Aufgabensammlung zur Differentialgeometrie 1

SS 2007

Andreas Kriegl

Euklid'ische Räume

1.1. Zusammensetzung von Spiegelungen.
Zeige, daß die Zusammensetzung von zwei Spiegelungen an Geraden im $\mathbb{R}^2$ eine Drehung um den doppelten des zwischen den Geraden eingeschlossenen Winkels liefert. **Hinweis:** Es genügt (warum?) das Bild eines (geschickt gewählten) Vektors zu bestimmen.

1.2. Matrixdarstellung einer Spiegelung.
In der VO haben wir die Spiegelung an der Normalebene $w^\perp$ für $w = (w^1, w^2.w^3) \in S^2$ durch $\mathbb{R}^3 \ni v \mapsto v - 2\langle v|w\rangle\, w \in \mathbb{R}^3$ beschrieben. Wie sieht ihre Matrixdarstellung bzgl. der Standardbasis aus.

1.4. Fluglage in Koordinaten.
Um eine Körper (also z.B. ein Flugzeug oder einen Hängegleiter) in eine allgemeine Lage im Raum zu bringen, kann man folgendermaßen vorgehen: Zuerst drehen wir es um die Senkrechte in jene Richtung in welche es fliegt (Winkel ψ), dann drehen wir es um sein Querachse um den Winkel (des Anstiegs) θ und danach (falls es eine Kurve fliegt) um seine Längsachse um einen Winkel φ und schließlich verschieben wir es noch vom Ursprung in die gewünschte Lage $p \in \mathbb{R}^3$. Wie sieht die Matrixdarstellung des linearen Teils dieser Bewegung aus? **Hinweis:** Verfahre ähnlich wie bei den Eulerwinkeln.

1.3. Formel für Drehung im $\mathbb{R}^3$.
Finde eine Formel für die Drehung um die von $w \in S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ erzeugte Drehachse $\mathbb{R} \cdot w$ um den Winkel φ. **Hinweis:** Betrachte für jedes von w linear unabhängige $v \in \mathbb{R}^3$ die orthogonal-Basis w, $v \times w$, $v - \langle v|w\rangle w$ und verwende, daß eine Drehung um den Winkel φ in der Ebene bzgl. jeder orthonormal-Basis $\mathcal{E}$ durch $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ gegeben ist.

1.5. Konforme lineare Abbildungen.
Zeige, daß eine bijektive lineare Abbildung $f : E \to E$ des Euklid'ischen Raums E genau dann konform (d.h. winkelerhaltend) ist, wenn ein $\lambda > 0$ existiert, s.d. $\langle f(x)|f(y)\rangle = \lambda\langle x|y\rangle$ für alle $x, y \in E$ gilt, also $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} f$ eine Isometrie ist. **Hinweis:** $(\Rightarrow)$ Für $v \in E$ definiere $\lambda(v) > 0$ durch $\|f(v)\|^2 = \lambda(v)\,\|v\|^2$. Sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine orthonormal-Basis. Dann ist $e_i + e_j \perp e_i - e_j$ und somit auch die Bilder unter f. Schließe daraus $\lambda(e_i) = \lambda(e_j)$. Schließe weiter, daß λ auf ganz E konstant ist und verwende schließlich die Polarisierungsgleichung um die gewünschte Identität zu erhalten.

1.6. Beispiele von Bogenlängen.
Versuche in mindestens 2 der in (72.3)–(72.14) gegebenen Kurven die Bogenlängenfunktion zu berechnen und wenn möglich auch die Bogenlängenparametrisierung zu bestimmen.

1.7. Krümmung in Polarkoordinaten.
Sei $r : \varphi \mapsto r(\varphi)$ die Polarkoordinatendarstellung einer Kurve, d.h. $\varphi \mapsto (r(\varphi)\cos(\varphi), r(\varphi)\sin(\varphi))$ ist eine Parametrisierung, und sei $r' := \frac{dr}{d\varphi}$. Zeige, daß die Bogenlänge gegeben ist durch $\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi$ und die Krümmung durch $\frac{r^2+2(r')^2-rr''}{(r^2+(r')^2)^{3/2}}$.

1.8. Krümmung einer Kurve die als Graph gegeben ist.
Es sei eine Kurve durch den Graph einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ beschrieben. Zeige, daß ihre Krümmung gegeben ist durch:

$$\frac{f''(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}^3}$$

1.9. Krümmung für implizit gegebene Kurve.
Es sei eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $t\mapsto(x(t),y(t))$ durch eine Gleichung $f(x(t),y(t))=0$ gegeben. Wähle eine Orientierung der Kurve und zeige, daß mit der Bezeichungsweise $f_x:=\frac{\partial f}{\partial x}$, $f_{xy}:=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, etc. ihre Krümmung gegeben ist durch

$$\frac{f_{xx}f_y^2-2f_{xy}f_xf_y+f_{yy}f_x^2}{(f_x^2+f_y^2)^{3/2}}.$$

1.10. Beispiele zur Krümmung.
Versuche für eine der in (72.3)–(72.14) gegebenen Kurven die Krümmung und die Krümmungsmittelpunkte zu bestimmen.

1.11. Beispiele zur Krümmung.
Bestimme die Evolute der Ellipse oder der Parabel.

1.12. Beispiele zur Krümmung.
Bestimme die Evolute von der logarithmischen Spirale oder der Traktrix.

72.16. Evolute.
Unter welchen Bedingungen an eine Bogenlängen-parametrisierte Kurve c definiert die Evolute $e_c(s):=c(s)+\frac{1}{K(s)}\nu(s)$ wieder eine (geometrische) Kurve. Zeige, daß die Krümmung der Evolute gegeben ist durch $\frac{K^3(s)}{|K'(s)|}$.

72.17. Involute.
Unter welchen Bedingungen an eine Bogenlängen-parametrisierte Kurve c definiert die Involute $i_c(s):=c(s)-s\tau(s)$ wieder eine (geometrische) Kurve. Zeige, daß die Krümmung der Involute gegeben ist durch $\operatorname{sign}(sK(s))\frac{1}{s}$.

72.24. Charakterisierung von Geraden.
Zeige, eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ parametrisiert genau dann eine Gerade, wenn ihre Tangenten einen Punkt gemeinsam haben.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf Kurven im $\mathbb{R}^3$, die hinreichend regulär sind:

72.26. Krümmung und Torsion als infinitesimale Winkeländerung.
Sei c nach der Bogenlänge parametrisiert.

(a) Für den Winkel $\varphi(s_1,s_2)$ von $\tau(s_1)$ nach $\tau(s_2)$ gilt: $\frac{\varphi(s_1,s_2)}{s_2-s_1}\to K(s)$ für $s_1,s_2\to s$, $s_2>s_1$. (Hinweis: $\varphi\sim 2\sin\frac{\varphi}{2}=|\tau(s_1)-\tau(s_2)|$.)

(b) Für den Winkel $\varphi(s_1,s_2)$ von $\beta(s_1)$ nach $\beta(s_2)$ gilt: $\frac{\varphi(s_1,s_2)}{s_2-s_1}\to|T(s)|$ für $s_1,s_2\to s$, $s_2>s_1$.

(c) Wogegen konvergiert $\frac{\varphi(s_2,s_1)}{s_1-s_2}$ für $s_1,s_2\to s$, $s_2>s_1$, wenn $\varphi(s_1,s_2)$ der Winkel von $\nu(s_1)$ nach $\nu(s_2)$ ist?

72.32. Berührsphäre.
Zeige, daß die Sphäre welche eine Kurve c bei s am besten approximiert $(c + \frac{1}{K}\nu + \frac{1}{T}(\frac{1}{K})'\beta)(s)$ als Mittelpunkt M und $R^2 = (\frac{1}{K^2} + (\frac{1}{T}(\frac{1}{K})')^2)(s)$ als Radius R hat (Hinweis: Versuche möglichst viele Ableitungen von $g : t \mapsto |c(t) - M|^2$ at der Stelle $t = s$ zum Verschwinden zu bringen).

72.34. Helix.
Zeige, daß folgende Aussagen für eine Kurve äquivalent sind:

1. τ schließt mit einem festen Vektor einen fixen Winkel ein.
2. β schließt mit einem festen Vektor einen fixen Winkel ein.
3. ν liegt immer in einer fixen Ebene durch 0.
4. K und T sind proportional.
5. c läßt sich schreiben als $c(t) = c_0(t) + tw$, wobei $w \neq 0$ ein fixer Vektor und c_0 eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in der Ebene $w^\perp$ ist.

So eine Kurve c heißt HELIX. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Krümmung und Torsion von c und c_0.
(Hinweis: $K = T \tan\alpha \Rightarrow \tau\cos\alpha + \beta\sin\alpha$ ist konstant).

72.35. Charakterisierung von Helixen.
Zeige: Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve ist genau dann eine Helix falls $\det(c'', c''', c'''') = 0$.

72.40. Konformität der stereographischen Projektion.
Zeige, daß die stereographische Projektion $S^n \to \mathbb{R}^n$ winkelerhaltend ist, d.h. ihre Ableitung an jeder Stelle konform ist. **Hinweis:** Zeige, daß die Umkehrabbildung $h : \mathbb{R}^n \to S^n$ konform ist.

72.46. Quadriken.
Es sei $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilinear, symmetrisch und $a \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Finde hinreichende Bedingungen, unter welchen die Quadrik $M := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x, x) + a(x) = 1\}$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$ ist. Identifiziere Paraboloid, Hyperboloid und Ellipsoid als Spezialfall.

15.3. Flächen von beliebigen Geschlecht.
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞. Unter welchen Bedingungen an $\varepsilon > 0$ wird durch die Gleichung

$$(f(x) + y^2)^2 - \varepsilon\,(f(x) + y^2) + z^2 = 0$$

eine Mannigfaltigkeit beschrieben. Falls f ein Polynom mit $2g$ einfachen Nullstellen und positiven höchsten Koeffizienten ist und ε geeignet gewählt wird, dann ist diese Mannigfaltigkeit eine orientierte Fläche vom Geschlecht g. **Hinweis:** Hinweise betrachte die Schnittkurven mit den zur y-z-Ebene parallelen Ebenen für $f(x) < 0$ und für $f(x) > 0$.

15.10. Erweiterung der stereographischen Projektion.
In (10.4) haben wir gezeigt und in (15.3) verwendet, daß sich lokale Parametrisierungen zu lokalen Diffeomorphismen erweitern lassen. Finde für die stereographische Projektion mit Pol $p \in S^n$ eine explizite Erweiterung zu einem Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{tp : t \geq 0\} \to p^\perp \times \mathbb{R}p$.
Hinweis: Wähle Φ so, daß Halbstrahlen durch 0 auf Geraden normal zu $p^\perp$ abgebildet werden.

15.1. Glattheit der Abbildung Bild.
Zeige, daß $T \mapsto \mathrm{Bild}(T)$, $L_r(m.n) \to G(r,n)$ C^∞ ist. **Hinweis:** Beschreibe diese Abbildung lokal als Zusammensetzung

$$L_r(m,n) \to L_r(r,n) \to V(r,n) \to G(r,n)$$

wobei die erste (lokale!) Abbildung durch Einschränken auf eine geeignet gewählten r-dimensionalen Teilraum gegeben ist, die zweite Gram-Schmidt-Orthonormalisieren der Spalten der Matrix bedeutet und die letzte das Bild nehmen aus der VO ist.

15.11. Möbiusband, Teil 1.
Es sei $M := [-1,1] \times (-1,1)/\sim$, wobei $\sim$ die von $\forall s : (-1,-s) \sim (1,s)$ erzeugte Äquivalenzrelation ist, und $q : [-1,1] \times (-1,1) \to M$ die Quotientenabbildung $(t,s) \mapsto [(t,s)]$.

Weiters seien $\bar\varphi_0, \bar\varphi_1 : (-1,1) \times (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\bar\varphi_0(t,s) := (t,s) \text{ und } \bar\varphi_1(t,s) := \begin{cases} (t+1,s) & \text{für } t < 0 \\ (t-1,-s) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

und $\varphi_i := q \circ \bar\varphi_i$. Zeige, daß $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ ein C^∞-Atlas für M ist.

15.12. Möbiusband, Teil 2.
Zeige daß die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (t,s) \mapsto \Big(\big(1 + s\cos(\tfrac{\pi}{2}t)\big)\cos(\pi t), \big(1 + s\cos(\tfrac{\pi}{2}t)\big)\sin(\pi t), s\sin(\tfrac{\pi}{2}t)\Big)$$

einen Diffeomorphismus $\tilde f : [(t,s)] \mapsto f(t,s)$ von M aus Beispiel (15.11) mit der Teilmannigfaltigkeit Möb:$= f(\mathbb{R} \times (-1,1)) \subseteq \mathbb{R}^3$ induziert.
Hinweis: Verwende, daß f lokal eine Parametrisierung von Möb ist und $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \sim y$ für $x, y \in [-1,1] \times (-1,1)$ gilt.

20.10. Kettenregel.
Beweise für abstrakte Mannigfaltigleiten das Lemma (20.4).
Hinweis: Um T_pf zu bestimmen evaluiere diesen Ausdruck auf $\partial \in \mathrm{Der}_p(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ und das Ergebnis auf $h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, betrachte also $(T_pf)(\partial)(h)$. Für die Produktregel verwende den Isomorphismus $\mathrm{Der}_p(C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, $\partial \mapsto \partial(\mathrm{id})$.

20.4. Tangentialraum der Grassmannmannigfaltigkeit.
Bestimme den Tangentialraum der Grassmannmannigfaltigkeit $G(k,n)$ im Punkte $P : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x,0)$.

20.5. Tangentialraum der Stiefelmannigfaltigkeit.
Bestimme den Tangentialraum der Stiefelmannigfaltigkeit $V(k,n)$ im Punkte $A : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x,0)$.

20.8. Pullback-Bündel.
Es sei $q : Q \to N$ ein Faserbündel und $f : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Definiere $f^*Q := \{(x,z) \in M \times Q : f(x) = q(z)\}$. Zeige, daß $f^*q := \mathrm{pr}_1 : f^*Q \to M$ ein Faserbündel ist, das sogenannte Pullback der Bündels q längs f. Falls q eine Vektorbündel ist, so gilt gleiches auch für $f^*q : f^*Q \to M$. **Hinweis:** Um f^*Q als Mannigfaltigkeit und f^*q als Faserbündel zu erkennen genügt es Bijektionen $\varphi : U \times F \to f^*Q|_U$ so zu finden, daß die zugehörigen U eine offene Überdeckung von M bilden und die Kartenwechselabbildungen $\psi^{-1} \circ \varphi : (U \cap W) \times F \to (U \cap W) \times F$ glatt sind,

wobei $\psi : W \times F \to f^*Q|_W$ auch so eine Bijektion bezeichnet. Aus Trivialsierungen $V \times F \to Q|_V$ von $q : Q \to N$ konstruiere nun assoziierte Trivialisierungen $f^{-1}(V) \times F \to f^*(Q)|_{f^{-1}(V)}$.

53.3. Inhaltserhaltende Parametrisierungen.
Zeige, daß jede Fläche $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine inhaltbewahrende lokale Parametrisierung besitzt. **Hinweis:** Versuche aus einer gegebenen Parametrisierung eine Reparametrisierung zu erhalten, welche Flächen bewahrt, d.h. für welche $E \cdot G - F^2 = 1$ ist. Zeige dazu, daß sich dieser Ausdruck mit dem Quadrat der Funktionaldeterminante des Parameterwechsels transformiert.

53.1. Krümmungen der Minimal-Fläche von Enneper.
Bestimme alle Krümmungen der durch $(t, s) \mapsto (t - t^3/3 + ts^2, s - s^3/3 + st^2, t^2 - s^2)$ parametrisierten Fläche von Enneper.

53.2. Krümmungen am Beispiel eines Graphens.
Bestimme Gauß- und mittlere Krümmung für die Fläche die als Graph von $(t, s) \mapsto ts^2$ gegeben ist.

53.4. Theorem von Joachimsthal.
Es sei c eine Krümmungslinien einer Fläche die auch in einer zweiten Fläche liegt. Zeige daß diese genau dann Krümmungslinie der zweiten Fläche ist, wenn der Winkel der beiden Flächen(-Normalen) längs c konstant ist.
Hinweis: Es seien ν_1 und ν_2 die Gaußabbildungen der beiden Flächen M_i und $v_i := \nu_i \circ c$. Dann ist c genau dann Krümmungslinie auf der Fläche M_i, wenn $v_i' = \lambda_i \cdot c'$ für eine Funktion λ_i ist. Beachte weiters, daß $c' \in v_1^\perp \cap v_2^\perp$.

53.5. Tangentialfläche.
Die Parametrisierung $\varphi : (s, \theta) \mapsto c(\theta) + s\, c'(\theta)$ einer Tangentialfläche erfüllt nicht die Bedingung $c' \perp w$. Wie sieht die nach (55.2) existierende Umparametrisierung (mit $|c'| = 1 = |w'|$ und $c' \perp w'$) aus?

53.6. Hyperbolisches Paraboloid.
Zeige, daß das hyperbolische Paraboloid eine Regelfläche aber keine Torse ist.
Hinweis: Verifiziere die in (55.3.4) angegebene Parametrisierung.

53.7. Einschalige Hyperboloid.
Zeige, daß das einschalige Hyperboloid eine Regelfläche aber keine Torse ist.
Hinweis: Verifiziere die in (55.3.5) angegebene Parametrisierung.

57.1. Geodäten die zu minimalen Breitenkreis spiralen.
Verwende die Parametrisierung einer minimalen Drehfläche aus (54.9) (mit $r(s)^2 = s^2 + 1$) und bestimme jenen Winkel mit dem eine Geodäte auf einem fix gegebenen Breitenkreis starten muß, damit sie zum Breitenkreis mit minimalen Durchmesser spiralt. Gibt die Zeit an die benötigt wird um einen anderen Breitenkreis zu erreichen. Kannst Du auch die Änderung der Längengrade bis zu diesen Zeitpunkt bestimmen? **Hinweis:** Versuche mittels der Differentialgleichung aus (57.5) t als Funktion von s zu bestimmen.

58.1. Beispiele für Geodätengleichung.
Bestimme für eine Parametrisierung einer Fläche Deiner Wahl mit $K \neq 0$ die Christoffelsymbole erster und zweiter Art und schreibe die Geodätengleichung in diesen lokalen Koordinaten auf.