor J. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math.*, 64:399–405, 1956. 85

[34] Milnor J. Differentiable Structures on Spheres. *Ann. of Math.*, 81:962–972, 1959.

[35] Milnor J. Eigenvalues of the Laplace operator on certain mf's. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 51:542, 1964.

[36] Nash J. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. of Math.*, 63:20–64, 1956. 132

[37] Stallings J. The piecewise-linear structure of euclidean space. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 58:481–488, 1962. 85

[38] Tits J. *Liesche Gruppen und Algebren.* Springer Hochschultext, Berlin, 1983.

[39] Barosa J.L.M. and Colares A.G. *Minimal Surfaces in* $\mathbb{R}^3$. Springer Lecture Notes 1195, 1986. 177

[40] Joris. Une c^∞-application non-immersive qui possede la propriete universelle des immersions. *Archiv Math.*, 39:267–277, 1982.

[41] Alexander J.W. An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected. *Proc.Nat.Acad.Sci. USA.*, 10:8–10, 1924.

[42] Warner J.W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Scott Foresman and Company, Illinois, 1971.

[43] Zindler K. über konvexe Gebilde I. *Monatsh. Math. Phys.*, 31:87–102, 1921.

[44] Vietoris L. Ein einfacher Beweis des Vierscheitelsatzes der ebenen Kurven. *Arch. Math.*, 3:304–306, 1952.

[45] Lagrange. *Œvres Vol. 1.* Gauthier-Villars, Paris, 1868.

[46] Berger M. *Geometry 1.* Springer, Berlin, 1987. 178, 191, 195

[47] Berger M. and Gostiaux B. *Differential Geometry, Manifolds, Curves, and Surfaces.* Springer, New York, 1987.

[48] Dehn M. über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. *Math. Ann.*, 69:137–168, 1910.

[49] Kac M. Can one hear the shape of a drum? *Amer.Math.Monthly*, 73:1–23, 1966.

[50] Kervaire M. A manifold which doesn't admit any differentiable structure. *Comm. Math. Helv.*, 34:257–270, 1960. 84

[51] Spivak M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry 1-4.* Publish or Perish, Berkeley, 1979. 120, 137

[52] Gordon C. McA. and Luecke J. Konts are determined by their complements. *J.AMS.*, 2:371, 1989.

[53] Meusnier. Mémoire sur la curbure des surfaces. *Mémoires des savans étrangers*, 10:477–510, 1776. 144, 175, 177

[54] Vignéras M.F. Variétés Riemanniennes isospektrales et non isométriques. *Ann. Math*, 112:21–32, 1980.

[55] Montgomery and Zippin. Small subgroups of finite dimensional groups. *Ann. of. Math.*, 56:213–241, 1952. .

[56] Munkres. Obstruction to the smoothing of piecewise differentiable homeomorphism. *Ann.of Math.*, 72:521–554, 1960. 85

[57] Hirsch M.W. *Differential Topology.* Springer, New York, 1976. 37, 39, 112, 113

[58] Nomitzu and Ozeki. The existence of complete Riemannian metrics. *Proc. AMS.*, 12:889–891, 1961. .

[59] Bonnet O. Mémoire sur la théorie générale des surfaces. *Journ. de l'Ecole Polytechn.*, 19:1–146, 1848.

[60] Michor P. *Riemannsche Differentialgeometrie.* Vorlesung WS, Wien, 1988/89. 214

[61] Painlevé P. Sur la theorie de la Représentation conforme. *CRAS.*, 112:653–657, 1891.

[62] Engelking R. *Outline of General Topology.* North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1968.

[63] Osserman R. Global Properties of minimal surfaces in e^3 and e^n. *Ann. of Math.*, 80:340–364, 1964. 178

[64] Osserman R. *A Survey of Minimal Surfaces*. Van Nostrand, NewYork, 1969.

[65] Osserman R. A proof of regularity everywhere of the classical solution to Plateaus's problem. *Ann.of Math*, 91:550–569, 1970. 176

[66] Walter R. *Differentialgeometry*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1978.

[67] Bernstein S. Sur un théorème de Géométrie et ses applications aux équations aux déivées partielles du type elliptique. *Comm.de la Soc.M. Kharkov*, 15:38–45, 1915. 177

[68] Helgason S. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Acad. Press, New York, 1978.

[69] Hildebrandt S. Boundary behaviour of minimal surfaces. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 35:47–82, 1969. 176

[70] Kobayashi S. *on conjugate and cut loci*. The Mathem. Assoc. Am., Englewood Cliffs, N.J., 1967. . 213

[71] Kobayashi S. *Tansformation groups in Differential Geometry*. Springer, Ergebnisse der Math. 70, Berlin, 1972. . 132, 133

[72] Kobayashi S. and Nomitzu K. *Foundations of Differential Geometry*. Interscience, New York, 1969.

[73] Lang S. *Differentiable Manifolds*. Addison-Wesley, 1962.

[74] Mukhopadhyaya S. New methods in the geometry of a plane arc. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 1:31–37, 1909.

[75] Warschawski S. über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformen Abbildungen. *Math.Z.*, 35:321–456, 1932.

[76] Chern S.S. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proc. AMS.*, 6:771–782, 1955. 137

[77] Chern S.S. *Complex manifolds without potential theory*. Van Nostrand, Princeton, 1967.

[78] Taubes. Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. *J.Diffgeom.*, 25:363–430, 1987. 85

[79] Bröcker Th. and Jänich K. *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer, Heidelberg, 1973. 112

[80] Trotter. Non-inverible knots exist. *Topology*, 2:341–358, 1964.

[81] Varadarajan V.S. *Lie Groups, Lie Algebras and their Representation*. Springer Graduate Text, Berlin, 1984.

[82] Gröbner W. *Matrizenrechnung*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1966.

[83] Klingenberg W. *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie*. Springer, Heidelberg, 1973. 152, 171, 195, 213, 239

[84] Weierstrass. *Monatsber. der Berlin. Akad.*, 1866. 177

[85] Greub Werner. *Multilinear Algebra*. Springer,

[86] Greub Werner, Halperin Stephen, and Vanstone Ray. *Connections, Curvature and Cohomology I-III*. Academic Press 773, 76, New York, 1972.

Index