Differentialgeometrie

Andreas Kriegl

Author address:

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
Nordbergstr. 14, 1090 Wien
E-mail address: andreas.kriegl@univie.ac.at

Dieses Skriptum ist nach meiner fünfstündigen Vorlesung “Differentialgeometrie” im Wintersemester 1989/90 entstanden. Es enthält auch etliche ergänzende Teile (zum größten Teil aus meiner Vorlesung “Analysis auf Mannigfaltigkeiten” im Wintersemester 1984/85).

Natürlich ist es unmöglich, diese über Jahrhunderte entwickelte Theorie der gekrümmten Räume mit all ihren Aspekten umfassend darzustellen. Bei der Auswahl des Inhalts habe ich mich von folgenden Ideen leiten lassen: Wir beginnen mit den 1-dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten der Ebene, den Kurven, die bereits zur Zeit Eulers sehr untersucht waren. Besonderes Augenmerk legen wir dabei auf das Studium der Krümmung, welches sich als roter Faden durch das ganze Skriptum zieht. Im Kapitel 2 führen wir Mannigfaltigkeiten zuerst als Teilmengen eines Euklidischen Raums und erst danach als abstrakte Objekte, welche durch Verkleben von Euklidischen Räumen entstehen, ein. Dieses Methode, alle Begriffe zuerst für Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ zu entwickeln und sie in der Folge auf abstrakte Mannigfaltigkeiten zu übertragen, wurde im ganzen Skriptum durchgezogen, und wird dem Leser hoffentlich helfen, die geometrische Anschauung nicht zu verlieren. Im Kapitel 3 wird das Konzept der Ableitung auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Das führt zu Tangentialraum und Tangentialabbildung und wird benutzt, um einen Begriff von Teil- und Quotientenobjekten von Mannigfaltigkeiten zu bekommen. Gewöhnliche Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten werden im Kapitel 4 eingeführt. Dazu werden die Tangentialräume zum Tangentialbündel vereinigt und Vektorfelder als Schnitte dieses Bündels untersucht. Im Kapitel 5 wird das zum Tangentialbündel duale Vektorbündel, das Kotangentialbündel konstruiert. Als nächstes folgt die Definition einer Riemann-Mannigfaltigkeit als jene Mannigfaltigkeit, auf der man mit Hilfe der Riemann-Metrik, einem faserweisen inneren Produkt, die beiden Bündel miteinander identifizieren kann. Im Spezialfall des $\mathbb{R}^2$ wird die Struktur der Riemann-Flächen diskutiert. Kapitel 6 ist den Differentialformen und ihrer algebraischen Struktur gewidmet. Es soll als Vorbereitung für die Integration auf Mannigfaltigkeiten in Kapitel 7 dienen. Auf Riemann-Mannigfaltigkeiten werden die gefundenen Differentialoperatoren genauer untersucht und der Satz von Stokes geometrisch interpretiert. Es folgt ein Kapitel über Hyperflächen. Insbesondere werden hier Drehflächen, Regelflächen und Minimalflächen behandelt. Geodäten, Paralleltransport und kovariante Ableitung werden für Hyperflächen und dann allgemein für Riemann-Mannigfaltigkeiten besprochen. Das letzte Kapitel faßt Grundlegendes über Lie-Gruppen zusammen.

Dem Skriptum sind auch viele Aufgaben beigefügt, die mit Hilfe der Hinweise wohl alle ohne allzugroßen Aufwand gelöst werden können.

Das Literaturverzeichnis umfaßt die zitierten Originalarbeiten, es soll aber auch als Hinweis für weiterführende Literatur verstanden werden.

Da man in der Differentialgeometrie auf den zu untersuchenden Objekten eine sehr reichhaltige Struktur zu Verfügung hat, fließen aus den diversesten Gebieten der Mathematik Methoden in sie ein. Voraussetzung zur erfolgreichen Bewältigung des dargebotenen Stoffes ist eine gründliche Kenntnis der Grundvorlesungen aus Analysis und der (dazu bereits benötigten) (multi)linearen Algebra. Ein tieferes Studium der Topologie ist nur für einige der Abschnitte in Kapitel 2 bzw. im Abschnitt über Überlagerungen nötig. Was gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen betrifft, die ja eine zentrale Bedeutung für die verschiedensten Existenzsätze in der

Differentialgeometrie haben, so sind die benötigten Aussagen wohl auch ohne deren fundierte Kenntnis verständlich. Komplexe Analysis hilft beim Verständnis der Riemann-Flächen, alle nötigen Begriffe werden allerdings vollständig angegeben.

Ich möchte an dieser Stelle den Verfassern der ersten Auflage dieses Skriptums Barbara Geipel, Bernhard Reisecker und Oliver Fuchs herzlichst danken. Es war wahrlich keine einfache Aufgabe, meinen doch recht sprunghaften Vortrag in eine lesbare Form zu bringen. Auch wurden sie von mir damit gequält, ein älteres Skriptum (zur zweitgenannten Vorlesung) zu inkorporieren. Ich möchte an dieser Stelle auch den Verfassern dieses Skriptums, Hubert Schicketanz, Stefan Felsner, Markus Fulmek und Thomas Fischer für ihre damaligen Bemühungen danken. Weiters gilt mein Dank allen Hörern dieser Vorlesung, die durch ihre Fragen, Anmerkungen und Kritik dazu beigetragen haben, daß dieses Skriptum eine hoffentlich doch recht abgerundete Darstellung des Gebietes geworden ist. Mein Dank gilt auch meinem Lehrer und Kollegen Peter Michor, in dessen Vorlesungen und Seminare ich vieles des hier Inkludierten gelernt habe.

Natürlich wird der aufmerksame Leser (Tipp-)Fehler finden können. Ich möchte hier gleich die Bitte aussprechen, mir diese mitzuteilen (Geteiltes Leid ist halbes Leid). Zukünftige Generationen von Studenten werden es zu schätzen wissen.

Andreas Kriegl, Wien 9. April 1990

Vorwort zur zweiten überarbeiteten Auflage: Aufgrund zahlreich eingegangener Druckfehlerlisten habe ich diese Neuauflage erstellt. Ich möchte bei dieser Gelegenheit allen, die auf diese Weise zur Verbesserung dieses Skriptums beigetragen haben, herzlichst danken. Ich habe auch einige neue Abschnitte beziehungsweise Sätze hinzugefügt. Vor allem wäre dabei der Abschnitt über Überlagerungen (24) sowie der Satz von Sard (21.17) zu erwähnen. Natürlich wäre ich für die Mitteilung verbliebener oder neu hinzugekommener Fehler nach wie vor sehr dankbar.

Andreas Kriegl, Wien 26. September 1994

Vorwort zur dritten überarbeiteten Auflage: Es wurden ausführlicher Abschnitte über klassische Liegruppen, Überlagerungen und klassische Mechanik hinzugefügt. Aufgenommen wurden auch diverse Darstellungen der hyperbolischen Geometrie sowie ein Beweis der Baker-Campbell-Hausdorff Formel. Darüberhinaus wurden wieder zahlreiche Druckfehler beseitigt. Diesbezüglich gilt mein Dank vor allem Dr. Eva Adam und Mag. Bernhard Reisecker, die mich mit ausführlichen Druckfehlerlisten versorgt haben.

Andreas Kriegl, Wien 20. Feber 1996.

Im Zuge der Vorlesung im Wintersemester 2000/01 habe ich die Abschnitte (15.2), (33.10), (52.7), (52.9), (53.5), (54.2), (55.8), (58.1), (59.3), (64.7) hinzugefügt.

Anläßlich der Vorlesung im Sommersemester 2005 wurde das Skriptum von AMS-TeX in LaTeX umgewandelt.

Andreas Kriegl, Wien 15. Feber 2005.

Inhaltsverzeichnis

I. Kurven

In den Grundvorlesungen über Analysis behandelt man Funktionen, die auf offenen Teilmengen eines $\mathbb{R}^n$ definiert sind. An manchen Stellen hatten sich aber schon Definitionsbereiche eingeschlichen, die allgemeiner waren. So z.B. bei der Methode der Lagrange-Multiplikatoren, wo man versucht, Extremwerte von reellwertigen Funktionen zu finden, welche auf Mengen der Gestalt $g^{-1}(0)$ definiert sind. Auch bei den Integralsätzen von Gauß und Stokes kamen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ vor, die als Kurven und Flächen bezeichnet wurden. Mengen dieser Art heißen Mannigfaltigkeiten. Auf ihnen wollen wir in dieser Vorlesung die Analysis entwickeln. In diesem Kapitel werden wir uns mit den einfachsten, nämlich den 1-dimensionalen, Mannigfaltigkeiten (kurz Kurven) beschäftigen.

Wir wollen uns aber zuerst nochmals jene Räume in Erinnerung rufen, auf denen dies alles aufbaut und in denen sich der größte Teil abspielen wird, nämlich die

1. Euklidische Räume

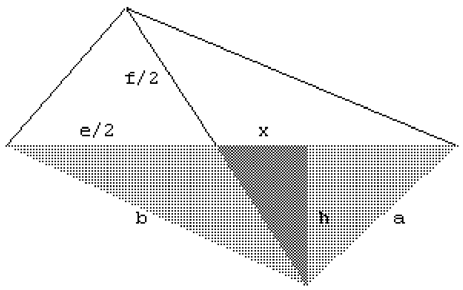
1.1 Definition (Euklidische Räume)

Zum Begriff des Euklidischen Raums gelangt man, wenn man die Eigenschaften der Räume, in denen man (Euklidische) Geometrie treiben kann, zusammenfaßt. Natürlich bestehen diese Räume aus Punkten. Man kann orientierte Strecken zwischen je zwei Punkten betrachten und parallele, gleich lange und gleich orientierte Strecken zu Vektoren $\overrightarrow{ab}$ zusammenfassen. Vektoren kann man mit reellen Skalaren strecken und man kann sie addieren, indem man ihre Repräsentanten aneinanderhängt. Vektoren bilden also einen Vektorraum E. Nach Wahl eines Ursprungs 0, können wir Punkte a mit ihren Ortsvektoren $\overrightarrow{0a}$ identifizieren. Wir wollen aber auch die Länge von Strecken messen können und benötigen dafür eine Norm $|x|$ für Vektoren $x \in E$. Da diese Norm geometrisch relevant sein soll, sollte der Satz von Pythagoras gelten, und allgemeiner die Parallelogramm-Gleichung $|a-b|^2+|a+b|^2 = 2(|a|^2+|b|^2)$ für die Diagonalen $a+b$ und $a-b$ eines Parallelogramms mit erzeugenden Seiten-Vektoren a und b gelten. Daß der Satz von Pythagoras diese Gleichung impliziert sieht man wie folgt: Seien e und f die beiden Diagonalen des Parallelogramms und h die Höhe einer Ecke auf die Diagonale e und x der Abstand des Höhenfußpunktes zum Schnittpunkt der Diagonalen. Dann gilt nach Pythagoras

$$a^2 = \left(\frac{e}{2} - x\right)^2 + h^2, \quad b^2 = \left(\frac{e}{2} + x\right)^2 + h^2, \quad \text{und } \left(\frac{f}{2}\right)^2 = h^2 + x^2,$$

und somit nach Addition und Einsetzen

$$a^2 + b^2 = 2\Big(\frac{e}{2}\Big)^2 + 2(x^2 + h^2) = 2\Big(\frac{e}{2}\Big)^2 + 2\Big(\frac{f}{2}\Big)^2.$$



Die Parallelogramm-Gleichung gewährleistet, daß die POLARISIERUNGSFORMEL $\langle x, y\rangle := \frac{1}{2}(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2)$ (oder auch $\langle x, y\rangle := \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2 - |x-y|^2)$) eine Bilinearform, das sogenannte skalare Produkt $\langle\_,\_\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, definiert. Mit deren Hilfe können wir nicht nur die LÄNGE $|x| \geq 0$ eines Vektors x durch $|x|^2 = \langle x, x\rangle$ berechnen, sondern auch WINKEL $\sphericalangle xy$ mittels $\cos(\sphericalangle xy) = \langle x, y\rangle/(|x||y|)$. Insbesondere gilt: $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$ und $x \parallel y \Leftrightarrow |\langle x, y\rangle| = |x||y|$.

Da wir uns in dieser Vorlesung auf endlich dimensionale Geometrie beschränken wollen, setzen wir voraus, daß der Vektorraum E endlich dimensional ist.

Es sei eine (geordnete) Basis $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ von E gewählt. Dann läßt sich jeder Vektor $x \in E$ als $x = \sum_{j=1}^n x^j e_j$ mit eindeutigen Koeffizienten $x^j \in \mathbb{R}$ (seinen Koordinaten) schreiben. Wir setzen

$$[x]_{\mathcal{E}} := \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

dann ist $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ ein linearer Isomorphismus von E mit dem $\mathbb{R}^n$. Ist die Basis zusätzlich orthonormal gewählt (i.e. $|e_i| = 1$ und $e_i \perp e_j$ für $i \neq j$), so gilt für die Koordinaten $x^k = \langle x, e_k\rangle$ (denn $\langle x, e_k\rangle = \langle \sum_i x^i e_i, e_k\rangle = \sum_i x^i \langle e_i, e_k\rangle = x^k$) und $|x|^2 = \sum_{k=1}^n (x^k)^2$ und das skalare Produkt hat die Form $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^n x^k y^k$.

Es sei $A : E \to F$ eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ eine geordnete Basis von E und $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ eine geordnete Basis von F. Dann ist A durch seine Werte Ae_j eindeutig bestimmt, und diese ihrerseits durch ihre Koeffizienten a_j^k bzgl. der Basis $\mathcal{F}$, i.e. $Ae_j = \sum_{k=1}^m a_j^k f_k$. Für ein allgemeines $x = \sum_{j=1}^n x^j e_j$ ist

$$A(x) = A\Big(\sum_j x^j e_j\Big) = \sum_j x^j A(e_j) = \sum_j x^j \sum_k a_j^k f_k = \sum_j \Big(\sum_k a_j^k x^j\Big) f_k,$$

d.h.

$$[Ax]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} =: [A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \cdot [x]_{\mathcal{E}}.$$

Wir bezeichnen also die Matrix-Darstellung einer linearen Abbildung $A : E \to F$ bezüglich Basen $\mathcal{E} := (e_1, \dots, e_n)$ von E und $\mathcal{F} := (f_1, \dots, f_m)$ von F mit $[A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$.
Die Abbildung $A \mapsto [A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ liefert dann einen Isomorphismus des Raums $L(E, F)$ aller linearer Abbildungen von E nach F mit den Raum der $n \times m$-Matrizen $L(n, m)$.
Ist insbesonders $E = F$ und $A = \mathrm{id}_E$, dann ist $[A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ die Matrix, die als j-te Spalte die Koeffizienten von e_j bzgl. der Basis $(f_j)_j$ besitzt.
Ist zusätzlich $B : F \to G$ linear und $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_k)$ eine Basis von G, dann gilt:

$$[B \circ A]_{\mathcal{E},\mathcal{G}}[x]_{\mathcal{E}} = [BAx] = [B]_{\mathcal{F},\mathcal{G}}[Ax]_{\mathcal{F}} = [B]_{\mathcal{F},\mathcal{G}}[A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}[x]_{\mathcal{E}},$$

also

$$[B \circ A]_{\mathcal{E},\mathcal{G}} = [B]_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \cdot [A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}.$$

Setzt man insbesonders $A = \mathrm{id}$ oder $B = \mathrm{id}$ so erhält man:

$$[A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = [1]_{\bar{\mathcal{F}},\mathcal{F}} \cdot [A]_{\bar{\mathcal{E}},\bar{\mathcal{F}}} \cdot [1]_{\mathcal{E},\bar{\mathcal{E}}}.$$

Ist also R die Abbildung von $e_j \mapsto \bar{e}_j$, dann ist $[R]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = [1]_{\bar{\mathcal{E}},\mathcal{E}}$ und $[R]^{-1}_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = [1]_{\mathcal{E},\bar{\mathcal{E}}}$ und somit

$$[A]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = [1]_{\bar{\mathcal{E}},\mathcal{E}} \cdot [A]_{\bar{\mathcal{E}},\bar{\mathcal{E}}} \cdot [1]_{\mathcal{E},\bar{\mathcal{E}}} = [R]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \cdot [A]_{\bar{\mathcal{E}},\bar{\mathcal{E}}} \cdot [R]^{-1}_{\mathcal{E},\mathcal{E}},$$

also

$$[A]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \cdot [R]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = [R]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \cdot [A]_{\bar{\mathcal{E}},\bar{\mathcal{E}}}.$$

1.2 Bewegungen

Da wir im allgemeinen weder einen Ursprung noch ausgezeichnete Basis-Richtungen gegeben haben, sollten alle Konzepte, die wir in der (Differential-)Geometrie entwickeln werden, invariant unter Bewegungen sein. Als Bewegungen kennen wir Translationen und Drehungen (sowie deren Zusammensetzungen). Diese sind alle längenbewahrend.
Ist umgekehrt eine längenbewahrende Abbildung (eine sogenannte ISOMETRIE) $f : E \to E$ gegeben und ist die Abbildung $R : E \to E$ durch $R(x) := f(x) - f(0)$ definiert, dann ist $R(0) = 0$ und für alle x, y ist

$$|R(x) - R(y)|^2 = |f(x) - f(y)|^2 = |x - y|^2$$

Insbesondere ist $|R(x)| = |x|$ (für $y = 0$) und somit gilt:

$$\begin{aligned} 2\langle R(x), R(y)\rangle &= |R(x)|^2 + |R(y)|^2 - |R(x) - R(y)|^2 \\ &= |x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2 = 2\langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

Sei nun $(e_k)_{k=1,\dots,n}$ eine Orthonormalbasis von E. Es ist dann auch $(R(e_k))_{k=1,\dots,n}$ eine Orthonormalbasis, und für $x = \sum_{k=1}^n x^k\, e_k$ ist

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{k=1}^n \langle R(x), R(e_k)\rangle \cdot R(e_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle \cdot R(e_k) = \sum_{k=1}^n x^k R(e_k) \end{aligned}$$

Also ist R linear, i.e.

$$R \in L(E, E) := \Big\{T : T \text{ ist eine lineare Abbildung von E nach E}\Big\}.$$

Weiters folgt aus $\langle R(x), R(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, daß $R^t \circ R = \mathrm{id}_E$ und somit $1 = \det(\mathrm{id}_E) = \det(R^t \circ R) = \det(R)^2$. Also liegt R in der ALLGEMEINEN LINEAREN GRUPPE

$$\begin{aligned} GL(E) &:= \{T \in L(E,E) : T \text{ ist invertierbar}\} \\ &= \{T \in L(E,E) : \det(T) \neq 0\} \end{aligned}$$

und sogar in der ORTHOGONALEN LINEAREN GRUPPE

$$\begin{aligned} O(E) &:= \{T \in GL(E) : T^t \circ T = \mathrm{id}_E\} \\ &= \{T \in L(E,E) : \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \text{ für alle } x \text{ und } y\}. \end{aligned}$$

Auch alle Spiegelungen gehören zu $O(E)$. Eigentliche Bewegungen sollten solche sein, wo man die Punkte im Laufe der Zeit t von der Anfangstellung für $t = 0$ in die Endstellung für $t = 1$ bewegen kann. Wir suchen also nicht nur eine Abbildung f, sondern eine "stetig" durch $t \in [0,1]$ parametrisierte Familie von Bewegungen $f_t : E \to E$ mit $f_0 = \mathrm{id}_E$ und f_1 der gegebene Endwert. Für Translationen $f_b : x \mapsto x + b$ erhalten wir eine stetige Kurve von Bewegungen durch $f_{tb} : x \mapsto x + tb$ und für Drehungen R_φ um den Winkel φ durch $R_{t\varphi}$. Allgemein sollte der translationsfreie Teil $R_t : x \mapsto f_t(x) - f_t(0)$ eine stetige Kurve in $O(E)$ sein. Da die Determinantenfunktion als Polynom stetig ist auf $O(E) \subset L(E,E)$ und Werte in $\{\pm 1\}$ hat, muß sie konstant sein, d.h. $\det(R_1) = \det(R_0) = \det(\mathrm{id}_E) = 1$. Die Abbildung $R \in O(E)$ ist in diesem Fall also sogar ein Element der SPEZIELLEN LINEAREN GRUPPE

$$SO(E) := \{T \in O(E) : \det(T) > 0\},$$

d.h. eine Drehung ist.

$$\begin{tikzcd}
 & L(E,E) \arrow[r, two heads, "\det"] & \mathbb{R} \\
SL(E) \arrow[r, hook] & GL(E) \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\det"] & \mathbb{R} \setminus \{0\} \arrow[u, hook] \\
SO(E) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & O(E) \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\det"] & \mathbb{Z}_2 \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Für $E := \mathbb{R}^n$ mit der standard-Bilinearform bezeichnet man $SO(E)$ auch als $SO(n)$ und analog für die anderen oben erwähnten Gruppen. Um hingegen z.B. eine Spiegelung an einer Achse in der Ebene zu realisieren können wir die Ebene an dieser Achse im Raum um 180^o drehen, z.B. ist die Spiegelung an der e_1-Achse die Einschränkung von:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & -\sin\pi \\ 0 & \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$$

Dazu müssen wir allerdings den zugrundeliegenden Raum (in diesem Fall die Ebene) verlassen. Bewegungen, bei denen das nicht notwendig ist, sind also die sogenannten ORIENTIERUNGSERHALTENDEN Abbildung, d.h. der linearen Anteil R hat positive Determinante. Zwei geordnete Basen (e_k) und (f_k) heißen gleich orientiert, falls der Basiswechsel (das ist jene lineare Abbildung, welche e_k auf f_k für alle k abbildet) orientierungserhaltend ist. Eine ORIENTIERUNG auf E ist eine Äquivalenzklasse von gleich orientierten Basen. Es gibt also genau zwei Orientierungen auf E, und diese sind durch Angabe einer Basis festgelegt.

Umgekehrt werden wir weiter unten (siehe auch (24.45)) zeigen, daß jedes $R \in SO(n)$ sich durch eine glatte Kurve in $SO(n)$ mit id_E verbinden läßt, d.h. $SO(n)$ wegzusammenhängend ist. Wir haben damit gezeigt, daß die Bewegungen genau die Kompositionen von je einer Translation und einer Drehung sind.

Unter einer EIGENTLICHEN BEWEGUNG wollen wir also eine orientierungs- und längenerhaltende Abbildung verstehen. Diese ist von der Form $f : x \mapsto Ax + b$ mit $x \in E$ und $A \in SO(E)$. Die zugehörige Gruppe wird auch als $Ax + b$-Gruppe bezeichnet, siehe (14.2).

Jede Bewegung erhält also abgesehen von einer additiven Konstante:

1. Längen (nach Definition);
2. das innere Produkt (wegen der Polarisierungsformel);
3. Winkel (wegen der Cosinusformel);
4. Linearkombinationen (d.h. ist linear);
5. Volumen (d.h. die Determinante);
6. Orientierung (wegen der Determinante).

1.3 Drehungen. Wie sieht die $SO(n)$ nun aus:

$O(1) = \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2$, $SO(1) = \{1\}$.

$O(2)$: (Siehe auch (14.19)). Sei $A \in SO(2)$, dann ist $A = (Ae_1, Ae_2)$ und $(Ae_i)_{i=1}^n$ ist eine orthonormal Basis. Es ist also $Ae_j \in S^1 := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\}$ und $Ae_1 \perp Ae_2$, d.h. wenn wir $Ae_1 = (a,b)$ setzen, so ist $Ae_2 = \lambda(-b,a)$ und wegen $|Ae_2| = 1 = |Ae_1|$ ist $\lambda = \pm 1$. Schließlich ist $1 = \det(A) = \lambda(a^2 + b^2) = \lambda$. Wir bezeichnen mit $v^\perp$ denjenigen Normalvektor auf v der gleichen Länge wie v, und zwar jenen so daß $(v, v^\perp)$ eine positiv orientierte Basis ist.
Bekanntlich können wir S^1 durch $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$ parametrisieren. Wir wollen nun zeigen, daß die Matrix

$$R_\varphi := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

eine Drehung der Punkte der Ebene um den Winkel φ beschreibt. Anstatt den Punkt zu drehen und dann die Koordinaten des Bild-Punktes im Bezug auf die gegeben Basis zu bestimmen, können wir aber auch die Basis um den Winkel $-t$ drehen, und die Koordinaten des ursprünglichen Punktes bezüglich dieser neuen Basis zu bestimmen.

Es ist

(1) $\qquad$ (1) $x = x_1 + x_2$

(2) $\qquad$ (2) $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$

(3) $\qquad$ (3) $y = \bar{y}_2 \cos\varphi$

(4) $\qquad$ (4) $x_2 = \bar{y}_2 \sin\varphi$

(5) $\qquad$ (5) $\bar{x} = x_1 \cos\varphi$

(6) $\qquad$ (6) $\bar{y}_1 = x_1 \sin\varphi$

(7)

und somit sukzessive

$$\begin{aligned}
(3) &\Rightarrow \bar{y}_2 = y\frac{1}{\cos\varphi} \\
(4) &\Rightarrow x_2 = \bar{y}_2 \sin\varphi = y\tan\varphi \\
(5),(1) &\Rightarrow \bar{x} \;\; = x_1\cos\varphi = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\
(6),(1) &\Rightarrow \bar{y}_1 = x_1\sin\varphi = x\sin\varphi - y\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} \\
(2) &\Rightarrow \bar{y} \;\; = x\sin\varphi + y\frac{1-\sin^2\varphi}{\cos\varphi} = x\sin\varphi + y\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Beachte, daß daraus die Additionstheoreme der Winkelfunktionen folgen, denn $R_\varphi \circ R_\psi = R_{\varphi+\psi}$. Man beachte, daß obiger Isomorphismus S^1 zu einer Gruppe macht. Kennen wir diese Gruppenmultiplikation? Ja es ist die Einschränkung der Multiplikation von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Da die Drehungen genau die Zusammensetzungen von je zwei Spiegelungen sind (Die Zusammensetzung zweier Spiegelungen ist die Drehung um den doppelten Winkel der Spiegelungsachsen), wird die Gruppe $O(2)$ der orthogonalen Abbildungen durch die Spiegelungen erzeugt. Genauer gesagt ist jedes $A \in O(2)$ Zusammensetzung von höchstens zwei Spiegelungen, und zwar ist jede Zusammensetzung einer geraden Anzahl von Spiegelungen ein Drehung und für jede ungerade Anzahl eine Spiegelung.

Nun zu $O(3)$. Für jedes $A \in O(E)$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Fix}(A) := \{x \in E : Ax = x\}$ die Menge der Fixpunkte, oder auch den Eigenraum zum Eigenwert 1. Wenn $F := \mathrm{Fix}(A) = E$ ist, dann ist $A = \mathrm{id}_E$. Sei nun $\dim(\mathrm{Fix}(A)) = \dim E - 1$, d.h. es existiert ein $0 \neq v \in E$ mit $F = \{v\}^\perp$. O.B.d.A. dürfen wir $|v| = 1$ annehmen. Da F invariant ist unter A, ist es auch $F^\perp$ und somit ist $Av = \pm v$. Wegen $v \notin F$ ist folglich $Av = -v$, und damit $x - \langle x, v\rangle v \in F$ für alle $x \in E$, denn

$$\langle x - \langle x, v\rangle v, v\rangle = \langle x, v\rangle - \langle x, v\rangle \cdot \langle v, v\rangle = 0.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
Ax &= A\Big((x - \langle x, v\rangle v, v) + \langle x, v\rangle v\Big) = x - \langle x, v\rangle v + \langle x, v\rangle(-v) \\
&= x - 2\langle x, v\rangle v.
\end{aligned}$$

Dies ist also eine Spiegelung um die $F = \{v\}^\perp$-Ebene.

Sei nun $A \in SO(3)$ beliebig und sei $p(\lambda) := \det(\lambda - A)$ das charakteristische Polynom zu A. Es gilt:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(\lambda - A) = \det((\lambda - A)^t) = \det(\lambda - A^t) = \det(\lambda - A^{-1}) \\
&= \det(-\lambda(\frac{1}{\lambda} - A)A^{-1}) = \det(-\lambda) \cdot \det(\frac{1}{\lambda} - A) \cdot \det A^{-1} \\
&= (-\lambda)^n p(\frac{1}{\lambda}),
\end{aligned}$$

d.h. p ist ein reziprokes Polynom und für $\lambda = 1$ und $n = 3$ erhalten wir $2p(1) = 0$. Somit ist 1 immer ein Eigenwert, d.h. $F \neq \{0\}$. Falls also $\dim F = 1$, d.h. $F = \langle v\rangle$ für einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist, dann ist auch die Ebene $\{v\}^\perp$ invariant, und A auf dieser eine Drehung, also ist A eine Drehung um die v-Achse.

Wir erhalten also auch für die Gruppe $O(3)$, daß sie von den Spiegelungen erzeugt wird, und zwar benötigen wir jeweils höchstens 3 Stück.

Man kann allgemein zeigen, daß $O(n)$ von den Spiegelungen erzeugt wird (siehe (14.10)), und das allgemein höchstens n viele benötigt werden. Man kann obige Überlegungen über die Fixpunktmengen auch dazu verwenden das Zentrum der $O(n)$ zu bestimmen, siehe (24.28).

Insbesonders folgt, daß die $SO(n)$ wegzusamenhängend ist, denn jede Drehung läßt sich mit der Identität verbinden.

Jeder Einheitsvektor $v \in S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ zusammen mit $z \in S^1$ bestimmt eine eindeutige Drehung mit Achse v und Winkel z. Also erhalten wir eine surjektive Abbildung $S^2 \times S^1 \to SO(3)$. Diese Abbildung ist nicht injektiv, denn (v, z) und $(-v, -z)$ beschreibt die gleiche Drehung und alle $(v, 1)$ wirken als Identität. Die Zusammensetzung dieser Abbildung mit $\mathrm{id} \times e^{i\pi -} : S^2 \times [-1, 1] \to S^2 \times S^1$ faktorisiert über $S^2 \times [-1, 1] \to \mathbb{D}^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \le 1\}$, $(x, t) \mapsto tx$:

$$\begin{tikzcd} S^2 \times [-1,1] \arrow[r, two heads] \arrow[d] & S^2 \times S^1 \arrow[d] \\ \mathbb{D}^3 \arrow[r, two heads] & SO(3) \end{tikzcd}$$

Die untere Zeile ist bis auf die Identifizierung $z \sim -z$ für $z \in S^2 = \partial\mathbb{D}^3$ injektiv und ist eine Quotientenabbildung, die den projektiven Raum $\mathbb{P}^3$, den wir in (16.12.5) und (11.9) kennenlernen werden, als Bild hat. Also ist $SO(3) \cong \mathbb{P}^3$.

Die Euler-Winkel, eine Parametrisierung von $SO(3)$ durch $S^1 \times S^1 \times S^1$:
Es sei $R \in SO(3)$ beliebig und $f_j := R(e_j)$ das Bild der Standard-Basis in $\mathbb{R}^3$. Wir wollen nun R als Komposition von 3-Drehungen, die jede eine Koordinaten-Achse fix lassen, darstellen. Es genügt die Werte der Drehungen auf e_1 und e_2 zu beschreiben, denn $e_3 = e_1 \times e_2$ ist der eindeutig bestimmte Vektor, der normal auf e_1 und e_2 steht und zwar so, daß (e_1, e_2, e_3) positiv orientiert ist.

Um e_1 in f_1 zu drehen, müssen wir um eine Achse $k \in \{e_1\}^\perp \cap \{f_1\}^\perp = \langle\{e_2, e_3\}\rangle \cap \langle\{f_2, f_3\}\rangle$ drehen. Um nun noch e_2 in f_2 zu drehen, und dabei die Zuordnung $e_1 \mapsto f_1$ nicht zu zerstören, können wir zuerst um e_1 den Vektor e_2 nach k drehen und zuletzt um f_1 den Vektor k nach f_2 zu drehen.

$$\begin{array}{ccccccc} e_1 & \mapsto & e_1 & \mapsto & f_1 & \mapsto & f_1 \\ e_2 & \mapsto & k & \mapsto & k & \mapsto & f_2 \end{array}$$

Es seien also $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die sogenannten Eulerwinkel von R, welche gegeben sind durch

$$\varphi_1 := \measuredangle e_2 k; \quad \varphi_2 := \measuredangle e_1 f_1; \quad \varphi_3 := \measuredangle k f_2.$$

Dann sehen die Matrizen-Darstellungen der zugehörigen Drehungen R_1, R_2 und R_3 wie folgt aus:

$$[R_1]_{e_1,e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ 0 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$[R_2]_{e_1,k} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & 0 & -\sin\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$[R_1]_{f_1,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 \\ 0 & \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{pmatrix}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} &[R_3 \circ R_2 \circ R_1]_{e_1,e_2,e_3} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ 0 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & 0 & -\sin\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 \\ 0 & \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gibt noch eine schönere Parametrisierung der $SO(3)$, und zwar mittels eines Gruppen-Homomorphismuses $S^3 \to SO(3)$ mit Kern $\mathbb{Z}_2$, siehe (14.19) und (24.40).

2. Grundlegendes über Kurven in der Ebene

In diesem Abschnitt klären wir den Begriff der Kurve und behandeln die ausgezeichneten Parametrisierungen nach der Bogenlänge.

Im folgenden Lemma müssen wir das skalare Produkt $\langle \_, \_ \rangle$ differenzieren. Dazu rufen wir aus der Analysis das folgende Lemma in Erinnerung:

2.1 Lemma (Produktregel). *Es sei $l : E \to F$ eine lineare Abbildung und $b : E_1 \times E_2 \to E$ eine bilineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen. Dann ist die Ableitung von l und die von b gegeben durch*

$$l'(x)(v) = l(v) \quad \textit{und} \quad b'(x_1,x_2)(v_1,v_2) = b(x_1,v_2) + b(v_1,x_2).$$

Beweis. In der Tat ist die (Richtungs-)Ableitung

$$\begin{aligned} l'(x)(v) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} l(x + t\cdot v) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} (l(x) + t\cdot l(v)) = l(v) \qquad \text{und} \\ b'(x_1,x_2)(v_1,v_2) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} b((x_1,x_2) + t\,(v_1,v_2)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} b(x_1,x_2) + t\,(b(x_1,v_2) + b(v_1,x_2)) + t^2\, b(v_1,v_2) \\ &= 0 + b(x_1,v_2) + b(v_1,x_2) + 0 \quad \square \end{aligned}$$

2.2 Definition (Kurven)

Eine PARAMETRISIERTE KURVE in einem Euklidischen Raum E ist eine Abbildung $c : I \to E$, wobei I ein (zumeist) offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und c genügend oft differenzierbar ist (wir wollen der Einfachheit halber immer unendlich oft differenzierbar voraussetzen) und $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ ist (c heißt dann auch regulär).

Da wir aber im wesentlichen nicht an der Parametrisierung der Kurve, sondern mehr an ihrer geometrischen Gestalt interessiert sind, geben wir noch folgende Definition: Eine GEOMETRISCHE KURVE Γ ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven, wobei $c_0 : I_0 \to E$ und $c_1 : I_1 \to E$ ÄQUIVALENT heißen, falls ein DIFFEOMORPHISMUS $\varphi : I_0 \to I_1$ (d.h. φ bijektiv und sowohl φ als auch φ^{-1} glatt sind) existiert, mit $c_1 \circ \varphi = c_0$.

$$
\begin{tikzcd}
 & E & \\
I_0 \arrow[ur, "c_0"] \arrow[rr, dotted, "\varphi"] & & I_1 \arrow[ul, "c_1"']
\end{tikzcd}
$$

Eine ORIENTIERTE GEOMETRISCHE KURVE ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven, wobei c_1 und c_2 ÄQUIVALENT heißen, falls ein φ wie oben existiert, welches zusätzlich $\varphi'(t) > 0$ für alle t erfüllt (d.h. streng monoton wachsend ist).

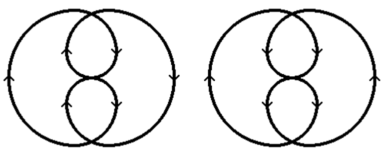
Also ist eine (orientierte) geometrische Kurve durch Angabe einer PARAMETRISIERUNG, d.h. einer parametrisierten Kurve in dieser Klasse, bereits festgelegt. Wir können uns im folgenden also darauf beschränken, Konzepte für parametrisierte Kurven zu entwickeln, sollten aber immer darauf achten, daß diese Konzepte wirklich geometrischer Natur sind, d.h. nicht von der Auswahl der Repräsentanten (= Parametrisierungen) abhängen und auch invariant unter Bewegungen sind.

Unter dem BILD EINER GEOMETRISCHEN KURVE versteht man das Bild einer (jeder) Parametrisierung.

2.3 Bemerkungen

Verschiedene geometrische Kurven können sehr wohl das gleiche Bild besitzen:

1. Der Kreis: $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ wobei man jedes (offene) Intervall der Länge größer als 2π als Parameter Intervall verwenden kann, z.B. also $I_1 := \mathbb{R}$ oder $I_2 :=]0, 3\pi[$.
2. Ein weniger triviales Beispiel ist:



Wir können aber zeigen, daß der Parameter einer parametrisierten Kurve $c : I \to E$ lokal aus den Bildpunkten berechnet werden kann:

Sei dazu $0 \in I$ und $c'(0) \neq 0$. Wir definieren eine glatten Funktion $\Psi : I \times c'(0)^\perp \to E$ durch $\Psi(t, x) := c(t) + x$. Für die partiellen Ableitungen von Ψ erhalten wir $\partial_1\Psi(0,0) = c'(0)$ und $\partial_2\Psi(0,0) \cdot v = v$. Bezüglich des linearen Isomorphismuses

$\mathbb{R} \times c'(0)^\perp \cong E$, $(t, x) \mapsto t\, c'(0) + x$, ist die Komponenten-Darstellung der Ableitung von $\Psi'(0,0)$ gegeben durch

$$\Psi'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{c'(0)^\perp} \end{pmatrix},$$

und somit invertierbar. Nach dem inversen Funktionensatz (siehe (10.2)) ist Ψ ein lokaler Diffeomorphismus, d.h. es gibt eine offene Umgebung von 0 (o.B.d.A. der Form $I_1 \times V$ mit $I_1 \subseteq \mathbb{R}$ und $V \subseteq c'(0)^\perp$ offen) und eine offene Umgebung U von $c(0)$, so daß $\Psi : I_1 \times V \to U$ ein Diffeomorphismus ist. Da $\Psi(t, 0) = c(t)$ ist, gilt $\Psi^{-1}(c(t)) = (t, 0)$ für alle $t \in I_1$. Die Zusammensetzung $p := \mathrm{pr}_1 \circ \Psi^{-1} : U \to I_1 \times V \to I_1$ ist dann eine lokale Linksinverse zu c.

Dies zeigt auch, daß wir den Parameterwechsel in der Definition geometrischer Kurven bloß als Homöomorphismus voraussetzen brauchen, denn er ist dann automatisch ein Diffeomorphismus. In der Tat, wenn für zwei parametrisierte Kurven $c_j : I_j \to E$ mit $(j \in \{0, 1\})$ ein Homöomorphismus $\varphi : I_0 \to I_1$ mit $c_1 \circ \varphi = c_0$ gegeben ist, dann finden wir für jedes $t_0 \in I_0$ eine Umgebung U von $c_0(t_0) = c_1(\varphi(t_0))$ und V von $\varphi(t_0)$ und ein glattes linksinverses p zu $c_1 : V \to U$. Somit ist aber $\varphi = p \circ c_1 \circ \varphi = p \circ c_0$ auf $\varphi^{-1}(V)$ und somit glatt auf der (wegen der Stetigkeit von φ) offenen Umgebung $\varphi^{-1}(V)$ von t_0.

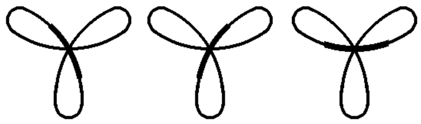
$$\begin{tikzcd}
 & & E & & \\
 & & U \arrow[u, hook] \arrow[d, "p"] & & \\
 & & V & & \\
 & \varphi^{-1}(V) \arrow[uur] \arrow[ur, "\varphi|_{\varphi^{-1}V}"] \arrow[rr, "\varphi|_{\varphi^{-1}V}"'] \arrow[dl, hook] & & V \arrow[uul] \arrow[ul, equal] \arrow[dr, hook] & \\
I_0 \arrow[uuuurr, "c_0"] \arrow[rrrr, "\varphi"'] & & & & I_1 \arrow[uuuull, "c_1"']
\end{tikzcd}$$

2.4 Definition (Punkte geometrischer Kurven)

Ein Punkt auf einer geometrischen Kurve Γ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (c, t) mit $c \in \Gamma$ (d.h. $c : I \to E$ ist eine Parametrisierung von Γ) und $t \in I$, wobei $(c_1, t_1) \sim (c_2, t_2) :\Leftrightarrow$ es existiert ein Diffeomorphismus $\varphi : I_2 \to I_1$ mit $c_2 = c_1 \circ \varphi$ und $\varphi(t_2) = t_1$.

Unter der Vielfachheit eines Punktes versteht man die Kardinalität der Menge $\{t' : c(t') = c(t)\}$ für einen (jeden) Repräsentanten (c, t). Ein Punkt mit Vielfachheit $1, 2, \ldots$ heißt einfacher Punkt, Doppelpunkt,....

Ein Punkt läßt sich am besten als ein Zweig der Kurve durch einen Bildpunkt vorstellen:



Die TANGENTE an eine parametrisierte Kurve c im Punkt t ist die affine Gerade $c(t) + \mathbb{R} \cdot c'(t)$.

2.5 Lemma. *Die Tangente ist ein geometrisches Konzept, d.h. reparametrisierungs-invariant und auch invariant unter Bewegungen.*

Beweis. Zuerst zeigen wir die Invarianz unter Reparametrisierungen. Seien (c, t) und $(\bar{c}, \bar{t})$ zwei Repräsentanten des gleichen Punktes einer geometrischen Kurve, und φ ein zugehöriger Parameterwechsel, d.h. $\bar{c} = c \circ \varphi$ und $t = \varphi(\bar{t})$. Die Tangente von $\bar{c}$ in $\bar{t}$ ist die von c in t, denn $\bar{c}(\bar{t}) + \mathbb{R} \cdot \bar{c}'(\bar{t}) = c(\varphi(\bar{t})) + \mathbb{R} \cdot (c \circ \varphi)'(\bar{t}) = c(t) + \mathbb{R} \cdot c'(\varphi(\bar{t})) \cdot \varphi'(\bar{t}) = c(t) + \mathbb{R} \cdot c'(t)$ (man verwende $\mathbb{R} \cdot \varphi'(\bar{t}) = \mathbb{R}$).

Nun zur Bewegungs-Invarianz: Sei $x \mapsto R(x) + a$ eine Bewegung und (c, t) ein Punkt einer Kurve. Die bewegte Kurve ist dann $\bar{c} : t \mapsto R(c(t)) + a$. Die bewegte Tangente von c in t ist die Tangente der bewegten Kurve $\bar{c}$, denn

$$
\begin{aligned}
R(c(t) + \mathbb{R} \cdot c'(t)) + a = R(c(t)) + a + \mathbb{R} \cdot R(c'(t)) = \\
= (R(c(t)) + a) + \mathbb{R} \cdot (R \circ c)'(t) = \bar{c}(t) + \mathbb{R} \cdot \bar{c}'(t)
\end{aligned}
$$

(man verwende die Kettenregel und $R'(x)(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} R(x + t \cdot v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (R(x) + t \cdot R(v)) = R(v)$, da R linear ist). □

2.6 Definition (Tangentialvektor und Länge)

Der EINHEITSTANGENTIALVEKTOR $\tau(t)$ im Punkt einer parametrisierten Kurve ist definiert durch $\tau(t) := \frac{c'(t)}{|c'(t)|}$. Für die Wohldefiniertheit verwenden wir die Regularität der Kurve, d.h. $c'(t) \neq 0$. Man beachte, daß auch dieser ein geometrisches Konzept für orientierte geometrische Kurven darstellt, dazu muß man allerdings beachten, daß $c(t)$ zum Euklidischen Raum und $c'(t)$ hingegen zum zugehörigen Vektorraum gehört.

Sei $c : I \to E$ eine Kurve, $[a, b] \subset I$ ein abgeschlossenes Teilintervall, und $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < \cdots < t_m = b\}$ eine Zerlegung, dann ist $L_a^b(c, \mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^m |c(t_i) - c(t_{i-1})|$ die Länge des Polygonzuges durch die Punkte $c(t_i)$. Die LÄNGE der Kurve von a bis b ist definiert als $L_a^b(c) := \sup_{\mathcal{Z}} L_a^b(c, \mathcal{Z})$. Für $a > b$ ist $L_a^b(c) := -L_b^a(c)$ und es gilt: $L_{a_1}^{a_3}(c) = L_{a_1}^{a_2}(c) + L_{a_2}^{a_3}(c)$.

2.7 Lemma (Länge als Integral). *Sei $c : I \to E$ eine Kurve (C^1 würde genügen) und $[a, b] \subset I$, dann gilt: $L_a^b(c) < \infty$, $L_a^b(c) = \int_a^b |c'(t)| dt$ und $\frac{\partial}{\partial t} L_a^t(c) = |c'(t)|$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß die Länge endlich ist:

$$L_a^b(c,\mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^m |c(t_i)-c(t_{i-1})| \overset{\text{1.HS}}{=\!=} \sum_{i=1}^m |\int_{t_{i-1}}^{t_i} c'(t)dt| \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq}$$
$$\leq \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(t)|dt = \int_a^b |c'(t)|dt$$
$$\Rightarrow L_a^b(c) \leq \int_a^b |c'(t)|dt < \infty.$$

Nun zur Ableitung:

$$\left|\frac{c(t+h)-c(t)}{h}\right| \leq \left|\frac{L_t^{t+h}(c)}{h}\right| = \left|\frac{L_a^{t+h}(c)-L_a^t(c)}{h}\right| \leq \left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}|c'(t)|dt\right|$$

Beide Seiten dieser Ungleichung konvergieren gegen $|c'(t)|$ für $h \to 0$, also auch der mittlere Term, d.h. $\frac{\partial}{\partial t}L_a^t(c) = |c'(t)|$.

Weiters gilt wiederum wegen des ersten Hauptsatzes $L_a^b(c) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}L_a^t(c)dt = \int_a^b |c'(t)|dt$. □

Da die Bogenlänge unter Reparametrisierungen und Bewegungen invariant ist, ist sie ebenfalls geometrisches Konzept.

2.8 Definition (Parametrisierung nach der Bogenlänge)

Eine Parametrisierung c einer Kurve heißt Parametrisierung nach der Bogenlänge falls $|c'(t)| = 1$ für alle t. Für die Länge bezüglich solcher Parametrisierungen gilt also $L_a^b(c) = b-a$.

2.9 Satz (Bogenlängenparametrisierung).
Jede geometrische Kurve besitzt eine solche Parametrisierung. Je zwei Parametrisierungen nach der Bogenlänge der gleichen Kurve sind über einen Parameterwechsel der Form $t \longmapsto \pm t + a$ äquivalent.

Beweis. Zur Existenz: Sei $c : I \to E$ eine Parametrisierung einer Kurve, a ein Punkt im Intervall I. Dann definiert $s(t) := L_a^t(c)$ die differenzierbare Längenfunktion $s : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, mit $s'(t) = |c'(t)| > 0$. Insbesonders ist $s(I)$ zusammenhängend und somit wieder ein Intervall. Die Umkehrfunktion $\varphi : s(I) \to I$, $s \longmapsto t(s)$ ist C^∞, da die Norm C^∞ auf $E \setminus \{0\}$ ist. Die Parametrisierung $\bar{c} := c \circ \varphi$ ist die gesuchte Parametrisierung nach der Bogenlänge, da

$$\frac{d\bar{c}}{ds} = \frac{dc}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{dc}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{dc}{dt}\cdot\frac{1}{|c'(t)|} = \frac{dc}{dt}\cdot\frac{1}{|\frac{dc}{dt}|}.$$

Zur Eindeutigkeit: Seien c, $c\circ\varphi$ zwei Parametrisierungen nach der Bogenlänge, dann gilt:

$$1 = |(c\circ\varphi)'(t)| = |c'(\varphi(t))|\cdot|\varphi'(t)| = |\varphi'(t)|,$$

da $|(c\circ\varphi)'(t)| = 1 = |c'(\varphi(t))|$. Es folgt: $|\varphi'(t)| = 1$ für alle t, also $\varphi' = \pm 1$. Wir erhalten schließlich $\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi'(r)dr = \varphi(0) \pm t$ □

Beispiel

Betrachten wir einen Kreis $c : t \mapsto r(\cos t, \sin t) + M$. Für $s(t) := L_0^t(c)$ erhalten wir mit $|c'(t)| = r$ nach kurzer Rechnung $s(t) = \int_0^t |c'(x)|dx = t \cdot r$. Also ist die Umkehrfunktion $s \mapsto t(s) = \frac{s}{r}$, und eine Bogenlängenparametrisierung ist $s \mapsto c(t(s)) = r(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r}) + M$. Der Einheitstangentialvektor ist $\tau(s) = (-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r})$.

2.10 Lemma. *Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve c gilt $c''(s) \perp c'(s)$ für alle s.*

Beweis. Wir differenzieren die Gleichung $1 = |c'(s)|^2 = \langle c'(s), c'(s)\rangle$ und erhalten $0 = \langle c''(s), c'(s)\rangle + \langle c'(s), c''(s)\rangle = 2\langle c'(s), c''(s)\rangle$. Also gilt $c''(s) \perp c'(s)$ für alle s. □

3. Krümmung von Kurven in der Ebene

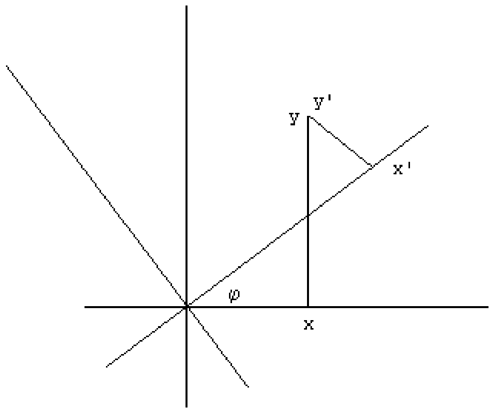
In diesem Abschnitt wird der zentrale Begriff der Krümmung für ebene Kurven studiert.

3.1 Normalvektor

Sei $R \in SO(\mathbb{R}^2) = \{T \in GL(E) : \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle x, y und $\det(T) > 0\}$. Da die Matrix-Eintragungen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ von R gerade die Komponenten von $R(e_1)$ und $R(e_2)$ bezüglich der Basis (e_1, e_2) sind, muß $a^2 + c^2 = |R(e_1)|^2 = 1$, $b^2 + d^2 = |R(e_2)|^2 = 1$ und $ab + cd = \langle R(e_1), R(e_2)\rangle = 0$ gelten. Also ist (a, c) ein Einheits-Vektor und (b, d) einer der beiden Einheits-Normalvektoren $\pm(-c, a)$ an (a, c), und zwar jener mit $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) > 0$, d.h. $(b, d) = (-c, a)$. Die Abbildung $R \in SO(\mathbb{R}^2)$ läßt sich also in der Form

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

schreiben, mit einem eindeutig bestimmten $\varphi \in [0, 2\pi[$. Dies ist genau die Drehung der Punkte der Ebene um den Winkel φ (oder des Achsenkreuzes (d.h. der Basis) um den Winkel $-\varphi$), wie sofort aus den Additionstheorem für die Winkelfunktionen folgt:



So eine Drehung bildet die Polarkoordinaten (r, ψ) auf $(r, \psi + \varphi)$ ab, und somit gilt für die kartesischen Koordinaten $x = r \cos\psi$, $y = r \sin\psi$ folgendes:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}r\cos(\psi+\varphi)\\ r\sin(\varphi+\varphi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cdot r\cdot\cos\psi - \sin\varphi\cdot r\cdot\sin\psi\\ \sin\varphi\cdot r\cdot\cos\psi + \cos\varphi\cdot r\cdot\sin\psi\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\varphi\cdot x - \sin\varphi\cdot y\\ \sin\varphi\cdot x + \cos\varphi\cdot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Insbesonders erhalten wir für jedem Vektor $x \neq 0$ im $\mathbb{R}^2$ den eindeutig bestimmten Vektor $x^\perp$, welcher normal auf x steht, gleiche Länge wie x hat und links von x liegt (d.h. $(x, x^\perp)$ ist positiv orientiert), durch eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ von x:

$$x^\perp = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x^2\\ x^1\end{pmatrix}.$$

Definition

Unter dem Einheitsnormalvektor ν an eine parametrisierte Kurve c in Punkte t versteht man $\nu(t) := \tau(t)^\perp$. Wie der Tangentialvektor ist auch der Einheitsnormalvektor ein geometrisches Konzept für orientierte Kurven.

3.2 Definition (Krümmung)

Da ein Kreis umso stärker gekrümmt ist, je kleiner der Radius r ist, wollen wir als Maß für die Krümmung K des Kreises den Kehrwert $\frac{1}{r}$ verwenden. Falls der Kreis positiv orientiert ist, also eine Linkskurve beschreibt, sei seine Krümmung positiv, andernfalls negativ. Eine Gerade kann man als Grenzfall eines Kreises für $r \to \infty$ betrachten, und die entsprechende Definition für ihre Krümmung als $K := \frac{1}{\infty} = 0$ stimmt auch mit der Anschauung der nicht-Gekrümmtheit überein.

Wir können den Mittelpunkt M eines Kreises aus den ersten paar Ableitungen beim Punkt s einer Bogenlängenparametrisierung $k(s) = r(\cos\frac{\pm s}{r}, \sin\frac{\pm s}{r}) + M$ errechnen:

$$\begin{aligned} &k'(s) = \pm(-\sin\tfrac{\pm s}{r}, \cos\tfrac{\pm s}{r}) = \tau(s), \quad k''(s) = -\tfrac{1}{r}(\cos\tfrac{\pm s}{r}, \sin\tfrac{\pm s}{r}) \quad \Rightarrow\\ \Rightarrow\quad &|k''(s)| = \tfrac{1}{r} = \pm K \quad \text{und}\\ &M = k(s) - r(\cos\tfrac{\pm s}{r}, \sin\tfrac{\pm s}{r}) = k(s) + k''(s)\cdot r^2 = k(s) + \frac{k''(s)}{|k''(s)|^2}.\end{aligned}$$

Sei allgemeiner c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c''(s) \neq 0$. Unter dem Krümmungskreis im Punkt s versteht man jenen Kreis k, welcher c bei s von Ordnung 2 berührt, d.h. $c(s) = k(s)$, $c'(s) = k'(s)$ und $c''(s) = k''(s)$. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist wegen obiger Formel durch $M = k(s) + \frac{k''(s)}{|k''(s)|^2} = c(s) + \frac{c''(s)}{|c''(s)|^2}$ gegeben und sein Radius ist $r = \frac{1}{|c''(s)|}$. Mittels diesen Ansatzes folgt auch seine Existenz.

Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte (wohldefiniert, wo $|c''| \neq 0$) heißt Evolute. Unter der Krümmung $K(s)$ der Kurve c bei s versteht man die Krümmung des Krümmungskreises.

Für den Krümmungskreis gilt: $c''(s) = k''(s) = K(s)\cdot\nu(s)$, wo $\nu(s)$ die Einheitsnormale an k bzw. c und $K(s)$ die Krümmung ist. Nach dem Newtonschen Gesetz “Kraft = Masse × Beschleunigung” mißt $K(s)$ die (skalare Größe der) Kraft, die nötig ist, um den, mit skalarer Geschwindigkeit $|c'(s)| = 1$ bewegten Punkt (mit Einheitsmasse) auf der Kurve zu halten.

Wir können also K als den Koeffizienten von $\tau' = c''$ bzgl. des zweiten Vektors ν des Begleitbeins (τ,ν) auffassen. Wenn wir diese Gleichung $\tau' = K\cdot\nu$ mit einer Rotation R um $\pi/2$ drehen, dann erhalten wir

$$\nu' = R(\tau)' = R(\tau') = R(K\cdot\nu) = K\cdot R(\nu) = K\cdot R^2(\tau) = -K\cdot\tau.$$

Zusammen sind das die sogenannten Frenet'schen Ableitungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\tau' &= K\cdot\nu\\ \nu' &= -K\cdot\tau,\end{aligned}$$

die die Ableitung des Begleitbeins in der Basis, welche durch das Begleitbein gegeben ist, ausdrücken.

Mit $c(s) =: (x(s), y(s))$ ergibt sich folgende explizite Formel für die Krümmung

$$\begin{aligned}K(s) &= \langle K(s)\cdot\nu(s),\nu(s)\rangle = \langle c''(s),\nu(s)\rangle\\ &= \langle c''(s),\tau(s)^\perp\rangle\\ &= \det(c'(s),c''(s)),\end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}\det(x,y) = \det\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix} &= x_1y_2 - x_2y_1 =\\ &= \left\langle\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-x_2\\ x_1\end{pmatrix}\right\rangle = \langle y, x^\perp\rangle.\end{aligned}$$

Falls c nicht nach der Bogenlänge parametrisiert ist, sei $t\mapsto s(t)$ die Bogenlängenfunktion und $\bar c = c\circ s^{-1}$ die Reparametrisierung nach der Bogenlänge. In diesem Fall erhalten wir für die Krümmung:

$$\begin{aligned}K_{\bar c}(s) &= \det(\bar c'(s),\bar c''(s)) = \det\Big(c'(t)\tfrac{1}{s'},\big(c''(t) - c'(t)\tfrac{1}{s'}s''\big)\tfrac{1}{(s')^2}\Big)\\ &= \tfrac{1}{(s')^3}\det(c'(t),c''(t)) + 0 \Rightarrow\\ \Rightarrow K_c(t) = K_{\bar c}(s(t)) &= \frac{\det(c'(t),c''(t))}{|c'(t)|^3} = \frac{\langle c'(t)^\perp, c''(t)\rangle}{|c'(t)|^3},\end{aligned}$$

wobei wir Folgendes verwendeten: $c = \bar c\circ s$, $c' = (\bar c'\circ s)s'$, $c'' = (\bar c''\circ s)(s')^2 + (\bar c'\circ s)s''$ und $\det(x,y) = \langle y, x^\perp\rangle$.

Wir wollen nun zeigen, daß der Krümmungkreis unter Bewegungen invariant ist. Dazu genügt es, die Invarianz des Mittelpunktes

$$M = c(s) + \frac{c''(s)}{|c''(s)|^2} = c(s) + \frac{K(s)\nu(s)}{|K(s)\cdot 1|^2} = c(s) + \frac{\nu(s)}{K(s)}$$

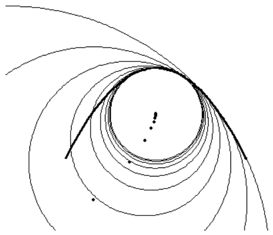
zu zeigen: Sei c nach der Bogenlänge parametrisiert und sei $\bar{c}(t) = R(c(t)) + a$ die durch $x \mapsto Rx + a$ bewegte Kurve. Die Krümmung von $\bar{c}$ ist dann:

$$\begin{aligned} K_{\bar{c}}(t) &= \det(\bar{c}'(t), \bar{c}''(t)) = \det\big(R(c'(t)), R(c''(t))\big) \\ &= \det\big(R(c'(t), c''(t))\big) = \det R \cdot \det(c'(t), c''(t)) = K_c(t), \end{aligned}$$

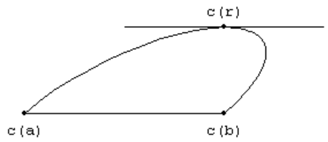
da $\det R = +1$. Somit ist die Krümmung invariant und damit auch der Mittelpunkt.

3.3 Lemma (Krümmungskreis als Limes). *Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, $c''(s) \neq 0$. Für je drei verschiedene Punkte s_1, s_2, s_3 sei $M(s_1, s_2, s_3)$ der Mittelpunkt des Kreises durch die Punkte $c(s_1), c(s_2), c(s_3)$ und $M(s)$ der Mittelpunkt des Krümmungskreises von c.*

Dann gilt: $M(s_1, s_2, s_3) \to M(s)$ für $s_1, s_2, s_3 \to s$. Gleiches gilt auch für die Radien.



3.4 Sublemma. *Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Sei $w \neq 0$ ein Richtungsvektor einer Geraden durch $c(a)$ und $c(b)$. Dann existiert ein $r \in\,]a, b[$ für das $c'(r)$ ein skalares Vielfaches von w ist.*



Beweis des Sublemmas. Sei $w \neq 0$ ein Richtungsvektor einer Geraden durch $c(a)$ und $c(b)$ und $\nu := w^\perp$, d.h. $\langle \nu, c(b) - c(a)\rangle = 0$. Also erfüllt $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(t) := \langle c(t) - c(a), \nu\rangle$ die Randbedingungen $g(a) = 0 = g(b)$. Aus dem Satz von Rolle folgt: $\exists\, r \in\,]a, b[\, : 0 = g'(r) = \langle c'(r), \nu\rangle$. Somit ist $c'(r) \perp \nu \perp w$, d.h. $c'(r) \parallel w$. □

Wir kommen nun zu dem eigentlichen Beweis des Lemmas:

Beweis. Angenommen es existieren $s_1 < s_2 < s_3$ beliebig nahe an s, sodaß $c(s_1), c(s_2), c(s_3)$ auf einer Geraden mit dem Richtungsvektor ν liegen. Aus dem Sublemma folgt, daß $s_{1,2}$ und $s_{2,3}$ existieren mit $s_1 < s_{1,2} < s_2 < s_{2,3} < s_3$ und $c'(s_{1,2}) \parallel \nu \parallel c'(s_{2,3})$. Also ist $c'(s_{1,2}) = \lambda c'(s_{2,3})$ mit einen $\lambda = \pm 1$, da $|c'| = 1$. Falls $\lambda = -1$ für beliebig nahe $s_1 < s_2 < s_3$, dann ist $c'(s_{1,2}) = -c'(s_{2,3})$. Da die linke Seite gegen $c'(s)$, die rechte Seite aber gegen $-c'(s)$ strebt, ist dies ein Widerspruch zur Voraussetzung $c'(s) \neq 0$, d.h. $\lambda = +1$ und somit $c'(s_{1,2}) = c'(s_{2,3})$. Es konvergiert also $0 = \frac{c'(s_{1,2}) - c'(s_{2,3})}{s_{1,2} - s_{2,3}} \to c''(s) \neq 0$, das ist ein Widerspruch. Demnach ist $M(s_1, s_2, s_3)$ für s_1, s_2, s_3 nahe s wohldefiniert.

Sei nun $h : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(t) := |c(t) - M(s_1, s_2, s_3)|^2$. Dann ist $h(s_1) = h(s_2) = h(s_3)$ und nach dem Mittelwertsatz existieren $s_{1,2}$ und $s_{2,3}$ mit $h'(s_{1,2}) =$

$0 = h'(s_{2,3})$ und weiters existiert ein $s_{1,2,3}$ mit $h''(s_{1,2,3}) = 0$. Die Ableitungen von h sind:

$$h' = 2\langle c', c - M\rangle$$
$$h'' = 2\Big(\langle c'', c - M\rangle + \langle c', c'\rangle\Big).$$

Wir erhalten zwei implizite Gleichung für M:

$$\langle c'(s_{1,2}), c(s_{1,2})\rangle = \langle c'(s_{1,2}), M(s_1, s_2, s_3)\rangle$$
$$\langle c''(s_{1,2,3}), c(s_{1,2,3})\rangle + 1 = \langle c''(s_{1,2,3}), M(s_1, s_2, s_3)\rangle.$$

Sei $A(t_1, t_2)$ die Matrix $(c'(t_1), c''(t_2))$ (wobei wir $c'(t_1)$ und $c''(t_2)$ als Zeilenvektoren auffassen). Dann können wir (*) wie folgt schreiben:

$$A(s_{1,2}, s_{1,2,3}) \cdot M(s_1, s_2, s_3) = \begin{pmatrix} \langle c'(s_{1,2}), c(s_{1,2})\rangle \\ \langle c''(s_{1,2,3}), c(s_{1,2,3})\rangle + 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $s_1, s_2, s_3 \to s$ konvergiert $A(s_{1,2}, s_{1,2,3})$ gegen $A(s, s) = (c'(s), c''(s))$ in $L(\mathbb{R}^2)$. Also ist auch $A(s_{1,2}, s_{1,2,3})$ invertierbar für s_1, s_2, s_3 nahe s und $A(s_{1,2}, s_{1,2,3})^{-1} \to A(s, s)^{-1}$. Somit konvergiert $M(s_1, s_2, s_3)$ gegen

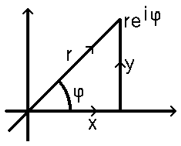
$$A(s, s)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \langle c'(s), c(s)\rangle \\ \langle c''(s), c(s)\rangle + 1 \end{pmatrix} =: M(s).$$

Unter Verwendung von (*) erhalten wir:

$$\langle c'(s), M(s) - c(s)\rangle = 0 \Rightarrow M(s) - c(s) = \lambda\nu(s) \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\langle c''(s), c(s) - M(s)\rangle = -1 \Rightarrow -1 = \langle c''(s), -\lambda\nu(s)\rangle = \langle K(s)\nu(s), -\lambda\nu(s)\rangle =$$
$$= -K(s)\lambda|\nu(s)|^2 = -K(s)\lambda$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{K(s)} \quad \text{und} \quad M(s) = c(s) + \frac{\nu(s)}{K(s)}. \qquad \square$$

3.5 Polarkoordinaten versus kartesische Koordinaten

Aus den Grundvorlesungen kennen wir die Abbildung p, die den Polarkoordinaten $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ die kartesischen Koordinaten $(x, y) := (r \cos\varphi, r \sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ zuordnet.



Wir wollen nun umgekehrt Punkten im $\mathbb{R}^2$, gegeben in kartesischen Koordinaten, zugehörige Polarkoordinaten auf differenzierbare Weise zuordnen.

Die Ableitung von p ist durch $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$ gegeben und ist für $r = 0$ nicht invertierbar. Also ist dieses Problem lokal um $0 \in \mathbb{C}$ nicht lösbar, deshalb nehmen wir 0 aus, d.h. wir betrachten die Einschränkung von $p : (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Diese Einschränkung ist nach dem Inversen-Funktionensatz lokal ein Diffeomorphismus. Sie ist aber nur lokal injektiv. Um sie global injektiv zu machen schränken wir sie weiter zu einer Abbildung $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ein. Noch immer ist der Winkel φ aber nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π festgelegt. Also müssen wir φ auf ein Intervall der Länge 2π beschränken - damit wir leicht von Differenzierbarkeit sprechen können - auf ein offenes Intervall. Bei gegebenem $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ sei dieses Intervall $]\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi[$. Dann ist $p : \mathbb{R}^+ \times]\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi[\to \mathbb{C} \setminus \{te^{i\varphi_0} : t \leq 0\}$ ein Diffeomorphismus. Das Bild bzgl. p ist die (komplexe) Ebene ohne einen Halbstrahl. Wir können sogar explizit die Umkehrfunktion $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ bzw. $\varphi = \operatorname{arccot}(\frac{x}{y})$ angeben, wenn wir für arctan und arccot den passenden Zweig wählen.

3.6 Lemma (Krümmung als Richtungsänderung). *Sei $c : I \to \mathbb{C}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c' : I \to S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Sei $s_0 \in I$ und $\theta : I \to \mathbb{R}$ für s nahe s_0 eine differenzierbare Lösung von $e^{i\theta(s)} = c'(s)$. Dann folgt $K(s) = \theta'(s)$. Das bedeutet, daß die Krümmung K die infinitesimale Änderung des Winkels der Tangente mißt.*

Beweis. Durch Differenzieren der Gleichung $c'(s) = e^{i\theta(s)}$ erhält man $c''(s) = i\theta'(s)e^{i\theta(s)} = \theta'(s)ic'(s) = \theta'(s)\nu(s)$, das ist aber die implizite Gleichung für die Krümmung $\Rightarrow K(s) = \theta'(s)$. □

Zusammenfassung

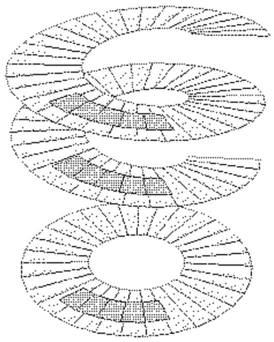
Die Krümmung einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve kann aufgefaßt werden als:

1. Der Kehrwert $\frac{1}{r} = |c''(s)| = |K(s)|$ des Radius r des Krümmungskreises, d.h. jenes Kreises, der c am besten approximiert, versehen mit einen Vorzeichen welches sich daraus ergibt ob der Krümmungskreis positiv oder negativ orientiert ist, siehe (3.2).
2. Der skalare Wert der Beschleunigung $c''(s) = K(s)\nu(s)$, siehe (3.2).
3. Die infinitesimale Änderung des Winkels der Tangente $K(s) = \theta'(s)$, nach Lemma (3.6).

3.7 Polarkoordinaten als Überlagerung

Wir wollen nun das globale Verhalten der Polarkoordinaten untersuchen. Sei $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ wie in (3.5) die Abbildung $(r, \varphi) \mapsto re^{i\varphi}$, die Polarkoordinaten kartesische Koordinaten zuordnet.

Definition. In der Topologie nennt man eine stetige Abbildung $p : X \to Y$ zwischen Hausdorffräumen eine Überlagerung, falls eine Überdeckung von Y mit offenen sogenannten trivialisierenden Mengen $U \subset Y$ existiert, sodaß $p^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen U_j, genannt Blätter, mit $j \in J$ ist und $p|_{U_j} : U_j \to U$ ein Homöomorphismus für alle U und alle $j \in J$ ist. Falls die Kardinalität κ der Indexmenge J nicht von U abhängt, bezeichnet man $p : X \to Y$ auch als eine κ-blättrige Überlagerung.



Das Urbild $p^{-1}(U)$ ist dann die topologische Summe seiner Blätter, denn eine Teilmenge $V \subseteq p^{-1}(U)$ ist genau dann offen, wenn $V \cap U_j$ offen ist für alle $j \in J$.

Sei $c : I \to X$ eine stetige Kurve für welche $(p \circ c)(I)$ ganz in einer trivialisierenden Umgebung U liegt, so ist $c(I)$ ganz in einem Blatt über U enthalten, denn die zusammenhängende Menge $c(I)$ kann nicht verschiedene Summanden der topologischen Summe $\bigsqcup_{j\in J} U_j$ treffen.

Längs Überlagerungen lassen sich Kurven liften:

3.8 Lemma (Liftung von Kurven). *Sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung, $c : I \to Y$ eine stetige Kurve mit $0 \in I$ und sei $x_0 \in p^{-1}(c(0))$. Dann existiert eine eindeutige stetige Kurve $\tilde{c} : I \to X$ genannt* Lift *von c mit $p \circ \tilde{c} = c$ und $\tilde{c}(0) = x_0$.*

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "x_0"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[r, "c"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{c}"] & Y \end{tikzcd}$$

Beweis. Zuerst die Eindeutigkeit: Seien c_1 und c_2 zwei Lifts. Dann ist $0 \in T := \{t \in I : c_1(t) = c_2(t)\}$ und T ist abgeschlossen. Zu einem $t \in T$ sei U eine trivialisierende Umgebung von $c(t)$ und U_0 das Blatt über U, welches $c_1(t) = c_2(t)$ enthält. Da c_1 und c_2 stetig sind, haben sie für t' nahe t Werte in U_0, und da $p : U_0 \to U$ eine Bijektion ist, ist $c_1(t') = (p|_{U_0}^{-1} \circ c)(t') = c_2(t')$ für diese t'. Also ist T offen. Weil I ein Intervall und somit zusammenhängend ist, stimmt T mit I überein, d.h. $c_1 = c_2$.

Nun zur Existenz: Sei

$$T := \{t \in I : \text{Ein Lift } \tilde{c} \text{ von } c \text{ auf der Strecke von } 0 \text{ nach } t \text{ existiert}\}.$$

Klarerweise ist $0 \in T$ und T ein Intervall. Wir zeigen, daß T keinen Rand in I besitzt. Angenommen $t \in I$ wäre ein Randpunkt von T, o.B.d.A. $t \geq 0$. Sei U eine trivialisierende Umgebung von $c(t)$, dann ist $c(t') \in U$ für t' nahe t. Sei U_0 jenes (eindeutige) Blatt über U welches $\tilde{c}(t')$ enthält für alle hinreichend nahen $t' < t$ (bzw. im Falle $t = 0$ den Punkt x_0). Dann läßt sich $\tilde{c}$ durch $p|_{U_0}^{-1} \circ c$ lokal um t (eindeutig) fortsetzen, und somit ist t kein Randpunkt von T; ein Widerspruch. □

3.9 Folgerung. *Sei $c : I \to S^1$ eine stetige Kurve, dann existiert ein stetiger Lift $\bar{c} : I \to \mathbb{R}$, d.h. $e^{i\bar{c}(t)} = c(t)$ für alle $t \in I$. Ist $t_0 \in I$, so ist $\bar{c}$ eindeutig durch Angabe von $\bar{c}(t_0) \in \mathbb{R}$ mit $e^{i\bar{c}(t_0)} = c(t_0)$ bestimmt. Falls c glatt ist, so auch $\bar{c}$.*

Beweis. Offensichtlich beschreibt $\theta \mapsto e^{i\theta}$ jene Überlagerung $\mathbb{R} \to S^1$, die aus der in (3.5) durch Polarkoordinaten gegebenen Überlagerung $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ durch Einschränkung auf $\mathbb{R} \cong \{1\} \times \mathbb{R} = p^{-1}(S^1) \to S^1$ gegeben ist. Also haben wir die Liftungseigenschaft nach (3.8). Die Glattheit von $\tilde{c}$ folgt, da p ein lokaler Diffeomorphismus ist.

Wir geben nun einen zweiten direkteren Beweis, der auch gleichzeitig die Glattheit des Liftes liefert.

Zuerst eine Vorbemerkung: Sei $\bar{c}$ ein Lift von c. Wegen der Stetigkeit von c existiert ein $\delta > 0$ mit $|c(t) - c(t_0)| < 2$ für alle $|t - t_0| < \delta$. Dann ist $|\bar{c}(t) - \bar{c}(t_0)| < \pi$ für diese t, denn wäre es größer als π für ein t so nach dem Zwischenwertsatz auch gleich π für ein anderes t und somit $c(t) = \pm i c(t_0)$ also $|c(t) - c(t_0)| = 2$, Widerspruch. Also ist $\bar{c}(t) = \varphi(c(t))$ für $|t - t_0| < \delta$, mit φ wie in (3.5) und Anfangswert $\varphi_0 = \bar{c}(t_0)$.

Nun zeigen wir die Eindeutigkeit lokaler Lifts: Seien $c_j : I_j \to \mathbb{R}$ zwei Lifts von $c|_{I_j}$ für $j = 1, 2$, wobei $I_j \ni t_0$ ein offenes Teilintervall von I ist. Sei $X := \{t \in I_1 \cap I_2 : c_1(t) = c_2(t)\}$. Wir müssen zeigen, daß $X = I_1 \cap I_2$. Die Menge X ist nicht leer, da $t_0 \in X$, und sie ist abgeschlossen in $I_1 \cap I_2$, da sie durch eine stetige Gleichung gegeben ist. Sei nun $t \in X$, dann ist $c_j(t') = \varphi(c(t'))$ für t' nahe t, wegen der Vorbemerkung. Also ist X auch offen. Da das offene Intervall $I_1 \cap I_2$ zusammenhängend ist, folgt $X = I_1 \cap I_2$.

Schließlich die Existenz: Sei X die Menge der $t \in I$, bis zu welchen ein (eindeutiger) Lift existiert, genauer: $t \in X \Leftrightarrow$ ein Lift $\bar{c} : J \to \mathbb{R}$ von $c|_J$ existiert für ein offenes Teilintervall J von I, welches t und t_0 enthält. Die Menge X ist nicht leer da $t_0 \in X$, denn $\varphi \circ c$ ist ein lokaler Lift von c, wo φ wie in (3.5) mit Anfangswinkel $\bar{c}(t_0)$ ist. Sie ist nach Konstruktion offen, da die Intervalle J als offen vorausgesetzt sind. Sie ist auch abgeschlossen in I: Sei nämlich $t \in I$ im Abschluß von X. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von c auf kompakten Teilintervallen von I existiert ein $\delta > 0$ mit $|c(t') - c(t'')| < 2$ für $|t' - t''| < \delta$ mit $t' \in [t_0, t]$. Sei $t_1 \in X$ mit $|t_1 - t| < \delta$. Dann sind $\bar{c}$ und $\varphi \circ c$ lokale Lifts um t_1 von c, wobei φ wie in (3.5) mit Anfangswert $\bar{c}(t_1)$ bei t_1 ist. Also stimmen sie wegen der Eindeutigkeit überein und ergeben zusammen einen lokalen Lift, der auf einer Umgebung von $[t_0, t]$ definiert ist, i.e. $t \in X$. Da I zusammenhängend ist, folgt $X = I$, also existiert ein Lift auf ganz I. □

3.10 Liften mittels des Kurvenintegrals

Eine dritte Methode den Lift $\bar{c}$ für glattes c zu erhalten, verwendet das Kurvenintegral und die dazu notwendigen Differentialformen (mit denen wir uns in Kapitel (5) und (6) noch sehr eingehend beschäftigen werden):

Sei $f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^n$, differenzierbar. Dann ist die Ableitung f' (oder auch das totale Differential df) von folgender Gestalt:

$$df = f' : U \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n) := \{T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n : T \text{ ist linear}\}.$$

Allgemein heißt eine Abbildung $\omega : U \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ 1-Form (mit Werten im $\mathbb{R}^n$). Eine 1-Form heißt exakt $:\Leftrightarrow \exists\, f : U \to \mathbb{R}^n$ glatt mit $df = \omega$.

Für die linearen Abbildungen $x : (x, y) \mapsto x$ und $y : (x, y) \mapsto y$ ergeben sich nach (2.1) die zwei speziellen exakten 1-Formen dx und dy:

$$dx(x, y)(u, v) = u \quad \text{bzw.} \quad dy(x, y)(u, v) = v.$$

Für jedes glatte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ haben wir allgemein

$$\begin{aligned} df(x,y)(u,v) &= df(x,y)(u \cdot (1,0) + v \cdot (0,1)) \\ &= u \cdot df(x,y)(1,0) + v \cdot df(x,y)(0,1) \\ &= dx(x,y)(u,v) \cdot \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + dy(x,y)(u,v) \cdot \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{aligned}$$

oder kürzer nach Weglassen von $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ als Gleichheit für Abbildungen in $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$:

$$df(x,y) = \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot dx(x,y) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot dy(x,y),$$

wobei wir die Reihenfolge der Faktoren ausgetauscht haben, damit die Wirkung auf (u,v) klarer ist (Beachte: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in \mathbb{R}^m$ und $dx(x,y), dy(x,y) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und das Produkt $v \cdot T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$ ist definiert durch $(v \cdot T)(z) := T(z) \cdot v$ für $v \in \mathbb{R}^m$, $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{R}^2$).
Noch kürzer können wir das nach Weglassen von $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ als Gleichheit für Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$ schreiben als

$$df = \tfrac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \tfrac{\partial f}{\partial y} \cdot dy.$$

Analog erhalten wir die Koordinatendarstellung einer allgemeinen 1-Form ω:

$$\begin{aligned} \omega(x,y)(u,v) &= u \cdot \omega(x,y)(1,0) + v \cdot \omega(x,y)(0,1) \\ &=: dx(x,y)(u,v) \cdot \omega_1(x,y) + dy(x,y)(u,v) \cdot \omega_2(x,y) \\ \Rightarrow \omega &= \omega_1 \cdot dx + \omega_2 \cdot dy \end{aligned}$$

wobei $\omega_i : U \to \mathbb{R}^n$ definiert ist durch $\omega_1(x,y) := \omega(x,y)(1,0)$ und $\omega_2(x,y) := \omega(x,y)(0,1)$.
Sei $c : [a,b] \to U$ eine Kurve mit $c(t) = (x(t), y(t))$ und ω wie oben, dann berechnet sich das Kurvenintegral wie folgt:

$$\begin{aligned} \int_c \omega = \int_c \omega_1(x,y) \cdot dx + \omega_2(x,y) \cdot dy &:= \int_a^b \omega(c(t))(c'(t))\, dt \\ &= \int_a^b \omega_1(c(t)) \tfrac{dx}{dt}(t)\, dt + \omega_2(c(t)) \tfrac{dy}{dt}(t)\, dt \end{aligned}$$

Mittels des Kurvenintegrals läßt sich eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ aus ihrem Differential und einem Anfangswert rekonstruieren, denn

$$f(c(b)) - f(c(a)) = \int_a^b (f \circ c)'(t)\, dt = \int_a^b df(c(t))(c'(t))\, dt = \int_c df,$$

für jede Kurve c von $c(a)$ nach $c(b)$. Die Überlagerung $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ via Polarkoordinaten aus (3.5) war gegeben durch $(r, \varphi) \mapsto r\, e^{i\varphi}$. Wir wollen eine Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ zu einer Kurve $\bar{c} : I \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ längs p liften. Die Projektion auf die erste Komponente $(r, \varphi) \mapsto r$ faktorisiert zu einer wohldefinierten glatten Funktion r :

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$. Somit ist $r(\bar{c}(t)) = \sqrt{x(t)^2+y(t)^2}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \arrow[dd, "p"'] \arrow[dr, "r"] & \\
& \mathbb{R} \\
\mathbb{C}\setminus\{0\} \arrow[ur, dotted, "\sqrt{x^2+y^2}"'] &
\end{tikzcd}$$

Für die zweite Projektion geht das nicht so (Der Winkel φ kann aus den kartesischen Koordinaten nur bis auf ganzzahliges Vielfaches von 2π berechnet werden). Aber wir können die zweite Komponente als Kurvenintegral schreiben

$$\varphi(\bar{c}(t)) = \varphi(\bar{c}(0)) + \int_{\bar{c}|_{[0,t]}} d\varphi$$

Da φ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches auch auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ bestimmt ist, kann man hoffen, daß das Differential $d\varphi$ zu einer 1-Form ω auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ hinunterfaktorisiert. Wegen der Kettenregel $d\varphi(u)(v) = \omega(p(u)) \cdot dp(u)(v)$ berechnen wir dazu das Differential der Überlagerungsabbildung $z = p : \mathbb{C} \supset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}$, $(r,\varphi) \mapsto z := r\,e^{i\varphi}$:

$$dz = d(re^{i\varphi}) = \frac{\partial(re^{i\varphi})}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial(re^{i\varphi})}{\partial\varphi} \cdot d\varphi = e^{i\varphi}\,dr + i\,r\,e^{i\varphi}\,d\varphi = r\,e^{i\varphi}\left(\frac{dr}{r} + i\,d\varphi\right)$$

Somit ist

$$\frac{dz}{z} = \frac{e^{i\varphi}\,dr + i\,r\,e^{i\varphi}\,d\varphi}{r\,e^{i\varphi}} = \frac{dr}{r} + i\,d\varphi = d(\ln r) + i\,d\varphi$$

als Abbildungen $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \cong L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) + i\,L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Oder in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
d(\ln(r)) + i\,d\varphi = \frac{dz}{z} &= \frac{dx + i\,dy}{x + i\,y} = \frac{(x-iy)\,dx + i\,(x-iy)\,dy}{x^2+y^2} \\
&= \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} + i\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2},
\end{aligned}$$

wobei $x, y : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \xrightarrow{z} \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, und somit ist

$$d(\ln r) = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad d\varphi = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Wir können aber x und y auch als Koordinatenprojektionen auf $\mathbb{C}$ auffassen, und somit $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ als 1-Form ω auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Für diese ist $d\varphi(u)(v) = \omega(p(u))(dp(v))$

und somit erhalten wir schlußendlich

$$\begin{aligned}
\varphi(\bar c(t)) &= \varphi(\bar c(0)) + \int_{\bar c|_{[0,t]}} d\varphi \\
&= \varphi(\bar c(0)) + \int_0^t d\varphi(\bar c(\tau))(\bar c'(\tau))\,d\tau \\
&= \varphi(\bar c(0)) + \int_0^t \omega(c(\tau))(c'(\tau))\,d\tau \\
&= \varphi(\bar c(0)) + \int_{c|_{[0,t]}} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2},
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile x und y die Koordinatenprojektionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bezeichnen. Insbesonders berechnet diese Formel $\bar c(t) \in \mathbb{R}$ für $c : I \to S^1 \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3.11 Satz (Die Krümmung charakterisiert die Kurve).
Sei $K : I \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, so gibt es, bis auf Bewegungen, genau eine Kurve, die eine Bogenlängenparametrisierung c besitzt, für die $K_c(s) = K(s)$ gilt.

Beweis. Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit der Krümmung K, d.h. $|c'(s)| = 1$ für alle s und $K(s) = \theta'(s)$ nach (3.6), wobei θ ein Lift von c' ist, und somit $e^{i\theta(s)} = c'(s)$ gilt. Also folgt

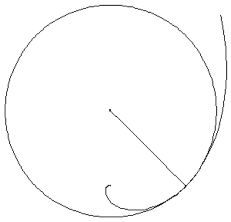
$$\begin{aligned}
\theta(s) &= \theta(0) + \int_0^s \theta'(\tau)\,d\tau = \theta(0) + \int_0^s K(\tau)d\tau \text{ und} \\
c(s) &= c(0) + \int_0^s c'(\tau)d\tau = c(0) + \int_0^s e^{i\theta(\tau)}d\tau.
\end{aligned}$$

Dabei ist $c(0)$ der frei wählbare Anfangspunkt der Kurve, und $\theta(0)$ der frei wählbare Winkel der Anfangsrichtung. Je zwei solche Anfangsdaten liefern eine Bewegung, welche die zugehörigen Kurven ineinander überführt. Sei c wie oben definiert. Dann ist $c'(s) = e^{i\theta(s)}$, also $|c'(s)| = 1$, d.h. c ist nach der Bogenlänge parametrisiert. Da θ der Lift ist, gilt $K_c(s) = \theta'(s) = K(s)$. □

3.12 Definition (Scheitel und Spiralbögen)

Falls $K(t) = 0$, dann heißt t ein Flachpunkt. Falls t ein Flachpunkt ist, an dem die Krümmung das Vorzeichen ändert, so heißt t ein Wendepunkt. Falls die Krümmung ein lokales Extremum bei t besitzt, so heißt t ein Scheitel. Falls K monoton und nirgends 0 ist, so heißt c ein Spiralbogen.

3.13 Lemma, [Kneser]. *Sei c ein Spiralbogen. Dann ist jeder Krümmungskreis mit kleinerem Radius in jedem mit größerem enthalten. Für jeden Punkt s der Kurve, liegt die eine Hälfte von c im Inneren des Krümmungskreises bei s und die andere Hälfte im Äußeren.*



Beweis. Wir betrachten die Ableitung der Evolute:

$$\begin{aligned} & e(s) := c(s) + \frac{1}{K(s)}\nu(s) \quad \text{und setzen} \quad R(s) := \frac{1}{K(s)} \\ \Rightarrow \quad & e'(s) = c'(s) + R'(s)\nu(s) + R(s)\nu'(s) \\ & \qquad = \tau(s) + R'(s)\nu(s) - R(s)K(s)\tau(s) = R'(s)\nu(s). \end{aligned}$$

Für die vorletzte Zeile verwendeten wir die Frenet'schen Ableitungsgleichungen. Die Bogenlänge der Evolute berechnen wir mit Hilfe des Integrals:

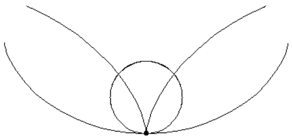
$$\begin{aligned} L_a^b(e) &= \int_a^b |e'(s)|ds = \int_a^b |R'(s)|ds = \qquad \text{(da } R' \text{ konstantes Vorzeichen hat)} \\ &= \Big|\int_a^b R'(s)ds\Big| = |R(b) - R(a)| \\ &\Rightarrow |e(b) - e(a)| \leq L_a^b(e) = |R(b) - R(a)| \end{aligned}$$

d.h. der Kreis mit größerem Radius umfaßt den mit kleinerem. Man bemerke, daß Gleichheit $|e(b) - e(a)| = L_a^b(e)$ nur dann gilt, wenn e konstant ist oder die Strecke von $e(a)$ nach $e(b)$ parametrisiert. Falls e konstant ist, so $0 = e' = R'\nu$, d.h. R ist konstant und damit c ein Kreisbogen. Andernfalls ist $e'(s) \parallel v := e(b) - e(a) \neq 0$ für alle s und somit auch $\nu(s) \parallel v$ und $\tau(s) \parallel v^\perp$ für s mit $R'(s) \neq 0$. Also parametrisiert c (zumindest lokal) eine Gerade und $K = 0$ ein Widerspruch.

Für den zweiten Teil der Aussage können wir o.B.d.A. annehmen, daß die Krümmung monoton wachsend bzw. R monoton fallend ist. Bei festem t und $t \leq t'$ schließen wir, daß $c(t')$ im Inneren des Krümmungskreises bei t liegt, da $c(t')$ auf dem Krümmungskreis bei t' liegt und dieser in jenem bei t enthalten ist ($R(t) \geq R(t')$). Falls $t' \leq t$ schließen wir analog. □

3.14 Rollkurven

Gegeben seinen zwei nach Bogenlänge parametrisierte Kurven c_0 und c_1. Gesucht ist die Bahn c eines in der Ebene von c_1 fixierten Punktes p, wenn die Kurve c_1 längs jener von c_0 abrollt.



Wir wollen c nach der abgerollten Länge t parametrisieren. Das Abrollen von c_1 längs c_0 bedeutet, daß wir eine Bewegung B_t suchen, die den Punkt $c_1(t)$ auf $c_0(t)$, die Einheitstangente $\tau_1(t)$ auf $\tau_0(t)$ und somit die Einheitsnormale $\nu_1(t)$ auf $\nu_0(t)$. Aus der ersten Bedingung folgt, daß B_t die Form $B_t(x) = R_t(x - c_1(t)) + c_0(t)$ hat. Es sei $\theta_1(t)$ und $\theta_0(t)$ der Winkel der Tangente an c_1 und c_0 zum Zeitpunkt t. Dann muß R_t die Drehung um $\theta_0(t) - \theta_1(t)$ sein. Also ist die Gleichung der Rollkurve c durch

$$c(t) := e^{i(\theta_0(t)-\theta_1(t))}(p - c_1(t)) + c_0(t)$$

gegeben.

Für die Ableitung von c erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}c(t) &= i(\theta_0 - \theta_1)'(t)e^{i(\theta_0(t)-\theta_1(t))}(p - c_1(t)) - e^{i(\theta_0(t)-\theta_1(t))}c_1'(t) + c_0'(t)\\
&= i(K_0(t) - K_1(t))e^{i(\theta_0(t)-\theta_1(t))}(p - c_1(t)) - e^{i(\theta_0(t)-\theta_1(t))}e^{i\theta_1(t)} + e^{i\theta_0(t)}\\
&= (K_0(t) - K_1(t))ie^{i(\theta_0(t)-\theta_1(t))}(p - c_1(t))
\end{aligned}$$

Somit ist die skalare Geschwindigkeit:

$$v(t) = \left|\frac{d}{dt}c(t)\right| = |K_0(t) - K_1(t)|\,|p - c_1(t)|.$$

Die zweite Ableitung von c ist:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\right)^2 c(t) &= i(K_0 - K_1)'(t)e^{i(\theta_0-\theta_1)(t)}(p - c_1(t))\\
&\quad + i(K_0 - K_1)(t)i(K_0 - K_1)(t)e^{i(\theta_0-\theta_1)(t)}(p - c_1(t))\\
&\quad + i(K_0 - K_1)(t)e^{i(\theta_0-\theta_1)(t)}c_1'(t)\\
&= (K_0 - K_1)'(t)ie^{i(\theta_0-\theta_1)(t)}(p - c_1(t))\\
&\quad - (K_0 - K_1)(t)^2e^{i(\theta_0-\theta_1)(t)}(p - c_1(t))\\
&\quad - (K_0 - K_1)(t)ie^{i(\theta_0-\theta_1)(t)}c_1'(t).
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
&\det\left(\frac{d}{dt}c(t), \left(\frac{d}{dt}\right)^2 c(t)\right) =\\
&\quad = \det\Big((K_0 - K_1)(t)ie^{i(\theta_0(t)-\theta_1(t))}(p - c_1(t)),\\
&\qquad - (K_0 - K_1)(t)^2e^{i(\theta_0-\theta_1)(t)}(p - c_1(t)) - (K_0 - K_1)(t)ie^{i(\theta_0-\theta_1)(t)}c_1'(t)\Big)\\
&\quad = (K_0 - K_1)(t)^3\det\Big(p - c_1(t), p - c_1(t)\Big) - (K_0 - K_1)(t)^2\det\Big(p - c_1(t), c_1'(t)\Big)\\
&\quad = (K_0 - K_1)(t)^3|p - c_1(t)|^2 - (K_0 - K_1)(t)^2\det\Big(p - c_1(t), c_1'(t)\Big).
\end{aligned}$$

Für die Krümmung K von c erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
K(t) &= \frac{\det(\frac{d}{dt}c(t), \left(\frac{d}{dt}\right)^2 c(t))}{\left|\frac{d}{dt}c(t)\right|^3} \\
&= \frac{(K_0-K_1)(t)^3|p-c_1(t)|^2 - (K_0-K_1)(t)^2\det(p-c_1(t),c_1'(t))}{|(K_0-K_1)(t)|^3\,|p-c_1(t)|^3} \\
&= \frac{\operatorname{sign}((K_0-K_1)(t))}{|p-c_1(t)|} - \frac{1}{|(K_0-K_1)(t)|}\det\Big(\frac{p-c_1(t)}{|p-c_1(t)|^3}, c_1'(t)\Big) \\
&= \frac{\operatorname{sign}((K_0-K_1)(t))}{|p-c_1(t)|^3}\Big(|p-c_1(t)|^2 - \frac{1}{(K_0-K_1)(t)}\det(p-c_1(t),c_1'(t))\Big).
\end{aligned}$$

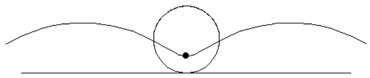
Sei nun die abrollende Kurve c_1 ein Kreis mit Radius 1, d.h. $c_1(t) := e^{it}$ und $p = (a,0)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
c_1'(t) &= ie^{it} \\
K_1 &= 1 \\
p - c_1(t) &= (a-\cos t, -\sin t) \\
|p-c_1(t)|^2 &= a^2 - 2a\cos t + 1 = (a^2+1) - 2a\cos t \\
\det(x-c_1(t), c_1'(t)) &= \det(a-e^{it}, ie^{it}) = a\cos t - 1
\end{aligned}$$

und somit ist die Krümmung der Rollkurve

$$\begin{aligned}
K(t) &= \frac{\operatorname{sign}((K_0-K_1)(t))}{|p-c_1(t)|^3}\Big(|p-c_1(t)|^2 - \frac{1}{(K_0-K_1)(t)}\det(p-c_1(t),c_1'(t))\Big) \\
&= \frac{\operatorname{sign}(K_0(t)-1)}{|a^2+1-2a\cos t|^{3/2}}\Big(a^2+1-2a\cos t - \frac{a\cos t - 1}{K_0(t)-1}\Big)
\end{aligned}$$

Zykloiden.
Sei nun insbesonders c_0 eine Gerade, d.h. $c_0(t) = t$.



Dann ist $K_0(t) = 0$ und somit

$$\begin{aligned}
K(t) &= \frac{-1}{|a^2+1-2a\cos t|^{3/2}}\Big(a^2+1-2a\cos t - \frac{a\cos t - 1}{-1}\Big) \\
&= \frac{a(\cos t - a)}{|a^2+1-2a\cos t|^{3/2}}
\end{aligned}$$

Und speziell für $a = 1$, d.h. einen Punkt auf dem Kreis, ist

$$K(t) = -\frac{(1-\cos t)}{|2-2a\cos t|^{3/2}} = -1/(2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}) = -\frac{1}{4|\sin(t/2)|}.$$

Nun wollen wir die Scheitel bestimmen. Dazu schreiben wir

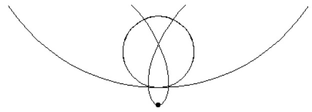
$$\sqrt{a}K(t) = \frac{\cos t - a}{(a+1/a-2\cos t)^{3/2}}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sqrt{a}K(t) &= -\sin t\,(a+1/a-2\cos t)^{-5/2}\;\big((a+1/a-2\cos t)+3(\cos t-a)\big)\\ &= -\sin t\,(a+1/a-2\cos t)^{-5/2}\;(1/a-2a+\cos t)\end{aligned}$$

Somit ist $\frac{d}{dt}\sqrt{a}K(t)=0$ genau dann, wenn $\sin t=0$ oder $\cos t = 2a-\frac{1}{a}$.

Epi- und Hypozykloiden Sei nun c_0 ein Kreis mit Radius R, d.h. $c_0(t)=R\,e^{\pm it/R}$.



Dann ist $K_0=\pm 1/R$ und somit

$$\begin{aligned}K(t) &= \frac{\operatorname{sign}(K_0(t)-1)}{|a^2+1-2a\cos t|^{3/2}}\Big(a^2+1-2a\cos t-\frac{a\cos t-1}{K_0(t)-1}\Big)\\ &= \frac{\operatorname{sign}(\pm1/R-1)}{|a^2+1-2a\cos t|^{3/2}}\Big(a^2+1-2a\cos t-\frac{a\cos t-1}{\pm1/R-1}\Big)\end{aligned}$$

Ist insbesonders $a=1$, d.h. p ein Punkt am abrollenden Kreis, dann ist

$$\begin{aligned}K(t) &= \frac{\operatorname{sign}(\pm1/R-1)}{|2(1-\cos t)|^{3/2}}\Big(2(1-\cos t)+\frac{1-\cos t}{\pm1/R-1}\Big)\\ &= \frac{\operatorname{sign}(\pm1/R-1)}{2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}\Big(2+\frac{1}{\pm1/R-1}\Big)\\ &= \frac{\operatorname{sign}(\pm1/R-1)}{2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}\cdot\frac{R\mp2}{R\mp1}\\ &= \operatorname{sign}(\pm1/R-1)\cdot\frac{1}{4|\sin t/2|}\cdot\frac{R\mp2}{R\mp1}\end{aligned}$$

3.15 Einhüllende - Enveloppe

Zu jeder geometrischen ebene Kurve ist die Familie ihrer Tangenten assoziiert. Wir wollen nun bestimmen, welche Geraden-Scharen auf diese Weise auftreten können. Sei $c:I\to E$ eine Parametrisierung der Kurve, dann ist die Tangente durch $s\mapsto c(t)+sc'(t)$ gegeben, oder implizit durch

$$\Big\langle\binom{x}{y},\nu(t)\Big\rangle = h(t),\ \text{ mit } \nu(t):=c'(t)^\perp \text{ und } h(t):=\langle c(t),\nu(t)\rangle.$$

Nach Anwendung einer Drehung, können wir annehmen, daß e_1 der Einheitstangentialvektor in einem Punkt ist und somit für nahe t in der Tangentengleichung y nach x aufgelöst werden kann, d.h. die Form $y=a(t)\cdot x+b(t)$ besitzt, wobei $a(t)$ der Anstieg der Kurve $c:t\mapsto(x(t),y(t))$ zum Zeitpunkt t ist und $b(t)$ durch Einsetzen von $c(t)$ anstelle von (x,y) erhalten wird. Wenn die Krümmung K von c nicht verschwindet, dann muß $a'(t)\neq0$ sein, denn $a(t)=y'(t)/x'(t)$ und somit ist

$$a'(t)=\frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{x'(t)^2}=\frac{\det(c'(t),c''(t))}{x'(t)^2}=\frac{|c'(t)|^3}{x'(t)^2}\,K(t).$$

Sei allgemein eine glatt parametrisierte Familie von Geraden vorgegeben. Nach Anwendung einer Drehung haben diese lokal die Gestalt

$$y = a(t) \cdot x + b(t).$$

Wir wollen nun versuchen eine Kurve c zu finden, die diese Geraden als Schar der Tangenten hat. Man nennt c dann die Einhüllende oder Enveloppe dieser Geraden. Es soll also $c(t) = (x(t), y(t))$ sowohl

$$y(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t) \text{ als auch } y'(t) = a(t) \cdot x'(t)$$

erfüllen. Der Fall, daß a konstant ist, ist nicht interessant, denn dann muß eine dazu passende Kurve c eine Gerade parametrisieren und somit auch b konstant sein. Darum setzten wir a als streng monoton oder besser ein wenig stärker $a'(t) \neq 0$ für alle t voraus. Falls c existiert, so bedeutet das nach dem Obigen, daß die Krümmung von c nicht verschwindet. Dann können wir den Anstieg als Parameter p verwenden. Die Gleichungen sind dann

$$y(p) = p \cdot x(p) + g(p) \text{ und } \frac{dy}{dx} = p,$$

mit $g := b \circ a^{-1}$. Beachte, daß die Existenz einer regulären Lösung c (mit nicht verschwindender Krümmung) das Folgende für g bedeutet:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dp} &= \frac{dy}{dp} - 1 \cdot x - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} = -x \\ \frac{d^2g}{dp^2} &= -\frac{dx}{dp} \neq 0 \end{aligned}$$

Wenn wir nun die Kurve nach x umparametrisieren (es ist ja $x'(p) \neq 0$), so ist die Gleichung die Clairaut'sche Differentialgleichung

$$y(x) = y'(x) \cdot x + g(y'(x)),$$

wobei wir die Bedingung, daß x als Parameter gewählt werden kann bedeutet, daß $p'(x) = y''$ nirgends verschwindet. Wenn wir diese Bedingung nicht verlangen, so erhalten wir als Lösungen auch jede Gerade der Schar (dann ist y' konstant p).

Um die Kurve c zu finden müssen wir also die Clairaut'sche Differentialgleichung

$$y = x \cdot y' + g(y') \text{ mit } g''(y) \neq 0$$

lösen. Dies ist eine implizite Differentialgleichung

$$F(x, y, y') = 0 \text{ mit } F(x, y, p) := x \cdot p + g(p) - y.$$

Wenn $\partial_p F \neq 0$ wäre, dann können wir diese implizite Gleichung nach dem impliziten Funktionensatz in eine explizite verwandeln. Aber wenn wir die Differentialgleichung nach x differenzieren, so erhalten wir

$$0 = \frac{d}{dx} F(x, y(x), y'(x)) = \partial_1 F(x, y, y') + \partial_2 F(x, y, y') \cdot y' + \partial_3 F(x, y, y') \cdot y'',$$

wobei $\partial_1 F(x, y, p) = p$, $\partial_2 F(x, y, p) = -1$ und $\partial_3 F(x, y, p) = x + g'(p)$ ist. Also ist $0 = y' - 1 \cdot y' + \partial_3 F(x, y, y') \cdot y''$. Falls y nicht eine Gerade beschreibt, so ist $y'' \neq 0$ und folglich $\partial_3 F(x, y, y') = 0$.

Die übliche Methode in dieser Situation ist, y' als neue Variable p zu verwenden (wegen $y'' \neq 0$ ist dies nach dem inversen Funktionensatz möglich). D.h. unsere Gleichung lautet nun $F(x(p), y(p), p) = 0$ zusammen mit $y'(p) = p \cdot x'(p)$. Differenzieren wir nun $F(x(p), y(p), p)$ nach p so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dp} F(x(p), y(p), p) = \partial_1 F(x, y, p) \cdot x' + \partial_2 F(x, y, p) \cdot y' + \partial_3 F(x, y, p) \cdot 1 \\ &= (\partial_1 F + p \cdot \partial_2 F) \cdot x' + \partial_3 F \end{aligned}$$

und falls $\partial_1 F + p \cdot \partial_2 F \neq 0$ ein System expliziter Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{\partial_3 F}{(\partial_1 F + p \cdot \partial_2 F)} \\ y' &= p \cdot x' = -\frac{p \cdot \partial_3 F}{(\partial_1 F + p \cdot \partial_2 F)}. \end{aligned}$$

Dies führt nun zwar oft zum Ziel, nicht aber in unserer speziellen Situation, denn da ist, wie wir bereits gesehen haben, $\partial_1 F + p \cdot \partial_2 F = 0$. Nach dem Obigen ist dann aber $0 = \partial_3 F = x + g'(p)$, d.h. $x(p) = -g'(p)$ und aus $F(x(p), y(p), p) = 0$ folgt $y(p) = p \cdot x(p) + g(p)$. Und das System ist mit

$$\begin{aligned} x(p) &= -g'(p) \\ y(p) &= p \cdot x(p) + g(p) \end{aligned}$$

somit gelöst, wobei wir nur noch $p := (-g')^{-1}$ substituieren müssen: Wegen $\frac{dy}{dx} = p$ ist $(\frac{d}{dx})^2 y = \frac{d}{dx} p = 1/\frac{d}{dp} x = -1/g''(p) \neq 0$, d.h. die Lösungskurve ist regulär und hat Krümmung ungleich 0. Beachte, daß natürlich die Geraden $y(x) = p \cdot x + g(p)$ selbst ebenfalls Lösungen des Systems sind.

Wir können auch zeigen, daß die Kurve immer auf der selben Seite der Tangente bleibt, denn

$$\begin{aligned} & x(p) = -g'(p) \qquad x' = -g'' \qquad x'' = -g''' \\ & y(p) = p \cdot x(p) + g(p) y' = p \cdot x' = -p \cdot g'' y'' = -g'' + p \cdot g''' \\ \Rightarrow & \langle c''(p), \nu(p) \rangle = x'' \cdot (-p) + y'' \cdot 1 = p \cdot g''' - g'' - p \cdot g''' = -g'' \neq 0 \end{aligned}$$

Insbesonders ist jede Kurve mit nicht verschwindender Krümmung die Enveloppe ihrer Tangenten.

Weiters ist die Evolute die Enveloppe der Normalen. In der Tat ist die Evolute e einer Kurve c durch

$$e(t) := c(t) + \frac{1}{K(t)} \nu(t)$$

gegeben, wobei wir annehmen dürfen, daß c nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Die Ableitung von e ist dann

$$\begin{aligned} e'(t) &= c'(t) + \frac{1}{K(t)} \nu'(t) - \frac{K'(t)}{K(t)} \nu(t) \\ &= \tau(t) + \frac{1}{K(t)} (-K(t) \tau(t)) - \frac{K'(t)}{K(t)} \nu(t) = -\frac{K'(t)}{K(t)} \nu(t) \end{aligned}$$

und somit ist e regulär solange c keinen Scheitel ($K'(t) = 0$) besitzt.

4. Geschlossene Kurven

In diesem Abschnitt behandeln wir geschlossene Kurven und ihre Windungs- und Umlaufszahlen.

Topologisch gesehen ist eine geschlossene Kurve eine Abbildung $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $c(a) = c(b)$. Da diese Darstellung für die Differentialgeometrie ungeeignet ist (in den Randpunkten können Ecken oder sogar Spitzen auftreten), definieren wir wie folgt:

4.1 Definition (geschlossene Kurve)

Eine parametrisierte geschlossene Kurve $c : [a, b] \to E$ ist eine C^∞-Abbildung, welche $c^{(k)}(a) = c^{(k)}(b)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt. O.B.d.A. sei $|b - a| = 2\pi$. Man kann eine parametrisierte geschlossene Kurve auch als eine (o.B.d.A. 2π-) periodische C^∞-Abbildung $c : \mathbb{R} \to E$ auffassen, bzw. als eine Abbildung $c : S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \to E$, welche in folgendem Sinn C^∞ ist: $t \mapsto c(e^{it})$ ist C^∞.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, two heads, "p"] \arrow[dr, "c"'] & & S^1 \arrow[dl, "c"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Zwei parametrisierte geschlossene Kurven c_1, c_2, aufgefaßt als Abbildungen $S^1 \to E$, heißen genau dann äquivalent, wenn es einen Diffeomorphismus der Gestalt $\varphi : S^1 \to S^1$ mit $c_2 \circ \varphi = c_1$ gibt. Aufgefaßt als Abbildungen $\mathbb{R} \to E$, heißen sie genau dann äquivalent, wenn es einen Diffeomorphismus $\bar{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, welcher zu einen ebensolchen von S^1 faktorisiert und welcher $c_2 \circ \bar{\varphi} = c_1$ erfüllt. Diese Faktorisierungs-Eigenschaft von $\bar{\varphi}$ ist äquivalent mit $\bar{\varphi}(t + 2\pi) = \bar{\varphi}(t) \pm 2\pi$ für alle $t \in \mathbb{R}$, siehe Aufgabe (72.22).

Eine geometrische geschlossene Kurve ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten geschlossenen Kurven.

4.2 Definition (Windungszahl)

Ist $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine geometrische geschlossene Kurve, so verstehen wir unter der Windungszahl von c um den Nullpunkt $W_0(c) := \frac{\bar{c}(2\pi) - \bar{c}(0)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ wobei $\bar{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ ein Lift von $\frac{c}{|c|} : [0, 2\pi] \to S^1$ ist. Diese Definition macht sogar für geschlossene Kurven, die nur stetig sind, Sinn. Nach Bemerkung (3.10) erhalten wir für die Windungszahl einer C^1-Kurve:

$$W_0(c) = \frac{1}{2\pi} \int_c \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z}.$$

Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig, $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ eine geschlossene Kurve, dann ist $W_{z_0}(c) := W_0(c - z_0)$ die Windungszahl von c um den Punkt z_0. Wie wir uns leicht überzeugen können, erhalten wir folgendes Lemma:

4.3 Lemma. *Die Windungszahl ist unter Bewegungen und Reparametrisierungen invariant.* □

4.4 Definition (Homotopie)

Zwei geschlossene Kurven ($c_0, c_1 : \mathbb{R} \to X \subseteq \mathbb{R}^n$, 2π-periodisch) heißen HOMOTOP in $X :\Leftrightarrow \exists\, H : \mathbb{R} \times I \to X$ stetig, mit $H(t,j) = c_j(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $j = 0, 1$, und die Abbildung $t \mapsto H(t,s)$ ist 2π-periodisch für alle $s \in I := [0,1]$. Die Abbildung H heißt dann HOMOTOPIE von c_0 nach c_1. Für glatte Kurven darf man o.B.d.A. annehmen, daß H glatt ist. [**57**, S.57]. Beachte, daß homotop zu sein eine Äquivalenzrelation ist.

Unter H kann man sich eine Familie $H(.,s)$ geschlossener Kurven vorstellen, die c_0 mit c_1 verbindet.

4.5 Lemma (Homotopie-Hochhebungseigenschaft).

Sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung, $H : I \times Z \to Y$ eine stetige Abbildung (d.h. eine Homotopie) und sei $f : Z \to X$ eine stetige Abbildung mit $p(f(z)) = H(0,z)$ für alle $z \in Z$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Homotopie $\tilde{H} : I \times Z \to X$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}(0,z) = f(z)$ für alle $z \in Z$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "(0,\mathrm{id})"'] & X \arrow[d, "p"] \\ I \times Z \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{H}"] & Y \end{tikzcd}$$

Dies ist nur die durch $z \in Z$ parametrisierte Version von (3.8): $H(\cdot, z)$ entspricht c, $f(z)$ entspricht x_0, und $\tilde{H}(\cdot, z)$ entspricht $\tilde{c}$.

Beweis. Wir sind gezwungen, $\tilde{H}(\cdot, z)$ als eindeutigen Lift der Kurve $H(\cdot, z) : I \to Y$ mit Anfangswert $\tilde{H}(0,z) = f(z)$ zu definieren. Bleibt nur noch die Stetigkeit in (t,z) nachzuweisen. Sei dazu U_t eine trivialisierende Umgebung von $H(t,z)$ und sei $\tilde{U}_t$ jenes Blatt über U_t, welches $\tilde{H}(t,z)$ enthält. Sei $\delta_t > 0$ so gewählt, daß für $|t' - t| \leq \delta_t$ einerseits $H(t',z) \in U_t$ und somit auch andererseits $\tilde{H}(t',z) \in \tilde{U}_t$. Diese δ_t-Umgebungen bilden eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls I, und besitzen somit eine endliche Teilüberdeckung. Wir finden also $0 = t_0 < \dots < t_N = 1$, sodaß die kompakte Menge $H([t_{i-1}, t_i] \times \{z\})$ ganz in einer trivialisierenden Umgebung U_i liegt. Wegen der Stetigkeit von H können wir Umgebungen V_i von z in Z wählen, mit $H([t_{i-1}, t_i] \times V_i) \subset U_i$. Sei V eine offene Umgebung von z, welche sowohl in $f^{-1}(\tilde{U}_1)$, als auch in all den endlich vielen V_i enthalten ist.

Wir zeigen nun mit Induktion nach i, daß $\tilde{H}$ in (t,z) für alle $t \in [0, t_i]$ stetig ist. Es liegt $\tilde{H}(t_{i-1}, z) \in \tilde{U}_i$, also existiert nach Induktionsvoraussetzung eine Umgebung $V' \subset V$ von z mit $H(\{t_{i-1}\} \times V') \subseteq \tilde{U}_i$. Es muß nun aber für alle $z' \in V'$ die Kurve $\tilde{H}(\cdot, z')$ auf ganz $[t_{i-1}, t_i]$ in $\tilde{U}_i$ bleiben, denn $H([t_{i-1}, t_i] \times V) \subset U_i$. Also ist $\tilde{H}(t, z') = p|_{\tilde{U}_i}^{-1}(H(t,z'))$ für alle $t \in [t_{i-1}, t_i]$ und alle z' in V' und somit ist $\tilde{H}$ auch auf $[t_{i-1}, t_i] \times V'$ stetig. $\square$

4.6 Satz (Wie man Homotopie erkennt). *Für zwei geschlossene Kurven c_0 und c_1 gilt:*
$W_0(c_0) = W_0(c_1) \Leftrightarrow c_0$ *und* c_1 *sind homotop in* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Beweis. ($\Leftarrow$) Sei eine Homotopie H von c_0 nach c_1 gegeben.

$$W_0(H(.,s)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{H(.,s)} \frac{dz}{z}$$

Diese Zahl hängt stetig von s ab, falls die Homotopie glatt ist. Die Abbildung

$$s \mapsto W_0(H(.,s)) \text{ mit } W_0(H(.,s)) \in \mathbb{Z}$$

ist also konstant nach dem Zwischenwertsatz.

$$\Rightarrow W_0(c_0) = W_0(H(.,0)) = W_0(H(.,1)) = W_0(c_1).$$

Zwischenbemerkung: Falls H nicht glatt, sondern nur stetig ist, können wir das Kurvenintegral nicht verwenden. Mit folgender Rechnung erreichen wir aber das gleiche Ergebnis:
Zu jeder stetigen Homotopie H gibt es einen stetigen Lift $\bar{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mit $H(t,s) = e^{\bar{H}(t,s)} = e^{\mathfrak{Re}\bar{H}(T,s)}\, e^{i\mathfrak{Im}\bar{H}(t,s)}$. Dies ist die Homotopie-Hochhebungseigenschaft (4.5) der Überlagerungs-Abbildung $\exp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \mapsto e^z$.
Der Imaginärteil $\mathfrak{Im}\bar{H}(.,s)$ ist dann ein Lift von $\frac{H(.,s)}{|H(.,s)|}$, denn

$$\frac{H(t,s)}{|H(t,s)|} = \frac{e^{\mathfrak{Re}\bar{H}(t,s)} \cdot e^{i\mathfrak{Im}\bar{H}(t,s)}}{\underbrace{|e^{\mathfrak{Re}\bar{H}(t,s)}|}_{e^{\mathfrak{Re}\bar{H}(t,s)}} \cdot \underbrace{|e^{i\mathfrak{Im}\bar{H}(t,s)}|}_{1}} = e^{i\mathfrak{Im}\bar{H}(t,s)}.$$

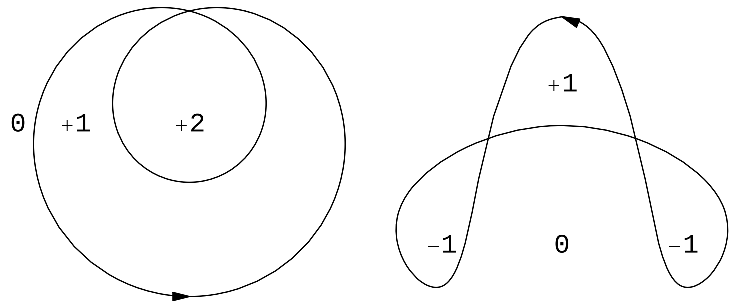
Da $H(.,s)$ periodisch ist gilt:

$$\begin{aligned} H(0,s) = H(2\pi,s) &\Rightarrow e^{\bar{H}(0,s)} = e^{\bar{H}(2\pi,s)} \\ &\Rightarrow \mathfrak{Im}(\bar{H}(0,s)) - \mathfrak{Im}(\bar{H}(2\pi,s)) \in 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \underbrace{\mathfrak{Im}(\bar{H}(0,s)) - \mathfrak{Im}(\bar{H}(2\pi,s))}_{2\pi W_0(H(.,s))} \text{ ist konstant in } s. \end{aligned}$$

Von nun an rechnet man wie oben.
($\Rightarrow$) Sei nun $W_0(c_0) = W_0(c_1) =: W_0 \in \mathbb{Z}$. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $|c_0(t)| = 1 = |c_1(t)|$ für alle t. Denn c und $\rho \cdot c$ sind homotop in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ vermöge $H(t,s) := (1-s)c(t) + s\rho(t)c(t)$, wobei $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ gegeben ist durch $t \mapsto \frac{1}{|c(t)|}$.
Sei $\bar{c}_j$ ein Lift von c_j. Dann verbindet $\bar{H}(t,s) := (1-s)\bar{c}_0(t) + s\bar{c}_1(t)$ die Kurven $\bar{c}_0$ und $\bar{c}_1$. Somit ist c_0 und c_1 homotop in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ vermöge $H(t,s) := e^{i\bar{H}(t,s)}$, wobei die Zwischenkurven $t \mapsto H(t,s)$ geschlossen sind, denn

$$\begin{aligned} &\bar{H}(t+2\pi,s) - \bar{H}(t,s) = (1-s)2\pi W_0(c_0) + s2\pi W_0(c_1) = 2\pi W_0 \\ &\Rightarrow e^{i\bar{H}(t+2\pi,s) - i\bar{H}(t,s)} = e^{i2\pi W_0} = 1 \\ &\Rightarrow H(t+2\pi,s) = e^{i\bar{H}(t+2\pi,s)} = e^{i\bar{H}(t,s)} = H(t,s). \qquad \square \end{aligned}$$

4.7 Folgerung. *Die Windungszahl $W_z(c)$ ist konstant für z aus den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus c(\mathbb{R})$*

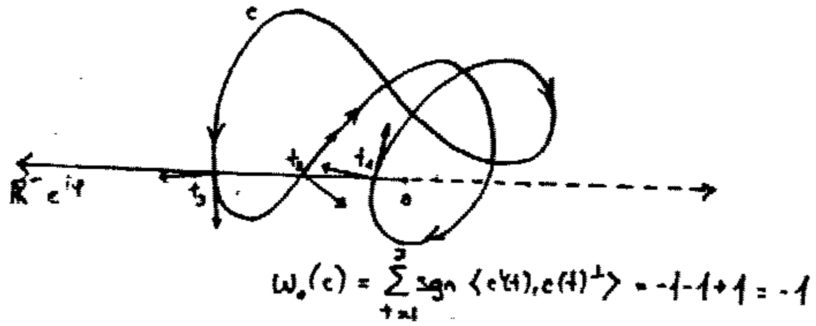


Beweis. Seien z_0 und z_1 zwei Punkte in der gleichen Komponente, dann existiert eine Kurve $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus c(\mathbb{R})$ mit $z(j) = z_j$ für $j = 0, 1$. Die Windungszahl von c um den Punkt $z(s)$ ist: $W_{z(s)}(c) = W_0(c - z(s))$. Wir definieren nun eine Homotopie zwischen $c(t) - z_0$ und $c(t) - z_1$:

$$H(t, s) := c(t) - z(s) \neq 0 \text{ für alle } t, s \xRightarrow{(4.6)} W_0(c - z_0) = W_0(c - z_1). \qquad \square$$

4.8 Satz (Wie man die Windungszahl bestimmt). *Sei $v \in S^1$ und c eine geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, welche den von v erzeugten Halbstrahl $H := \{rv : r > 0\}$ nur transversal schneidet, d.h. $c(t) \in H$ hat die lineare Unabhängigkeit von $c'(t)$ und v zur Folge.*
Dann gilt $W_0(c) = \sum_{t \in c^{-1}H} \operatorname{sgn} \det(v, c'(t))$.

Man kann also die Windungszahl berechnen, indem man zählt wie oft und in welcher Richtung die Kurve an einem Halbstrahl vorbeikommt. Aus dem Satz von Sard (siehe (21.17)) folgt, daß die Kurve fast alle Halbstrahlen transversal schneidet, siehe [**47**, 9.2.7].



Beweis. O.B.d.A. sei c nach Bogenlänge parametrisiert. Die Summe hat endlich viele Summanden. Wären es unendlich viele, so würde nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß ein Häufungspunkt der $t \in c^{-1}(H)$ existieren. Wegen der Transversalität gilt aber $c(t') \notin H$ für $t' \neq t$ nahe t. Falls $c^{-1}(H) = \emptyset$ ist, dann ist $W_0(c) = 0$ (siehe Aufgabe (72.20)) und somit der Satz wahr. Andernfalls sei $\{t_1 < \cdots < t_n\} := \{t : c(t) \in H\}$, sei φ ein Winkel mit $e^{i\varphi} = -v$ und sei $\bar{c}$ ein Lift von $c = \frac{c}{|c|}$. Wir setzen $t_0 := t_n - L(c)$, dann ist $2\pi W_0(c) = \bar{c}(t_n) - \bar{c}(t_0)$. Für $t_{k-1} < t < t_k$ liegt $c(t)$ nicht auf H und somit $\bar{c}(t)$ in einem Intervall $]\varphi_k - \pi, \varphi_k + \pi[$ mit einem $\varphi_k \in \varphi + 2\pi\mathbb{Z}$.

$$\bar{c}(t_k) = \lim_{t \nearrow t_k} \bar{c}(t) = \varphi_k + \begin{cases} +\pi & \text{falls } \big(\bar{c}(t) < \bar{c}(t_k) \text{ für } t < t_k\big) \\ -\pi & \text{falls } \big(\bar{c}(t) > \bar{c}(t_k) \text{ für } t < t_k\big) \end{cases}$$

Aber $\bar{c}(t) < \bar{c}(t_k)$ für $t < t_k$ gilt genau dann, wenn $c(t)$ von 0 aus gesehen rechts von $c(t_k)$ liegt für t nahe t_k, oder äquivalent falls $\det(v, c'(t_k)) > 0$. Somit ist $\bar{c}(t_k) = \varphi_k + \operatorname{sgn}\det(v, c'(t_k))\pi$ und analog für die untere Grenze $\bar{c}(t_{k-1}) = \varphi_k - \operatorname{sgn}\det(v, c'(t_{k-1}))\pi$. Damit gilt:

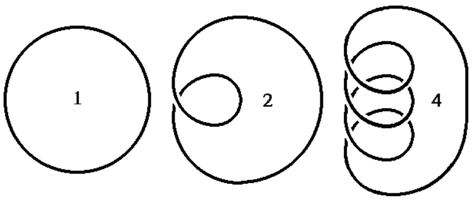
$$\begin{aligned} 2\pi W_0(c) = \bar{c}(t_n) - \bar{c}(t_0) &= \sum_{k=1}^{n} (\bar{c}(t_k) - \bar{c}(t_{k-1})) \\ &= \pi \sum_{k=1}^{n} \Big(\operatorname{sgn}\det(v, c'(t_k)) + \operatorname{sgn}\det(v, c'(t_{k-1})) \Big) \\ &= 2\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn}\det(v, c'(t_k)). \qquad \square \end{aligned}$$

Warnung

Ab nun werden wir auch für geschlossene Kurven voraussetzen, daß sie regulär sind (d.h., daß ihre Ableitungen nirgends verschwinden)!

4.9 Definition (Umlaufszahl und Isotopie)

Sei $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene reguläre Kurve. Dann nennen wir $W_0(c') =: U(c)$ die Umlaufzahl der Kurve.

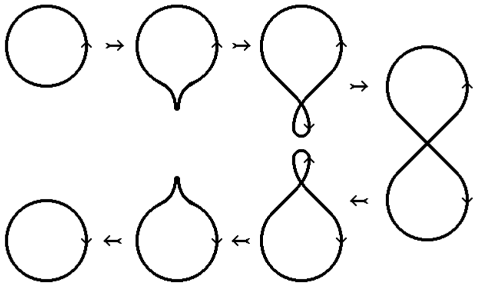


Zwei geschlossene Kurven heißen isotop $:\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \exists\ & H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \text{ glatt;} \\ & H(t, j) = c_j(t) \text{ für } j = 0, 1 \text{ und alle } t; \\ & H(t + 2\pi, s) = H(t, s) \text{ für alle } t, s; \\ & H(., s) \text{ ist regulär für alle } s \text{ d.h. } \tfrac{\partial}{\partial t} H(t, s) \neq 0 \text{ für alle } t, s. \end{aligned}$$

Auch isotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation (beachte, daß wir $H(t, .)$ als konstant in der Nähe von 0 und 1 annehmen können und somit die Isotopie zusammenstückeln können.

Ein Kreis ist homotop in $\mathbb{R}^2$ aber nicht isotop so verformbar, daß sich seine Umlaufrichtung umdreht. Die folgende Zeichnung zeigt, daß die Regularität dabei essentiell ist.



Eine Sphäre hingegen läßt sich isotop so verformen, daß ihr Inneres nach außen gestülpt wird [**3**].

Für jede Konstante $\rho > 0$ ist c und $\rho \cdot c$ isotop vermöge $H(t,s) := \rho^s c(t)$. Für jede eigentliche Bewegung B ist c und $B \circ c$ isotop, denn für $B(x) := R_\varphi(x) + v$ sei $B_s(x) := R_{s\varphi}(x) + sv$, dann ist $H(t,s) := B_s(c(t))$ eine Isotopie. Weiters ist c isotop zu $c \circ \varphi$ für jeden orientierungserhaltenden Parameterwechsel φ: In der Tat definiert $H(t,s) := c\Big((1-s)t + s\varphi(t)\Big)$ die gesuchte Isotopie, denn

$$H(t,j) = \begin{cases} c(t) & \text{für } j = 0 \\ (c \circ \varphi)(t) & \text{für } j = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H(t+2\pi, s) &= c\Big((1-s)(t+2\pi) + s\,\underbrace{\varphi(t+2\pi)}_{\varphi(t)+2\pi}\Big) \\ &= c\Big((1-s)t + s\varphi(t) + 2\pi\Big) = c\Big((1-s)t + s\varphi(t)\Big) = H(t,s) \\ \tfrac{\partial}{\partial t} H(t,s) &= \underbrace{c'\Big((1-s)t + s\varphi(t)\Big)}_{\neq 0,\text{ da } c \text{ regulär ist}} \underbrace{\Big((1-s) + s\varphi'(t)\Big)}_{>0,\text{ da } \varphi'(t)>0}. \end{aligned}$$

4.10 Satz von Whitney-Grauenstein.
Zwei geschlossene Kurven $c_0, c_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ sind genau dann isotop, wenn ihre Umlaufzahlen gleich sind.

Beweis.
($\Rightarrow$) Sei H eine Isotopie. Die Umlaufzahl

$$U(H(.,s)) = W_0(\partial_1 H(.,s))$$

hängt stetig von s ab, ist also konstant. Somit ist $U(c_1) = U(c_0)$.

($\Leftarrow$) Die Idee der Umkehrung ist, aus der Gleichheit der Umlaufzahlen die Gleichheit der Windungszahlen der Ableitungen um 0 zu schließen und damit seinerseits mittels (4.6) eine Homotopie zwischen den Ableitungen zu erhalten. Durch Integration dieser Homotopie wollen wir dann eine Isotopie der gegebenen Kurven erhalten. Damit der letzte Schritt funktioniert, müssen wir einige Normalisierungen vornehmen:

O.B.d.A. können wir folgendes annehmen:

1. Die Länge von c_j sei 2π. Geht, da c und ρc für $\rho := \frac{2\pi}{L(c)} > 0$ isotop sind.

2. Die c_j seien nach der Bogenlänge parametrisiert: Denn c ist isotop zu $c \circ \varphi$ ist, für jeden orientierungserhaltenden Parameterwechsel φ.
3. Es sei $c_j(0) = 0$.Dies erreichen wir durch eine Bewegung und die daraus wie in nmb!4.9 konstruierter Isotopie.
4.

Falls $U(c_0) = 0$ müssen wir eine weitere Normalisierung vornehmen: Es ist dann

$$0 = U(c_j) = W_0(c_j') = \frac{1}{2\pi}(\theta_j(2\pi) - \theta_j(0)).$$

Da somit θ_j 2π-periodisch ist, existiert ein Minimum von θ_j an einer Stelle $\alpha_j \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. liegt das Minimum von θ_j bei 0, denn c und $c \circ \varphi$ sind isotop, wo der Parameterwechsel φ durch die Translation $\varphi(t) := t + \alpha_j$ gegeben ist.

Es sei θ_j ein Lift von $c_j' = \frac{c_j'}{|c_j'|}$ mit $\theta_j(0) := 0$. Aus $W_0(c_0') = U(c_0) = U(c_1) = W_0(c_1')$ folgt mittels (4.6), daß $H_1(t,s) := e^{i\big((1-s)\theta_0(t)+s\theta_1(t)\big)}$ eine Homotopie zwischen c_0' und c_1' mit Werten in S^1 ist. Durch Integrieren der Homotopie H_1 wollen wir eine Homotopie zwischen c_0 und c_1, den Stammfunktionen von c_0' und c_1' erhalten. Aber $t \mapsto \int_0^t H_1(\tau,s)d\tau$ ist im allgemeinen keine geschlossene Kurve. Wir behaupten:

$$H(t,s) := \int_0^t H_1(\tau,s)d\tau - \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1(\tau,s)d\tau$$

ist eine Isotopie zwischen c_0 und c_1:

$$\begin{aligned} H(t,j) &= \int_0^t \underbrace{H_1(\tau,j)}_{c_j'(\tau)}d\tau - \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{H_1(\tau,j)}_{c_j'(\tau)}d\tau \\ &\overset{\text{1.HS}}{=\!=} c_j(t) - c_j(0) - \frac{t}{2\pi}(c_j(2\pi) - c_j(0)) = c_j(t), \end{aligned}$$

da c_j 2π-periodisch und an den Endpunkten 0 ist. Wir zeigen nun, daß $H(.,s)$ 2π-periodisch ist:

$$\begin{aligned} H(t+2\pi,s) &= \int_0^{t+2\pi} H_1(\tau,s)d\tau - \tfrac{t+2\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1(\tau,s)d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} H_1(\tau,s)d\tau + \underbrace{\int_{2\pi}^{2\pi+t} H_1(\tau,s)d\tau}_{\int_0^t H_1(\tau,s)d\tau} - (\tfrac{t}{2\pi}+1)\int_0^{2\pi} H_1(\tau,s)d\tau \\ &= H(t,s) \end{aligned}$$

Wir müssen nur mehr die Regularität von $H(.,s)$ für alle s zeigen. Dazu nehmen wir indirekt an, daß $\frac{\partial}{\partial t}H(t,s) = 0$ ist, für ein t und ein $0 < s < 1$.

$$0 = \tfrac{\partial}{\partial t}H(t,s) = H_1(t,s) - \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1(\tau,s)d\tau \Rightarrow$$

$$\left|\int_0^{2\pi} H_1(\tau,s)d\tau\right| = 2\pi \cdot \underbrace{|H_1(t,s)|}_{1} = \int_0^{2\pi} |H_1(\tau,s)|d\tau$$

Wie schauen Funktionen $x := H_1(.,s) : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ aus, für die $|\int_0^{2\pi} x| = \int_0^{2\pi} |x|$ ist? Wir definieren $v := \int_0^{2\pi} x \in \mathbb{R}^2$. Bei der folgenden Rechnung verwenden wir in dieser Reihenfolge: die Linearität des inneren Produkts, die Dreiecksungleichung und die Ungleichung von Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned}|v|^2 = \langle v,v\rangle &= \left|\left\langle \int_0^{2\pi} x, v\right\rangle\right| = \left|\int_0^{2\pi} \langle x,v\rangle\right| \\ &\le \int_0^{2\pi} |\langle x,v\rangle| \le \int_0^{2\pi} |x|\cdot|v| = \left|\int_0^{2\pi} x\right|\cdot|v| = |v|^2.\end{aligned}$$

Es gilt also Gleichheit und somit $|\langle x(\tau),v\rangle| = |x(\tau)|\cdot|v|$. Das heißt, daß $x(\tau)$ proportional zu v ist, i.e. $x(\tau) = \rho(\tau)\cdot v$ wobei $\rho : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ ist. Es folgt, daß $H_1(t,s)$ für laufendes t proportional zu einem fixen Vektor v ist. Da $|H_1(t,s)| = 1$, ist $H_1(t,s)$ konstant bezüglich t für ein gewisses s. Also ist

$$0 = W_0(H_1(.,s)) = W_0(c_0') = U(c_0).$$

Für diesen Fall haben wir aber das Minimum von θ_j bei 0 gewählt, d.h.

$$\theta_j(t) \ge \theta_j(0) \text{ für alle } t \text{ und } j = 0,1$$

Weiters wissen wir, daß $t \mapsto H_1(t,s) = e^{i\big((1-s)\theta_0(t)+s\theta_1(t)\big)}$ konstant ist. Damit ist auch $t \mapsto (1-s)\theta_0(t) + s\theta_1(t)$ konstant, und wegen $\theta_j(t) \ge \theta_j(0)$ sind θ_0 und θ_1 selbst konstant, also auch c_j'. D.h. die c_j parametrisieren Geraden. Das steht aber im Widerspruch zur Vorraussetzung, daß die c_j geschlossene Kurven sind. □

4.11 Definition (totale Krümmung)

Unter der TOTALEN KRÜMMUNG einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $c : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ versteht man $\int_0^L K(s)ds$.

4.12 Satz. *Für nach Bogenlänge parametrisierte geschlossene Kurven c gilt:*

$$\int_0^L K(s)ds = 2\pi U(c).$$

Beweis. Es sei c nach der Bogenlänge parametrisiert.

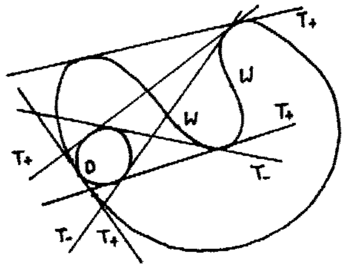
$$\begin{aligned}U(c) =& W_0(c') = \frac{1}{2\pi}(\theta(L) - \theta(0)) \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_0^L \theta'(s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^L K(s)ds,\end{aligned}$$

wobei θ ein Lift von c' ist. □

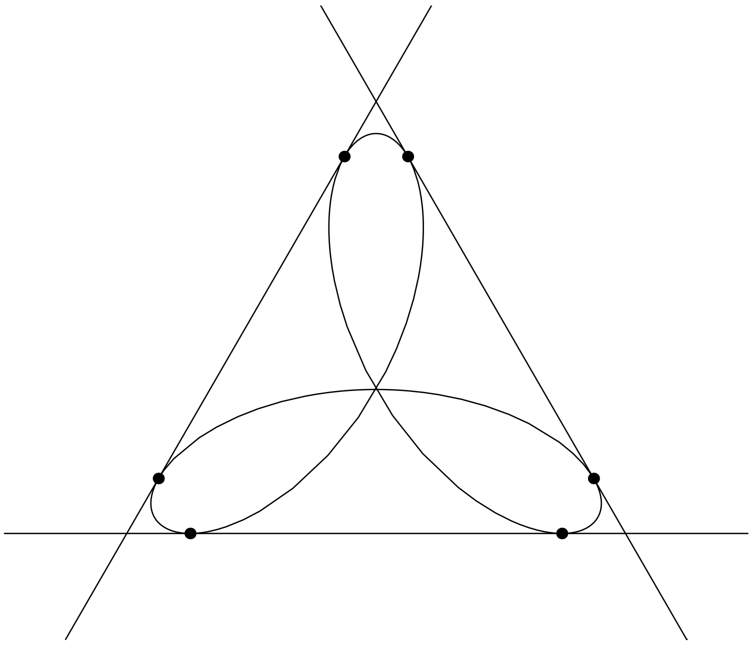
4.13

Sei c eine geschlossene Kurve. Ein Doppelpunkt $\{t,s\}$ heißt REGULÄR, falls $c'(t)$ und $c'(s)$ linear unabhängig sind. Ein Wendepunkt t heißt REGULÄR, falls $K'(t) \neq 0$. Unter einer Doppeltangente $\{t,s\}$ versteht man Parameter $t \neq s$, sodaß die Tangente an c in t und s übereinstimmt. Sie heißt REGULÄR, falls $K(t)K(s) \neq 0$ ist.

Satz von Fabricius-Bjerre-Halpern.
Sei c eine geschlossene Kurve, deren Doppelpunkte, Wendepunkte und Doppeltangenten alle regulär sind, so gilt $T_+ - T_- = D + \frac{1}{2}W$. Dabei ist D die Anzahl der Doppelpunkte, W die Anzahl der Wendepunkte, T_+ die Anzahl der Doppeltangenten, wo die Krümmungsmittelpunkte auf der gleichen Seite liegen, und T_- die Anzahl der übrigen Doppeltangenten.



Für einen Beweis siehe [**47**, 9.8.1]. Wir bemerken, daß obige Formel auch für Kurven mit Mehrfachpunkten und Mehrfachtangenten gilt, wenn man richtig zählt.



Hier ist $D = 3$, $W = 0$, $T_+ = 3$ und $T_- = 0$.

5. Einfach geschlossene Kurven

In diesem Abschnitt behandeln wir geschlossene Kurven ohne Überschneidungspunkte, sogenannte einfach geschlossene Kurven. Wir rekapitulieren einige Sätze über sie aus der komplexen Analysis und aus der algebraischen Topologie und zeigen den Umlaufsatz von Hopf und den Vierscheitelsatz von Mukhopadahaya.

5.1 Definition (einfach geschlossene Kurve)

Eine EINFACH GESCHLOSSENE KURVE ist eine geschlossene Kurve $c : S^1 \to \mathbb{R}^n$, die injektiv ist. Man kann sie auch als Abbildung $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^n$ mit $c(t_1) = c(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$ oder $\{t_1, t_2\} \subseteq \{0, 2\pi\}$ auffassen, oder als 2π-periodische Abbildung $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $c(t_1) = c(t_2) \Rightarrow t_1 - t_2 \in 2\pi \cdot \mathbb{Z}$.

Im Zusammenhang mit einfachgeschlossenen, stetigen Kurven, auch JORDAN-KURVEN genannt, sind folgende tiefliegende Sätze zu erwähnen:

5.2 Jordanscher Kurvensatz. *Sei $c : S^1 \to \mathbb{C}$ eine einfachgeschlossene stetige Kurve, so besitzt $\mathbb{C} \setminus c(S^1)$ genau zwei Zusammenhangskomponenten. Der Rand jeder Komponente ist $c(S^1)$. Eine Komponente ist beschränkt und einfachzusammenhängend (Diese heiß das* INNERE *von c und die andere Komponente das* ÄUSSERE *von c). Für Punkte z im Inneren gilt $W_z(c) = \pm 1$ für solche im Äußeren $W_z(c) = 0$.*

Ohne Beweis, siehe z.B. [**31**, Chapt.9, App. 4.2].

5.3 Riemannscher Abbildungssatz. *Falls ein echtes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ einfachzusammenhängend ist und $z_0 \in G$ beliebig ist, so existiert genau eine biholomorphe Abbildung $h : \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \to G$ mit $h(0) = z_0$ und $h'(0) > 0$.*

Ohne Beweis, siehe z.B. [**15**, S.221].

Es gilt auch folgende Aussage für den Rand:

5.4 Satz von Carathéodory. *Falls der Rand eines einfachzusammenhängenden Gebietes G durch eine Jordan-Kurve parametrisiert werden kann, so erweitert sich h aus (5.3) zu einem Homöomorphismus $\tilde{h} : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{G}$.*

Ohne Beweis, siehe die Originalarbeit [**8**].

Falls der Rand sogar glatt ist gilt:

5.5 Satz von Painlevé und Warschawski. *Falls der Rand eines einfachzusammenhängenden Gebiets G durch eine glatte einfachgeschlossene Kurve parametrisiert werden kann, so ist $h : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{G}$ aus (5.4) ein Diffeomorphismus.*

Ohne Beweis. Der erste Beweis(versuch) stammt von [**61**]. Der erste anerkannte Beweis wurde von [**75**] gegeben. Eine Verallgemeinerung für strikt pseudo-konvexe Gebiete im $\mathbb{C}^n$ wurde von [**6**] gegeben.

Diese Sätze können wir nun zu einer sehr starken Formulierung des Jordanschen Kurvensatzes zusammenfügen:

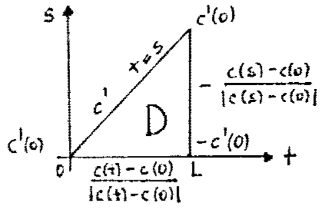
5.6 Satz von Schoenflies, 1910. *Sei $c : S^1 \to \mathbb{C}$ eine einfachgeschlossene, stetige Kurve, so existiert ein Homöomorphismus $\tilde{c} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{c}|_{S^1} = c$.*

Beweis. Sei G_0 die, wegen des Jordanschen Kurvensatzes (5.2) existierende, beschränkte einfachzusammenhängende Komponente von $\mathbb{C} \setminus c(S^1)$, und sei $z_0 \in G_0$. Wegen des Riemannschen Abbildungssatzes (5.3) und des Zusatzes von Carathéodory (5.4) existiert ein Homöomorphismus $H : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{G}_0$ mit $H(0) = z_0$. Somit erhalten wir einen Homöomorphismus $h := H|_{\partial G_0}^{-1} \circ c : S^1 \to c(S^1) = \partial G_0 \to \partial \mathbb{D} = S^1$. Diesen können wir radial zu einem Homöomorphismus $\tilde{h} : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ mit $\tilde{h}(z) := |z| h(\frac{z}{|z|})$ erweitern. So erhalten wir schließlich einen Homöomorphismus $H_0 := H \circ \tilde{h} : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{G}$, welcher $c : S^1 \to \mathbb{C}$ erweitert und $H_0(0) = z_0$ erfüllt. Für die zweite Komponente G_∞ können wir völlig analog einen Homöomorphismus $H_\infty : \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\} \to \overline{G_\infty}$ erhalten, welcher $c : S^1 \to \mathbb{C}$ erweitert. Denn, wenn wir die Inversion $z \mapsto z_0 + \frac{z-z_0}{|z-z_0|^2}$ am Einheitskreis um z_0 anwenden, so machen wir aus G_∞ wieder die beschränkte Komponente der am Kreis gespiegelten Kurve. Diese beiden Homöomorphismen H_0 und H_∞ passen zusammen und liefern somit einen Homöomorphismus $\tilde{c} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ welcher $c : S^1 \to \mathbb{C}$ erweitert. □

Das Analogon zum Jordanschen Kurvensatz im Höherdimensionalen ist falsch, wie Alexanders gehörnte Sphäre zeigt, [**41**]. Dabei handelt es sich um eine stetige injektive Abbildung von $S^2 \to \mathbb{R}^3 \subset S^3$, deren eine Komponente nicht einfachzusammenhängend ist.

5.7 Umlaufsatz von Hopf, 1939. *Ist c eine einfach geschlossene Kurve, so gilt: $U(c) = \pm 1$.*

Beweis. O.B.d.A. sei c Bogenlängen parametrisiert. Wir betrachten $\Gamma(t,s) := \frac{c(t)-c(s)}{|c(t)-c(s)|}$ mit dem Definitionsbereich $D := \{(t,s) : 0 < s < t < L\}$, wobei $c : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene Kurve ist. Dieses Γ läßt sich auf dem Abschluß $\overline{D}$ stetig fortsetzen.



Auf den Katheten $\{(t, 0) : t \in]0, L[\}$ und $\{(L, s) : s \in]0, L[\}$ ist das klar. Auf der Hypothenuse geht das durch folgende Formel:

$$\lim_{s,t \to r} \Gamma(t,s) = c'(r),$$

wobei wir wie folgt rechnen: zuerst definieren wir

$$\gamma(t,s) := \int_0^1 c'(s + \rho(t-s))d\rho = \frac{c(t)-c(s)}{t-s} \quad .$$

Also ist $\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ stetig und $\lim_{s,t\to r} \gamma(t,s) = \int_0^1 c'(r + \rho(r-r))d\rho = c'(r)$. Weiters ist

$$\begin{aligned}
\Gamma(t,s) &= \frac{\gamma(t,s)\cdot(t-s)}{|\gamma(t,s)\cdot(t-s)|} = \frac{\gamma(t,s)}{|\gamma(t,s)|}\operatorname{sgn}(t-s) \\
\lim_{\substack{t,s\to r\\ t>s}} \Gamma(t,s) &= \lim_{\substack{t,s\to r\\ t>s}} \frac{\gamma(t,s)}{|\gamma(t,s)|} = \frac{c'(r)}{|c'(r)|} = c'(r).
\end{aligned}$$

Auf der Hypothenuse $\{(t,t) : t \in [0,L]\}$ definieren wir $\Gamma(t,t) := c'(t)$. Für die Ecke $(L,0)$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{t\nearrow L\\ s\searrow 0}} \Gamma(t,s) \overset{L-t'=t}{=\!=\!=} \lim_{\substack{t'\searrow 0\\ s\searrow 0}} \Gamma(L-t',s) \overset{c \text{ ist } L\text{-periodisch}}{=\!=\!=\!=\!=} \\
&= \lim_{t',s\searrow 0} \Gamma(-t',s) = \lim_{t',s\searrow 0} \frac{\gamma(-t',s)}{|\gamma(-t',s)|}\operatorname{sgn}(-t'-s) = -c'(0)
\end{aligned}$$

Also setzen wir $\Gamma(L,0) := -c'(0)$ und haben eine stetige Fortsetzung von Γ auf $\overline{D}$ erhalten.

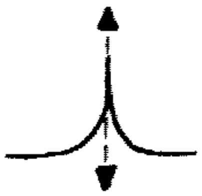
Wir suchen eine Gerade parallel zur x-Achse, welche c berührt, sodaß c in der oberen Halbebene liegt. Sei 0 ein Punkt, wo c diese Gerade berührt. O.B.d.A. sei $c'(0) = \binom{1}{0}$. Wir sehen, daß Γ eingeschränkt auf die Hypothenuse die Kurve c' ist, die vermöge Γ homotop zu Γ eingeschränkt auf den Katheten ist. Die Behauptung des Satzes läßt sich nun leicht nachrechnen:

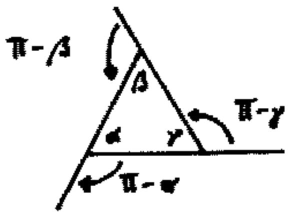
$$\begin{aligned}
U(c) &= W_0(c') = W_0(\Gamma|_{\text{Hypothenuse}}) = W_0(\Gamma|_{\text{Katheten}}) \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\big[(\pi-0)+(\pi+\pi-(0+\pi))\big] = \tfrac{2\pi}{2\pi} = 1. \qquad \square
\end{aligned}$$

Der Umlaufsatz von Hopf läßt sich auch auf Kurven mit Ecken, das sind stückweise C^∞-Kurven, welche in den Eckpunkten keine Spitzen haben, d.h. daß der linksseitige Tangentialvektor und der rechtsseitige nicht entgegengesetzt orientiert sind, erweitern. Sei c auf den Teilintervallen $[t_i, t_{i+1}]$ glatt, wobei die t_i die Ecken von c sind, dann definieren wir die Umlaufzahl von c als:

$$U(c) = \tfrac{1}{2\pi}\left(\sum_i (\gamma_i(t_{i+1}) - \gamma_i(t_i)) + \sum_i \varphi_i\right)$$

wobei γ_i ein Lift von $\frac{c'}{|c'|}|_{[t_i,t_{i+1}]}$ ist und $\varphi_i \in\,]-\pi,+\pi[$ der Winkel zwischen linksseitiger und rechtsseitiger Tangente bei $c(t_i)$ ist.

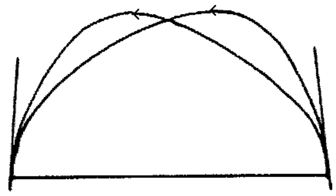




Betrachten wir als Beispiel die Umlaufzahl eines Dreiecks $\triangle$:

$$U(\triangle) = \frac{1}{2\pi}((\pi-\alpha)+(\pi-\beta)+(\pi-\gamma)) = \frac{1}{2\pi}(3\pi-(\alpha+\beta+\gamma)) = 1.$$

5.8 Lemma [Suss]. *Seien c_1, c_2 zwei orientierte Kurvenstücke mit positiver Krümmung, gemeinsamer Sehne zwischen den Endpunkten, gemeinsamen Einheitstangentialvektoren in den Endpunkten und gemeinsamer totaler Krümmung $\leqq \pi$. Falls c_1, c_2 nicht die gleiche Kurve parametrisieren, so existieren Punkte t_1, t_2 mit (gleicher Tangentenrichtung und) $K_{c_1}(t_1) > K_{c_2}(t_2)$.*



Beweis. Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $K > 0$ und totaler Krümmung $\leqq \pi$. Ist $c'(s) = e^{i\theta(s)}$ so gilt $0 < K(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$. Das bedeutet, daß θ streng monoton wachsend und differenzierbar mit einer nicht verschwindenden Ableitung ist. Also können wir die Kurve nach dem Winkel θ der Tangente umparametrisieren, d.h. $\bar{c}(\theta(s)) = c(s)$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\bar{c}(\theta_2) - \bar{c}(\theta_1) = c(s_2) - c(s_1) &= \int_{s_1}^{s_2} c'(s)ds = \int_{s_1}^{s_2} e^{i\theta(s)}ds \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{i\theta}\tfrac{ds}{d\theta}d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{i\theta}\tfrac{1}{K(s(\theta))}d\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{i\theta}\tfrac{1}{\bar{K}(\theta)}d\theta,\end{aligned}$$

wo $\bar{K}(\theta)$ die Krümmung von $\bar{c}$ ist. Seien θ_1 und θ_2 die Werte von θ an den Endpunkten. Nach Voraussetzung hat das Intervall $[\theta_1, \theta_2]$ höchstens Länge π. Da c_1, c_2 eine gemeinsame Sehne zwischen den Endpunkten besitzen, ist:

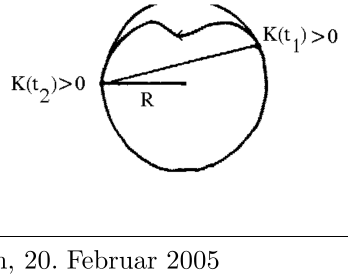
$$0 = (c_2 - c_1)|_{\theta_1}^{\theta_2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{i\theta}(\tfrac{1}{\bar{K}_2(\theta)} - \tfrac{1}{\bar{K}_1(\theta)})d\theta.$$

Multiplizieren wir mit $e^{-i\theta_1}$ und nehmen den Imaginärteil davon, so ergibt sich

$$0 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \underbrace{\mathfrak{Im}(e^{i(\theta-\theta_1)})}_{\sin(\theta-\theta_1)\geqq 0} \underbrace{(\frac{1}{\bar{K}_2(\theta)} - \frac{1}{\bar{K}_1(\theta)})}_{(*)}\, d\theta.$$

Falls (*) konstant 0 ist, dann ist $\bar{K}_2 = \bar{K}_1$, das bedeutet, daß $\bar{c}_2 = \bar{c}_1$ ist. Damit parametrisieren c_1 und c_2 die gleiche Kurve.
Andernfalls gibt es θ_+, θ_-, sodaß: $\frac{1}{K_2(\theta_+)} > \frac{1}{K_1(\theta_+)}$ und $\frac{1}{K_2(\theta_-)} < \frac{1}{K_1(\theta_-)}$. □

5.9 Folgerung. **[43].** *Ein Bogen c im Inneren eines Kreises mit Radius R berühre den Kreis in den Endpunkten. Er habe die gleiche totale Krümmung wie der zugehörige Kreisbogen und diese sei $\leqq \pi$. Die Krümmung in den Randpunkten sei positiv. Dann besitzt die Krümmung von c ein lokales Minimum im Inneren.*

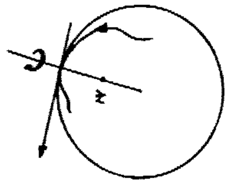


Beweis. Falls ein t mit $K(t) \leqq 0$ existiert, sind wir fertig. Also nehmen wir an, daß K überall positiv ist. Aus dem Lemma von Süss folgt, es existiert ein t_0 mit $K(t_0) < \frac{1}{R}$. An den Endpunkten t_1, t_2 ist die Krümmung aber $\geqq \frac{1}{R}$ und damit existiert ein Minimum. $\square$

5.10 Vierscheitelsatz. [**74**], [**44**]
Jede einfach geschlossene Kurve besitzt mindestens vier Scheitel.

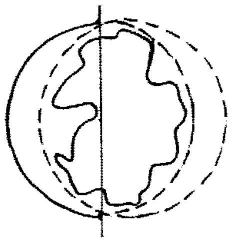
Beweis. Wir betrachten den Umkreis der Kurve, d.h. den Kreis mit kleinstem Radius, welcher die Kurve im Inneren enthält. O.B.d.A. sei c so parametrisiert, daß $W_z(c) = +1$ für alle z im Inneren der Kurve.

Behauptung: In jedem Berührpunkt t der Kurve mit dem Umkreis ist $K(t) > 0$:



Angenommen $K(t) < 0$, dann läuft die Kurve vom Kreismittelpunkt aus gesehen von links nach rechts. Sei z ein Punkt am Radius, für den die Verbindung zum Berührpunkt ganz im Inneren liegt. Dies ergibt einen Widerspruch zur Annahme, daß $W_z(c) = +1$ ist. (Wende (4.8) auf den Halbstrahl von z zum Berührpunkt an)

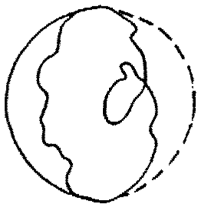
Behauptung: Auf jedem halben Umkreis liegt ein Berührpunkt.



Angenommen es läge auf einem halben Umkreis kein Berührungspunkt, dann könnten wir den Umkreis so verschieben, daß er die Kurve in keinem Punkt mehr berührt. Damit wäre er nicht mehr der Kreis mit kleinstem Radius, der die Kurve im Inneren enthält.

Wir haben also erreicht, daß es mindestens zwei Stücke der Kurve gibt, welche in den Randpunkten den Kreis berühren, dort eine positive Krümmung besitzen und der zugehörige Bogen höchstens ein Halbkreis ist.

Behauptung: Die totale Krümmung eines dieser Kurvenstücke ist gleich der totalen Krümmung des zugehörigen Kreisbogens:
Falls dem nicht so wäre, ergänzen wir das Kurvenstück durch den (an den Endpunkten leicht deformierten) komplementären Kreisbogen und erhalten eine einfach geschlossene Kurve mit $U \neq \pm 1$. Das ist ein Widerspruch zum Umlaufsatz (5.7).



Aus (5.9) folgt, daß die Krümmung der Kurvenstücke je ein Minimum im Inneren besitzt. Es gibt also mindestens zwei Minima und damit auch zwei Maxima. Daher hat die Kurve mindestes vier Scheitel. □

6. Konvexe Kurven und Eilinien

In diesem Abschnitt schränken wir unsere Betrachtungen schließlich auf solche einfach geschlossene Kurven ein, welche Rand eines konvexen Gebiets sind. Wir behandeln die Eulerparametrisierung nach dem Winkel der Tangente und studieren einige Ungleichungen und Inklusionen, die die Krümmungskreise involvieren.

6.1 Satz und Definition (Konvexe Kurven). *Sei c eine einfach geschlossene Kurve, dann sind äquivalent:*

1. *die Krümmung K hat konstantes Vorzeichen (d.h. $K \geq 0$ oder $K \leq 0$).*
2. $\int_0^L |K| = 2\pi$.
3. *die Kurve c ist global konvex (d.h. c liegt immer ganz auf einer Seite der Tangente).*
4. *die Kurve c ist der Rand eines konvexen Gebietes (d.h. das Innere ist konvex).*

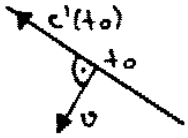
Eine einfach geschlossene Kurve c, welche eine (alle) dieser Äquivalenzbedingungen erfüllt, heißt KONVEXE KURVE.

Beweis.
($1 \Leftrightarrow 2$) Es ist $|\int_0^L K| \overset{(4.12)}{=\!=} |2\pi U| \overset{(5.7)}{=\!=} 2\pi$. Dann gilt (2)$\Leftrightarrow \int_0^L |K| = |\int_0^L K| \Leftrightarrow K$ hat konstantes Vorzeichen, d.h. (1).
($1 \Rightarrow 3$) Sei c nach der Bogenlänge parametrisiert und $e^{i\theta(t)} = c'(t)$. Weil $K(t) = \theta'(t)$ nach (1) konstantes Vorzeichen hat, ist der Lift θ monoton und für $0 \leq t_1, t_2 \leq L$ gilt

$$|\theta(t_2) - \theta(t_1)| = \left|\int_{t_1}^{t_2} \theta'(t)dt\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} K(t)dt\right| \overset{(1)}{\leq} \left|\int_0^L K(t)dt\right| \overset{(5.7)}{=\!=} 2\pi.$$

Wir nehmen indirekt an, daß es einen Punkt t_0 gibt, sodaß die Kurve c auf beiden Seiten der Tangente an t_0 liegt. Sei $v := c'(t_0)^\perp$. Seien weiters t_- und t_+ so gewählt, daß $\langle c(t_-), v\rangle$ minimal bzw. $\langle c(t_+), v\rangle$ maximal ist, dann gilt:

$$\langle c(t_-), v\rangle < \langle c(t_0), v\rangle < \langle c(t_+), v\rangle.$$



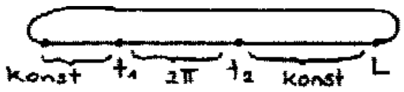
Wir differenzieren $\langle c(t), v\rangle$ nach t:

$$\frac{d}{dt}\langle c(t), v\rangle = \langle c'(t), v\rangle = 0 \text{ für } t = t_-, t_+, \text{ da Extremalwerte, und}$$
$$\text{für } t = t_0, \text{ da } v = c'(t_0)^\perp.$$

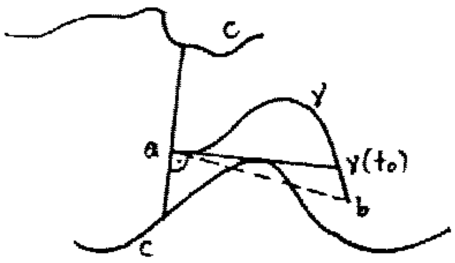
Es folgt weiters: $\exists\ t_1, t_2 \in \{t_0, t_-, t_+\}$ mit der Eigenschaft, daß $c'(t_1) = c'(t_2)$. Also ist $\theta(t_1) = \theta(t_2) + 2\pi k$ mit $k \in \{0, \pm 1\}$, wegen $|\theta(t_1) - \theta(t_2)| \leq 2\pi$.
Fall $k = 0$ ist, so gilt:

$$\begin{aligned}
&\theta(t_1) = \theta(t_2)\\
&\Rightarrow \theta \text{ ist konstant auf } [t_1, t_2]\\
&\Rightarrow c' \text{ ist konstant auf } [t_1, t_2]\\
&\Rightarrow c(t_2) - c(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} c'(\tau)d\tau = (t_2 - t_1)c'(t_1)\\
&\Rightarrow \langle c(t_2) - c(t_1), v\rangle = (t_2 - t_1)\langle c'(t_1), v\rangle = 0\\
&\Rightarrow \langle c(t_1), v\rangle = \langle c(t_2), v\rangle
\end{aligned}$$

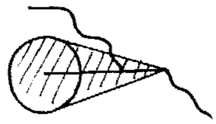
Dies ist ein Widerspruch zu $\langle c(t_-), v\rangle < \langle c(t_0), v\rangle < \langle c(t_+), v\rangle$.
Wenn andernfalls $|\theta(t_1) - \bar{c}(t_2)| = 2\pi$ ist, dann ist der Lift auf den Intervallen $[0, t_1]$ und $[t_2, L]$ konstant. Da es aber egal ist, ob man mit dem Lift zuerst von t_1 nach t_2 geht, oder von t_2 nach $t_1 + L$ können wir annehmen, daß der Lift auf dem Intervall $[t_2, t_1 + L]$ konstant ist, und somit funktioniert obiges Argument auch in diesem Fall und liefert ebenfalls einen Widerspruch.



($3 \Rightarrow 4$) Wir nehmen indirekt an, daß es zwei Punkte a, b im Inneren der Kurve gibt, sodaß ihre Verbindungsstrecke $\overline{ab}$ die Kurve trifft und damit das Innere verläßt. Sei nun γ eine stetige Kurve im Inneren, welche a und b verbindet. Wir wählen ein minimales t_0 mit $\overline{a\gamma(t_0)} \cap \operatorname{Bild}(c) \neq \emptyset$. Damit ist $\overline{a\gamma(t_0)}$ Tangente im Berührpunkt. Aus (3) folgt, daß die Kurve ganz auf einer Seite dieser Tangente liegt. Dies ist ein Widerspruch, denn die Normale durch a zu $\overline{a\gamma(t_0)}$ muß die Kurve in beiden Richtungen treffen, da a im Inneren liegt.



(4 ⇒ 1) Wir nehmen o.B.d.A. an, daß 0 im Inneren der Kurve liegt und $W_0(c) = +1$ ist. Jeder Halbstrahl $\{t \cdot e^{i\vartheta} : t \geq 0\}$ trifft die Kurve genau einmal und zwar transversal, da das Innere konvex ist und die Tangente somit den offenen Kegel mit einen kleinen Ball um 0 als Basis und den Schnittpunkt als Spitze nicht treffen darf, also nicht parallel zum Halbstrahl $e^{i\vartheta}$ ist.



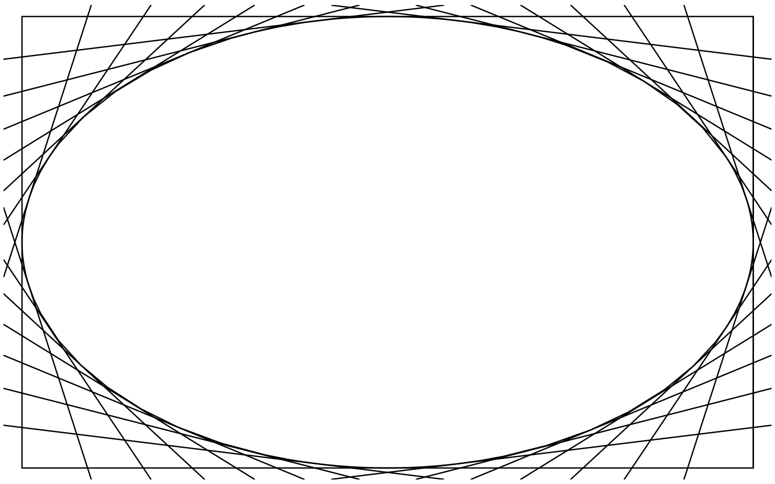
Es genügt zu zeigen, daß die Krümmung nie negativ ist. Da $W_0(c) = +1$ ist, gilt nach (4.8), daß die Kurve die Halbstrahlen von rechts nach links schneidet. Wäre $K < 0$, so läge 0 im Äußeren des Krümmungskreises. Das wäre ein Widerspruch zur Konvexität des Inneren. □

6.2 Definition (Eilinien)

Eine Kurve heißt Eilinie falls sie konvex ist und keine Flachpunkte besitzt, d.h. also $K > 0$ oder $K < 0$ überall gilt.

6.3 Eulerdarstellung

Sei c eine Eilinie. O.B.d.A. sei 0 im Inneren von c und $K > 0$ (oder äquivalent $W_0(c) = 1$). Der Winkel $\vartheta \in [0, 2\pi]$ der Tangente kann als Parameter von c verwendet werden (tangentiale Polarkoordinaten), der die ursprüngliche Orientierung induziert. Die Kurve ist die Einhüllende der Tangenten.



Die HESSESCHE NORMALVEKTORFORM der Tangente ist

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x(\vartheta) \\ y(\vartheta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \end{pmatrix} \right\rangle =: h(\vartheta),$$

wobei $h > 0$ den Normalabstand zum Nullpunkt mißt und $\binom{\sin\vartheta}{-\cos\vartheta} = -\tau(\vartheta)^\perp = -ie^{i\theta}$ der nach außen weisende Normalvektor an die Kurve ist. Der Punkt $\binom{x}{y} = c(\theta)$ liegt auf der Tangente, und erfüllt somit die sogenannte EULERDARSTELLUNG der Kurve in komplexer Gestalt: $h(\vartheta) = \langle c(\vartheta), -ie^{i\vartheta}\rangle$. Durch Differenzieren erhalten wir (vgl. (3.15))

$$h'(\vartheta) = \underbrace{\langle c'(\vartheta), -ie^{i\vartheta}\rangle}_{=0 \text{ da } \perp} + \langle c(\vartheta), -i^2 e^{i\vartheta}\rangle.$$

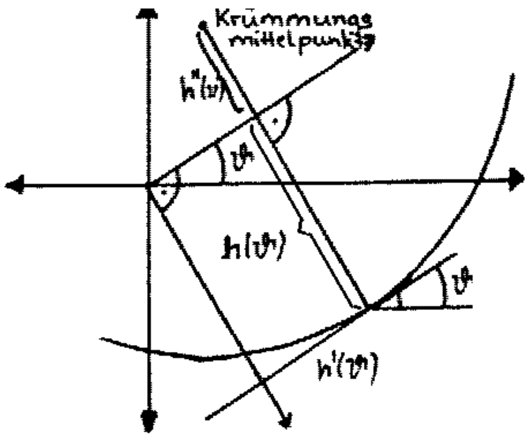
Bezüglich des Begleitsbeins $(e^{i\vartheta}, ie^{i\vartheta}) = (\tau(\theta), \nu(\theta))$ stellen wir nun c und c' in Koordinaten dar:

$$\begin{aligned} c(\vartheta) &= \underbrace{\langle c(\vartheta), e^{i\vartheta}\rangle}_{h'(\vartheta)} e^{i\vartheta} + \underbrace{\langle c(\vartheta), ie^{i\vartheta}\rangle}_{-h(\vartheta)} ie^{i\vartheta} \\ c'(\vartheta) &= h''(\vartheta)e^{i\vartheta} + h'(\vartheta)ie^{i\vartheta} - h'(\vartheta)ie^{i\vartheta} - h(\vartheta)i^2e^{i\vartheta} = (h(\vartheta) + h''(\vartheta))e^{i\vartheta}. \end{aligned}$$

Wegen $W_0(c) = 1$ muß $h(\theta)(h(\theta) + h''(\theta)) = \det(c(\theta), c'(\theta)) > 0$ sein wegen (4.8). Also ist $h(\theta) + h''(\theta) > 0$.

Für die Krümmung gilt $K = \frac{d\vartheta}{ds}$. Mit Hilfe von $\frac{ds}{d\vartheta} \overset{(2.7)}{=\!=} |c'(\vartheta)| = h(\vartheta) + h''(\vartheta)$ ergibt sich (vergleiche auch mit dem Beweis von (5.8)) die Krümmung und der Krümmungsradius R als

$$K(\theta) = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{h(\theta) + h''(\theta)} \quad \text{und} \quad R(\theta) = h(\theta) + h''(\theta).$$



Weiters erhalten wir für die Länge der Kurve folgende auf Cauchy zurückgehende Formel:

$$L = \int_0^{2\pi} |c'(\vartheta)| d\vartheta = \int_0^{2\pi} h(\vartheta) + h''(\vartheta) d\vartheta = \int_0^{2\pi} h(\vartheta) d\vartheta + 0 = \int_0^{2\pi} R(\theta)\, d\theta,$$

da h' eine 2π-periodische Funktion ist. Zur Berechnung der Fläche des Inneren verwenden wir den Gauß'schen Integralsatz für die Ebene:

$$\begin{aligned}
A &= \int_A d(x,y) = \int_A dx \wedge dy = \frac{1}{2} \int_{\partial A} x dy - y dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Bigg(\underbrace{(h'(\theta) \cos\theta + h(\theta) \sin\theta)}_{x} \cdot \underbrace{(h(\theta) + h''(\theta)) \sin\theta}_{y'} \\
&\qquad - \underbrace{(h'(\theta) \sin\theta - h(\theta) \cos\theta)}_{y} \underbrace{(h(\theta) + h''(\theta)) \cos\theta}_{x'} \Bigg) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cdot (h(\theta) + h''(\theta)) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h^2(\theta) d\theta + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} h \cdot h''}_{\underbrace{h \cdot h'|_0^{2\pi}}_{0} - \int_0^{2\pi} (h')^2} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(\theta)^2 - h'(\theta)^2 d\theta.
\end{aligned}$$

Diese Formel geht auf Blaschke zurück. Beachte, daß

$$\overline{z}\, dz = (x\, dx + y\, dy) + i(x\, dy - y\, dx) = d(x^2 + y^2)/2 + i(x\, dy - y\, dx)$$

ist, und somit $A = \frac{1}{2} \int_{\partial A} x dy - y dx = \frac{1}{2} \mathfrak{Im}\Big(\int_{\partial A} \overline{z}\, dz \Big) = \frac{1}{2i} \int_{\partial A} \overline{z}\, dz$ ist.

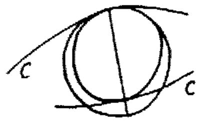
6.4 Satz. *Die Länge bzw. Fläche einer Eilinie liegt zwischen jener des größten und jener des kleinsten Krümmungskreises.*

Beweis. Für den Krümmungsradius gilt: $R(\vartheta) = \frac{1}{K(\vartheta)} = h(\vartheta) + h''(\vartheta)$. Setzen wir dies in die obigen Gleichungen für L und A ein:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} R(\vartheta)\, d\vartheta \\ &\Rightarrow \quad 2\pi R_{\min} \le L \le 2\pi R_{\max} \\ 2A &= \int_0^{2\pi} h(h+h'') = \int_0^{2\pi} hR \\ &\Rightarrow R_{\min} \underbrace{L}_{\ge 2\pi R_{\min}} \le R_{\min} \int_0^{2\pi} h \le 2A \le R_{\max} \int_0^{2\pi} h \le R_{\max} \underbrace{L}_{\le 2\pi R_{\max}} \\ &\Rightarrow \pi R_{\min}^2 \le A \le \pi R_{\max}^2. \qquad \square \end{aligned}$$

6.5 Satz. *Jede Eilinie liegt zwischen jeden größten und jeden kleinsten Krümmungskreis.*

Beweis.



Wir zeigen die Aussage über den kleinsten Krümmungskreis. Analog zeigt man die Aussage über den größten Krümmungskreis und zwar indirekt: Angenommen die Eilinie c trifft einen kleinsten Krümmungskreis im Inneren. Dann können wir jenen Kreis k suchen, der seinen Mittelpunkt auf dem Durchmesser des kleinsten Krümmungskreises hat, welcher die Kurve im gleichen Punkt berührt und der gerade noch im Inneren der Kurve liegt. Nach dem Lemma von Süss (5.8) folgt die Existenz eines Punktes t, für den gilt: $K_c(t) >$ Krümmung des Kreises $k >$ Krümmung des kleinsten Krümmungskreises $= \max_s K_c(s)$. Das ist ein Widerspruch. $\square$

6.6 Isoperimetrische Ungleichung. *Sei c eine einfach geschlossene Kurve mit Länge L und Fläche (des Inneren) A, so gilt $L^2 \ge 4\pi A$. Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn c einen Kreis parametrisiert.*

Beweis. O.B.d.A. sei $L = 2\pi$ (man wende hierzu eine Streckung an) und sei $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Wir bilden die Fourierreihe $c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{ikt}$ mit den Koeffizienten $\lambda_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(t)e^{-ikt}dt$. Dann hat c' die Fourierreihe $\sum_k \lambda_k ike^{ikt}$. Nach der Parsevalschen Gleichung gilt

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |c'(t)|^2 dt = \sum_k |\lambda_k ik|^2 = \sum_k k^2 |\lambda_k|^2.$$

Nach dem Gaußschen Integralsatz in der Ebene ist

$$\begin{aligned} A &= \int_A dx \wedge dy = \tfrac{1}{2}\int_{\partial A} xdy - ydx = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (xy' - yx')dt \\ &= \tfrac{1}{2}\mathfrak{Im}\left(\int_0^{2\pi} \overline{c(t)}c'(t)dt\right) = \tfrac{1}{2}\mathfrak{Im}\left(\langle c', c\rangle\right), \end{aligned}$$

da $\bar{c}c' = (x - iy)(x' + iy') = (xx' + yy') + i(xy' - yx')$ für $c(t) =: x(t) + iy(t)$. Nach der Parsevalschen Gleichung gilt

$$\langle c', c \rangle = 2\pi \sum_k \overline{\lambda_k} \lambda_k ik = 2\pi \sum_k ik|\lambda_k|^2.$$

Also erhalten wir

$$A = \tfrac{1}{2}\mathfrak{Im}\left(2\pi \sum_k ik|\lambda_k|^2\right) = \pi \sum_k k|\lambda_k|^2 \le \pi \sum_k k^2|\lambda_k|^2 = \pi,$$

weil $k \le k^2$ für alle k. Gleichheit gilt genau dann, wenn $|\lambda_k| \ne 0$ höchstens für solche k ist, wo $k = k^2$ ist, d.h. für $k = 0, 1$. Damit ist die isoperimetrische Ungleichung gezeigt, und Gleichheit gilt genau dann, wenn $c(t) = \lambda_0 e^0 + \lambda_1 e^{it}$, d.h. c einen Kreis parametrisiert. □

In [**21**] wird dieser Satz sogar für stetige einfach geschlossene Kurven gezeigt.

6.7 Bonnesensche Ungleichung. *Sei c eine Eilinie mit Umkreisradius R und Inkreisradius r, so gilt $L^2 - 4\pi A \ge \pi^2(R^2 - r^2)$.*

Für einen Beweis siehe [**47**, 9.9.3].

7. Kurven im höher Dimensionalen

In diesem Abschnitt übertragen wir die grundlegenden Begriffe wie Einheitstangentialvektor, Einheitsnormalvektor und Krümmung auf Kurven in mehrdimensionalen $\mathbb{R}^n$'s.

Eine Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ kann man nach der Bogenlänge parametrisieren, das heißt $|c'(t)| = 1$. Daraus folgt durch Differentiation, daß $\langle c', c'' \rangle = 0$. Wir können c'' als die Kraft (Beschleunigung), die gebraucht wird, damit der Punkt (mit Einheitsmasse) auf der Kurve bleibt, interpretieren.

7.1 Definition (Krümmung und Begleitbein)

Die Krümmung einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve c im Punkt t ist als $K(t) := |c''(t)| \ge 0$ definiert. Falls $K(t) \ne 0$, dann heißt $\nu := \frac{1}{|c''(t)|} c''(t)$ der Hauptnormalenvektor von c in t.

Im $\mathbb{R}^3$ können wir die beiden Vektoren τ (siehe (2.6)) und ν zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis $\{\tau, \nu, \beta\}$ ergänzen, indem wir den Binormalenvektor β als $\beta := \tau \times \nu$ definieren. Diese Basis heißt das Begleitbein der Kurve.

Im $\mathbb{R}^{n+1}$ gehen wir wie folgt vor: Seien $c'(t), c''(t), \dots, c^{(n)}(t)$ linear unabhängig. Mittels des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens läßt sich daraus eine orthonormale Familie $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ konstruieren. (Dabei geht man induktiv vor, um zu zeigen, daß für k linear unabhängige Vektoren $a_1, a_2, \dots a_k$ ein eindeutig bestimmter Vektor v existiert, welcher normal auf die $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ steht, mit a_k einen Winkel α (mit $|\alpha| < \pi/2$) einschließt und im Erzeugnis der $a_1, a_2, \dots a_k$ liegt.) Wir ergänzen nun $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}, \nu_n$ des $\mathbb{R}^{n+1}$.

Diese Orthonormalbasis heißt Begleitbein der Kurve.

7.2 Definition (Krümmungen)

Wir wollen nun das Analogon der Freneschen Ableitungsgleichungen herleiten. Dazu benötigen wir die Komponenten $\langle \nu_i', \nu_j\rangle$ von ν_i' bzgl. der Basisvektoren ν_j. Für jeden Vektor ν_i' gilt: $\nu_i' = \sum_{j=0}^n \langle \nu_i', \nu_j\rangle \nu_j$. Wir differenzieren die Gleichung $\langle \nu_i(s), \nu_j(s)\rangle = \delta_{ij}$ nach s und erhalten:

$$\langle \nu_i', \nu_j\rangle + \langle \nu_i, \nu_j'\rangle = 0 \Rightarrow \langle \nu_i', \nu_j\rangle = -\langle \nu_i, \nu_j'\rangle.$$

Also ist die Matrix $(\langle \nu_i', \nu_j\rangle)_{i,j}$ schiefsymmetrisch. Da $\nu_i \in \langle \{c', \dots, c^{(i+1)}\}\rangle$ ist, kann man ν_i auch auf folgende Weise darstellen:

$$\begin{aligned} \nu_i &= \sum_{j=1}^{i+1} a_j \cdot c^{(j)} \\ \Rightarrow \nu_i' &= \sum_{j=1}^{i+1} \Big(a_j' \cdot c^{(j)} + a_j \cdot c^{(j+1)} \Big) \in \Big\langle \{c', c'', \dots, c^{(i+2)}\} \Big\rangle \end{aligned}$$

Da ν_j normal steht auf $c', c'', \dots c^{(j)}$ ist somit $\langle \nu_i', \nu_j\rangle = 0$ für $j > i+1$. Außerdem ist offensichtlich $\langle \nu_i', \nu_i\rangle = 0$ für alle i und folglich stehen in der Diagonalen der Matrix von $(\langle \nu_i', \nu_j\rangle)_{i,j}$ 0-en, und nur oberhalb und unterhalb der Diagonalen stehen auf schiefsymmetrische Weise Eintragungen.

Für eine Kurve c heißt $\langle \nu_i', \nu_{i+1}\rangle =: K_{i+1}$ die $(i+1)$-TE KRÜMMUNG.

$$\langle \nu_i', \nu_j\rangle = \begin{pmatrix} 0 & K_1 & 0 & \dots & 0 \\ -K_1 & 0 & K_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -K_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & K_n \\ 0 & \dots & 0 & -K_n & 0 \end{pmatrix}$$

Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve c in $\mathbb{R}^2$ ergibt sich:

$$K_1 = \langle \nu_0', \nu_1\rangle = \Big\langle (c')', \frac{c''}{|c''|} \Big\rangle = |c''| = K.$$

Wir haben folgendes gezeigt:

7.3 Frenet'sche Ableitungsgleichungen.
Für das Begleitbein $(\nu_i)_{i=0}^n$ einer Kurve c im $\mathbb{R}^{n+1}$ gilt:

$$\nu_i' = -K_i \cdot \nu_{i-1} + K_{i+1} \cdot \nu_{i+1},$$

wobei $K_0 := 0$, $K_{n+1} := 0$, $\nu_{-1} := 0$ und $\nu_{n+1} := 0$.

Beweis.

$$\nu_i' = \sum_{j=0}^n \underbrace{\langle \nu_i', \nu_j\rangle}_{=0 \text{ für } |i-j|\neq 1} \cdot \nu_j = \underbrace{\langle \nu_i', \nu_{i+1}\rangle}_{=K_{i+1}} \cdot \nu_{i+1} + \underbrace{\langle \nu_i', \nu_{i-1}\rangle}_{\langle \nu_{i-1}', \nu_i\rangle = K_i} \cdot \nu_{i-1} \qquad \square$$

7.4 Lemma. *Das Begleitbein und die Krümmungen sind geometrische Objekte.*

Beweis. Bleibt dem Leser überlassen! $\square$

7.5 Bemerkung

Umgekehrt lassen sich die Ableitungen der Kurve wie folgt als Linearkombinationen des Begleitbeins schreiben:

$$\begin{aligned}
c' &= \nu_0 \\
c'' &= \nu_0' = K_1\nu_1 - 0 \\
c''' &= (K_1\nu_1)' = K_1'\nu_1 + K_1\nu_1' = K_1'\nu_1 + K_1(K_2\nu_2 - K_1\nu_0) \\
&= K_1K_2\nu_2 + K_1'\nu_1 - {K_1}^2\nu_0.
\end{aligned}$$

Nach dem Taylorschen Lehrsatz läßt sich eine Kurve c nun wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
c(t) &= c(0) + \frac{c'(0)}{1!}t + \frac{c''(0)}{2!}t^2 + \frac{c'''(0)}{3!}t^3 + O(t^4) \\
&= c(0) + \nu_0(0)t + \frac{K_1(0)\nu_1(0)}{2}t^2 \\
&\quad + \frac{K_1(0)K_2(0)\nu_2(0) + K_1'(0)\nu_1(0) - (K_1(0))^2\nu_0(0)}{6}t^3 + O(t^4) \\
&= c(0) + \left(t - \frac{(K_1(0))^2}{6}t^3\right)\nu_0(0) \\
&\quad + \left(\frac{K_1(0)}{2}t^2 + \frac{K_1'(0)}{6}t^3\right)\nu_1(0) + \left(\frac{K_1(0)K_2(0)}{6}t^3\right)\nu_2(0) + O(t^4)
\end{aligned}$$

7.6 Definition (Torsion)

Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit $\tau := \nu_0, \nu := \nu_1, \beta := \tau \times \nu = \nu_2$, dann nennt man $K := K_1$ die Krümmung und $T := K_2$ die Torsion der Kurve. Die Ableitungsgleichungen lauten dann:

$$\begin{array}{rclccc}
\tau' & = & & +K\nu & \\
\nu' & = & -K\tau & & +T\beta \\
\beta' & = & & -T\nu &
\end{array}$$

Die von ν und β aufgespannte Ebene durch $c(0)$ heißt Normalebene, die von τ und ν aufgespannte heißt Schmiegebene und die von τ und β aufgespannte heißt rektifizierende Ebene.

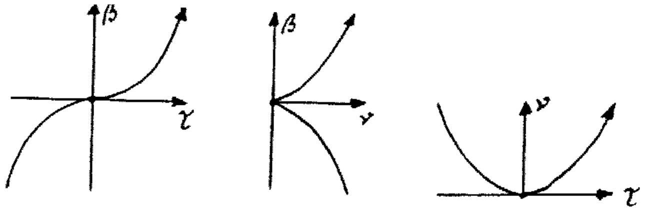
Sind x, y, z die Koordinaten von c bezüglich τ, ν, β im Punkt $c(0)$. Laut (7.5) gilt

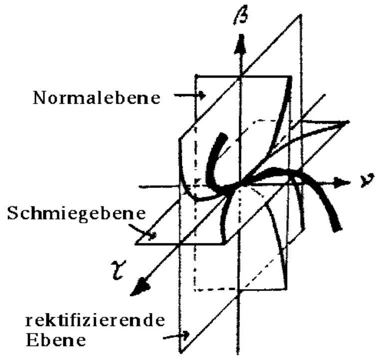
$$\begin{aligned}
x(t) &= t & &- \frac{K^2(0)}{6}t^3 + O(t^4) \\
y(t) &= & \frac{K(0)}{2}t^2 &+ \frac{K'(0)}{6}t^3 + O(t^4) \\
z(t) &= & &\frac{K(0)T(0)}{6}t^3 + O(t^4)
\end{aligned}$$

Wir betrachten die Projektion der Kurve in die Ebenen des begleitenden Dreibeins: Zuerst die Projektion auf die Schmiegebene: Wir erhalten $y = \frac{K}{2}t^2 + O(t^3)$, $x = t + O(t^3)$ und nach Vernachlässigen der Glieder höherer Ordnung $y \approx x^2\frac{K}{2}$.

Für die Projektion auf die rektifizierende Ebene erhalten wir $x = t + O(t^3)$, $z = \frac{KT}{6}t^3 + O(t^4)$ und somit $z \approx x^3\frac{KT}{6}$.

Für die Projektion auf die Normalebene erhalten wir $y = \frac{K}{2}t^2 + O(t^3)$, $z = \frac{KT}{6}t^3 + O(t^4)$ und somit $y^3 \approx (\frac{K}{2})^3 t^6 = \frac{9K}{2T^2}\frac{(KT)^2}{6^2}t^6 \approx z^2 \frac{9K}{2T^2}$. Diese Projektionen ergeben als 3-dimensionales Bild:





7.7 Lemma. *Die Krümmungen K_i ($i = 1, \dots, n$) und das Begleitbein $(\nu_1, \dots, \nu_n)$ einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve sind durch folgende Bedingungen eindeutig festgelegt:*

$$c^{(j+1)} = \nu_0^{(j)} \equiv K_1 \cdot \ldots \cdot K_j \cdot \nu_j \mod \langle \nu_0, \dots, \nu_{j-1} \rangle,$$
$$K_i > 0 \text{ für } i < n$$

und $(\nu_1, \dots, \nu_n)$ ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis.

Beweis. Wir wissen bereits (wegen der Bemerkung in (7.4)), daß diese Gleichung für $j = 1, \dots, 3$ erfüllt ist. Nehmen wir an, sie ist für j erfüllt, d.h.

$$\nu_0^{(j)} = K_1 \cdot \ldots \cdot K_j \cdot \nu_j + \sum_{i=0}^{j-1} a_i \nu_i \quad (*),$$

so müssen wir die Behauptung nur mehr für $j+1$ zeigen: Dazu differenzieren wir (*) und erhalten

$$\begin{aligned}
\nu_0^{(j+1)} &= (K_1 \dots K_j) \cdot \nu_j' + (K_1 \dots K_j)' \cdot \nu_j + \sum_{i=0}^{j-1}(a_i' \cdot \nu_i + a_i \cdot \nu_i') \\
&\equiv (K_1 \dots K_j)(K_{j+1} \cdot \nu_{j+1} - K_j \cdot \nu_{j-1}) \mod \langle \nu_0, \dots, \nu_j \rangle \\
&\equiv K_1 \dots K_j K_{j+1} \cdot \nu_{j+1} \mod \langle \nu_0, \dots, \nu_j \rangle,
\end{aligned}$$

da $K_j \nu_{j-1}$ im Erzeugnis der $\nu_0, \dots, \nu_j$ liegt.

Nach Konstruktion ist für $j < n$ der Winkel zwischen ν_j und $c^{(j+1)}$ kleiner als $\pi/2$. Also gilt:

$$0 < \langle \nu_j, c^{(j+1)} \rangle = \Big\langle \nu_j, K_1 \cdot \ldots \cdot K_j \nu_j + \sum_{i<j} a_i \nu_i \Big\rangle = K_1 \cdot \ldots \cdot K_j \underbrace{\langle \nu_j, \nu_j \rangle}_{1}.$$

Hiermit sind alle $K_j > 0$ für $j < n$.

Nach Konstruktion bilden die ν_j eine positiv orientierte Orthonormalbasis.

Umgekehrt folgt aus

$$c^{(j+1)} \equiv K_1 \cdot \ldots \cdot K_j \nu_j \mod \langle \nu_0, \ldots, \nu_{j-1} \rangle$$

und $K_j > 0$ für $j < n$, daß $\langle \nu_0, \ldots, \nu_{j-1} \rangle = \langle c', \ldots, c^{(j)} \rangle$ für $1 \leq j < n$ sowie $0 < \langle \nu_j, c^{(j+1)} \rangle$. Wegen der Orthogonalität ist also ν_j das Begleitbein. Weiters ist $K_1 \cdot \cdots \cdot K_j$ der Koeffizient von ν_j, in der Entwicklung von $\nu_0^{(j)}$ bzgl. der Basis $(\nu_0, \ldots, \nu_n)$. Durch diese Produkte sind auch alle K_i eindeutig festgelegt. □

7.8 Folgerung.
Es ist $K_1^n K_2^{n-1} \ldots K_{n-1}^2 K_n = \det(c', \ldots, c^{(n+1)})$ *und insbesonders hat* K_n *hat das gleiche Vorzeichen wie* $\det(c', \ldots, c^{(n+1)})$. *Für Raumkurven* $c : I \to \mathbb{R}^3$ *ist die Torsion somit durch* $T = \det(c', c'', c'')/K^2$ *gegeben.*

Beweis. Nach den Regeln für das Rechnen mit Determinanten erhalten wir

$$\begin{aligned}
\det(c', \ldots, c^{(n+1)}) &= \det\Big(\nu_0, K_1\nu_1, \ldots, K_1 \cdot \ldots \cdot K_n \nu_n + \sum_{i=0}^{n} a_i \nu_i\Big) \\
&= \underbrace{{K_1}^n {K_2}^{n-1} \ldots {K_{n-1}}^2}_{>0} {K_n}^1 \underbrace{\det(\nu_0, \ldots, \nu_n)}_{=1 \text{ da pos. orientiert}}
\end{aligned}$$ □

7.9 Satz (Die Krümmungen charakterisieren die Kurve).
Seien $K_i : I \to \mathbb{R}$ *glatte Funktionen für* $1 \leq i \leq n$ *mit* $K_i(t) > 0$ *für* $i < n$. *Dann gibt es eine bis auf Bewegungen eindeutig bestimmte Kurve im* $\mathbb{R}^{n+1}$, *welche nach der Bogenlänge parametrisiert genau die* K_i *als Krümmungen besitzt.*

Die Devise ist also: “Sag mir, wie Du Dich krümmst und windest, und ich sag Dir wer Du bist”!

Beweis. O.B.d.A. sei $0 \in I$. Wir behaupten: Es existiert genau eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit gegebenen Krümmungen und den Anfangsbedingungen: $c(0) = 0$ und mit der Standardbasis $e_0, \ldots, e_n$ als Begleitbein bei 0.

Nach den Frenet'schen Ableitungsgleichungen muß $\nu_j' = K_{j+1} \cdot \nu_{j+1} - K_j \cdot \nu_{j-1}$ für $j = 0, \ldots, n$ und $\nu_j(0) = e_j$ sein. Dies ist ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem mit $(n+1)^2$ eindimensionalen Gleichungen und entsprechenden Anfangsbedingungen. Für ein solches System existiert eine eindeutige Lösung $(\nu_0, \ldots, \nu_n)$, für die wir zeigen werden, daß dieses das Begleitbein einer Kurve ist. Wir behaupten, daß die ν_i für jeden Zeitpunkt orthonormiert sind: Wir definieren $g_{ij} := \langle \nu_i, \nu_j \rangle : I \to \mathbb{R}$. Dann ist $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Mit

$$g_{ij}' = \langle \nu_i', \nu_j \rangle + \langle \nu_i, \nu_j' \rangle = K_{i+1} g_{i+1,j} - K_i g_{i-1,j} + K_{j+1} g_{i,j+1} - K_j g_{i,j-1}$$

erhalten wir abermals ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem mit $(n+1)^2$ eindimensionalen Gleichungen und entsprechenden Anfangsbedingungen $g_{ij}(0)=\delta_{ij}$. Auch hier muß es eine eindeutige Lösung g_{ij} geben. Wir sehen andererseits, daß δ_{ij} eine Lösung ist:

$$K_{i+1}\delta_{i+1,j} - K_i\delta_{i-1,j} + K_{j+1}\delta_{i,j+1} - K_j\delta_{i,j-1} =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{für } |i-j|\neq 1 \\ -K_i + K_{j+1} = 0 & \text{für } i = j+1 \\ K_{i+1} - K_j = 0 & \text{für } j = i+1 \end{cases} = \delta'_{i,j}$$

Also ist $g_{ij}=\delta_{ij}$, d.h. die ν_i sind orthonormiert. Sie sind auch positiv orientiert, denn $\det(\nu_0,\dots,\nu_n)(0)=1$ und $\det(\nu_0,\dots,\nu_n)(t)=\pm1$ für alle t. Wegen des Zwischenwertsatzes folgt, $\det(\nu_0,\dots,\nu_n)(t)=1$ für alle t. Es gibt höchstens eine Kurve c, welche die ν_i als Begleitbein hat und $c(0)=0$ erfüllt, nämlich: $c(t):=\int_0^t \nu_0$, denn c' muß gleich ν_0 sein. Es ist $|c'|=|\nu_0|=1$, also ist c nach der Bogenlänge parametrisiert. Durch Differenzieren erhalten wir $c^{(j+1)}(t)=\nu_0^{(j)}$ und wegen der Differentialgleichung für die ν_j gilt

$$\nu_0^{(j)} \equiv K_1\cdot\ldots\cdot K_j\nu_j \mod \langle \nu_0,\dots,\nu_{j-1}\rangle$$

für $j<n$ wie im Beweis von (7.7) gezeigt wurde. Also ist auch

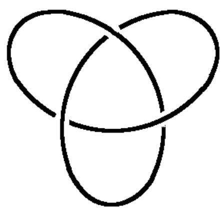
$$c^{(j+1)}(t) \equiv K_1\cdot\ldots\cdot K_j\nu_j \mod \langle \nu_0,\dots,\nu_{j-1}\rangle$$

und damit sind die K_j die Krümmungen von c und die ν_i das Begleitbein nach Lemma (7.7).

Jede andere Kurve mit diesen Krümmungen läßt sich durch eine eindeutig bestimmte Bewegung in eine Kurve mit (denselben Krümmungen und) obigen Anfangsbedingungen transformieren. Diese ist nach dem bisher Gesagten eindeutig bestimmt, also auch jene. □

8. Exkurs über Knoten

Dieser Abschnitt dient dazu, einen ersten Einblick in die Knotentheorie (ein Teilgebiet der algebraischen Topologie) zu vermitteln.



8.1 Definition (äquivalente Knoten)

Eine (geometrische) einfach geschlossene Kurve im $\mathbb{R}^3$ heißt Knoten. Wir wollen nun beschreiben, was es heißt, daß zwei Knoten im wesentlichen gleich sind. Dazu betrachten wir zwei parametrisierte einfach geschlossene Kurven $c_j : S^1 \to \mathbb{R}^3$ für $j\in\{0,1\}$. Wir nennen sie isotop (in Analogie zu diesem Begriff für geschlossene

Kurven) :$\Leftrightarrow$ eine Isotopie h existiert, d.h. eine glatte Abbildung $h: S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $h(t,j) = c_j(t)$ für $j \in \{0,1\}$ wo $h(.,s)$ eine einfach geschlossene Kurve für jedes $s \in [0,1]$ ist. Das scheint aber noch nicht die gewünschte Beschreibung zu sein, denn wenn wir c_0 in c_1 überführen, so müssen wir auch die umgebende "Luft" ein wenig mitbewegen. Also definieren wir: c_0 und c_1 heißen DIFFEOTOP :$\Leftrightarrow$ eine Diffeotopie H existiert, d.h. eine Abbildung $H : \mathbb{R}^3 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $H(c_0(t),1) = c_1(t)$ für alle $t \in S^1$, $H(.,0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ wo $H(.,s) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Diffeomorphismus für alle $s \in [0,1]$ ist.

Es gilt der Satz, daß sich jede Isotopie h zu einer Diffeotopie H erweitern läßt, d.h. $h(t,s) = H(h(t,0),s)$.

Die Definition der Isotopie macht auch für geometrische Kurven $[c_j]$, die ja bereits durch ihr Bild $K_j \subset \mathbb{R}^3$ festgelegt sind, Sinn. Man braucht nur die erste Bedingung durch $H(K_0,1) = K_1$ ersetzen.

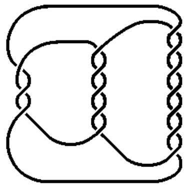
Die nächste Frage, die sich stellt, ist, ob nicht schon die Angabe eines Endwertes, d.h. eines Diffeomorphismus $H_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ausreicht, um die Existenz einer Diffeotopie H mit $H(.,1) = H_1$ zu gewährleisten. Allgemein kann das nicht stimmen, denn eine Diffeotopie verbindet die Identität stetig mit dem Endwert. Die Identität ist orientierungsbewahrend, also muß es auch der Endwert sein. Unter dieser Voraussetzung gilt allerdings:

8.2 Satz. [**20**] *Jeder die Orientierung erhaltende Diffeomorphismus läßt sich zu einer Diffeotopie erweitern.*

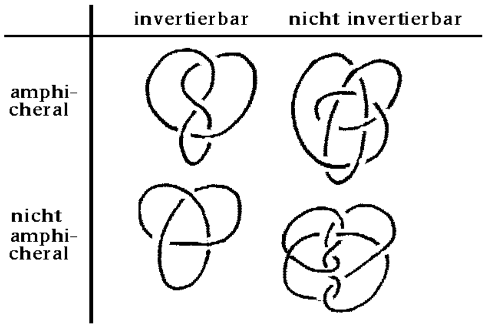
Wir können also abschließend zwei geometrische Knoten als ÄQUIVALENT bezeichnen, wenn es einen Diffeomorphismus (oder äquivalent – wie man zeigen kann – einen Homöomorphismus) $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt, der einen Knoten auf den anderen abbildet.

Jede Äquivalenzklasse von geometrischen Knoten zerfällt dann in ein oder zwei Diffeotopieklassen, je nachdem ob ein (jeder) Repräsentant diffeotop zu seinem Spiegelbild ist oder nicht. Ein Knoten heißt AMPHICHERIAL, wenn er zu seinem Spiegelbild diffeotop ist.

Jede Äquivalenzklasse von orientierten geometrischen Knoten zerfällt in zwei Äquivalenzklassen bezüglich der Relation "orientiert-äquivalent" (d.h. der Diffeomorphismus respektiert die Orientierung der Knoten), je nachdem ob ein (jeder) Repräsentant zum umgekehrt durchlaufenen Knoten orientiert-äquivalent ist. Ein orientierter Knoten heißt INVERTIERBAR, wenn ersteres gilt. Der erste nicht invertierbare Knoten wurde von [**80**] gefunden.



Eine Tabelle von Beispielen mit den verschiedenen Eigenschaften ist die folgende:



Damit ist nun zwar theoretisch geklärt, wann zwei Knoten als gleich anzusehen sind, aber wie man das in der Praxis feststellt, wissen wir noch nicht. Eine Idee dazu ist, daß ein Knoten K gerade durch das beschrieben wird, was er nicht ist, d.h. durch sein Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus K$. Dies wurde allerdings erst 1989 bewiesen:

8.3 Satz. [**52**] *Zwei Knoten sind genau dann äquivalent, wenn ihre Komplemente homöomorph sind.*

Eine Möglichkeit um festzustellen, ob zwei Komplemente homöomorph sind, ist die Homotopiegruppe $\pi(\mathbb{R}^3 \setminus K)$, die man auch die Knotengruppe von K nennt, zu vergleichen.

Ein englisches Gedicht faßt die wichtigsten Resultate über die Knotengruppe zusammen:

A knot
and another knot
may not be the same,
although
the knot group of the knot
and the others knot's knot group
differ not.
But if
the knot group of a knot
is the knot group
of the not knotted knot
then the knot is not knotted.

D.h. zwei Knoten können die gleiche Knotengruppe besitzen, aber nicht äquivalent sein. Ein Beispiel ist:

Falls die Knotengruppe eines Knotens die von $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, also gleich $\mathbb{Z}$ ist, so ist der Knoten aufknüpfbar, d.h. äquivalent zu S^1. Dies wurde von [**48**] unter der Benützung eines Lemmas, welches erst in [**10**] bewiesen wurde, gezeigt.

Somit verbleibt das Problem, die Knotengruppe eines Knotens zu berechnen. Dies geschieht z.B. mittels der WIRTINGER DARSTELLUNG. Wir wollen das am Beispiel des einfachsten nicht trivialen Knotens, des Dreiblattes, durchführen.

Wir stellen uns dazu den Knoten als Vorhangschiene vor, an der ein nach unten unbegrenzter Vorhang hängt. Sei x_0 ein fixer Punkt oberhalb des Knotens. Wir wählen für jeden Teil des Knotens, der zwischen zwei Durchstoßpunkten mit dem Vorhang liegt, eine Schlinge c_j durch x_0, welche im Uhrzeigersinn einmal um diesen Teil läuft, wenn man vom Knoten aus in Fahrtrichtung schaut. Sei nun ein beliebiger Repräsentant eines Elements der Knotengruppe gegeben, d.h. eine geschlossene Kurve c im $\mathbb{R}^3 \setminus K$ durch x_0. Wir können die Kurve so homotop verformen, daß sie den Vorhang nur transversal schneidet. Dann können wir sie homotop im $\mathbb{R}^3 \setminus K$ weiter verformen, indem wir die Teile, die in den durch den Vorhang entstehenden Kammern liegen, nach oben zu x_0 heben, die Durchstoßpunkte aber gleich lassen. Nun verschieben wir die Durchstoßpunkte längs der Wände der vom Vorhang erzeugten Kammern, sodaß sie schließlich mit jenen der c_j für $j = 1, 2, 3$ übereinstimmen. Dann können wir aber die Fäden der Kurve c, die von x_0 zu den Durchstoßpunkten laufen, mit den entsprechenden Teilen der c_j zur Deckung bringen, und sehen somit, daß sich c zu einer Aneinanderhängung der Kurven c_j sowie dem umgekehrt durchlaufenen c_j homotop verformen läßt. Die Knotengruppe wird also von den c_j erzeugt. Sie ist somit ein Quotient der freien Gruppe mit Erzeugern $\{c_1, c_2, c_3\}$.

Wir müssen noch die Relationen finden, die wir aus der freien Gruppe herausfaktorisieren müssen, um die Knotengruppe zu erhalten. Dazu betrachten wir einen kleinen Kreis, welcher waagrecht um eine Kante der Kammern des Vorhangs läuft, welche so entstanden ist, daß der Knoten den Vorhang so trifft wie z.B. wir die Schlinge c_1. Dieser Kreis ist klarerweise homotop zur konstanten Kurve x_0, also repräsentiert er das neutrale Element e in der Knotengruppe. Seine Beschreibung mittels der kleinen Schlingen c_j lautet aber $c_1 c_2^{-1} c_1^{-1} c_3$. Wir haben also sicher die Relation $c_1 c_2^{-1} c_1^{-1} c_3 \sim e$, sowie jene, die durch zyklisches Permutieren der Indizes 1, 2, 3 entstehen. Diese erzeugen schon alle Relationen, denn damit eine beliebige geschlossene Kurve c homotop zur Konstanten ist, muß sie sich so verformen lassen, daß sie den Vorhang nicht mehr trifft. Dazu muß man die Schnittpunkte zur Deckung bringen. Nur wenn man dabei eine Kante überschreitet ändert sich die Darstellung als Wort (endliche Folge) der c_j und c_j^{-1}, und zwar ändert sich der entsprechende Teil, der durch einen Durchstoßpunkt c_k beschrieben wird, genau nach obiger Relation.

Zusammenfassend haben wir also gesehen, daß unsere Knotengruppe G als Erzeugende c_1, c_2, c_3 besitzt und die Relationen durch $c_1 c_2^{-1} c_1^{-1} c_3 \sim e$, $c_2 c_3^{-1} c_2^{-1} c_1 \sim e$ und $c_3 c_1^{-1} c_3^{-1} c_2 \sim e$ erzeugt werden. Man schreibt

$$G = \left\langle c_1, c_2, c_3 : \begin{smallmatrix} c_1 c_2^{-1} c_1^{-1} c_3 \sim e, \\ c_2 c_3^{-1} c_2^{-1} c_1 \sim e, \\ c_3 c_1^{-1} c_3^{-1} c_2 \sim e \end{smallmatrix} \right\rangle$$

Nun müssen wir zeigen, daß G nicht die triviale Gruppe ist. Im allgemeinen ist das ein schwieriges Problem, da das Wortproblem für endlich erzeugte Gruppen nicht algorithmisch lösbar ist. Aus der 1.ten Relation entnehmen wir, daß $c_3 \sim c_1 c_2 c_1^{-1}$.

Durch Einsetzen von c_3 erhalten wir

$$G = \Big\langle c_1, c_2 : c_2 c_1 c_2^{-1} c_1^{-1} c_2^{-1} c_1 \sim e, c_1 c_2 c_1^{-1} c_2^{-1} c_1^{-1} c_2 \sim e \Big\rangle.$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned} c_2 c_1 c_2^{-1} c_1^{-1} c_2^{-1} c_1 \sim e \Leftrightarrow \quad & c_2 c_1 c_2 \sim c_1^{-1} c_2 c_1 c_2 \\ \Leftrightarrow \quad & c_1 c_2 c_1 c_2 \sim c_2 c_1 c_2 \end{aligned}$$

und die gleiche Relation ergibt sich auch durch Umformen der zweiten Relation. Setzen wir $x := c_1 c_2 c_1$ und $y := c_1 c_2$, so ist $c_1 = y^{-1} x$ und $c_2 = x^{-1} y^2$, also erzeugt auch x gemeinsam mit y diese Gruppe und die Relation übersetzt sich in $x \sim x^{-1} y^3$. Somit gilt

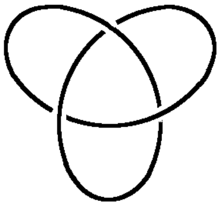
$$G = \langle x, y : x^2 \sim y^3 \rangle.$$

Diese Gruppe ist nicht $\mathbb{Z}$, da wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $f : G \to \mathcal{S}_3$ in die Permutationsgruppe $\mathcal{S}_3$ von drei Elementen angeben können: $f(x) := (12)$, $f(y) = (123)$. Dann gilt $f(x)^2 = (12)^2 = (1) = (123)^3 = f(y)^3$, also ist f ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus. Und da (123) und (12) ganz $\mathcal{S}_3$ erzeugen, ist er auch surjektiv. Somit kann G nicht Abelsch und damit nicht isomorph zu $\mathbb{Z}$ sein, denn $(123)(12) = (23) \neq (13) = (12)(123)$.

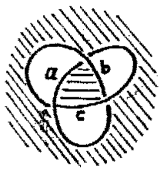
Wir bemerken allerdings, daß die Abelisierung G/G' der Knotengruppe, d.h. wenn man zur Knotengruppe noch die Relationen $c_i c_j \sim c_j c_i$ hinzunimmt, isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist, denn die erzeugenden Relationen wie z.B. $c_1 c_2^{-1} c_1^{-1} c_3 \sim e$ übersetzen sich dann in $c_2 \sim c_3$. Also ist $G/G' = \langle c_1, c_2, c_3 : c_1 = c_2 = c_3 \rangle = \langle c_1 \rangle \cong \mathbb{Z}$. Daß die Knotengruppe G jedes Knotens als Abelisierung $G/G' \cong \mathbb{Z}$ hat, stammt von [**10**].

Da die Knotengruppe die Knoten nicht charakterisiert, hat man eine ganze Reihe anderer Invarianten eingeführt. Wir wollen hier nur mehr auf eine eingehen. Und zwar sucht man die Fläche kleinsten Geschlechts (siehe (9)), welche den Knoten als Rand besitzt. Diese Fläche heißt Seifertfläche. Ihr Geschlecht ist dann die gewünschte Invariante. Falls ein Knoten alternierend ist, so kann man diese Fläche minimalen Geschlechts wie folgt erhalten. Man denkt sich eine Haut in Form einer großen Kreisscheibe in der xy-Ebene, die ein Loch hat, in welchem der Knoten liegt. Nun macht man das Loch kleiner, bis man auf den Knoten trifft und zieht die Haut dann entlang des Knotens, bis man sie in der Mitte verbinden kann. Dann zieht man den Rand der Scheibe zu einem Punkt unterhalb des Knotens zusammen. Die Haut bildet nun die Seifertfläche. Dabei heißt ein Knoten alternierend, wenn er eine Darstellung besitzt, bei der man abwechselnd die kreuzenden Teile über- und unterschreitet, wenn man den Knoten entlanggeht. Der erste nicht alternierende Knoten wurde von [**5**] gefunden.

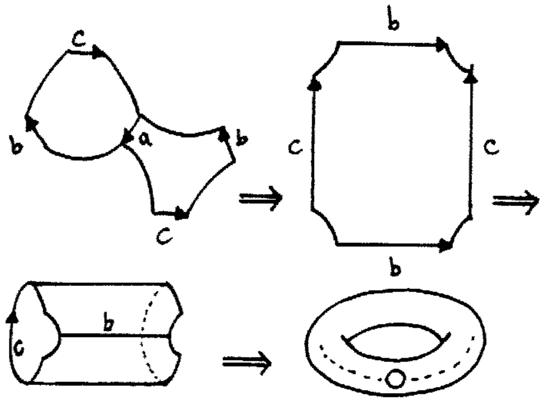
Wir wollen nun die Seifertfläche des Dreiblatts zerlegen.



Wir zerschneiden sie und markieren die Stellen a, b und c, wo sie wieder zusammengeklebt werden muß.



So erhalten wir schließlich einen Torus, welcher ein Loch besitzt, also eine Fläche mit Geschlecht 1. Die Seifertfläche des trivialen Knotens aber ist eine Scheibe, d.h. eine Sphäre mit Loch, hat also Geschlecht 0. Somit haben wir erneut gesehen, daß das Dreiblatt ein nicht trivialer Knoten ist.



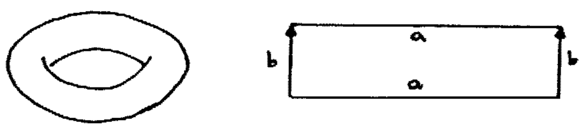
II. Mannigfaltigkeiten

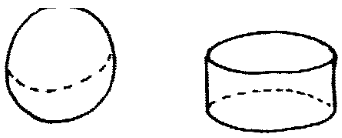
In diesem Kapitel führen wir den Begriff der Mannigfaltigkeit ein. Wir beginnen dabei spielerisch mit zweidimensionalen Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$, sogenannten Flächen, verallgemeinern diese dann im zweiten Abschnitt zu Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, und präzisieren im dritten Abschnitt die spielerischen Beispiele vom Anfang. Nach einem Einschub über die Homotopietheorie von höher dimensionalen Sphären behandeln wir noch die klassischen Beispiele von Mannigfaltigkeiten, die eine glatte Gruppenstruktur tragen, also von sogenannten Lie-Gruppen. Nach Einführung des Begriffs der glatten Abbildung haben wir genügend Einsicht, um uns abstrakten Mannigfaltigkeiten zuzuwenden, damit meine ich solche Mannigfaltigkeiten die nicht (von vornherein) in einem umgebenden Euklidischen Raum sitzen. Nach Produkten und disjunkten Vereinigungen von Mannigfaltigkeiten gehen wir dann noch auf die Reichhaltigkeit der glatten Funktionen auf ihnen ein, insbesonders betrifft das Trennungsaxiome wie etwa jenes von Hausdorff, Lokalkompaktheit und vor allem Parakompaktheit und die damit äquivalente Existenz von Partitionen der eins, die das zentrale Hilfsmittel darstellen um von lokalen Konstruktionen (also z.B. solchen aus der Analysis) zu globalen übergehen zu können.

9. Beispiele zweidimensionaler Flächen

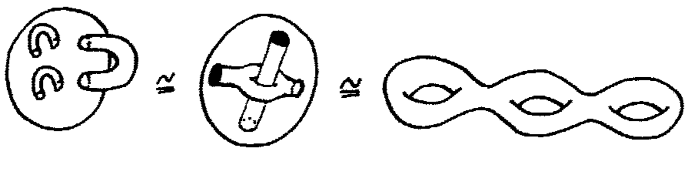
Wir wollen uns in diesem Abschnitt vorerst spielerisch mit zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten vertraut machen. Das sind Objekte, die lokal, bis auf Verbiegungen und Dehnungen, wie eine Scheibe im $\mathbb{R}^2$ aussehen.

9.1 Beispiele orientierbarer Flächen





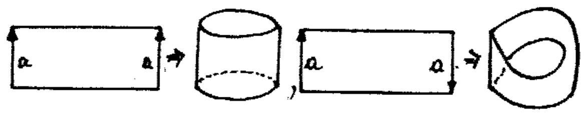
Sphäre S^2 und *Zylinder* $S^1 \times \mathbb{R}$



9.2 Klassifikationssatz für orientierbare Flächen.
Jede zweidimensionale, kompakte, zusammenhängende Fläche im $\mathbb{R}^3$ *ist homöomorph zu einer Fläche von Geschlecht g, d.h. entsteht aus der Sphäre durch Ankleben von g Zylinder.*

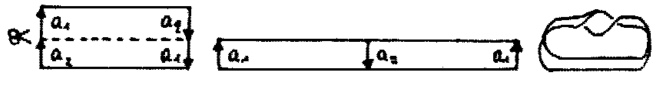
Ohne Beweis, siehe z.B. [**57**, 9.3.5]

9.3 Beispiele nicht-orientierbarer Flächen

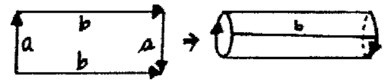


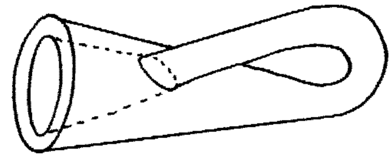
Beispiele von zweidimensionalen, zusammenhängenden, nicht orientierbaren Flächen:

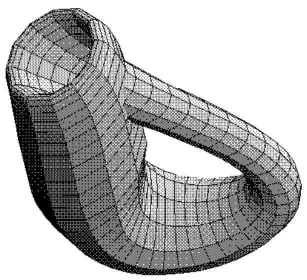
Schneidet man das Möbiusband der Länge nach auf, so erhält man ein zweifach verdrehtes Band, das man im $\mathbb{R}^4$ aufdrehen kann (siehe (11.10)).



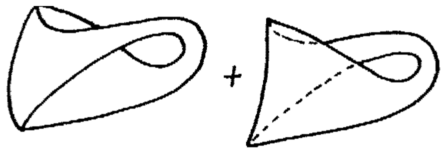
Beispiele von zweidimensionalen, zusammenhängenden, kompakten, nicht orientierbaren Flächen:



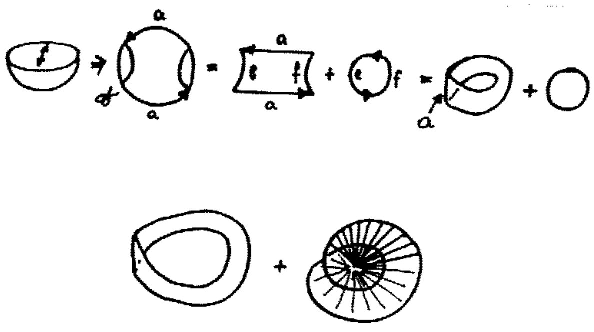




Das nennt man die Klein'sche Flasche, die man im $\mathbb{R}^4$ ohne Doppelpunkte realisieren kann und die auch durch Verkleben zweier Möbiusbänder entsteht.



Ein anderes Beispiel ist die projektive Ebene $\mathbb{P}^2$, dies ist die Menge aller Geraden durch den Nullpunkt im $\mathbb{R}^3$. Man kann die projektive Ebene aus der Sphäre auf folgende Weise erhalten: Die antipodalen Punkte auf der Sphäre erzeugen die gleiche Gerade und müssen miteinander identifiziert werden. Dazu kleben wir die nördliche Hemisphäre antipodal auf die südliche. Wir müssen noch die gegenüberliegenden Punkte am Äquator miteinander identifizieren. Hierzu verformen wir die Halbkugel zu einer Scheibe, von der wir auf beiden Seiten einen Halbkreis ausschneiden und erhalten nach Verkleben der antipodalen Punkte am Äquator ein Möbiusband und eine Scheibe. Nun muß man nur mehr den Rand der Scheibe mit dem des Möbiusbandes verkleben.



Man kann sich das auf drei Arten vorstellen:

1) Man zeichnet das Möbiusband und klebt die Scheibe (mit Selbstdurchdringung) an.

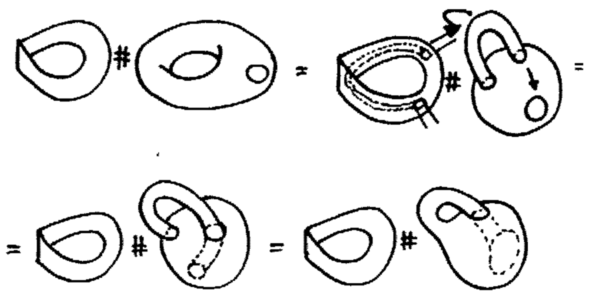
2) Man zeichnet die Scheibe und klebt das Möbiusband (mit Selbstdurchdringung) an. Das nennt man auch die Kreuzhaube.

3) Auch hier kleben wir an ein Möbiusband (dreifach verdreht und selbstdurchdrungen) eine Scheibe. Das nennt man auch Boy's Surface, siehe die Zeichnung auf der nächsten Seite.

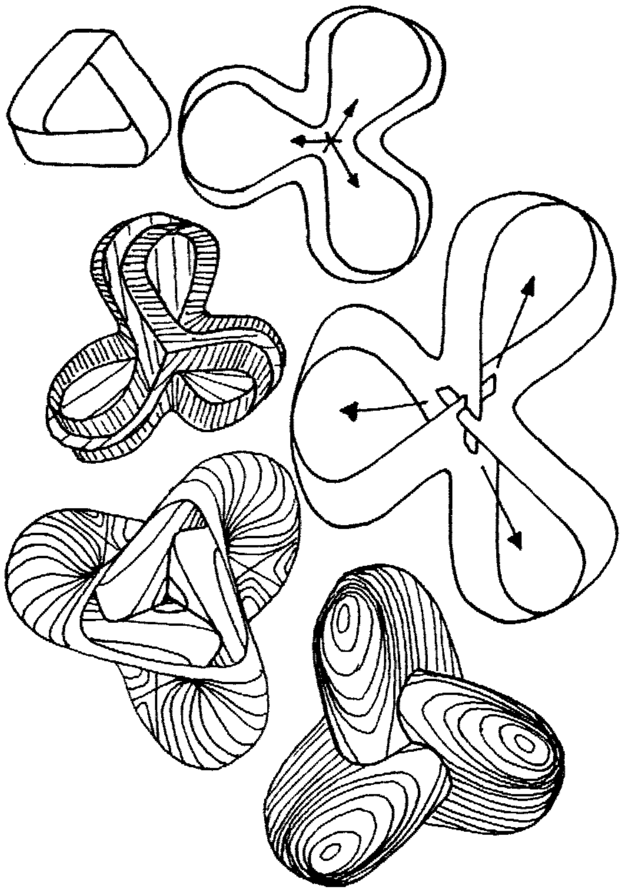
9.4 Klassifikationssatz nicht-orientierbarer Flächen. *Jede nicht orientierbare, zweidimensionale, zusammenhängende, kompakte Fläche entsteht aus einer Sphäre durch Ankleben von endlich vielen (≥ 1) Kreuzhauben. Die Anzahl der angeklebten Kreuzhauben heißt Geschlecht der Fläche.*

Ohne Beweis, siehe z.B. [**57**, 9.3.10].

Klebt man an einen Torus mit Loch ein Möbiusband, so ist das das Gleiche, wie wenn man an eine Klein'sche Flasche mit Loch ein Möbiusband klebt.



Boy's Surface



10. Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

In diesem Abschnitt wollen wir Mannigfaltigkeiten als hinreichend “reguläre” Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definieren. Wir werden sehen, daß diese auf verschiedenste Weise beschrieben werden können.

10.1 Definition (reguläre Abbildungen)

Eine glatte Abbildung $f : U \to V$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen sind, heißt REGULÄR, falls der Rang der Ableitung in jedem Punkt $x \in U$ so groß wie möglich, also gleich $\min\{n, m\}$ ist.

Beachte, daß eine in einem Punkt reguläre Abbildung lokal um diesen Punkt regulär ist, denn der Rang kann lokal nicht fallen.

Aus der linearen Algebra kennen wir folgende Beziehungen für den Rang rang(A) einer linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{Bild}(A)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\operatorname{Ker}(A))$$

Falls also $m \leq n$ ist, so bedeutet die Regularität, daß die Ableitung in jedem Punkt surjektiv ist. Anderenfalls bedeutet sie, daß die Ableitung in jedem Punkt injektiv ist.

Für die Äquivalenz der in (10.4) zu gebende Beschreibung "schöner" Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ benötigen wir die folgenden zwei zentralen Sätze aus der mehrdimensionalen Analysis:

10.2 Inverser Funktionensatz. *Sei U offen im $\mathbb{R}^n$ und sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ glatt, mit $f(0) = 0$, und invertierbarer Ableitung an der Stelle 0. Dann ist f ein lokaler Diffeomorphismus, d.h. es gibt offene Umgebungen V,V' von 0, sodaß $f : V \to V'$ bijektiv und f^{-1} glatt ist.*

Ohne Beweis, siehe reelle Analysis.

10.3 Impliziter Funktionensatz. *Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ glatt mit $f(0,0) = 0$ und $\partial_2 f(0,0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ invertierbar. Dann gibt es lokal eine eindeutige Lösung $y(x)$ von $f(x, y(x)) = 0$ und $x \mapsto y(x)$ ist C^∞.*

Beweis. Wir definieren $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ mit $F(x,y) := (x, f(x,y))$. Diese Funktion ist glatt, und $F(0,0) = 0$. Abgeleitet ergibt das eine $(n+m) \times (n+m)$-Matrix:

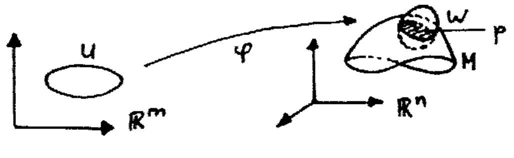
$$F'(0,0) = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ * & \partial_2 f(0,0) \end{pmatrix}$$

Diese ist invertierbar, also folgt aus dem inversen Funktionensatz, daß F^{-1} lokal existiert und glatt ist. Da F in der ersten Variable die Identität ist, gilt gleiches auch für F^{-1}, also sei $(u, g(u,v)) := F^{-1}(u,v)$. Dann gilt:

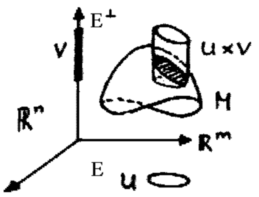
$$\begin{aligned} f(x,y) = 0 &\Leftrightarrow F(x,y) = (x,0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x,y) = F^{-1}(x,0) = (x, g(x,0)) \Leftrightarrow y = g(x,0) \qquad \square \end{aligned}$$

10.4 Satz (Charakterisierung von Teilmannigfaltigkeiten).
Für eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $p \in M$ und $m \leq n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

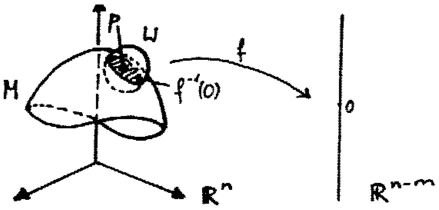
1. *(Lokale Parametrisierung) Es gibt eine glatte, bei 0 reguläre Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, wobei $0 \in U$ offen im $\mathbb{R}^m$ und $\varphi(0) = p$, so daß für alle offenen Umgebungen U_1 von $0 \in U$ eine offene Umgebung W von p in $\mathbb{R}^n$ existiert mit $\varphi(U_1) = W \cap M$.*



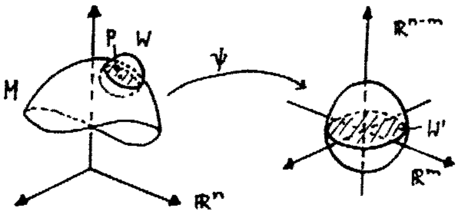
2. *(Lokaler Graph) Es gibt eine glatte Abbildung $g : U \to V$, wobei U offen in einem m-dimensionalen Teilraum E des $\mathbb{R}^n$ und V offen in $E^\perp$ ist. Dabei soll gelten: $p \in M \cap (U \times V) = \mathrm{Graph}(g) := \{(x, g(x)) : x \in U\} \subseteq E \times E^\perp \cong \mathbb{R}^n$.*



3. (lokale Gleichung) *Es gibt eine glatte, bei p reguläre Abbildung $f : W \to \mathbb{R}^{n-m}$, wobei $p \in W$ offen im $\mathbb{R}^n$ und $f^{-1}(0) = M \cap W$ ist.*

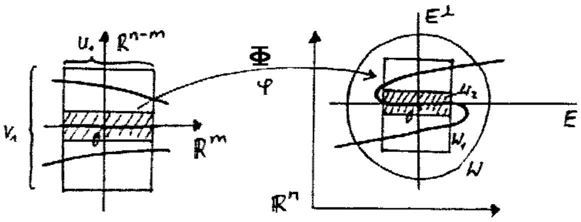


4. (lokale Trivialisierung) *Es gibt einen Diffeomorphismus $\Psi : W \to W'$, wo $0 \in W'$ offen in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ und $p \in W$ offen im $\mathbb{R}^n$ ist, und es gilt: $\Psi(M \cap W) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap W'$.*



Beweis. O.B.d.A. sei $p = 0 \in \mathbb{R}^n$.

($1 \Rightarrow 4$) Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ das Bild von $\varphi'(0)$. Dann ist $\dim(E) = m$ und bezüglich $E \oplus E^\perp \cong \mathbb{R}^n$ ist $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ und $\varphi'(0) = (\varphi_1'(0), \varphi_2'(0))$. Folglich ist $\varphi_2'(0) = 0$ und $\varphi_1'(0) : \mathbb{R}^m \to E$ ist injektiv (also bijektiv).



Sei $\Phi : \mathbb{R}^m \oplus E^\perp \to E \oplus E^\perp$ definiert durch

$$\Phi(u, v) := \varphi(u) + v = (\varphi_1(u), \varphi_2(u) + v).$$

Die Jacobimatrix von Φ bei $(0, 0)$ ist:

$$\Phi'(0,0) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(0) & 0 \\ \varphi_2'(0) & \mathrm{id} \end{pmatrix}.$$

Sie ist invertierbar, da $\varphi_1'(0) : \mathbb{R}^m \to E$ bijektiv ist. Aus dem Inversen-Funktionensatz (10.2) folgt, daß Φ ein lokaler Diffeomorphismus ist, d.h. $\exists\, U_1 \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\exists\, V_1 \subseteq E^\perp$ offen und $\exists\, W_1 \subseteq W$ offen, sodaß $\Phi : U_1 \times V_1 \to W_1$ ein Diffeomorphismus ist. Also ist

$$\varphi(U_1) = \Phi(U_1 \times \{0\}) \subseteq W_1 \subseteq W.$$

Wegen der Eigenschaft (1) von φ existiert ein offenes $W_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, und o.B.d.A. ist $W_2 \subseteq W_1$, sodaß $\varphi(U_1) = W_2 \cap M$. Wir definieren $W' := \Phi^{-1}(W_2)$. Dann ist $U_1 \times \{0\} \subseteq W'$, denn $\Phi(U_1 \times \{0\}) = \varphi(U_1) = W_2 \cap M$, und weiters ist $\Phi : W' \to W_2$ ein Diffeomorphismus mit inverser Abbdildung $\Psi := \Phi^{-1} : W_2 \to W'$. Für $z \in W_2$ gilt:

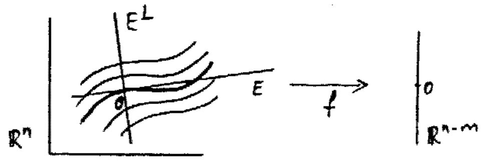
$$\begin{aligned} z \in M &\Leftrightarrow \exists\, u \in U_1 : \Phi(u,0) = \varphi(u) = z \\ &\Leftrightarrow \Psi(z) = (u,0) \text{ für ein } u \in U_1 \\ &\Leftrightarrow \Psi(z) \in (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap W'. \end{aligned}$$

Insbesonders ist φ auf U_1 die Einschränkung eines Homöomorphismuses, also $\varphi : U_1 \to M$ eine topologische Einbettung auf eine offene Teilmenge von M.

($4 \Rightarrow 3$) Sei $f := \mathrm{pr}_2 \circ \psi$, wobei $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^{n-m}$ die zweite Projektion ist. Da $f'(z) = \underbrace{\mathrm{pr}_2}_{\text{surj.}} \circ \underbrace{\psi'(z)}_{\text{bij.}}$ surjektiv ist, ist f regulär. Sei $z \in W$ dann gilt:

$$z \in M \Leftrightarrow \psi(z) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \Leftrightarrow (\mathrm{pr}_2 \circ \psi)(z) = f(z) = 0$$

($3 \Rightarrow 2$) Sei f eine lokale Gleichung wie in (3).



Wir definieren $E := \operatorname{Ker} f'(0)$ und verwenden $\mathbb{R}^m \cong E \times E^\perp$. Wegen

$$\underbrace{\dim \operatorname{Ker} f'(0)}_{E} + \underbrace{\dim \operatorname{Bild} f'(0)}_{n-m} = \underbrace{\dim \mathbb{R}^n}_{n},$$

ist $\dim E = m$ und $\dim E^\perp = n - m$. Gesucht ist eine Funktion $g : E \to E^\perp$, welche implizit gegeben ist durch $f(x,y) = 0$ (d.h. $(x,y) \in M$), und $y = g(x)$. Um den impliziten Funktionensatz anwenden, betrachten wir die zweite partielle Ableitung von f:

$$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)} = \partial_2 f(0,0) : E^\perp \to \mathbb{R}^{n-m}.$$

Diese ist surjektiv, da wegen $f'(0)(v_1,v_2) = \partial_1 f(0)(v_1) + \partial_2 f(0)(v_2)$ für $(v_1,0) \in E \times \{0\} \cong E = \operatorname{Ker} f'(0)$ folgendes gilt: $\partial_1 f(0)(v_1) = f'(0)(v_1,0) = 0$. Da $f'(0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ surjektiv ist, ist also auch $\partial_2 f(0) : E^\perp \to \mathbb{R}^{n-m}$ surjektiv und wegen $\dim(E^\perp) = n-m$ somit bijektiv. Aus dem impliziten Funktionensatz (10.3) folgt nun: $\exists\, U \subseteq E$ offen, $\exists\, V \subseteq E^\perp$ offen und $g : U \to V$ glatt, mit $g(x) = y \Leftrightarrow f(x,y) = 0$

($2 \Rightarrow 1$) Sei M lokal als Graph von $g : U \to V$ beschrieben. Wir definieren die glatte Abbildung $\varphi : U \to E \times E^\perp = \mathbb{R}^n$ durch $x \mapsto (x, g(x))$. Die Frage ist, ob φ die Menge

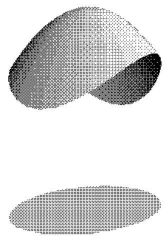
M lokal beschreibt. Dazu schließen wir für $(x,y) \in U \times V =: W$ wie folgt:

$$(x,y) \in M \Leftrightarrow (x,y) \in \mathrm{Graph}(g) \Leftrightarrow y = g(x) \Leftrightarrow (x,y) = (x, g(x)) = \varphi(x).$$

Die Abbildung φ ist eine Einbettung, denn $(x,y) \mapsto y$ beschreibt eine Linksinverse. □

Definition (Konkrete Mannigfaltigkeit)

Eine Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ mit einer der obigen äquivalenten Eigenschaften für all ihre Punkte $p \in M$ heißt C^∞-(Teil-)Mannigfaltigkeit (des $\mathbb{R}^n$) der Dimension m. Im Gegensatz zu Kurven dürfen diese Mannigfaltigkeiten selbst für $m = 1$ keine Doppelpunkte besitzen.



Eine glatte reguläre Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \to M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit offenen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\varphi(0) = p$, die eine Einbettung auf eine offene Teilmenge von M ist, heißt lokale (bei p zentrierte) Parametrisierung von M. In $(1 \Rightarrow 4)$ haben wir gezeigt, daß ein φ, welches (1) erfüllt, lokal eine Parametrisierung ist. Die Komponenten der Umkehrabbildung zu einer lokalen Parametrisierung heißen lokale Koordinaten von M.

11. Beispiele von Teilmannigfaltigkeiten

In diesen Abschnitt geben wir nun eine Reihe von Beispielen und machen damit auch die Flächen aus (9) präzise.

11.1 Kreis

1. Gleichung: $x^2 + y^2 = R^2$.
   Sei also $W := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dann ist $f : W \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := x^2 + y^2 - R^2$ eine Gleichung für M, die auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ regulär ist.
2. Parametrisierung: $\varphi \mapsto (x,y) := (R \cdot \cos\varphi, R \cdot \sin\varphi)$.
   Für alle $(x_0, y_0) \in M$ existiert ein $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ (gegeben durch $e^{i\varphi_0} = (x_0, y_0)$), sodaß $\varphi \mapsto (x,y)$ eine lokale Parametrisierung von $U := \,]\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi[$ auf $W \cap M$ mit $W := \mathbb{R}^2 \setminus \{(-x_0, -y_0)\}$ ist.
3. Graph: $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ oder $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$
   Sei $E := \mathbb{R} \times \{0\}$, $U := \,]-R, +R[\, \subset E$ und $V := \,]0, +R[\, \subset E^\perp$. Dann ist $M \cap (U \times V) = \{(x, \sqrt{R^2 - x^2}) : x \in U\}$ eine lokale Darstellung von M als Graph von $g : U \to V$.
4. Trivialisierung: $(R, \varphi) \mapsto (R \cdot \cos\varphi, R \cdot \sin\varphi)$ also $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\psi(M) = \{R\} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$. Dies sind gerade Polarkoordinaten.

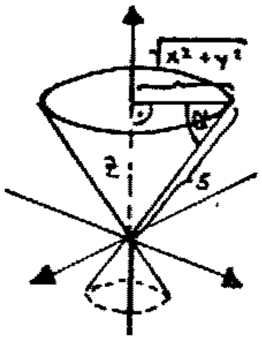
11.2 Zylinder

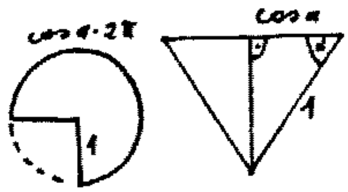
1. Gleichung: $x^2 + y^2 + 0 \cdot z = R^2$
2. Parametrisierung: $(\varphi, z) \mapsto (R \cdot \cos\varphi, R \cdot \sin\varphi, z)$ oder isometrisch $(\varphi, z) \mapsto (R\, e^{i\,\varphi/R}, z)$
3. Graph: $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ oder $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$
4. Trivialisierung: $(\varphi, r, z) \leftrightarrow (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi, z)$, das sind die Zylinderkoordinaten.

11.3 Kegel

Drehung einer Geraden durch Null mit Anstieg α um die z-Achse.

1. Gleichung: $\tan\alpha = z/\sqrt{x^2 + y^2}$ oder $(x^2 + y^2)\tan^2\alpha = z^2$,
2. Parametrisierung: $(\varphi, s) \mapsto (s\cos\alpha\cos\varphi, s\cos\alpha\sin\varphi, s\sin\alpha)$
3. Graph: $z = \pm\tan\alpha\sqrt{x^2 + y^2}$
4. Trivialisierung: $(\varphi, \alpha, s) \leftrightarrow (s\cos\alpha\cos\varphi, s\cos\alpha\sin\varphi, s\sin\alpha)$, das sind die Kugelkoordinaten.





Eine bessere Parametrisierung erhält man durch Aufrollen des Kegels in eine Ebene:

$$(x, y) \mapsto (r, \psi) \mapsto \left(s := r, \varphi := \frac{\psi}{\cos\alpha}\right) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cos\left(\frac{\psi}{\cos\alpha}\right) \\ r\cos\alpha\sin\left(\frac{\psi}{\cos\alpha}\right) \\ r\sin\alpha \end{pmatrix},$$

wobei (x, y) kartesische und (ψ, r) Polarkoordinaten in der Ebene sind.

Daß diese Parametrisierung längenbewahrend ist, sieht man auch wie folgt: Die Länge einer Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist durch $L(c) = \int_a^b |c'(t)|\, dt$ gegeben. Damit Kurve und Bildkurve unter einer Abbildung φ gleiche Länge haben, muß also $\int_a^b |c'(t)|\, dt = \int_a^b |\varphi'(c(t)) \cdot c'(t)|\, dt$ gelten. Dies ist genau dann für alle Kurven c erfüllt, wenn $|\varphi'(p) \cdot v| = |v|$ für alle p und v gilt, d.h. $\varphi'(p)$ eine Isometrie ist.

Die Ableitung obiger Parametrisierung ist die Zusammensetzung von

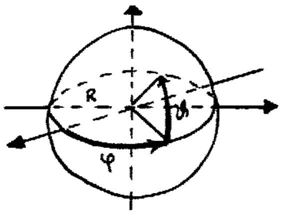
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot\cos(\frac{\psi}{\cos\alpha}) & -r\cos\alpha\cdot\sin(\frac{\psi}{\cos\alpha}) \\ \cos\alpha\cdot\sin(\frac{\psi}{\cos\alpha}) & r\cos\alpha\cdot\cos(\frac{\psi}{\cos\alpha}) \\ \sin\alpha & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos\alpha}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\psi & -r\sin\psi \\ \sin\psi & r\cos\psi\end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\,\cos\psi\,\cos(\frac{\psi}{\cos\alpha}) - \sin\psi\,\sin(\frac{\psi}{\cos\alpha}) & \cos\alpha\,\sin\psi\,\cos(\frac{\psi}{\cos\alpha}) - \cos\psi\,\sin(\frac{\psi}{\cos\alpha}) \\ \cos\alpha\,\cos\psi\,\sin(\frac{\psi}{\cos\alpha}) + \sin\psi\,\cos(\frac{\psi}{\cos\alpha}) & \cos\alpha\,\sin\psi\,\sin(\frac{\psi}{\cos\alpha}) + \cos\psi\,\cos(\frac{\psi}{\cos\alpha}) \\ \cos\alpha\,\cos\psi & \sin\alpha\,\sin\psi \end{pmatrix}$$

von der man mit längerer direkter Rechnung zeigen kann, daß sie isometrisch ist.

11.4 Sphäre

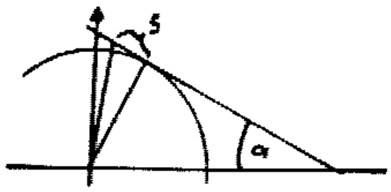
1. Gleichung: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
2. Parametrisierung: $(\varphi, \theta) \mapsto (R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta)$ mit Längengrade φ und Breitengrade θ.
3. Graph: $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$
4. Trivialisierung: Kugelkoordinaten.



Man kann eine Sphäre auch parametrisieren, indem man auf den berührenden Kegel mit Anstieg α projiziert:

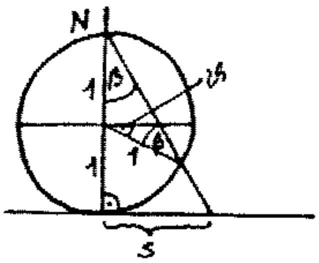
$$(x, y) \mapsto (\varphi, s) \mapsto (\varphi, \theta(s)) \mapsto \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta \end{pmatrix},$$

dabei sind (φ, s) die Parameter der obigen Parametrisierung des Kegels und (φ, θ) die Parameter der Kugel.



Spezielle Wahlen der Funktion θ liefern die Radialprojektion, bzw. die Normalprojektion auf die Erzeugenden des Kegels, siehe Aufgabe (72.42).

Besonders wichtig ist die stereographische Projektion: Man projiziert von einem Punkt der Sphäre (o.B.d.A. dem Nordpol) auf die Tangentialebene im antipodalen Punkt.



Es ist $2\beta + (\frac{\pi}{2} + \theta) = \pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$ und somit ist

$$\frac{s}{2} = \tan\beta = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \tan(\theta/2)}{1 + \tan(\theta/2)}.$$

Diese Projektion ist winkelerhaltend und Kreise werden auf Kreise oder Geraden abgebildet, siehe Aufgabe (72.41).

11.5 n-Sphäre

$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Die Funktion $f : x \mapsto |x|^2 - 1$ ist eine reguläre Gleichung für S^n, denn $f'(x)(x) = 2|x|^2 = 2$ für $x \in S^n$. Als lokale Koordinaten verwenden wir die stereographische Projektion (aber diesmal auf die Äquatorialebene, was einen Faktor $1/2$ bzgl. der gerade Besprochenen ergibt), d.h. wir suchen zu $x \in S^n$ ein $y \in \mathbb{R}^n = p^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$, wobei $p \in S^n$ der gewählte Pol ist, mit

$$\begin{aligned}
0 &= \langle p, p + \lambda(x - p)\rangle = |p|^2 - \lambda\langle p, p - x\rangle \\
\Rightarrow \lambda &= \frac{1}{\langle p, p - x\rangle} = \frac{1}{1 - \langle p, x\rangle} \Rightarrow \\
\Rightarrow y &= (1 - \lambda)p + \lambda x = \frac{1}{1 - \langle p, x\rangle}(x - \langle p, x\rangle p).
\end{aligned}$$

Umgekehrt

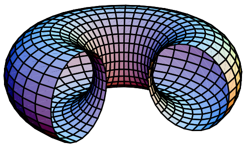
$$\begin{aligned}
& x = p + \mu(y - p) \text{ mit } |x| = 1 \\
\Rightarrow\ & 1 = \langle x, x\rangle = \langle p + \mu(y - p), p + \mu(y - p)\rangle \\
& \quad = 1 + 2\langle p, \mu(y - p)\rangle + \mu^2\langle y - p, y - p\rangle \\
\Rightarrow\ & 0 = \mu^2|y - p|^2 + 2\mu\langle p, y - p\rangle = \mu(\mu|y - p|^2 - 2\langle p, p - y\rangle).
\end{aligned}$$

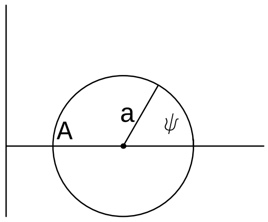
Aus $\mu = 0$ erhalten wir die uninteressante Lösung $x = p$. Andernfalls ist

$$\mu = \frac{2(1 - \langle p, y\rangle)}{|y|^2 - 2\underbrace{\langle y, p\rangle}_{0} + 1} = \frac{2}{|y|^2 + 1} \quad \text{und damit}$$

$$x = \frac{1}{|y|^2 + 1}\Big(2y + (|y|^2 - 1)p\Big)$$

11.6 Torus





1. Gleichung: $z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - A)^2 = a^2$
2. Parametrisierung:

$$(\varphi, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} (A + a\cos\psi)\cos\varphi \\ (A + a\cos\psi)\sin\varphi \\ a\sin\psi \end{pmatrix},$$

mit Längengrade φ und Breitengrade ψ.

Für den speziellen Torus $z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - A)^2 = A^2 - 1 = a^2$ mit $A > 1$ berechnen wir das Urbild unter der stereographischen Projektion $\mathbb{R}^4 \supset S^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich des Punktes $(0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$ wie folgt:

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto \frac{1}{1-y_2}(x_1, y_1, x_2, 0) \text{ da } y = \frac{x - \langle x, p\rangle p}{1 - \langle x, p\rangle} \text{ ist.}$$

Diesem Torus entspricht folgende Teilmenge der S^3:

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 + x_2{}^2 + y_2{}^2 = 1$$

$$\left(\frac{x_2}{1-y_2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}}{1-y_2} - A\right)^2 = A^2 - 1 = a^2$$

Dies formen wir nun um:

$$\frac{x_2{}^2}{(1-y_2)^2} + \frac{x_1{}^2 + y_1{}^2}{(1-y_2)^2} - 2A\frac{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}}{1-y_2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2{}^2 + 1 - (x_2{}^2 + y_2{}^2) - 2A\sqrt{1 - (x_2{}^2 + y_2{}^2)} \cdot (1 - y_2) + 1 - 2y_2 + y_2{}^2 = 0$$

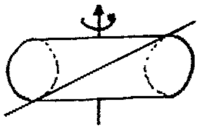
$$\Leftrightarrow 2(1 - y_2) = 2A\sqrt{1 - (x_2{}^2 + y_2{}^2)}(1 - y_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1{}^2 + y_1{}^2 + x_2{}^2 + y_2{}^2 = 1 \\ \qquad 1 - (x_2{}^2 + y_2{}^2) = \dfrac{1}{A^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1{}^2 + y_1{}^2 = \dfrac{1}{A^2} \dots \text{ Kreis im } \mathbb{R}^2 \times \{(0,0)\} \\ x_2{}^2 + y_2{}^2 = \dfrac{A^2 - 1}{A^2} = \dfrac{a^2}{A^2} \dots \text{ Kreis im } \{(0,0)\} \times \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Der Torus ist also das kartesische Produkt $S^1 \times S^1$ von zwei aufeinander normalstehenden Kreisen.

Bemerkung: Folgender spezielle Schnitt durch den Torus ergibt zwei einander schneidende Kreise:



Wir verwenden auf der Schnittebene $z = \frac{a}{\sqrt{A^2-a^2}}x$ die Basis mit den orthonormalen Vektoren $(\frac{\sqrt{A^2-a^2}}{A}, 0, \frac{a}{A})$ sowie $(0,1,0)$ und bezeichnen mit (s,y) die entsprechenden Koordinaten. Dann ist $x = \frac{\sqrt{A^2-a^2}}{A} \cdot s$ und $z = \frac{a}{A} \cdot s$. Setzen wir dies in die Torusgleichung $z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - A)^2 = a^2$ ein, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a}{A}s\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{A^2-a^2}{A^2}s^2 + y^2} - A\right)^2 &= a^2 \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\; a^2(A^2 - s^2) &= \left(\sqrt{(A^2-a^2)s^2 + A^2y^2} - A^2\right)^2 \\
&= (A^2-a^2)s^2 + A^2y^2 + A^4 - 2A^2\sqrt{(A^2-a^2)s^2 + A^2y^2} \\
\Leftrightarrow\; s^2 + y^2 + (A^2 - a^2) &= 2\sqrt{(A^2-a^2)s^2 + A^2y^2} \\
\Leftrightarrow\; \big(s^2 + y^2 + (A^2-a^2)\big)^2 &= 4(A^2-a^2)s^2 + 4A^2y^2 \\
\Leftrightarrow\; \big(A^2 - (s^2 + (y+a)^2)\big) \cdot \big(A^2 - (s^2 + (y-a)^2)\big) &= 0,
\end{aligned}
$$

und das ist die Gleichung zweier Kreise mit Mittelpunkte $(0, \pm a)$ in den (s,y)-Koordinaten und Radius A.

11.7 Hopffaserung $S^3 \to S^2$

Sie ist definiert durch folgendes kommutatives Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
S^3 \arrow[r, dotted, "\text{Hopffaserung}"] \arrow[d, hook] & S^2 \arrow[d, "\text{stereogr.Proj.}"] \\
\mathbb{C}^2 \arrow[r] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

$$(z_1, z_2) \longrightarrow \frac{z_2}{z_1}$$

Da die Inverse zur stereographischen Projektion um $p = (0,0,1)$ die Abbildung $y \mapsto \frac{2y + (|y|^2-1)p}{|y|^2+1} = \frac{1}{|y|^2+1}(2y, |y|^2 - 1)$ ist, bekommen wir folgende Formel für die

Hopffaserung:

$$\begin{aligned}
(z_1,z_2) \mapsto \frac{1}{|\frac{z_2}{z_1}|^2+1}\Big(2\frac{z_2}{z_1}, |\frac{z_2}{z_1}|^2-1\Big) &= \\
&= \frac{z_1\bar{z_1}}{|z_1|^2+|z_2|^2}\Big(2\frac{z_2}{z_1}, \frac{|z_2|^2-|z_1|^2}{z_1\bar{z_1}}\Big) \\
&= \underbrace{\frac{1}{|z_1|^2+|z_2|^2}}_{1 \text{ weil } (z_1,z_2)\in S^3}\Big(2z_2\bar{z_1}, |z_2|^2-|z_1|^2\Big).
\end{aligned}$$

Wir betrachten die Urbilder in der S^3 eines Breitenkreises auf der S^2, dabei sind θ die Breitengrade.

$$\begin{aligned}
(z_1,z_2)\in S^3,\ |\frac{z_2}{z_1}| = r\Big(=\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})\Big) &\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} |z_2| = r|z_1| \\ (z_1,z_2)\in S^3 \end{Bmatrix} &\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} |z_2|^2 = r^2|z_1|^2 \\ |z_1|^2+|z_2|^2 = 1 \end{Bmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} |z_2| = r|z_1| \\ |z_1|^2(1+r^2) = 1 \end{Bmatrix} &\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} |z_2|^2 = r^2\dfrac{1}{1+r^2} \\ |z_1|^2 = \dfrac{1}{1+r^2} \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Das entspricht nach (11.6) unter der stereographischen Projektion $S^3 \to \mathbb{R}^3$ einem Torus im $\mathbb{R}^3$, wo $A = \sqrt{r^2+1}$ und $a = r$ ist.

Wir betrachten das Urbild in S^3 des Südpols auf der S^2:

$$(0,0,-1)\in S^2 \ \hat{=}\ (r=0)\in\mathbb{R}^2 \ \hat{=}\ (|z_1|=1, z_2=0)\subset S^3,$$

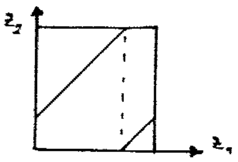
bzw. des Nordpols auf der S^2:

$$(0,0,+1)\in S^2 \ \hat{=}\ (r=\infty)\subset\mathbb{R}^2 \ \hat{=}\ (z_1=0, |z_2|=1)\subset S^3.$$

Wir behaupten allgemein: das Urbild jedes Punktes auf der S^2 (welcher bzgl. der stereographischen Projektion $S^2 \to \mathbb{C}$ durch $z_0\in\mathbb{C}$) gegeben ist, ist ein Kreis in der $S^3\subset\mathbb{R}^4$, den man als Schnitt der Sphäre $S^3\subset\mathbb{R}^4$ mit der Ebene $z_2 = z_1 z_0$ erhält:

$$\begin{Bmatrix} (z_1,z_2)\in S^3 \\ \dfrac{z_2}{z_1} = z_0\in\mathbb{C} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} |z_2|^2+|z_1|^2 = 1 \\ z_2 = z_1 z_0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} |z_1|^2 = \dfrac{1}{1+r^2} \\ |z_2|^2 = r^2\dfrac{1}{1+r^2} \\ z_2 = z_1 z_0 \end{Bmatrix}$$

d.h. z_1 durchläuft einen Kreis, gleichzeitig durchläuft z_2 ebenso einen Kreis.



In stereographischen Koordinaten entspricht den ersten beiden Gleichungen im $\mathbb{R}^3$ der Torus $T: z^2 + (\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{r^2+1})^2 = r^2$. O.B.d.A. sei $r = z_0\in\mathbb{R}$, ansonsten drehen wir um $e^{-i\theta}$, was einer Drehung in der (x,y)-Ebene entspricht.

$$\text{Auf der } S^3 : \left\{ \begin{aligned} z_2 &= r z_1 \\ |z_2|^2 &= r^2 \frac{1}{1+r^2} \\ |z_1|^2 &= \frac{1}{1+r^2} \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} x_2 = r x_1,\ & y_2 = r y_1 \\ |z_2|^2 &= r^2 \frac{1}{1+r^2} \\ |z_1|^2 &= \frac{1}{1+r^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Entspricht im } \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{aligned} & z = rx \\ & x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 2ry \\ & z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{r^2+1})^2 = r^2 \end{aligned} \right\}$$

Wobei wir $z_1 = x_1 + i\, y_1$, $z_2 = x_2 + i\, y_2$ gesetzt haben und die Formeln für die stereographische Projektion verwendeten:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2x}{1+|(x,y,z)|^2} & y_1 &= \frac{2y}{1+|(x,y,z)|^2} \\ x_2 &= \frac{2z}{1+|(x,y,z)|^2} & y_2 &= \frac{|(x,y,z)|^2 - 1}{1+|(x,y,z)|^2}. \end{aligned}$$

Also ist das Urbild eines Punktes in den beiden Schnittkreisen des Torus mit der Ebene $z = rx$ erhalten. Eine genauere Analyse liefert, daß es genau der vorne bzgl. y liegende der beiden ist.

Das Äußere des Volltorus in der S^3 ist wieder ein Torus, wobei das Innere das Urbild der Südhalbkugel und das Äußere das Urbild der Nordhalbkugel ist.

11.8 Beispiel. *Der Raum $L_r(n,m)$ aller $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ von fixen Rang r ist eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension $r\,(n+m-r)$.*

Beweis. Wir beschreiben $L_r(n,m)$ lokal mittels einer regulären Gleichung. Sei dazu $T_0 \in L_r(n,m)$, d.h. $\operatorname{rang}(T_0) = \dim \operatorname{Bild} T_0 = r$. Es sei $F := \operatorname{Bild} T_0$ und $E := \operatorname{Ker} T_0^\perp$. Dann ist $T_0|_E : E \to F$ injektiv, und wegen $\dim E = n - \dim \operatorname{Ker} T_0 = \dim \operatorname{Bild} T_0 = \dim F$ sogar bijektiv. Bezüglich der orthogonal-Zerlegungen $\mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp$ und $\mathbb{R}^m = F \oplus F^\perp$ hat also T_0 folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} \text{ mit } B_0 = 0,\ C_0 = 0,\ D_0 = 0 \text{ und } A_0 \text{ invertierbar.}$$

Sei nun U die (wegen $GL(E) \subseteq L(E,E)$ offen) offene Umgebung aller Matrizen $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ mit A invertierbar. Dann liegt T in $L_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ genau dann wenn, $\dim \operatorname{Bild} T = r$. Es ist

$$T \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av + Bw \\ Cv + Dw \end{pmatrix}.$$

Somit ist $T \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0$ genau dann, wenn $v = -A^{-1} B w$ und $Cv + Dw = 0$, oder äquivalent $v = -A^{-1} B w$ mit $C A^{-1} B w = D w$. Es ist also $r = \operatorname{rang} T = \dim \operatorname{Bild} T = \dim \operatorname{Dom} T - \dim \operatorname{Ker} T = n - \dim \operatorname{Kern} T$ genau dann, wenn alle $w \in E^\perp$ die Gleichung $C A^{-1} B w = D w$ erfüllen, d.h. $D = C A^{-1} B$ ist.

Die Abbildung

$$f : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \supseteq U \to L(E^\perp, F^\perp), \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto D - CA^{-1}B$$

beschreibt L_r lokal und ist glatt. Sie ist auch regulär, denn ihre Ableitung in Richtung $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$ ist $X \in L(E^\perp, F^\perp)$. Die Dimension von $L_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist somit $n\,m - (n - r)\,(m - r) = r\,(n + m - r)$. □

11.9 Beispiel. *Die Graßmannmannigfaltigkeit $G(r, n)$ der r-Ebenen durch 0 im $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmannigfaltigkeit von $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ der Dimension $r\,(n - r)$.*

Wenn wir $r = 1$ wählen, dann erhalten wir als Spezialfall die projektiven Räume $\mathbb{P}^{n-1} = G(1, n)$.

Beweis. Wir identifizieren die linearen Teilräume des $\mathbb{R}^n$ mit den orthogonal-Projektionen auf sie. Damit ist $G(r, n)$ eine Teilmenge der Mannigfaltigkeit $L_r(n, n)$. Sei E_0 ein Teilraum von $\mathbb{R}^n$ der Dimension r und P_0 die ortho-Projektion auf E_0 bezüglich der Zerlegung $\mathbb{R}^n = E_0 \oplus E_0^\perp$ ist P_0 dann durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Eine Umgebung von P_0 in $L_r(n, n)$ ist dann durch die Matrizen $\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$ mit invertierbaren A gegeben. Eine lineare Abbildung P ist genau dann eine ortho-Projektion, wenn sie idempotent ($P^2 = P$) und selbstadjungiert $P = P^t$ ist, oder äquivalent mit einer Gleichung, wenn $P^tP = P$ ist. In der Tat: Daß P eine Projektion ist, bedeutet $P|_{\operatorname{Bild} P} = \operatorname{id}$, d.h. $P^2 = P$, und eine Orthogonalprojektion zu sein bedeutet $\operatorname{Ker}(P) = \operatorname{Bild}(P)^\perp$. Aus $P^2 = P$ folgt aber $\operatorname{Ker}(P) = \operatorname{Bild}(1 - P)$, denn $P(1 - P) = 0$ und $Px = 0 \Rightarrow x = x - Px = (1 - P)x$. Somit ist $\operatorname{Ker}(P) \perp \operatorname{Bild}(P)$ genau dann, wenn $0 = \langle (1 - P)x, Py \rangle = \langle x, (1 - P^t)Py \rangle$ für alle x, y, d.h. $P = P^tP$. Umgekehrt folgt $P^t = (P^tP)^t = P^tP = P$ und somit $P = P^tP = P^2$. Für die Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$ ist das genau dann der Fall, wenn $A = A^t$ und $B^t = C$ (dann ist auch $(CA^{-1}B)^t = B^t(A^t)^{-1}C^t = CA^{-1}B$) und

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} A^tA + C^tC & A^tB + C^tCA^{-1}B \\ B^tA + B^t(A^t)^{-1}C^tC & B^tB + B^t(A^t)^{-1}C^tCA^{-1}B \end{pmatrix} = \\
&\qquad = \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & B^t(A^t)^{-1}C^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

oder äquivalent $A^tA + C^tC = A$ und damit

$$\begin{aligned}
A^tB + C^tCA^{-1}B &= A^tB + (A - A^tA)A^{-1}B = B, \\
B^tA + B^t(A^t)^{-1}C^tC &= B^tA + B^t(A^t)^{-1}(A - A^tA) = B^t(A^t)^{-1}A = C
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
B^tB + B^t(A^t)^{-1}C^tCA^{-1}B &= B^tB + B^t(A^t)^{-1}(A - A^tA)A^{-1}B \\
&= B^t(A^t)^{-1}B = CA^{-1}B
\end{aligned}$$

Zusammen sind die Gleichungen also $A^tA + C^tC = A$ ($\Rightarrow A^t = A$), $B = C^t$ und $D = CA^{-1}B$. Dies sind $r^2 + (n-r)^2 + r\,(n-r)$ unabhängige Gleichungen, und folglich sollte die Dimension von $G(r,n)$ gerade $n^2 - (r^2 + n^2 - 2nr + r^2 + nr - r^2) = nr - r^2 = r(n-r)$ sein.

Es bleibt also zu zeigen, daß die Gleichungen regulär sind und dafür ist es genug die Regularität der ersten Gleichung $A^tA + C^tC - A = 0$ zu zeigen. Ihr Differential in Richtung (X,Y) ist $(X,Y) \mapsto X^tA + A^tX - X + Y^tC + C^tY$. Wir müssen also die Gleichung $X^tA + A^tX - X + Y^tC + C^tY = Z$ lösen. Sei dazu $A = 1$ und $Y = 0$. Dann ist $X^t = X^t + X - X = Z$ sofort lösbar. □

11.10 Aufdrehen eines 2-fach verdrehten Bandes

Ein unverdrehtes Stück eines Bandes ist parametrisiert durch

$$\varphi_0 : [0, 2\pi] \times [-1, +1] \to \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4, \quad (\theta, r) \mapsto (\theta, r, 0, 0).$$

Ein zweifach verdrehtes Band ist parametrisiert durch

$$\varphi_\pi : [0, 2\pi] \times [-1, +1] \to \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4, \quad (\theta, r) \mapsto (\theta, r\cos\theta, r\sin\theta, 0).$$

Wir wollen nun eine Diffeotopie $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ des $\mathbb{R}^4$ finden, welche das nicht verdrehte Band in das 2-fach verdrehte Band überführt. Dazu bezeichnen wir die Koordinaten im $\mathbb{R}^4$ mit (x, y, z, w). Diese Diffeotopie $F(t;.)$ soll die Hyperebenen normal auf die x-Achse invariant lassen, und dort als Drehung wirken. Wir bezeichnen diese Drehung in der Hyperebenen $x + \{0\} \times \mathbb{R}^3$ zum Zeitpunkt t mit $R(t,x) \in SO(\mathbb{R}^3)$. Und zwar soll dies gerade eine Drehung um den Winkel $-t$ um die Achse $\ell = (\cos\frac{x}{2}, \sin\frac{x}{2}, 0)$ sein. Wir erhalten $R(t,x)$ indem wir zuerst um die w-Achse die Achse ℓ in die y-Achse drehen, sodann um die y-Achse um den Winkel t drehen, und danach die y-Achse zurück auf die ℓ-Achse um die w-Achse drehen. Die Matrizen-Darstellung von $R(t,x)$ bezüglich der Koordinaten (y, z, w) sieht also wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
&[R(t,x)] = \\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{x}{2} & -\sin\frac{x}{2} & 0 \\ \sin\frac{x}{2} & \cos\frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{x}{2} & \sin\frac{x}{2} & 0 \\ -\sin\frac{x}{2} & \cos\frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{x}{2} & -\sin\frac{x}{2} & 0 \\ \sin\frac{x}{2} & \cos\frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{x}{2} & \sin\frac{x}{2} & 0 \\ -\cos t\sin\frac{x}{2} & \cos t\cos\frac{x}{2} & \sin t \\ \sin t\sin\frac{x}{2} & -\sin t\cos\frac{x}{2} & \cos t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\frac{x}{2} + \cos t\sin^2\frac{x}{2} & (1-\cos t)\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} & -\sin t\sin\frac{x}{2} \\ (1-\cos t)\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} & \sin^2\frac{x}{2} + \cos t\cos^2\frac{x}{2} & \sin t\cos\frac{x}{2} \\ \sin t\sin\frac{x}{2} & -\sin t\cos\frac{x}{2} & \cos t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

In den Randpunkten $x = 0$ und $x = 2\pi$ ist

$$[R(t,0)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

und

$$[R(t,2\pi)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

hält also die y-Achse fix.

Unsere gesuchte Diffeotopie ist somit

$$F(t; x, y, z, w) := (x, R(t,x)(y,z,w))$$

und die entsprechende Isotopie

$$\begin{aligned} \varphi_t(\theta, r) :&= F(t, \varphi_0(\theta, r)) = (\theta, R(t,\theta)(r,0,0)) \\ &= \Big(\theta, \tfrac{r}{2}(1+\cos\theta+\cos t(1-\cos\theta)), \tfrac{r}{2}(1-\cos t)\sin\theta, r\sin t \sin\tfrac{\theta}{2}\Big) \end{aligned}$$

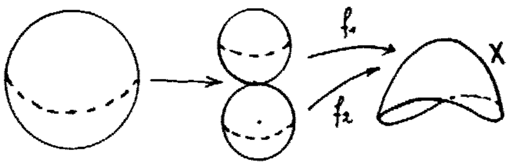
Klarerweise ist $\varphi_t(\theta, r) = (\theta, r, 0, 0)$ für $\theta = 0$ und für $\theta = 2\pi$. Weiters sind φ_0 und φ_π die gewünschten Randwerte. Und nach Konstruktion sind alle φ_t Einbettungen von $[0, 2\pi] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^4$.

12. Homotopiegruppen der Sphären

Dieser Abschnitt ist ein kurzer Exkurs über Homotopiegruppen und somit in die Homotopietheorie, einem Teilgebiet der algebraischen Topologie.

12.1 höhere Homotopiegruppen

In Analogie zur ersten Fundamentalgruppe $\pi(X) = \pi_1(X)$ der Homotopieklassen geschlossener Kurven durch einen fixen Punkt eines zusammenhängenden, topologischen Raumes, definiert man die höheren Homotopie-Gruppen $\pi_k(X)$ als die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $\varphi : S^k \to X$, welche einen ausgezeichneten Punkt der n-Sphäre auf einen fixen Punkt $x_0 \in X$ abbilden. Zwei solche Klassen $[f_1]$ und $[f_2]$ lassen sich multiplizieren, indem man die beiden Parameter-Sphären in ihren ausgezeichneten Punkten aneinander klebt, und dann eine andere k-Sphäre längs einem Großkreis durch ihren ausgezeichneten Punkt zusammenzieht, so daß die beiden Parameter-Sphären entstehen. Für $k > 1$ ist diese Gruppenstruktur kommutativ.



Anstelle “Löcher” mit “Lassos” (d.h. Elementen der $\pi_1(X)$) zu fangen, versucht man also “Netze” (d.h. Elemente der $\pi_2(X)$) und höher dimensionale Analoga zu verwenden.

12.2 Homotopiegruppen der Sphären

Natürlich will man diese geometrisch so einfach definierten Gruppen für die einfachsten nicht trivialen Mannigfaltigkeiten, wie z.B. die Sphären berechnen.

Es gilt $\pi_k(S^n) = 0$ für $1 \leq k < n$. Z.B. sind also alle Sphären der Dimension größer als 1 einfachzusammenhängend. Das Loch, das sie im $\mathbb{R}^{n+1}$ umschließen, läßt sich nicht mit Lassos fangen.

Weiters gilt $\pi_k(S^n) = \mathbb{Z}$ für $1 \leq k = n$. Der Erzeuger dieser zyklischen Gruppe unendlicher Ordnung ist die Homotopieklasse der Identität $S^k \to S^n$. Etwas allgemeiner gilt der Stabilitätssatz: $\pi_k(S^n) = \pi_{k+1}(S^{n+1})$ für $1 \leq k < 2n - 1$.

In Analogie zur 1-Sphäre wird man nun wohl erwarten, daß $\pi_k(S^n) = \{0\}$ ist für $k > n \geq 1$.

Überraschenderweise ist dem aber nicht so. Ein Gegenbeispiel ist die Hopffaserung $S^3 \to S^2$. Mittels der exakten Homotopiesequenz einer Faserung (siehe algebraische Topologie) läßt sich einfach zeigen, daß $\pi_3(S^2) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$ ist. Die Hopffaserung $S^3 \to S^2$ fängt also irgend etwas auf der 2-Sphäre ein. Es kann sogar passieren, wenn wir ganz sicher sein wollen, und etwas, das wir gefangen haben, noch mehrmals auf gleiche Weise fangen, daß dieses Ding plötzlich frei wird, d.h. gewisse Homotopiegruppen $\pi_k(S^n)$ enthalten Torsionselemente (d.h. Elemente endlicher Ordnung) enthalten, oder sind sogar Torsionsgruppen (d.h. alle Elemente sind Torsionselemente). Es gilt allgemein, daß $\pi_{k+n}(S^n)$ eine Torsionsgruppe für $0 < k \neq n - 1$ ist. Es sind noch von keiner Sphäre der Dimension größer 1 alle Homotopiegruppen bekannt. Eine Tabelle der ersten Gruppen $\pi_{k+n}(S^n)$ der nieder-dimensionalen Sphären ist die folgende, wobei mit einer Eintragung $\infty^n(p_1)^{n_1} \dots (p_k)^{n_k}$ die Gruppe $\mathbb{Z}^n \oplus (\mathbb{Z}_{p_1})^{n_1} \oplus \dots \oplus (\mathbb{Z}_{p_k})^{n_k}$ gemeint ist und 1 die triviale Gruppe $\{0\}$ bezeichnet:

$k \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	∞	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	12	$\infty.12$	24	24	24	24	24	24
4	12	2	2^2	2	1	1	1	1	1
5	2	2	2^2	2	∞	1	1	1	1
6	2	3	24.3	2	2	2	2	2	2
7	3	15	15	30	60	120	$\infty.120$	240	240
8	15	2	2	2	24.2	2^3	2^4	2^3	2^2
9	2	2^2	2^3	2^3	2^3	2^4	2^5	$\infty.2^3$	2^3
10	2^2	12.2	120.12.2	72.2	72.2	24.2	$24^2.2$	122	6.2
11	12.2	84.2^2	84.2^3	504.2^2	504.4	504.2	504.2	504.2	504
12	84.2^2	2^2	2^6	2^3	240	1	1	1	12

13. Exkurs über Gruppenerweiterungen

Wir werden im nächsten Abschnitt eine Vielzahl von Beispielen von Lie-Gruppen geben. Einige dieser Gruppen werden wir aus Gruppenerweiterungen erhalten und dazu rekapitulieren wir in diesen Abschnitt diese Konstruktionen aus der Gruppentheorie.

13.1 Erweiterungen und Schnitte

Unter einer Gruppenerweiterung versteht man eine kurze exakte Sequenz von Gruppen

$$1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1,$$

d.h. alle Pfeile sind Gruppenhomomorphismen und für je zwei aufeinanderfolgende Pfeile $\bullet \xrightarrow{f_i} \bullet \xrightarrow{f_{i+1}} \bullet$ gilt $\operatorname{Bild}(f_i) = \operatorname{Ker}(f_{i+1})$. Im Detail bedeutet also Exaktheit bei

(N). Die Abbildung i ist injektiv (wir können also N als Untergruppe $i(N)$ von G auffassen);

(G). Es gilt $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Im}(i)$, d.h. diese Untergruppe $i(N)$ ist sogar ein Normalteiler und nach dem Homomorphiesatz ist $\operatorname{Bild}(p) \cong G/\operatorname{Ker}(p) = G/i(N)$;

(H). Die Abbildung p ist surjektiv, d.h. $H = \operatorname{Bild}(p) \cong G/i(N)$.

Bis auf die Isomorphismen $i : N \cong i(N)$ und $\operatorname{Bild}(p) \cong G/\operatorname{Ker}(p)$ ist eine kurze exakte Sequenz also nichts anderes als eine Gruppe G mit Normalteiler $i(N)$ und Quotient $G/i(N)$.

Sei $s : H \to G$ eine rechtsinverse Abbildung zu $p : G \to H$ (erhalten z.B. durch Wahl von Urbildern). Dann ist $G \cong N \times H$ als Menge vermöge der Abbildungen $G \to N \times H$, $g \mapsto (g \cdot s(p(g))^{-1}, p(g))$ und $N \times H \to G$, $(n,h) \mapsto i(n) \cdot s(h)$. In der Tat zeigt eine einfache Rechnung, daß die beiden Abbildungen invers zueinander sind. Wir wollen nun die Gruppenmultiplikation von G in $N \times H$ ausdrücken, d.h. durch das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(N \times H) \times (N \times H) \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\cong"'] & N \times H \arrow[d, "\cong"] \\
G \times G \arrow[r, "\cdot"] & G
\end{tikzcd}$$

Also gilt:

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (i(n_1) \cdot s(h_1) \cdot i(n_2) \cdot s(h_2) \cdot s(h_1 \cdot h_2)^{-1}, h_1 \cdot h_2).$$

Wir bezeichnen $N \times H$ mit dieser Gruppenstruktur als $N \times_s H$. Wenn wir $c(h,h') := s(h) \cdot s(h') \cdot s(h \cdot h')^{-1} \in N$ und $\rho(h)(n) := s(h) \cdot n \cdot s(h)^{-1} \in N$ für $h, h' \in H$ und $n \in N$ setzen, dann können wir die Multiplikation auf $N \times_s H$ auch wie folgt aufschreiben

$$(n,h) \cdot (n',h') = (n \cdot \rho(h)(n') \cdot c(h,h'), h \cdot h').$$

Eine Abbildung $s' : H \to G$ ist genau dann ein Schnitt, wenn eine Abbildung $\tau : H \to N$ existiert mit $s'(h) = \tau(h) \cdot s(h)$ für alle $h \in H$; denn $\tau(h) := s'(h) \cdot s(h)^{-1}$ hat genau dann Werte in N, falls $p(\tau(h)) = p(s'(h) \cdot s(h)^{-1}) = p(s'(h)) \cdot p(s(h))^{-1} = h \cdot h^{-1} = 1$. Für die assoziierten Abbildungen $c' : H \times H \to N$ und $\rho' : H \to \operatorname{Aut}(N)$ heißt das

$$\begin{aligned}
\rho'(h)(n) &= \tau(h) \cdot \rho(h)(n) \cdot \tau(h)^{-1} \\
c'(h,h') &= \tau(h) \cdot \rho(h)(\tau(h')) \cdot c(h,h') \cdot \tau(h \cdot h')^{-1}.
\end{aligned}$$

Falls zwei exakte Sequenzen isomorph sind, d.h. ein Gruppenisomorphismus φ existiert, der folgendes Diagramm kommutativ macht,

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & G \arrow[r, "p"] & H \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i'"] & G' \arrow[r, "p'"] \arrow[u, dotted, "\varphi", "\cong"'] & H \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

dann ist für Schnitte $s : H \to G$ von $p : G \to H$ und $s' : H \to G'$ von $p' : G' \to H$ auch $\varphi \circ s' : H \to G' \to G$ ein Schnitt von $p : G \to H$ und somit von der Form $\varphi \circ s' = i \circ \tau \cdot s$ für eine Abbildung $\tau : H \to N$. Wir können φ als Abbildung von $N \times_{s'} H \cong G'$ nach $N \times_s H \cong G$ nun wie folgt mittels τ darstellen:

$$\begin{aligned} \varphi(n,h) &= \varphi((n,1)\cdot(1,h)) = \varphi(i'(n)\cdot s'(h)) \\ &= \varphi(i'(n))\cdot\varphi(s'(h)) = i(n)\cdot i(\tau(h))\cdot s(h) = (n\cdot\tau(h),1)\cdot(1,h) \\ &= (n\cdot\tau(h),h). \end{aligned}$$

Wir werden in den folgenden Abschnitten nun untersuchen, welche Eigenschaften $c : H \times H \to N$, $\rho : H \to \mathrm{Aut}(N)$ und $\tau : H \to N$ in diversen Spezialfällen besitzen müssen.

13.2 Triviale Erweiterungen

Gehen wir als erstes der Frage nach, wann die Gruppenstruktur $N \times_s H$ genau die des Produktes ist, d.h.

$$i(n_1)\cdot i(n_2) = i(n_1\cdot n_2) = i(n_1)\cdot s(h_1)\cdot i(n_2)\cdot s(h_2)\cdot s(h_1\cdot h_2)^{-1},$$

gilt. Wählen wir $n_1 = 1$, so verkürzt sich die Bedingung auf

$$i(n_2)\cdot s(h_1\cdot h_2)\cdot s(h_2)^{-1} = s(h_1)\cdot i(n_2).$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $s : H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus ist (setze $n_2 = 1$) und $s(h)$ mit $i(n)$ für alle $h \in H$ und $n \in N$ kommutiert (setze $h_2 = 1$). In diesen Fall ist also sowohl $c(h,h') = 1$ als auch $\rho(h)$.

In den nächsten beiden Abschnitten betrachten wir nun die Fälle, wo nur eine der beiden Bedingungen $c = 1$ oder $\rho = 1$ erfüllt ist.

13.3 Semidirekte Produkte

Sei der Schnitt $s : H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Aut}(N)$ die Gruppe aller Gruppenisomorphismen $N \to N$ (also Gruppenautomorphismen von N) mit der Komposition als Operation. Es ist $\rho_s : H \to \mathrm{Aut}(N)$, $h \mapsto i^{-1}(s(h)\cdot i(n)\cdot s(h)^{-1})$ ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus, und die Multiplikation auf $N \times H$ ist durch

$$(n_1,h_1)\cdot(n_2,h_2) := (n_1\cdot\rho(h_1)(n_2), h_1\cdot h_2)$$

gegeben. Andererseits liefert jeder Gruppenhomomorphismus $\rho : H \to \mathrm{Aut}(N)$ auf diese Weise eine Gruppenstruktur G auf $N \times H$ und eine kurze exakte Sequenz $1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$, wobei $i : N \to N \times H$ die Inklusion auf den ersten Faktor und $p : N \times H \to H$ die Projektion auf den zweiten Faktor ist. Als s können wir die Inklusion auf den zweiten Faktor verwenden. Man sagt in diesem Fall, daß G das semidirekte Produkt $N \ltimes_\rho H$ mit Normalteiler N und Untergruppe H ist.

Damit $(1,1)$ das neutrale Element ist, muß $\rho(1)(n) = n$ und $\rho(h)(1) = 1$ gelten. Für das Assoziativgesetz benötigt man

$$\rho(h)(n') \cdot \rho(hh')(n'') = \rho(h)(n' \cdot \rho(h')(n''))$$

und wenn wir $n' = 1$ wählen, folgt $\rho(hh')(n'') = \rho(h)(\rho(h')(n''))$, und mit $h' = 1$ folgt $\rho(h)(n') \cdot \rho(h)(n'') = \rho(h)(n' \cdot n'')$. Es ist also notwendig und hinreichend dafür daß $N \ltimes H$ eine Gruppe wird, daß ρ eine Darstellung von H auf N (d.h. Gruppenhomomorphismus $H \to \mathrm{Aut}(N)$) ist.

Es ist $(n,h)^{-1} = (\rho(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})$ und somit ist $(1,h) \cdot (n,1) \cdot (1,h)^{-1} = (1 \cdot \rho(h)(n), h \cdot 1) \cdot (\rho(h^{-1})(1), h^{-1}) = (\rho(h)(n), 1)$, d.h. ρ ist gerade die vom Schnitt $s : h \mapsto (1,h)$ induzierte Darstellung.

13.4 Getwistete Homomorphismen

Sei nun $s' := \tau \cdot s : H \to G$ ein zweiter Schnitt, der auch ein Gruppenhomomorphismus ist. Aus $s'(h \cdot h') = s'(h) \cdot s'(h')$ folgt $\tau(h \cdot h') \cdot s(h) \cdot s(h') = \tau(h) \cdot s(h) \cdot \tau(h') \cdot s(h')$, und somit $\tau(h \cdot h') \cdot s(h) = \tau(h) \cdot s(h) \cdot \tau(h')$, oder äquivalent

$$\tau(h \cdot h') = \tau(h) \cdot \rho(h)(\tau(h'))$$

Also ist $\tau : H \to N$ ein bezüglich ρ getwisteter Gruppenhomomorphismus mit

$$\begin{aligned}\rho'(h)(n) &= s'(h) \cdot n \cdot s'(h)^{-1} = \tau(h) \cdot s(h) \cdot n \cdot s(h)^{-1} \cdot \tau(h)^{-1} \\ &= \tau(h) \cdot \rho(h)(n) \cdot \tau(h)^{-1}.\end{aligned}$$

Umgekehrt definiert jeder bezüglich ρ getwistete Gruppenhomomorphismus $\tau : H \to N$ eine neue Darstellung ρ' durch

$$\rho'(h)(n) := \tau(h) \cdot \rho(h)(n) \cdot \tau(h)^{-1},$$

denn

$$\begin{aligned}\rho'(h \cdot h')(n) &= \tau(h \cdot h') \cdot \rho(h \cdot h')(n) \cdot \tau(h \cdot h')^{-1} \\ &= \tau(h) \cdot \rho(h)(\tau(h')) \cdot \rho(h)(\rho(h')(n)) \cdot \rho(h)(\tau(h'))^{-1} \cdot \tau(h)^{-1} \\ &= \tau(h) \cdot \rho(h)(\tau(h') \cdot \rho(h')(n) \cdot \tau(h')^{-1}) \cdot \tau(h)^{-1} \\ &= \rho'(h)(\rho'(h')(n)).\end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, daß wir genau dann zwei isomorphe exakte Sequenzen erhalten, wenn ρ und ρ' mittels so einem τ in Beziehung stehen. Es existiere also ein Gruppenisomorphismus $\varphi : G' \to G$, der folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & G \arrow[r, "p"] & H \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i'"] & G' \arrow[r, "p'"] \arrow[u, dotted, "\varphi", "\cong"'] & H \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Dann ist sowohl $s : H \to G = N \ltimes_\rho H$, gegeben durch $h \mapsto (1,h)$, als auch die Zusammensetzung $\varphi \circ s' : H \to G' \to G$ ein Schnitt für G, wobei $s' : H \to G' = N \ltimes_{\rho'} H$ der Schnitt $h \mapsto (1,h)$ sei. Also existiert nach obigen ein bezüglich ρ getwisteter

Gruppenhomomorphismus $\tau : H \to N$ (d.h. $\tau(h \cdot h') = \tau(h) \cdot \rho(h)(\tau(h')))$ mit $\varphi(s'(h)) = \tau(h) \cdot s(h)$ und somit ist

$$\begin{aligned}\rho'(h)(n) &= \varphi(\rho'(h)(n)) = \varphi(s'(h) \cdot n \cdot s'(h)^{-1}) \\ &= \varphi(s'(h)) \cdot n \cdot \varphi(s'(h))^{-1} \\ &= \tau(h) \cdot s(h) \cdot n \cdot s(h)^{-1} \cdot \tau(h)^{-1} \\ &= \tau(h) \cdot \rho(h)(n) \cdot \tau(h)^{-1},\end{aligned}$$

da φ nach Voraussetzung auf N als Identität wirkt. Insbesonders besagt die Getwistetheit, daß

$$\begin{aligned}\tau(h \cdot h') &= \tau(h) \cdot \rho(h)(\tau(h')) = \tau(h) \cdot \tau(h)^{-1} \cdot \rho'(h)(\tau(h')) \cdot \tau(h) \\ &= \rho'(h)(\tau(h')) \cdot \tau(h).\end{aligned}$$

Nach (13.1) können wir φ mittels τ als $\varphi(n, h) = (n \cdot \tau(h), h)$ darstellen.
Umgekehrt können wir durch diese Formel mittels τ nun einen Gruppenisomorphismus $\varphi : G' \to G$ definieren, denn

$$\begin{aligned}\varphi(n, h) \cdot \varphi(n', h') &= (n \cdot \tau(h), h) \cdot (n' \cdot \tau(h'), h') \\ &= (n \cdot \tau(h) \cdot \rho(h)(n' \cdot \tau(h')), h \cdot h') \\ &= (n \cdot \tau(h) \cdot \tau(h)^{-1} \cdot \rho'(h)(n' \cdot \tau(h')) \cdot \tau(h), h \cdot h') \\ &= (n \cdot \rho'(h)(n' \cdot \tau(h')) \cdot \tau(h), h \cdot h') \\ &= (n \cdot \rho'(h)(n') \cdot \tau(h \cdot h'), h \cdot h') \\ &= \varphi(n \cdot \rho'(h)(n'), h \cdot h') = \varphi((n, h) \cdot (n', h')).\end{aligned}$$

Also stehen die Isomorphieklassen von Gruppenerweiterungen, die einen Gruppenhomomorphismus als Schnitt zulassen, in bijektiver Beziehung zu

$$\mathrm{Hom}(H, \mathrm{Aut}(N))/\sim,$$

wobei zwei Darstellungen ρ' und ρ äquivalent heißen, wenn ein bezüglich ρ getwisteter Gruppenhomomorphismus $\tau : H \to N$ existiert, welcher sie wie oben beschrieben ineinander überführt.

13.5 Zentrale Erweiterungen

Betrachten wir nun den zweiten Fall, wo für den Schnitt $s : H \to G$ folgendes gilt:

$$i(n) \cdot s(h) = s(h) \cdot i(n) \text{ für alle } n \in N,\ h \in H.$$

Damit das unabhängig von s gilt, fordern wir, daß N im Zentrum $Z(G) := \{g \in G : g \cdot g' = g' \cdot g \,\forall\, g' \in G\}$ von G enthalten ist. Eine Erweiterung $1 \to N \to G \to H \to 1$, für welche $i(N)$ in G zentral liegt, heißt eine zentrale Erweiterung. Insbesonders ist dann N abelsch. Die Gruppenmultiplikation auf $N \times H$ ist also nach ausnützen der Zentralität durch

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 \cdot n_2 \cdot s(h_1) \cdot s(h_2) \cdot s(h_1 \cdot h_2)^{-1}, h_1 \cdot h_2) =: (n_1 \cdot n_2 \cdot c(h_1, h_2), h_1 \cdot h_2)$$

gegeben, wobei $c : H \times H \to N$ definiert ist durch

$$c(h_1, h_2) := s(h_1) \cdot s(h_2) \cdot s(h_1 \cdot h_2)^{-1}.$$

Die Seiten des Assoziativgesetzes sind nun:

$$\begin{aligned}
((n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2)) \cdot (n_3, h_3) &= (n_1 \cdot n_2 \cdot c(h_1, h_2), h_1 \cdot h_2) \cdot (n_3, h_3) \\
&= (n_1 \cdot n_2 \cdot c(h_1, h_2) \cdot n_3 \cdot c(h_1 \cdot h_2, h_3), h_1 \cdot h_2 \cdot h_3) \\
(n_1, h_1) \cdot ((n_2, h_2) \cdot (n_3, h_3)) &= (n_1, h_1) \cdot (n_2 \cdot n_3 \cdot c(h_2, h_3), h_2 \cdot h_3) \\
&= (n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot c(h_2, h_3) \cdot c(h_1, h_2 \cdot h_3), h_1 \cdot h_2 \cdot h_3)
\end{aligned}$$

Es liefert also c genau dann eine assoziative Struktur, wenn die folgende "Kozykel"-Gleichung erfüllt ist

$$c(h_1, h_2) \cdot c(h_1 \cdot h_2, h_3) = c(h_2, h_3) \cdot c(h_1, h_2 \cdot h_3),$$

oder nach Ausnützung der Kommutativität

$$\partial c(h_1, h_2, h_3) := c(h_2, h_3) \cdot c(h_1 \cdot h_2, h_3)^{-1} \cdot c(h_1, h_2 \cdot h_3) \cdot c(h_1, h_2)^{-1} = 0.$$

Da wir $s(1) = 1$ immer erreichen können, indem wir s durch $s'(h) := s(h) \cdot s(1)^{-1}$ setzen, dürfen wir annehmen, daß $c(1, 1) = s(1) = 1$ gilt. Dann folgt $c(h, 1) \cdot c(h, 1) = c(1, 1) \cdot c(h, 1)$ also $c(h, 1) = 1$ und $c(1, 1) \cdot c(1, h) = c(1, h) \cdot c(1, h)$ also $c(1, h) = 1$ und schließlich $c(h, h^{-1}) \cdot c(1, h) = c(h^{-1}, h) \cdot c(h, 1)$ also $c(h, h^{-1}) = c(h^{-1}, h)$. Dies zeigt, daß eine Abbildung $c : H \times H \to N$ in eine Abelsche Gruppe N, welche die Kozykelgleichung und $c(1, 1) = 1$ erfüllt eine Gruppenstruktur auf $G := N \times H$ durch

$$\begin{aligned}
(n, h) \cdot (n', h') &:= (n \cdot n' \cdot c(h, h'), h \cdot h') \\
(n, h)^{-1} &= (n^{-1} \cdot c(h, h^{-1})^{-1}, h^{-1})
\end{aligned}$$

festlegt, und zwar so, daß $1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$ eine zentrale Erweiterung ist, wobei $i : N \to G$ durch $n \mapsto (n, 1)$ und p durch $(n, h) \mapsto h$ gegeben sind, denn es ist $(n, 1) \cdot (n', h') = (n \cdot n' \cdot c(1, h'), h') = (n' \cdot n \cdot c(h', 1), h') = (n', h') \cdot (n, 1)$. Weiters ist $s : H \to N \times H$ gegeben durch $h \mapsto (1, h)$ ein Schnitt und es gilt

$$\begin{aligned}
s(h) \cdot s(h') \cdot s(h \cdot h')^{-1} &= (1, h) \cdot (1, h') \cdot (1, h \cdot h')^{-1} \\
&= (c(h, h') \cdot c(h \cdot h', (h \cdot h')^{-1})^{-1} \cdot c(h \cdot h', (h \cdot h')^{-1}), 1) \\
&= (c(h, h'), 1)
\end{aligned}$$

13.6 Gruppen-Kozykeln

Wieder fragen wir danach, welche Kozykeln c isomorphe Gruppen liefern. Sei dazu vorerst s' ein zweiter Schnitt (mit $s'(1) = 1$). Dann ist $s'(h) = \tau(h) \cdot s(h) = s(h) \cdot \tau(h)$ für eine Abbildung $\tau : H \to N$, welche $\tau(1) = 1$ erfüllt. Eine direkte Rechnung für die assoziierten Kozykel c und c' ergibt

$$c'(h, h') = \partial\tau(h, h') \cdot c(h, h'),$$

wobei $\partial\tau(h, h') := \tau(h') \cdot \tau(h \cdot h')^{-1} \cdot \tau(h)$ ist.

Sei nun $\varphi : G' \to G$ ein Gruppenisomorphismus, welcher das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & G \arrow[r, "p"] & H \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i'"] & G' \arrow[r, "p'"] \arrow[u, dotted, "\varphi", "\cong"'] & H \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

wobei $G = N \times H$ die vom Kozykel c induzierte Gruppenstruktur, und $G' = N \times H$ die von c' induzierte Struktur sei. Wieder erhalten wir zwei Schnitte s und $\varphi \circ s'$ für $p : G \to H$, welche durch ein $\tau : H \to N$ wie folgt ineinander umgerechnet werden können:

$$\varphi(s'(h)) = \tau(h) \cdot s(h).$$

Für die Kozykeln liefert eine kurze Rechnung:

$$c'(h, h') = \partial\tau(h, h') \cdot c(h, h').$$

Umgekehrt läßt sich mittels $\tau : H \to N$ ein Gruppenisomorphismus $\varphi : G' \to G$ wie bei semidirekten Produkten durch $\varphi(n, h) := (n \cdot \tau(h), h)$ definieren, denn

$$\begin{aligned}
\varphi(n, h) \cdot \varphi(n, h') &= (n \cdot \tau(h) \cdot n' \cdot \tau(h') \cdot c(h, h'), h \cdot h') \\
&= (n \cdot \tau(h) \cdot n' \cdot \tau(h') \cdot \partial\tau(h, h')^{-1} \cdot c'(h, h'), h \cdot h') \\
&= (n \cdot n' \cdot \tau(h \cdot h') \cdot c(h, h'), h \cdot h') \\
&= \varphi((n, h) \cdot (n', h'))
\end{aligned}$$

Wir erhalten also, daß die Isomorphieklassen von zentralen Erweiterungen in bijektiver Beziehung zu $\{c \in N^{H\times H} : \partial c = 0\}/\{\partial\tau : \tau \in N^H\}$ stehen. Dieser Quotient macht Sinn, da $\partial^2\tau = 0$ für alle $\tau : H \to N$. Man beachte, daß die Bedingungen $c(1, 1) = 1$ und $\tau(1) = 1$ weggelassen werden können, da $\partial\tau' = \partial\tau \cdot \tau(1)^{-1}$, wobei $\tau'(h) = \tau(h) \cdot \tau(1)^{-1}$, und $\partial c' = \partial c \cdot c(1, 1)^{-1}$, wobei $c'(h, h') = c(h, h') \cdot c(1, 1)^{-1} = c(h, h') \cdot \partial\tau'(h, h')$ ist mit $\tau'(h) := c(1, 1)^{-1}$.

13.7 Kohomologie von *H* mit Werten in einer Abelschen Gruppe

Man kann das ∂, welches bei zentralen Erweiterungen aufgetaucht ist auch verallgemeinern, indem man für eine Gruppe H und eine Abelsche Gruppe N (die wir der Einfachheit halber additiv schreiben) wie folgt definieren:

$$\begin{aligned}
C^k(H, N) &:= \{c : H^{k+1} \to N\} \\
\partial : C^k(H, N) &\to C^{k+1}(H, N) \\
\partial c(h_1, \dots, h_{k+1}) &= c(h_2, \dots, h_{k+1}) + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j c(h_1, \dots, h_j \cdot h_{j+1}, \dots, h_{k+1}) \\
&\quad + (-1)^{k+1} c(h_1, \dots, h_k)
\end{aligned}$$

Eine direkte Rechnung zeigt $\partial^2 = 0$ und somit können wir die Kohomologie von H mit Werten in N als

$$H^k(H;N) := \\ = \operatorname{Ker}(\partial : C^k(H,N) \to C^{k+1}(H,N)) / \operatorname{Bild}(\partial : C^{k-1}(H,N) \to C^k(H,N))$$

definieren. Es beschreibt also $H^1(H;N)$ die Isomorphieklassen von zentralen Erweiterungen von H mit zentraler Untergruppe N und es ist

$$H^0(H;N) = \operatorname{Ker}(\partial : C^0(H,N) \to C^1(H,N)) = \operatorname{Hom}(H,N)$$

13.8 Abelsche Erweiterungen

Betrachten wir nun den Fall, wo N abelsch ist, aber nicht notwendig im Zentrum von G liegt. Dann können wir eine Wirkung ρ von H auf N durch

$$\rho(p(g))(n) := g \cdot n \cdot g^{-1}$$

definieren. In der Tat folgt aus $p(g) = p(g)'$, daß $g^{-1} \cdot g' \in N$ und somit ist $g' \cdot n \cdot (g')^{-1} = g \cdot g^{-1} \cdot g' \cdot n \cdot (g')^{-1} \cdot g \cdot g^{-1} = g \cdot n \cdot g^{-1}$ und somit macht die Definition Sinn und ist eine Darstellung, da $\operatorname{konj} : G \to \operatorname{Aut}(N)$ eine ist.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, hook, "i"] & G \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "\operatorname{konj}"'] & H \arrow[dl, "\rho"] \\ & \operatorname{Aut}(N) & \end{tikzcd}$$

Ist nun $s : H \to G$ irgend ein Schnitt, dann gilt für die Gruppenmultiplikation auf $N \times H$

$$(n_1,h_1) \cdot (n_2,h_2) = (n_1 \cdot s(h_1) \cdot n_2 \cdot s(h_2) \cdot s(h_1 \cdot h_2)^{-1}, h_1 \cdot h_2) = \\ = (n_1 \cdot \rho(h_1)(n_2) \cdot c(h_1,h_2), h_1 \cdot h_2)$$

gegeben, wobei $c : H \times H \to N$ wie bei zentralen Erweiterungen definiert ist durch

$$c(h_1,h_2) := s(h_1) \cdot s(h_2) \cdot s(h_1 \cdot h_2)^{-1}.$$

Die Seiten des Assoziativgesetzes sind nun:

$$((n_1,h_1) \cdot (n_2,h_2)) \cdot (n_3,h_3) = \\ = (n_1 \cdot \rho(h_1)(n_2) \cdot c(h_1,h_2), h_1 \cdot h_2) \cdot (n_3,h_3) \\ = (n_1 \cdot \rho(h_1)(n_2) \cdot c(h_1,h_2) \cdot \rho(h_1 \cdot h_2)(n_3) \cdot c(h_1 \cdot h_2, h_3), h_1 \cdot h_2 \cdot h_3)$$

$$(n_1,h_1) \cdot ((n_2,h_2) \cdot (n_3,h_3)) = \\ = (n_1,h_1) \cdot (n_2 \cdot \rho(h_2)(n_3) \cdot c(h_2,h_3), h_2 \cdot h_3) \\ = (n_1 \cdot \rho(h_1)\Big(n_2 \rho(h_2)(n_3) \cdot c(h_2,h_3)\Big) \cdot c(h_1, h_2 \cdot h_3), h_1 \cdot h_2 \cdot h_3)$$

Es liefert also c genau dann eine assoziative Struktur, wenn (nach Ausnützung der Kommutativität von N) die folgende "Kozykel"-Gleichung erfüllt ist

$$c(h_1,h_2) \cdot c(h_1 \cdot h_2, h_3) = \rho(h_1)\Big(c(h_2,h_3)\Big) \cdot c(h_1, h_2 \cdot h_3),$$

bzw.

$$\partial c(h_1,h_2,h_3) := \rho(h_1)\Big(c(h_2,h_3)\Big)\cdot c(h_1\cdot h_2,h_3)^{-1}\cdot c(h_1,h_2\cdot h_3)\cdot c(h_1,h_2)^{-1} = 0.$$

Da wir $s(1)=1$ immer erreichen können, indem wir s durch $s'(h) := s(h)\cdot s(1)^{-1}$ setzen, dürfen wir annehmen, daß $c(1,1)=s(1)=1$ gilt. Dann folgt $c(h,1)\cdot c(h,1) = \rho(h)(c(1,1))\cdot c(h,1)$ also $c(h,1)=1$ und $c(1,1)\cdot c(1,h) = \rho(1)(c(1,h))\cdot c(1,h)$ also $c(1,h)=1$ und schließlich $c(h,h^{-1})\cdot c(1,h) = \rho(h)(c(h^{-1},h))\cdot c(h,1)$ also $c(h,h^{-1}) = \rho(h)(c(h^{-1},h))$. Dies zeigt, daß eine Abbildung $c: H\times H\to N$, welche die Kozykelgleichung und $c(1,1)=1$ erfüllt eine Gruppenstruktur auf $G := N\times H$ durch

$$(n,h)\cdot(n',h') := (n\cdot\rho(h)(n')\cdot c(h,h'), h\cdot h')$$
$$(n,h)^{-1} = (c(h^{-1},h)^{-1}\cdot\rho(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})$$

und zwar so, daß $1\to N\xrightarrow{i} G\xrightarrow{p} H\to 1$ eine abelsche Erweiterung ist, wobei $i: N\to G$ durch $n\mapsto(n,1)$ und p durch $(n,h)\mapsto h$ gegeben sind. Es ist $s: H\to N\times H$ gegeben durch $h\mapsto(1,h)$ ein Schnitt und es gilt

$$s(h)\cdot s(h')\cdot s(h\cdot h')^{-1} = (e,h)\cdot(e,h')\cdot(e,h\cdot h')^{-1} = (c(h,h'),e).$$

13.9 Isomorphieklassen abelscher Erweiterungen

Wieder fragen wir danach, welche Kozykeln c bei gleicher Wirkung ρ isomorphe Gruppen liefern. Sei dazu vorerst s' ein zweiter Schnitt (mit $s'(1)=1$). Dann ist $s'(h)=\tau(h)\cdot s(h)$ für eine Abbildung $\tau: H\to N$, welche $\tau(1)=1$ erfüllt. Die folgende direkte Rechnung für die assoziierten Kozykeln c und c' ergibt

$$\begin{aligned}
c'(h,h') &= s'(h)\cdot s'(h')\cdot s'(h\cdot h')^{-1}\\
&= \tau(h)\cdot s(h)\cdot\tau(h')\cdot s(h')\cdot s(h\cdot h')^{-1}\cdot\tau(h\cdot h')^{-1}\\
&= \tau(h)\cdot s(h)\cdot\tau(h')\cdot s(h)^{-1}\cdot s(h)\cdot s(h')\cdot s(h\cdot h')^{-1}\cdot\tau(h\cdot h')^{-1}\\
&= \tau(h)\cdot\rho(h)(\tau(h'))\cdot c(h,h')\cdot\tau(h\cdot h')^{-1}\\
&= c(h,h')\cdot\tau(h)\cdot\rho(h)(\tau(h'))\cdot\tau(h\cdot h')^{-1}\\
&= \partial\tau(h,h')\cdot c(h,h')
\end{aligned}$$

wobei $\partial\tau(h,h') := \rho(h)\Big(\tau(h')\Big)\cdot\tau(h\cdot h')^{-1}\cdot\tau(h)$ ist.

Sei nun $\varphi: G'\to G$ ein Gruppenisomorphismus, welcher das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & G \arrow[r, "p"] & H \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1\\
1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i'"] & G' \arrow[r, "p'"] \arrow[u, dotted, "\varphi", "\cong"'] & H \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

wobei $G=N\times H$ die vom Kozykel c induzierte Gruppenstruktur, und $G'=N\times H$ die von c' induzierte Struktur sei. Wieder erhalten wir zwei Schnitte s und $\varphi\circ s'$ für $p: G\to H$, welche durch ein $\tau: H\to N$ wie folgt ineinander umgerechnet werden können:

$$\varphi(s'(h)) = \tau(h)\cdot s(h).$$

Für die Kozykeln liefert eine kurze Rechnung:

$$c'(h,h') = \partial\tau(h,h') \cdot c(h,h').$$

Umgekehrt läßt sich mittels $\tau : H \to N$ ein Gruppenisomorphismus $\varphi : G' \to G$ wie bei semidirekten Produkten durch $\varphi(n,h) := (n \cdot \tau(h), h)$ definieren, denn

$$\begin{aligned}
\varphi(n,h) \cdot \varphi(n,h') &= (n \cdot \tau(h) \cdot \rho(h)(n' \cdot \tau(h')) \cdot c(h,h'), h \cdot h') \\
&= (n \cdot \rho'(h)(n') \cdot \rho'(h)(\tau(h')) \cdot \tau(h) \cdot \partial\tau(h,h')^{-1} \cdot c'(h,h'), h \cdot h') \\
&= \varphi((n,h) \cdot (n',h'))
\end{aligned}$$

Wir erhalten also, daß die Isomorphieklassen von zentralen Erweiterungen in bijektiver Beziehung zu $\{c \in N^{H\times H} : \partial c = 0\}/\{\partial\tau : \tau \in N^H\}$ stehen. Dieser Quotient macht Sinn, da $\partial^2\tau = 0$ für alle $\tau : H \to N$. Man beachte, daß die Bedingungen $c(1,1) = 1$ und $\tau(1) = 1$ weggelassen werden können wie in (13.6).

13.10 Kohomologie bezüglich einer Darstellung $\rho : H \to \mathrm{Aut}(N)$

Man kann das ∂, welches bei abelschen Erweiterungen aufgetaucht ist auch verallgemeinern, indem man für eine Gruppe H und eine Abelsche Gruppe N (die wir der einfachheithalber additiv schreiben) und eine Darstellung $\rho : H \to \mathrm{Aut}(N)$ wie folgt definieren:

$$\begin{aligned}
C^k(H,N) &:= \{c : H^{k+1} \to N\} \\
\partial : C^k(H,N) &\to C^{k+1}(H,N)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial c(h_1,\dots,h_{k+1}) = \rho(h_1)(c(h_2,\dots,h_{k+1})) &+ \sum_{j=1}^{k} (-1)^j c(h_1,\dots,h_j \cdot h_{j+1},\dots,h_{k+1}) \\
&+ (-1)^{k+1} c(h_1,\dots,h_k)
\end{aligned}$$

Eine direkte Rechnung zeigt $\partial^2 = 0$ und somit können wir die Kohomologie von H mit Werten in N als

$$\begin{aligned}
&H^k_\rho(H;N) := \\
&\qquad = \mathrm{Ker}(\partial : C^k(H,N) \to C^{k+1}(H,N)) / \operatorname{Bild}(\partial : C^{k-1}(H,N) \to C^k(H,N))
\end{aligned}$$

definieren. Es beschreibt also $H^1_\rho(H;N)$ die Isomorphieklassen von Erweiterungen von H mit Wirkung $\rho : H \to \mathrm{Aut}(N)$ und es ist

$$H^0_\rho(H;N) = \mathrm{Ker}(\partial : C^0(H,N) \to C^1(H,N)) = \mathrm{Hom}(H,N)$$

13.11 Transitive Gruppenwirkungen

Wir wollen nun noch die Situation untersuchen, wo N nur eine Untergruppe (und nicht ein Normalteiler) von G ist. Dann können wir zwar wieder die Menge G/N der Nebenklassen $\{g \cdot N : g \in G\}$ betrachten. Dies ist aber keine Gruppe mehr. Allerdings haben wir eine Wirkung von G auf G/N durch

$$g' \cdot gN := (g'g)N,$$

denn

$$(g_1 g_2) \cdot gN = ((g_1 g_2)g)N = (g_1(g_2 g))N = g_1 \cdot (g_2 g)N = g_1 \cdot (g_2 \cdot gN).$$

Offensichtlich ist diese Wirkung transitiv, d.h. für je zwei Nebenklassen $g_0 N$ und $g_1 N$ existiert ein $g \in G$ mit $g \cdot g_0 N = g_1 N$ (wähle $g := g_1 g_0^{-1}$).

Umgekehrt wirke G auf einer Menge H transitiv (das können wir immer erreichen, indem wir uns auf einen Orbit $G \cdot h_0$ beschränken). Und sei $h_0 \in H$ fix. Dann ist $G_{h_0} := \{g \in G : g \cdot h_0 = h_0\}$ eine Untergruppe von G, die sogenannte Isotropiegruppe bei h_0, und G/G_{h_0} ist isomorph zu H als G-Raum, d.h. es gibt eine Bijektion $\varphi : G/G_{h_0} \to H$, welche mit der Wirkung vertauscht ($\varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x)$). In der Tat ist φ durch $\varphi(gG_{h_0}) := g \cdot h_0$ gegeben.

14. Beispiele von Lie-Gruppen

Etliche der klassischen Beispiele von Mannigfaltigkeiten sind sogar Lie-Gruppen, tragen also zusätzlich eine glatte Gruppenstruktur. Wir führen in diesen Abschnitt diese klassischen Lie-Gruppen ein, die wir zum Teil auch schon in (1) kennengelernt haben.

14.1 Allgemeine lineare Gruppe

Der Vektorraum $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = L(n, m) := \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ linear }\}$ ist nm-dimensional.

Die allgemeine lineare Gruppe (engl. general linear group) (siehe auch (1.2))

$$GL(\mathbb{R}^n) = GL(n) := \{T \in L(n, n) : \det T \neq 0\} \subset L(n, n)$$

ist eine offene n^2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit in $L(n, n)$, denn sie ist durch eine stetige Ungleichung gegeben. Bezüglich der Komposition ist $GL(n)$ eine Gruppe.

14.2 $A\,x + b$-Gruppen

Sei $E = F \oplus F'$ und $G := \{T \in GL(E) : T(F) \subseteq F\}$. Es seien p und p' die Projektionen auf F und F' mit Kern F' und F. Jedes T hat bezüglich der Zerlegung $E = F \oplus F'$ folgende Darstellung

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

wobei $A = p \circ T|_F \in GL(F)$, $D = p' \circ T|_{F'} \in GL(F')$, $B = p \circ T|_{F'} \in L(F', F)$ und $C = p' \circ T|_F \in L(F, F')$. Also läßt T den Teilraum F invariant genau dann, wenn $C = 0$ ist, d.h.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : A \in GL(F), D \in GL(F'), B \in L(F', F) \right\}.$$

Wir haben folgende Untergruppen:

$$
\begin{aligned}
G_b &= \left\{\begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : B \in L(F', F)\right\} \cong (L(F', F), +) \\
G_d &= \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} : D \in GL(F')\right\} \cong GL(F') \\
G_a &= \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in GL(F)\right\} \cong GL(F) \\
G_{a,d} &= \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} : A \in GL(F), D \in GL(F')\right\} \cong GL(F) \times GL(F') \\
G_{b,d} &= \left\{\begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : D \in GL(F'), B \in L(F', F)\right\} \\
G_{a,b} &= \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in GL(F), B \in L(F', F)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& G & \\
G_{a,b} \arrow[ur, hook] & G_{a,d} \arrow[u, hook] & G_{b,d} \arrow[ul, hook] \\
G_a \arrow[u, hook] \arrow[ur, hook] & G_b \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] & G_d \arrow[ul, hook] \arrow[u, hook] \\
& \{1\} \arrow[ul, hook] \arrow[u, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}
$$

Dual haben wir die folgenden Gruppen-Epimorphismen, die jeweils durch Ersetzen der entsprechenden Eintragungen durch die neutralen Elemente 1 bzw. 0 gegeben sind

$$
\begin{tikzcd}
& G \arrow[d, two heads] & \\
G_{a,b} \arrow[d, two heads] & G_{a,d} \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & G_{b,d} \arrow[d, two heads] \\
G_a & & G_d
\end{tikzcd}
$$

Dies liefert folgende kurze exakte Sequenzen von Gruppen

$$1 \longrightarrow G_b \hookrightarrow G \longrightarrow G_{a,d} \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow G_{b,d} \hookrightarrow G \longrightarrow G_a \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow G_{a,b} \hookrightarrow G \longrightarrow G_d \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow G_b \hookrightarrow G_{b,d} \longrightarrow G_d \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow G_b \hookrightarrow G_{a,b} \longrightarrow G_a \longrightarrow 1,$$

Die natürlichen Inklusionen der rechtsstehenden Gruppen liefern Schnitte zu den Projektionen. Und somit erhalten wir semidirekte Produkte

$$\begin{aligned} G &\cong L(F',F) \ltimes (GL(F) \times GL(F')) \\ G &\cong G_{b,d} \ltimes GL(F) \\ G &\cong G_{a,b} \ltimes GL(F') \\ G_{b,d} &\cong L(F',F) \ltimes GL(F') \\ G_{a,b} &\cong L(F',F) \ltimes GL(F), \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} A^{-1}A'A & A^{-1}(A'B + (B' - BD^{-1}D')D) \\ 0 & D^{-1}D'D \end{pmatrix}$$

lassen sich die entsprechenden Wirkungen leicht angeben.

Wenn wir als $E = F \times \mathbb{R}$ wählen, dann heißt die Gruppe $G_{a,b}$ jener $T \in GL_{\mathcal{F}}(E)$ die auf $\mathbb{R}$ als Identität wirken auch die $A\,x + b$-Gruppe, denn sie ist gerade die Gruppe der affinen Abbildungen. Der affinen Abbildung $x \mapsto A\,x + b$ wird dabei die Matrix

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Man beachte, daß dies als Mannigfaltigkeit $GL(E) \times E$ ist, aber die Multiplikation komplizierter, nämlich die des semidirekten Produkts $E \rtimes GL(E)$ ist.

14.3 Flaggen

Es sei $\mathcal{F} : \{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k = E$ eine aufsteigende Folge von Teilräumen (eine sogenannte Flagge). Dann ist $GL_{\mathcal{F}}(E) := \{T \in GL(E) : T(F_j) \subseteq F_j\}$ eine Lie-Gruppe, denn sei $F'_j := F_j^{\perp} \cap F_{j+1} \cong F_{j+1}/F_j$, dann ist $T \in GL_{\mathcal{F}}(E)$ genau dann, wenn es bezüglich der Zerlegung

$$E = F'_0 \oplus F'_1 \oplus \cdots \oplus F'_{k-1}$$

die Form

$$\begin{pmatrix} T_{1,1} & \dots & T_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & T_{n,n} \end{pmatrix}$$

hat mit $T_{j,j} \in GL(F'_j)$ und $T_{j,l} \in L(F'_l, F'_j)$ für $j < l$. Dies ist das prototypische Beispiel einer auflösbaren Lie-Gruppe falls $\dim F_k = k$ für alle k.

14.4 Nilpotente Gruppen

Wir können noch die Untergruppe jener Abbildungen betrachten, die auf $F'_j = F_{j+1}/F_j$ als Identität wirken, d.h. in der Diagonale lauter Identitäten haben. Das ist ein prototypisches Beispiel einer nilpotenten Gruppe, wenn $\dim F_k = k$ für alle k.

Ein Spezialfall ist die Heisenberggruppe, die wir zuerst in anderer Form beschreiben als

$$H := E \oplus \mathbb{R}, \text{ mit } (x,t)\cdot(y,s) := (x+y, t+s+b(x,y)),$$

wobei b eine symplektische Form (d.h. $b : E \times E \to \mathbb{R}$ is bilinear, schief-symmetrisch und nicht degeneriert, siehe (14.9)) ist. Es ist $(x,t)^{-1} = (-x,-t)$. Wieder ist H als Menge das Produkt der beiden (abelschen) Gruppen E und $\mathbb{R}$. Diesmal ist es nichteinmal ein semidirektes Produkt, sondern eine zentrale Erweiterung $1 \to \mathbb{R} \to H \to E \to 1$, die durch den Zykel b gegeben ist. Man kann H aber auch als Matrizengruppe beschreiben, wenn wir o.B.d.A. $E := F \oplus F$ setzen und $b(x_1, y_1; x_2, y_2) := \langle x_1, y_2\rangle - \langle x_2, y_1\rangle$ wählen (wir werden in (14.9) zeigen, daß jede symplektische Form von dieser Gestalt ist) und $F \cong F^*$ via $x \mapsto \langle x, \_\rangle$ verwenden.

$$\begin{aligned} H &\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x^* & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x^* \in F^*,\, y \in F,\, t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq GL(\mathbb{R} \times F \times \mathbb{R}) \\ &\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x^* & y^* & t \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x \in F,\, x^* := \langle x, \_\rangle \\ y \in F,\, y^* := \langle y, \_\rangle \\ t \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} \subseteq Sp(\mathbb{R} \times F \times F \times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Der zweite Isomorphismus ist durch

$$(x,y,t) \mapsto T(x,y,t) := \begin{pmatrix} 1 & x^* & y^* & t \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{cases} x^* := \langle x, \_\rangle \\ y^* := \langle y, \_\rangle \end{cases}$$

gegeben. Er hat Werte in $Sp(\mathbb{R} \times F \times F \times \mathbb{R})$ bezüglich der symplektischen Form $b(t_1, x_1, y_1, s_1; t_2, x_2, y_2, s_2) = t_1 s_2 - t_2 s_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1$, denn diese ist durch die Matrix

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben und es gilt $T^t J T = J$ wie man leicht nachrechnet.

Der erste Isomorphismus ist durch

$$(x^*, y, t) \mapsto T(x^*, y, t) := \begin{pmatrix} 1 & x^* & (t + x^*(y))/2 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben (Rechnung!).

Nachdem wir nun einige "auflösbare" Gruppen kennengelernt haben, wollen wir uns den "halbeinfachen" zuwenden.

14.5 Spezielle lineare Gruppe

Sie ist definiert als:

$$SL(n) := \{T \in L(n, n) : \det(T) = 1\} \subseteq GL(n).$$

Also ist sie durch die Gleichung $\det(T) = 1$, bzw. $f(T) = 0$ gegeben, wobei $f : L(n, n) \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(T) := \det(T) - 1$ ist. Wir behaupten, daß diese Gleichung regulär ist, d.h. die Ableitung der Determinantenfunktion ist surjektiv. Da die Determinante polynomial in den Koeffizienten ist, folgt die Glattheit und daraus folgt wiederum – zusammen mit der gleich zu beweisenden Surjektivität – die Regularität. Die Richtungsableitung an der Stelle A in Richtung B ist:

$$\begin{aligned}
\det{}'(A)(B) &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0} \det(A + tB) = \tfrac{d}{dt}|_{t=0} \det(A \cdot (1 + tA^{-1}B)) \\
&= \tfrac{d}{dt}|_{t=0} \det(tA) \cdot \det(\tfrac{1}{t} + A^{-1}B) \\
&= \tfrac{d}{dt}|_{t=0} t^n \det(A) \cdot \left(\frac{1}{t^n} - \frac{1}{t^{n-1}} \operatorname{Spur}(A^{-1}B) + \cdots + \det(A^{-1}B)\right) \\
&= \det A \operatorname{Spur}(A^{-1}B).
\end{aligned}$$

Ohne die gesamte Ableitung $\det{}'(A) : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ zu berechnen, kann man kürzer auch so vorgehen:

$$\det{}'(A)(A) = \tfrac{d}{dt}|_{t=0} \underbrace{\det((1+t)A)}_{(1+t)^n \det A} = n(1+t)^{n-1}|_{t=0} \det A = n \det A.$$

Folglich ist $\det{}'(A)$ surjektiv und $SL(\mathbb{R}^n)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n^2 - 1$.

14.6 Orthogonale Gruppe

Sie ist definiert durch (siehe auch (1.2)):

$$O(n) := \{T \in GL(n, n) : T^t \circ T = \mathrm{id}\} = \{T \in GL(n, n) : \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \,\forall\, x, y\}.$$

So wie in Beispiel (14.5) wollen wir nun zeigen, daß die Ableitung für die quadratische – daher auch glatte – Funktion $f : GL(n) \to L_{\mathrm{sym}}(n, n)$ mit $f(T) := T^t \circ T = \mathrm{komp}(T^t, T)$ surjektiv ist. Zu diesem Zweck, berechnen wir uns zuerst die Ableitung:

$$f'(T) \cdot S = \mathrm{komp}(S^t, T) + \mathrm{komp}(T^t, S) = S^t \circ T + T^t \circ S.$$

Die Dimension von $L_{\text{sym}}(n,n)$ ist offensichtlich $\frac{(n+1)n}{2}$. Für ein $R \in L_{\text{sym}}(n,n)$ existiert ein $S \in L(n,n)$ mit $S^t \circ T + T^t \circ S = R$, denn

$$(S^t \circ T) + (S^t \circ T)^t = R \quad \Rightarrow \quad S^t \circ T = \tfrac{1}{2}R \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad S^t = \tfrac{1}{2}RT^{-1} \Rightarrow S = (T^t)^{-1}\tfrac{1}{2}R.$$

Also ist f' surjektiv, und somit $O(\mathbb{R}^n)$ eine Teilmannigfaltigkeit von $L(n,n)$ der Dimension $\dim(O(n)) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Allgemeiner können wir die Stiefelmannigfaltigkeit $V(k,n) := \{T \in L(k,n) : T^tT = \mathrm{id}\}$ betrachten (siehe (70.6)). Die Funktion $f : L(k,n) \to L_{\text{sym}}(k,k), T \mapsto T^tT - \mathrm{id}$, ist glatt und erfüllt $f'(T)(S) = T^tS + S^tT$. Also ist sie regulär, denn für symmetrisches R können wir $f'(T)(S) = R$ durch $S := \frac{1}{2}TR$ lösen.

14.7 Gruppen invarianter Automorphismen, O_b

Wir wollen nun die orthogonale Gruppe verallgemeinern, indem wir eine beliebige Bilinearform $b : E \times E \to \mathbb{R}$ auf einem euklidischen Raum E betrachten. Mit

$$O_b(E) := \{T \in GL(E) : b(Tx, Ty) = b(x,y)\, \forall\, x, y \in E\}$$

bezeichnen wir die Gruppe aller invertierbaren linearen Abbildungen, die die Bilinearform b invariant lassen. Bekanntlich stehen die Bilinearformen $b : E \times E \to \mathbb{R}$ in bijektiver Beziehung zu den linearen Abbildungen $B : E \to E$, vermöge

$$b(x,y) = \langle Bx, y\rangle = \langle x, B^ty\rangle.$$

Denn $b : E \times E \to \mathbb{R}$ können wir genausogut als Abbildung $\check{b} : E \to L(E,\mathbb{R}) = E^*$ auffassen, welche durch $x \mapsto (y \mapsto b(x,y))$ gegeben ist. Das skalare Produkt $\langle \_, \_ \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ entspricht dabei einer Abbildung $\iota : E \to E^*$, welche ein Isomorphismus ist, denn $\mathrm{Ker}(\iota) = \{x : \langle x, y\rangle = 0\, \forall\ y\} = \{0\}$, und da $\dim(E) = \dim(E^*)$, ist ι bijektiv. Die Zusammensetzung $B := \iota^{-1} \circ \check{b} : E \to E^* \to E$ ist dann die gesuchte lineare Abbildung, denn

$$b(x,y) = \check{b}(x)(y) = (\iota \circ B)(x)(y) = \langle Bx, y\rangle.$$

Die Gleichung $b(Tx,Ty) = b(x,y)$ ist somit mit $\langle T^tBTx, y\rangle = \langle BTx, Ty\rangle = \langle Bx, y\rangle$ äquivalent, und damit ist

$$O_b(E) = \{T \in GL(E) : T^tBT = B\}.$$

Wir sollten also zeigen, daß dies eine reguläre Gleichung ist. Für die Ableitung der Funktion $f : GL(E) \to L(E)$, welche durch $f(T) = T^tBT - B$ definiert ist, erhalten wir $f'(T)(S) = S^tBT + T^tBS$. Wie bei $O(E)$ können wir nicht erwarten, daß sie surjektiv nach $L(E,E)$ ist, sondern wir brauchen einen linearen Teilraum $F \subseteq L(E,E)$ in welchem f Werte hat und auf welchen $f'(T)$ surjektiv ist.

Wenn B (schief)symmetrisch ist, dann gilt das gleiche auch für $f(T)$ und wir sollten also für F den Teilraum $L_{\pm}(E,E)$ der (schief)symmetrischen linearen Abbildungen verwenden. Dieser hat als Dimension $n(n+1)/2$ (bzw. $n(n-1)/2$), wenn n die Dimension von E ist. Wenn $U \in F$ ist und T die Identität ist, dann ist $U = f'(T)(S) = S^tB + BS$ nach S auflösbar, wenn wir $BS = \frac{1}{2}U$ nach S lösen können, denn dann ist $S^tB = \pm(BS)^t = \pm\frac{1}{2}U^t = \frac{1}{2}U$. Falls B invertierbar ist, geht das und $S = \frac{1}{2}B^{-1}U$. Falls $T \in GL(E)$ beliebig ist, dann hat die Gleichung

$U = f'(T)(S) = S^tBT + T^tBS$ die Lösung $S = \frac{1}{2}B^{-1}(T^{-1})^tU$, denn dann gilt $T^tBS = \frac{1}{2}U$ und $S^tBT = \frac{1}{2}U^tT^{-1}(B^{-1})^tBT = \pm\frac{1}{2}U^t = \frac{1}{2}U$. Falls also B injektiv ist, d.h. b nicht degeneriert ist, oder äquivalent $b(x,y) = 0\,\forall\, y \Rightarrow x = 0$, dann ist $O_b(E)$ eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension

$$\dim O_b(E) := \begin{cases} n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2 & \text{falls } b \text{ symmetrisch ist} \\ n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2 & \text{falls } b \text{ schief-symmetrisch ist.} \end{cases}$$

Man beachte, daß für invertierbares B und $T \in O_b(E)$ automatisch $\mathrm{Det}(T) = \pm 1$ gilt, denn $0 \neq \mathrm{Det}(B) = \mathrm{Det}(T^tBT) = \mathrm{Det}(T)^2\,\mathrm{Det}(B)$.

14.8 Der symmetrische Fall, $O(n,k)$

Im symmetrischen Fall können wir nach dem Spektralsatz (Hauptachsentransformation) eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren e_j mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_j \in \mathbb{R}$ finden. Es ist dann

$$B(x) = \sum_j \lambda_j \langle x, e_j\rangle e_j$$

und somit

$$b(x,y) = \langle Bx, y\rangle = \sum_j \lambda_j \langle x, e_j\rangle\langle y, e_j\rangle$$

Da $\mathrm{Ker}(B) = \{0\}$ vorausgesetzt ist, müssen alle Eigenwerte $\lambda_j \neq 0$ sein, und somit sieht b in der Orthogonalbasis $f_j := \sqrt{|\lambda_j|}e_j$ wie folgt aus

$$b(x,y) = \sum_{\lambda_j>0} x^jy^j - \sum_{\lambda_j<0} x^jy^j,$$

wobei $x^j := \langle x, f_j\rangle$ die Koordinaten von x bezüglich der Basis (f_j) bezeichnet. Man nennt b auch pseudoeuklidisches Produkt. Solche sind für die Relativitätstheorie von Bedeutung. Man beachte, daß es Vektoren $x \neq 0$ gibt, welche Norm $b(x,x) = 0$ haben und auch solche mit negativer Norm. Man nennt die mit verschwindender Norm lichtartig, d.h. $\sum_{j>k}(x^j)^2 = \sum_{j\le k}(x^j)^2$ (dies beschreibt einen "Kegel"), und die mit positiver Norm raumartig und die mit negativer Norm zeitartig. Man betrachte z.B. die Form

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle := x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$$

Dann sind die Vektoren im Inneren des Doppelkegels mit der x_3-Achse die zeitartigen, die im Äußeren die raumartigen und die am Doppelkegel die lichtartigen. Bestimme des orthogonale Komplement jedes Vektors, zeige insbesonders, daß $v^\perp$ für lichtartige Vektoren, gerade die Tangentialebene an den Kegel in v ist. Die Gruppe $O_b(E)$ hängt also bis auf Isomorphie nur von der Signatur, d.h. Anzahl k der negativen Eigenwerte von b, ab und wird daher auch mit $O(n,k)$ bezeichnet, wobei $n = \dim(E)$ ist. Man beachte, daß $O(n,k) = O(n,n-k)$ ist. Die offene Teilgruppe $SL(n) \cap O(n,k)$ wird mit $SO(n,k)$ bezeichnet. Die $O(4,1)$ wird (in der Physik) auch als die Lorenzgruppe bezeichnet.

14.9 Der schiefsymmetrische Fall, $Sp(2n)$

Im schiefsymmetrischen Fall können wir eine Normalform wie folgt finden. Sei also b eine nichtdegenerierte schiefsymmetrische Bilinearform, eine sogenannte symplektische Form. Diese sind für die klassischen Mechanik von Bedeutung. Für eine Teilmenge $A \subseteq E$ bezeichnen wir mit $A^\perp := \{x \in E : x \perp y \forall\, y \in A\}$ das orthogonale Komplement. Wobei $x \perp y$ heißt, daß $b(x,y) = 0$ ist. Da b schiefsymmetrisch ist, ist $x \perp x$ für alle x. Eine Teilmenge $A \subseteq E$ heißt isotrop, falls $A \subseteq A^\perp$, d.h. $b|_{A\times A} = 0$. Es sei F so eine maximale isotrope Teilmenge. Wegen der Bilinearität von b muß F ein Teilraum sein (solche Teilräume heißen Lagrange Teilräume). Für Lagrange Teilräume F gilt $F = F^\perp$, denn andernfalls können wir ein $y \in F^\perp \setminus F$ zu F hinzufügen und erhalten eine größere isotrope Teilmenge $F \cup \{y\}$.

Für jeden Teilraum F gilt $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$ (in der Tat $i^* \circ \check{b} : E \to E^* \to F^*$ ist surjektiv, wobei $i : F \to E$ die Inklusion bezeichnet, denn $\check{b} : E \to E^*$ ist nach Voraussetzung bijektiv, und $i^* : E^* \to F^*$ ist klarerweise surjektiv (wähle ein linksinverses p zu i, dann gilt $i^* \circ p^* = \mathrm{id}$)) und somit ist $\dim E = \dim(\mathrm{Ker}) + \dim(\mathrm{Bild}) = \dim(F^\perp) + \dim(F)$). Insbesonders gilt also $\dim E = \dim F + \dim F^\perp = 2 \dim F$ für Lagrange Teilräume F. Insbesonders folgt aus der Existenz von Lagrange Teilräumen, daß E geradedimensional sein muß.

Wir wählen nun einen zu F komplementären Lagrange Teilraum F'. Das ist möglich, denn wenn für einen isotropen Teilraum G sowohl $G \cap F = \{0\}$ als auch $G + F \subset E$ gilt, dann ist $G^\perp + F = G^\perp + F^\perp = (G \cap F)^\perp = \{0\}^\perp = E \supset G + F$ und somit können wir ein $y \in G^\perp$ finden, für welches $(\mathbb{R}y + G) \cap F = \{0\}$ ist, denn andernfalls wäre $y \in G + F$. Wir haben hier für Teilräume A und B die Gleichungen $A^{\perp\perp} = A$ ($\Leftarrow A \subseteq A^{\perp\perp}$ und Dimensionsgründen) und $(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$ (trivial) und somit $A^\perp + B^\perp = (A^\perp + B^\perp)^{\perp\perp} = (A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp})^\perp = (A \cap B)^\perp$ verwendet. Der Raum $G_1 := \mathbb{R}y + G$ ist nun ein größerer isotroper Teilraum.

Es sei $i' : F' \to E$ die Inklusion. Dann ist $i^* \circ \check{b} \circ i' : F' \to E \to E^* \to F^*$ injektiv, denn der Kern von $i^* \circ \check{b}$ ist $F^\perp = F$ und $F \cap F' = \{0\}$, und somit aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus. Wir behaupten, daß der induzierte Isomorphismus $E = F' \times F \cong F^* \times F$ die symplektische Form b in die Form $(y_1^*, y_1; y_2^*, y_2) \mapsto y_1^*(y_2) - y_2^*(y_1)$ übersetzt. Sei also $x_j = y_j' + y_j$ mit $y_j \in F$ und $y_j' \in F'$. Dann ist $b(x_1, x_2) = b(y_1', y_2) + b(y_1, y_2') = b(y_1', y_2) - b(y_2', y_1)$, da F und F' isotrop sind. Also sei $y_i^* := (i^* \circ \check{b} \circ i')(y_i')$. Dann ist $b(y_1', y_2) = b(i'y_1', iy_2) = \check{b}(i'y_1')(iy_2) = (i^* \circ \check{b} \circ i')(y_1')(y_2) = y_1^*(y_2)$ und somit ist $b(x_1, x_2) = y_1^*(y_2) - y_2^*(y_1)$. Wählen wir nun in F eine Basis $(e_j)_{k<j\le 2k}$ (mit $2k = \dim E$) und in F^* die duale Basis $(e^j)_{j>k}$. Mit $(e_j := e'_{k+j})_{j\le k}$ bezeichnen wir die entsprechende Basis in F'. Dann ist $(e_j)_{j\le 2k=n}$ eine Basis von E, die jener von $F^* \times F$ entspricht, dann ist $y^*(y) = \sum_j y_j y^j$, wobei y_j die Koordinaten von y^* bzgl. e^j und y^j jene von y bzgl. e_j bezeichnet. Also ist

$$b(x, y) = \sum_{j\le k} x^j y^{j+k} - x^{j+k} y^j.$$

Die entsprechende Gruppe wird mit $Sp(2k)$ bezeichnet, und heißt reelle symplektische Gruppe.

14.10 Spiegelungen

Wir wollen nun spezielle Abbildungen $T \in O_b(E)$ beschreiben. Und zwar solche, die eine Hyperebene als Fixpunktmenge $\{x \in E : Tx = x\}$ besitzen. Sei F diese Hyperebene und $0 \neq y \in F^\perp$, d.h. $F = \{y\}^\perp$. Sei $0 \neq y' \notin F$ mit $b(y', y) = 1$ (möglich, da $b(y', y) = 0 \Rightarrow y' \in \{y\}^\perp = F$), dann läßt sich jedes $x \in E$ als $x = b(x,y)y' + (x - b(x,y)y')$ schreiben, und $b(x - b(x,y)y', y) = 0$, d.h. $x - b(x,y)y' \in F$. Folglich ist T von der Form

$$T(x) = b(x,y)T(y') + (x - b(x,y)y') = x + b(x,y)(T(y') - y') =: x + b(x,y)y''.$$

Damit T die Form b erhält, muß

$$\begin{aligned} b(x_1,x_2) = b(T(x_1),T(x_2)) &= b(x_1 + b(x_1,y)y'', x_2 + b(x_2,y)y'') = \\ &= b(x_1,x_2) + b(x_1,y)b(y'',x_2) + b(x_2,y)b(x_1,y'') + b(x_1,y)b(x_2,y)b(y'',y'') \end{aligned}$$

gelten, d.h. $b(x_1,y)b(y'',x_2) + b(x_2,y)b(x_1,y'') + b(x_1,y)b(x_2,y)b(y'',y'') = 0$. Wenn wir $x_2 = y'$ setzen und $x_1 \perp y$ wählen, dann folgt $b(x_1, y'') = 0$, also ist $y'' \in \{y\}^{\perp\perp} = \mathbb{R}\, y$. Sei also $y'' = \lambda y$ (mit $\lambda \neq 0$, da T nicht die Identität ist). Dann ist

$$\lambda b(x_1,y)b(y,x_2) + \lambda b(x_2,y)b(x_1,y) + b(x_1,y)b(x_2,y)\lambda^2 b(y,y) = 0$$

genau dann wenn $b(x_2,y)(\pm 1 + 1 + \lambda b(y,y)) = 0$ ist für alle x_2, bzw. $1 + \lambda b(y,y) = \mp 1$ $(x_2 := y')$

Im symmetrischen Fall ist das damit äquivalent, daß $\lambda b(y,y) = -2$ ist und im schiefsymmetrischen ist es immer erfüllt.

Die $T \in O_b(E)$ mit einer Hyperebene $F = \{y\}^\perp$ als Fixpunktmenge sind also genau

$$T(x) := \begin{cases} x - 2\frac{b(x,y)}{b(y,y)} y & \text{mit } b(y,y) \neq 0 \text{ im symmetrischen Fall} \\ x + \lambda b(x,y) y & \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ im schiefsymmetrischen Fall} \end{cases}$$

Diese heißen auch Spiegelungen, in Analogie zum Fall, wo b eine euklidische Metrik ist.

Es läßt sich für $x \neq x'$ mit $b(x,x) = b(x',x')$ genau dann solch eine Abbildung T finden mit $Tx = x'$, wenn $b(x,x') \neq b(x,x)$ ist, denn $x' = x + \lambda b(x,y)y$ gilt genau dann, wenn $y = \mu(x' - x)$ mit $1 = \lambda\mu^2 b(x, x' - x) = \lambda\mu^2(b(x,x') - b(x,x))$ gilt. Im symmetrischen Fall ist dann $\lambda b(y,y) = \lambda\mu^2 b(x'-x, x'-x) = -2$. Diese Abbildung läßt $(x'-x)^\perp$ fix. Im symplektischen Fall ist jede solche Abbildung orientierungserhaltend, denn $T(y') = y' + \lambda y$ liegt auf der gleichen Seite von F wie y', und im symmetrischen Fall orientierungsvertauschend, denn $T(y) = y - 2y = -y$.

Proposition. *Für jede (schief-)symmetrische nicht-degenerierte Bilinearform $b : E \times E \to \mathbb{R}$ wird $O_b(E)$ von den Spiegelungen erzeugt.*

Man kann zeigen, daß im symmetrischen Fall $n = \dim E$ viele Spiegelungen genügen und im symplektischen sind mindestens $n+1$ notwendig (siehe [**31**, Sur les Groups Classique, Hermann, Paris 1967]).

Beweis. Im symmetrischen Fall wählen wir eine Orthonormalbasis von E (d.h. $b(e_i, e_j) = 0$ und $b(e_i, e_i) = \pm 1$) Die Bilder $e_i' := T(e_i)$ sind dann ebenfalls eine Orthonormalbasis. Falls $b(e_1, e_1') \neq b(e_1, e_1)$, dann gibt es eine Spiegelung, die e_1 auf e_1' abbildet. Andernfalls ist $b(e_1, e_1') = b(e_1, e_1)$, dann gibt es eine Spiegelung die e_1 auf $-e_1$ abbildet, und eine die $-e_1$ auf e_1' abbildet, da $b(e_1, -e_1') = -b(e_1, e_1) \neq b(e_1, e_1)$. Also läßt T bis auf diese Spiegelungen e_1 fix. Wir zeigen nun mit Induktion, daß T bis auf Spiegelungen $\{e_1,\dots,e_k\}$ fix läßt. In der Tat, wenn T die Menge $\{e_1,\dots,e_{k-1}\}$ fix läßt, und $b(e_k,e'_k)\neq g(e_k,e_k)$ ist, dann bildet die Spiegelung S um e'_k-e_k den Vektor e_k auf e'_k ab, und läßt $(e'_k-e_k)^\perp\supseteq(e'_k)^\perp\cap(e_k)^\perp\supseteq\{e_1,\dots,e_{k-1}\}$ fix, also läßt $S^{-1}T$ sogar $\{e_1,\dots,e_k\}$ fix (Man beachte, daß $S^2=\mathrm{id}$ im symmetrischen Fall, und $S_+\circ S_-=\mathrm{id}$ im symplektischen Fall). Ist andererseits $g(e_k,e'_k)=g(e_k,e_k)$, dann spiegeln wir zuerst an $2e_k$ (mit $b(e_k,e_k)=\pm1\neq0$) und danach an e'_k+e_k (mit $b(e_k+e'_k,e_k+e'_k)=2(b(e_k,e_k)+b(e_k,e'_k))=4b(e_k,e_k)\neq0$). Diese Spiegelungen lassen $(e_k)^\perp\cap(e_k+e'_k)^\perp\supseteq\{e_1,\dots,e_{k-1}\}$ invariant, also läßt T bis auf diese Spiegelungen $\{e_1,\dots,e_k\}$ invariant.

Im symplektischen Fall beweisen wir die Aussage mittels Induktion nach $j:=n-\dim F$, wo $F:=\{x:Tx=x\}$. Für $j=0$ ist $T=\mathrm{id}$. Sei also $j>0$. Für jedes $y\in E$ ist $b(y,x)=b(Ty,Tx)=b(Ty,x)$ für alle $x\in F$, d.h. $Ty-y\in F^\perp$. Falls $b(Ty,y)\neq0$ ist ($\Rightarrow y\notin F$), dann existiert eine Spiegelung, welche y auf Ty abbildet und die $(Ty-y)^\perp\supseteq F$ fix läßt. Bis auf diese Spiegelung läßt also T auch $F\oplus\mathbb{R}\,y$ fix. Andernfalls ist $b(Ty,y)=0$ für alle y. Sei vorerst $F\cap F^\perp\neq\{0\}$. Dann wählen wir ein $0\neq x\in F\cap F^\perp$ und ein $y\in E$ mit $b(y,x)=1$ (geht wie in der Beschreibung von Spiegelungen). Es gilt dann $y\notin F$, da $x\in F^\perp$. Weiters ist $b(x,Ty)=b(x,y)\neq0$ und somit existieren Spiegelungen die y auf $x+y$, bzw. Ty auf $x+y$ abbilden, und $(x+y-y)^\perp\cap(x+y-Ty)^\perp\supseteq F$ fix lassen. Also läßt T bis auf diese Spiegelungen $F\oplus\mathbb{R}\,y$ fix, und wir können die Induktionsannahme anwenden.
Ist $F=\{0\}$, dann existiert ein $x\in F^\perp=E$ mit $b(x,y)=1=b(x,Ty)$, denn ergänze $(e_1:=y,e_2:=Ty)$ zu einer Basis eines Lagrange Teilraums (beachte, daß der von $\{y,Ty\}$ erzeugte Teilraum isotrop ist) und setze $x:=e^1+e^2$ in Termen der dualen Basis $(e^i)_{i=1}^k$. Nun verfahre wie gerade zuvor.
Ist schließlich $F\neq\{0\}$ und $F\cap F^\perp=\{0\}$, dann ist $E=F\oplus F^\perp$ und b induziert auf $F^\perp$ eine symplektische Form, denn für $y'\in F^\perp$ mit $b(y',y)=0\,\forall\,y\in F^\perp$ gilt $y'\in(F^\perp)^\perp=F$ und somit $y'=0$. Weiters läßt $T\in O_b(E)$ den Raum $F^\perp$ invariant, denn $b(Ty',y)=b(Ty',Ty)=b(y',y)=0$ für alle $y\in F$ und $y'\in F^\perp$. nach Induktionsvoraussetzung ist $T|_{F^\perp}$ eine Zusammensetzung von Spiegelungen längs Vektoren in $F^\perp$. Da solche Spiegelungen aber $F=F^{\perp\perp}$ fix lassen, ist T auf ganz E die Zusammensetzung dieser Spiegelungen. □

Folgerung. *Es gilt $Sp(2k)\subseteq SL(2k)$.*

14.11 Der degenerierte Fall

Falls b degeneriert ist, d.h. B einen nicht trivialen Kern K besitzt, dann erhält jedes $T\in O_b(E)$ diesen Kern, denn $BT=(T^{-1})^tB$ impliziert, daß $BT(K)=0$ ist. Also können wir $\tilde E:=E/K$ betrachten. Falls b (schief)symmetrisch ist, so induziert b eine nichtdegenerierte (schief)symmetrische Form $\tilde b:\tilde E\times\tilde E\to\mathbb{R}$, denn $\operatorname{Ker}B^t=\operatorname{Ker}B$. Und $T\in O_b(E)$, genau dann wenn $T(K)\subseteq K$ und $\tilde T\in O_{\tilde b}(\tilde E)$, wobei $\tilde T$ definiert ist durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook] \arrow[d, "T|_K"'] & E \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "T"'] & \tilde{E} \arrow[d, dotted, "\tilde{T}"] \\ K \arrow[r, hook] & E \arrow[r, two heads, "p"] & \tilde{E} \end{tikzcd}$$

Wir verwenden nun den Isomorphismus $E \cong K \oplus \tilde{E}$, welcher durch $(1 - sp, p)$ mit der Inversen $(k, \tilde{x}) \mapsto k + s(\tilde{x})$ gegeben ist (denn $p(1 - sp) = 0$), wobei $p : E \to \tilde{E}$ die kanonische Projektion ist und $s : \tilde{E} \to E$ ein Rechtsinverses. Dann können wir $T \in O_b(K \times \tilde{E})$ wie folgt darstellen:

$$\begin{pmatrix} T|_K & Ts - s\tilde{T} \\ 0 & \tilde{T} \end{pmatrix}$$

mit $T|_K \in GL(K)$ und $\tilde{T} \in O_{\tilde{b}}(\tilde{E})$. Als Mannigfaltigkeiten ist also $O_b(E) \cong GL(K) \times O_{\tilde{b}}(\tilde{E}) \times L(\tilde{E}, K)$, wobei der Isomorphismus gegeben ist durch $T \mapsto (T|_K, \tilde{T}, Ts - s\tilde{T})$. Aus (14.9) folgt, daß als Gruppe:

$$O_b(E) \cong (GL(K) \times O_{\tilde{b}}(\tilde{E})) \rtimes L(\tilde{E}, K)$$

14.12 Der unsymmetrische Fall

Falls schließlich b weder symmetrisch noch schiefsymmetrisch ist, so zerlegen wir b in den symmetrischen und den schiefsymmetrischen Teil $b = b_+ + b_-$, wobei $b_\pm(x, y) = (b(x, y) \pm b(y, x))/2$ ist. Dem entspricht übrigens gerade die Zerlegung von $B = B_+ + B_-$, wobei $B_\pm = (B \pm B^t)/2$ ist. Dann ist $O_b(E) = O_{b_+}(E) \cap O_{b_-}(E)$. Allerdings wissen wir nicht, ob dieser Durchschnitt von Mannigfaltigkeiten wieder eine ist. Für Lie-Gruppen kann man dies aber allgemein zeigen (abgeschlossene Untergruppen von Lie-Gruppen sind ebenso Lie-Gruppen).

14.13 Die Gruppen $U(n,k)$

Betrachten wir den Spezialfall, wo die Abbildung I, die die Darstellung $b_-(x, y) = b_+(Ix, y)$ vermittelt, eine b_+-Isometrie ist. Dann gilt $I^t = -I$ und $I^t I = 1$, wobei $()^t$ transponieren bzgl. b_+ bezeichnet. Also ist $I^2 = -1$ und wir können folglich E zu einem komplexen Vektorraum machen, indem wir $(a + ib)\, x := a\, x + b\, I(x)$. Man beachte, daß I auch eine b_- Isometrie ist, denn $b_-(Ix, Iy) = b_+(I^2 x, Iy) = b_+(Ix, y) = b_-(x, y)$. Wir fassen die beiden Gleichungen $b_\pm(Tx, Ty) = b_\pm(x, y)$ in $\mathbb{R}$ zu einer Gleichung $b(Tx, Ty) = b(x, y)$ in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ zusammen, d.h. $b(x, y) := b_+(x, y) + ib_-(x, y)$. Dann ist b reell-bilinear, konjugiert symmetrisch, denn $b(y, x) = b_+(y, x) + ib_-(y, x) = b_+(x, y) - ib_-(x, y) = \overline{b(x, y)}$, und sogar $\mathbb{C}$-linear im zweiten Faktor, denn

$$\begin{aligned} b(x, iy) &= b_+(x, iy) + ib_-(x, iy) = \\ &= b_+(iy, x) + ib_+(ix, iy) = ib_+(x, y) - b_-(x, y) = ib(x, y). \end{aligned}$$

Also ist b eine hermitesche Form, die klarerweise ebenfalls nicht degeneriert ist.
Ist umgekehrt b eine beliebige hermitesche nichtdegenerierte Form auf einem komplexen Vektorraum E, dann ist ihr Realteil b_+ eine symmetrische nicht degenerierte Form

und ihr Imaginärteil eine symplektische Form b_- und es gilt $b_-(x,y) = b_+(ix,y)$. In der Tat ist

$$b_+(x,y) = (b(x,y) + \overline{b(x,y)})/2 = (b(x,y) + b(y,x))/2 \in \mathbb{R}$$
$$b_-(x,y) = (b(x,y) - \overline{b(x,y)})/(2i) = (b(x,y) - b(y,x))/(2i) \in \mathbb{R}$$

und somit ist $b_\pm$ (schief-)symmetrisch und es gilt $b_+(x,iy) + ib_-(x,iy) = b(x,iy) = ib(x,y) = ib_+(x,y) - b_-(x,y)$, d.h. $b_+(x,iy) = -b_-(x,y)$ oder äquivalent $b_-(x,y) = -b_-(y,x) = b_+(y,ix) = b_+(ix,y)$. Es ist i eine b_+-Isometrie, denn $b_+(ix,iy) = (b(ix,iy)+\overline{b(ix,iy)})/2 = (-i^2 b(x,y)+\overline{-i^2 b(x,y)})/2 = (b(x,y)+\overline{b(x,y)}))/2 = b_+(x,y)$. Somit ergibt sich auch aus der nicht-Degeneriertheit von b jene von $b_\pm$.
In dieser Situation ist

$$O_{b_+}(E) \cap O_{b_-}(E) = O_{b_+}(E) \cap L_{\mathbb{C}}(E) = O_{b_-}(E) \cap L_{\mathbb{C}}(E) = U_b(E) \subseteq L_{\mathbb{C}}(E),$$

wobei

$$U_b(E) := \{T \in GL(E) : b(Tx,Ty) = b(x,y) \,\forall\, x,y \in E\}$$
$$L_{\mathbb{C}}(E) := \{T \in L(E) : T \text{ ist } \mathbb{C}\text{-linear}\} = \{T \in L(E) : T \circ I = I \circ T\}.$$

Wobei wir die neue Bezeichnung U verwendet haben, da b nun $\mathbb{C}$-wertig ist.
Offensichtlich ist $O_{b_+} \cap O_{b_-} = U_b$. Es ist $U_b \subseteq L_{\mathbb{C}}(E)$, denn für $T \in O_{b_+} \cap O_{b_-}$ gilt $b_+(Tix,Ty) = b_+(ix,y) = b_-(x,y) = b_-(Tx,Ty) = b_+(iTx,Ty)$ und somit ist $T(ix) = iT(x)$ für alle x, d.h. $T \in L_{\mathbb{C}}(E)$. Umgekehrt ist $O_{b_\pm} \cap L_{\mathbb{C}}(E) \subseteq O_{b_\mp}$, denn $b_\mp(Tx,Ty) = \pm b_\pm(iTx,Ty) = \pm b_\pm(Tix,Ty) = \pm b_\pm(ix,y) = b_\mp(x,y)$.
Sei nun E ein komplexer Vektorraum mit komplexer Basis $(e_i)_{i\le n}$, d.h. jedes $z \in E$ läßt sich eindeutig als $z = \sum_{j=1}^n z^j e_j$ mit Koeffizienten $z^j \in \mathbb{C}$ schreiben. Es sei $z^j =: x^j + ix^{n+j}$ die Zerlegung in Real- und Imaginärteil. Dann ist $z = \sum_{j=1}^{2n} x^j e_j$, wobei $e_{k+j} := ie_j$ für alle $1 \le j \le n$ ist. Also hat E als reeller Vektorraum die Basis $(e_j)_{j=1}^{2n}$. Man beachte, daß zuerst alle Realteile und erst danach die Imaginärteile kommen, d.h. die durch die Basen gegebenen Isomorphismen $E \cong \mathbb{C}^n$ und $E \cong \mathbb{R}^{2n}$ induzieren nicht den vielleicht erwarteten Isomorphismus $\mathbb{C}^n \cong (\mathbb{R}^2)^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, sondern ist noch mit dem Umordnungsisomorphismus $(\mathbb{R}^2)^n \cong (\mathbb{R}^n)^2$ zusammengesetzt. Die Multiplikation von $\mathbb{R}^{2n}$ ist also durch die Matrix

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben, und wir bezeichnen mit $L_{\mathbb{C}}(n) := \{T \in L(2n) : T \circ I = I \circ T\}$.
Wenn $T \in L_{\mathbb{C}}(E)$ bezüglich der komplexen Basis $(e_j)_{j\le n}$ die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} + ib_{1,1} & \dots & a_{1,n} + ib_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + ib_{n,1} & \dots & a_{n,n} + ib_{n,n} \end{pmatrix} = A + iB$$

hat, dann hat T bezüglich der reellen Basis $(e_1, \dots, e_n; ie_1, \dots, ie_n)$ die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & -b_{1,1} & \dots & -b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & -b_{n,1} & \dots & -b_{n,n} \\ b_{1,1} & \dots & b_{1,n} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix},$$

wie eine einfache Koordinatenrechnung zeigt.

Sei nun b die standard hermitesche Form, d.h.

$$b(z, w) = \sum_{j=1}^{n} \bar{z}^j w^j.$$

Die Gruppe $U_b(E)$ wird dann auch als $U(n)$ bezeichnet. Wenn wir wie zuvor $z^j = x^j + ix^{n+j}$ und $w^j = y^j + iy^{n+j}$ setzen, dann ergibt sich

$$b(z, w) = \sum_{j=1}^{n} (x^j y^j - i^2 x^{n+j} y^{n+j}) + i \sum_{j=1}^{n} (x^j y^{n+j} - x^{n+j} y^j),$$

also ist der Realteil von b gerade die positiv definite symmetrische Standardform und der Imaginärteil gerade die symplektische Standardform. Also ist

$$U(n) = O(2n) \cap Sp(2n) = O(2n) \cap L_{\mathbb{C}}(n) = Sp(2n) \cap L_{\mathbb{C}}(n).$$

Wenn b die hermitesche Standardform mit Signatur $k > 0$ bezeichnet, d.h.

$$b(z, w) = \sum_{j>k}^{n} \bar{z}^j w^j - \sum_{j \le k} \bar{z}^j w^j,$$

dann wird die Gruppe $U_b(E)$ mit $U(n, k)$ bezeichnet, und eine analoge Rechnung zeigt, daß Realteil und Imaginärteil folgende Matrixbeschreibungen $B_\pm$ haben

$$\begin{aligned} B_+ &= \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & 1_k \end{pmatrix}, \\ B_- &= \begin{pmatrix} 0 & -1_k \\ 1_k & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad \text{mit } 1_k = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

also ist

$$U(n, k) = \text{“}O(2n, 2k)\text{”} \cap \text{“}Sp(2n)\text{”} = \text{“}O(2n, 2k)\text{”} \cap L_{\mathbb{C}}(n) = \text{“}Sp(2n)\text{”} \cap L_{\mathbb{C}}(n),$$

wobei die Gruppen unter Anführungszeichen nur bis auf Koordinatenvertauschungen durch die Standardformen beschrieben werden.

Wie für reelle Vektorräume, läßt sich natürlich auch für komplexe Vektorräume zeigen, daß die Gruppen

$$U(n, k) := \{T \in L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) : b(Tx, Ty) = b(x, y)\} = O(2n, 2k) \cap Sp(2n)$$

Teilmannigfaltigkeiten von $L_{\mathbb{C}}(E)$ sind, wobei b eine nicht degenerierte hermitesche Form ist, die gerade k negative Eigenwerte hat. Man beachte, daß schiefhermitesche Formen nichts anderes als $i\,b$ für eine hermitsche Form b sind, also nichts neues liefern.

14.14 Komplex lineare Abbildungen, $GL_{\mathbb{C}}$, $SL_{\mathbb{C}}$

Sei nun E ein komplexer n-dimensionaler Vektorraum. Wir können nun wie im reellen Fall auch folgende Untergruppen des komplexen Vektorraums $L_{\mathbb{C}}(E)$ betrachten.

$$\begin{aligned}
GL_{\mathbb{C}}(E) &:= \{T \in L_{\mathbb{C}}(E) : T \text{ ist } \textit{invertierbar}\} = GL(E) \cap L_{\mathbb{C}}(E)\\
SL_{\mathbb{C}}(E) &:= \{T \in L_{\mathbb{C}}(E) : \operatorname{Det}_{\mathbb{C}}(T) = 1\}\\
SU_b(E) &:= \{T \in SL_{\mathbb{C}}(E) : b(Tx, Ty) = b(x,y)\,\forall\, x,y\} = U_b(E) \cap SL_{\mathbb{C}}(E)\\
SU(n) &:= U(n) \cap SL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)\\
SU(n,k) &:= U(n,k) \cap SL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)
\end{aligned}$$

betrachten, wobei $\operatorname{Det}_{\mathbb{C}}$ die komplexe Determinante ist.

Es sei $\mathbb{C}_*$ die Gruppe $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation. Die Abbildung $\mathbb{C}_* \times SL_{\mathbb{C}}(n) \to GL_{\mathbb{C}}(n)$, $(t,T) \mapsto tT$ ist offensichtlich ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, denn $\det_{\mathbb{C}}(tT) = t^n \det_{\mathbb{C}}(T)$, mit Kern $\{(\frac{1}{t}, t\cdot 1) : t^n = 1\} \cong \mathbb{Z}_n$. Man kann zeigen, daß daraus leicht folgt, daß dies eine Überlagerungsabbildung ist. Andererseits ist $GL_{\mathbb{C}}(n) = SL_{\mathbb{C}}(n) \ltimes \mathbb{C}_*$ ein semidirektes Produkt, da die kurze exakte Sequenz

$$1 \to SL_{\mathbb{C}}(n) \hookrightarrow GL_{\mathbb{C}}(n) \xrightarrow{\operatorname{Det}} \mathbb{C}_* \to 1$$

via folgendem Gruppenhomomorphismus $\mathbb{C}_* \to GL_{\mathbb{C}}(n)$ splittet:

$$z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Im reellen Fall ist $\mathbb{R}^+ \times SL(n) \to GL^+(n)$, $(t,T) \mapsto tT$ ein Gruppenisomorphismus. Also kann man $\mathbb{R}_* \times SL(n)$ mit $GL(n)$ als Mannigfaltigkeit identifiziert werden. Falls n ungerade ist, so liefert die gleiche Formel auch einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{R}_* \times SL(n) \to GL(n)$. Im geraden Fall ist $GL(n) = SL(n) \ltimes \mathbb{R}^*$ wie zuvor wieder ein semidirektes Produkt.

Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen reeller Determinante Det und komplexer Determinante $\operatorname{Det}_{\mathbb{C}}$ herstellen. Dazu betrachten wir die Exponentialfunktion $\exp : L_{\mathbb{K}}(E) \to GL_{\mathbb{K}}(E)$, $T \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k$. Offensichtlich ist $\exp'(\mathrm{id})(T) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tT) = T\exp(0) = T$ für alle t (oder allgemeiner $\exp'(T)(S) = \exp(T)S$, falls $TS = ST$ ist) und somit ist exp ein lokaler Diffeomorphismus bei 0.

Es gilt $\operatorname{Det}_{\mathbb{K}}(\exp(T)) = e^{\operatorname{Spur}_{\mathbb{K}} T}$, denn dazu betrachten wir $f : \mathbb{R} \to L_{\mathbb{K}}(E) \to GL_{\mathbb{K}}(E) \to \mathbb{K} \setminus \{0\} \to \mathbb{K}$ gegeben durch $f(t) = \ln(\operatorname{Det}_{\mathbb{K}}(\exp(tT)))$ (dies macht Sinn, da wir längs der Kurve $t \mapsto \operatorname{Det}_{\mathbb{K}}(\exp(tT))$ die komplexe Logarithmusfunktion wohldefiniert wählen können). Dann ist $f(0) = 0$ und

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\operatorname{Det}'_{\mathbb{K}}(\exp(tT))\exp'(tT)(T)}{\operatorname{Det}_{\mathbb{K}}(\exp(tT))} \\ &= \frac{\operatorname{Det}_{\mathbb{K}}(\exp(tT))\ \operatorname{Spur}(\exp(-tT)\exp(tT)T)}{\operatorname{Det}_{\mathbb{K}}(\exp(tT))} = \operatorname{Spur}(T) \end{aligned}$$

also ist $f(t) = t\operatorname{Spur}(T)$, und $f(1) = \operatorname{Spur}(T)$ liefert das Gewünschte.

Wir wollen nun zeigen, daß $|\operatorname{Det}_{\mathbb{C}}(T)|^2 = \operatorname{Det}_{\mathbb{R}}(T)$ ist für $\mathbb{C}$-lineares T. Da beides Polynome (in den Eintragungen der Matrix) von T sind, genügt es das für T nahe der Identität zu zeigen, also für solche Abbildungen der Form $\exp(T)$. Für diese gilt:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Det}_{\mathbb{C}}(\exp(T))|^2 &= \operatorname{Det}_{\mathbb{C}}(\exp(T))\overline{\operatorname{Det}_{\mathbb{C}}(\exp(T))} \\ &= e^{\operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(T)}\, e^{\overline{\operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(T)}} = e^{\operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(T)+\overline{\operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(T)}} \\ &= e^{\operatorname{Spur}_{\mathbb{R}}(T)} = \operatorname{Det}_{\mathbb{R}}(\exp(T)), \end{aligned}$$

denn es ist $\operatorname{Spur}_{\mathbb{R}}(T) = \operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(T) + \overline{\operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(T)}$, denn sei $A + iB$ die komplexe Matrixdarstellung von T, dann ist $\operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(A \pm iB) = \operatorname{Spur}(A) \pm i\operatorname{Spur}(B)$ und

$$\begin{aligned} \operatorname{Spur}_{\mathbb{R}}(T) = \operatorname{Spur}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} &= 2\operatorname{Spur}(A) = \\ &= \operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(A+iB) + \operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(A-iB) = \operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(T) + \overline{\operatorname{Spur}_{\mathbb{C}}(T)}. \end{aligned}$$

Eine andere algebraische Methode, die selbe Gleichung zu erhalten, geht wie folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}_{\mathbb{R}}(T) &= \operatorname{Det}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} A-iB & -B \\ B+iA & A \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Det}\begin{pmatrix} A-iB & -B \\ B+iA-i(A-iB) & A-i(-B) \end{pmatrix} = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} A-iB & -B \\ 0 & A+iB \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Det}(A-iB)\cdot\operatorname{Det}(A+iB) = \overline{\operatorname{Det}_{\mathbb{C}}(T)}\cdot\operatorname{Det}_{\mathbb{C}}(T) = |\operatorname{Det}_{\mathbb{C}}(T)|^2. \end{aligned}$$

14.15 Komplexe Gruppen, $O_{\mathbb{C}}$, $Sp_{\mathbb{C}}$

Ist nun $b : E\times E \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-bilineare (schief-)symmetrische, nicht degenerierte Form, dann wollen wir $U_b(E)$ analog zum Fall einer hermiteschen Form als Durchschnitte reeller Gruppen beschreiben. Dazu zerlegen wir b in Real- und Imaginärteil, d.h. $b(x, y) = b_+(x, y) + ib_-(x, y)$, wobei

$$\begin{aligned} b_+(x, y) &= (b(x, y) + \overline{b(x, y)})/2 \in \mathbb{R} \\ b_-(x, y) &= (b(x, y) - \overline{b(x, y)})/(2i) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dann sind der Realteil b_+ und der Imaginärteil b_- zwei reell bilineare (schief-)symmetrische reell-wertige Formen, und es gilt $-b_-(x, y) + ib_+(x, y) = ib(x, y) = b(x, iy) = b_+(x, iy) + ib_-(x, iy)$, d.h. $b_-(x, y) = -b_+(x, iy)$. Weiters gilt

$$b_+(ix, iy) = -b_-(ix, y) = \mp b_-(y, ix) = \pm b_+(y, i^2x) = -b_+(x, y).$$

Eine $\mathbb{R}$-lineare Bijektion, die sowohl b_+ als auch b_- erhält ist $\mathbb{C}$-linear, denn

$$b_+(Tx, Tiy) = b_+(x, iy) = -b_-(x, y) = -b_-(Tx, Ty) = b_+(Tx, iTy) \Rightarrow Tiy = iTy;$$

und umgekehrt erhält jede Abbildung T, die b erhält auch den Real- und Imaginärteil, d.h.

$$O_{b_+}(E) \cap O_{b_-}(E) = O_{b_+}(E) \cap L_{\mathbb{C}}(E) = O_{b_-}(E) \cap L_{\mathbb{C}}(E) = U_b(E) \subseteq L_{\mathbb{C}}(E).$$

Ist insbesonders b die standard $\mathbb{C}$-bilineare symmetrische Form, welche durch $b(z,w) := \sum_{i=1}^n z^i w^i$ gegeben ist, dann wird $U_b(E)$ auch als $O_{\mathbb{C}}(n)$ bezeichnet. Beachte, daß das Analogon zu $O(n,k)$ für $0 < k < n$ uninteressant, da isomorph zu $O_{\mathbb{C}}(n)$, ist. Real- und Imaginärteil haben wegen

$$b(z,w) = \sum_j (x^j y^j - x^{n+j} y^{n+j}) + i \sum_j (x^j y^{n+j} + x^{n+j} y^j)$$

folgende Darstellung

$$B_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sie haben beide Signatur n, denn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot B_- \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = B_+$$

und somit ist

$$O_{\mathbb{C}}(n) = \text{“}O(2n,n)\text{”} \cap \text{“}O(2n,n)\text{”} = \text{“}O(2n,n)\text{”} \cap L_{\mathbb{C}}(n),$$

wobei die Gruppen auf der rechten Seite nur bis auf Koordinaten-Vertauschungen und Drehungen durch Standardformen beschrieben werden.
Ist schließlich b die standard $\mathbb{C}$-bilineare alternierende Form, welche durch

$$b(z,w) := \sum_{i=1}^m (z^i w^{m+i} - z^{m+i} w^i)$$

gegeben ist, dann wird $U_b(E)$ auch als $Sp_{\mathbb{C}}(n)$ bezeichnet. Real- und Imaginärteil haben wegen

$$\begin{aligned} b(z,w) = \sum_j &(x^j y^{m+j} - x^{2m+j} y^{3m+j} - x^{m+j} y^j + x^{3m+j} y^{2m+j}) \\ &+ i \sum_j (x^j y^{3m+j} + x^{2m+j} y^{m+j} - x^{m+j} y^{2m+j} - x^{3m+j} y^j) \end{aligned}$$

folgende Darstellung

$$B_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$Sp_{\mathbb{C}}(2m) = \text{“}Sp(4m)\text{”} \cap L_{\mathbb{C}}(2m),$$

wobei die Gruppe unter Anführungszeichen nur bis auf Koordinaten Vertauschungen – welche durch (0)(123) und (0)(132) geben sind – durch die Standardform beschrieben wird.

Beachte noch, daß

$$\begin{aligned} GL_{\mathbb{C}}(E) &\subseteq GL^+(E) := \{T \in GL(E) : \mathrm{Det}(T) > 0\} \\ O_{\mathbb{C}}(n) &\subseteq SL(2n) \\ Sp_{\mathbb{C}}(n) &\subseteq SL_{\mathbb{C}}(2n), \end{aligned}$$

denn $\mathrm{Det}(T) = |\,\mathrm{Det}_{\mathbb{C}}(T)|^2 \geq 0$ und $T \in O_{\mathbb{C}}(T) \Rightarrow T^tT = 1$, d.h. $\mathrm{Det}_{\mathbb{C}}(T)^2 = 1$, also $\mathrm{Det}(T) = |\pm 1|^2 = 1$. Da $Sp_{\mathbb{C}}(n)$ von den Spiegelungen erzeugt wird, und diese positive komplexe Determinante haben, gilt auch die letzte Inklusion. Wieder hat $O_{\mathbb{C}}(n)$ zwei Zusammenhangskomponenten, wobei $SO_{\mathbb{C}}(n) := SL_{\mathbb{C}}(n) \cap O_{\mathbb{C}}(n)$, wohingegen $Sp_{\mathbb{C}}(n)$ und $SL_{\mathbb{C}}(n)$ zusammenhängend sind.

14.16 Quaternionisch lineare Abbildungen

Man kann analoges auch für den Schiefkörper der Quaternionen machen. Als Vektorraum können wir ihn mit $\mathbb{H} := \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ identifizieren. Die Multiplikation läßt sich zum Beispiel für $(t,x),(s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{H}$ so einführen:

$$(t,x)\cdot(s,y) := (ts - \langle x,y\rangle, ty + sx + x \times y).$$

Wir können eine Konjugation durch

$$\overline{(t,x)} := (t,-x)$$

definieren. Dann gilt $\bar{q}\cdot q = |q|^2$ und somit ist $1/q = \bar{q}/|q|^2$. Es gelten dann alle Körper-Axiome bis auf das Kommutativgesetz der Multiplikation (siehe Aufgabe (72.65) auch für andere Beschreibungen). Wenn wir die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ mit i,j,k bezeichnen, dann ist $1 \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}$ eine Einheit und es gilt $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$. Damit Matrizen mit quaternionischen Eintragungen aber quaternionisch linear auf Vektoren wirken, müssen wir quaternionische **rechts-**Vektorräume E betrachten. Mit $L_{\mathbb{H}}(E)$ bezeichnen wir den reellen Vektorraum aller $T : E \to E$, welche $\mathbb{H}$-linear sind. D.h. $L_{\mathbb{H}}(E) = \{T \in L(E) : T(xi) = (Tx)i, T(xj) = (Tx)j, T(xk) = (Tx)k\} = \{T \in L_{\mathbb{C}}(E) : T(xj) = (Tx)j\}$, wobei die komplexe Struktur auf E durch $\mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \{0\} \subseteq \mathbb{H}$ gegeben ist. Wir erhalten dann die Gruppen

$$\begin{aligned} GL_{\mathbb{H}}(E) &:= \{T \in L_{\mathbb{H}}(E) : T \text{ ist } \mathit{invertierbar}\} = GL(E) \cap L_{\mathbb{H}}(E) \\ SL_{\mathbb{H}}(E) &:= \{T \in L_{\mathbb{H}}(E) : \mathrm{Det}_{\mathbb{R}}(T) = 1\} = SL(E) \cap L_{\mathbb{H}}(E) \end{aligned}$$

Es sei also $(e_l)_{l=1}^n$ eine Basis des quaternionischen Rechtsvektorraums E, d.h. jedes $q \in E$ hat eine eindeutige Darstellung

$$q = \sum_{l=1}^n e_l q^l$$

und wenn wir $q^l =: z^l + jz^{n+l}$ mit $z^l, z^{n+l} \in \mathbb{C}$ darstellen, erhalten wir $q = \sum_{l=1}^n e_l z^l + (e_l j) z^{n+l} = \sum_{l=1}^{2n} e_l z^l$, wobei wir $e_{n+l} := e_l j$ gesetzt haben. D.h. die $(e_j)_{j=1}^{2n}$ sind eine komplexe Basis von E als komplexer Vektorraum. Man beachte, daß qj als quaternionische Koordinaten natürlich $q^l j$ hat, aber als komplexe Koordinaten

$$qj = \sum_{l=1}^n e_l(z^l + jz^{n+l})j = \sum_{l=1}^n e_l(j\bar{z}^l + j^2\bar{z}^{n+l}) = \sum_{l=1}^n e_l(-\bar{z}^{n+l}) + \sum_{l=1}^n (e_l j)\bar{z}^l,$$

d.h. die Koeffizienten von qj ergeben sich durch

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{z}^1 \\ \vdots \\ \bar{z}^{2n} \end{pmatrix}.$$

Sei nun $A + Bj$ die Matrixdarstellung von T bezüglich dieser Basis mit komplexen Matrizen A und B, d.h. $T(e_l) = \sum_k e_k T_l^k = \sum_k e_k(A_l^k + B_l^k j)$ und somit

$$\begin{aligned} T(q) &= T(\sum_l e_l q^l) = \sum_l T(e_l) q^l = \sum_l \sum_k e_k T_l^k q^l \\ &= \sum_k e_k \Big(\sum_l T_l^k q^l \Big) \\ &= \sum_k e_k \Big(\sum_l (A_l^k + B_l^k j) \cdot (z^l + j z^{n+l}) \Big) \\ &= \sum_k \Big(e_k \sum_l (A_l^k z^l - B_l^k z^{n+l}) + e_k j \sum_l (\bar{B}_l^k z^l + \bar{A}_l^k z^{n+l}) \Big). \end{aligned}$$

Also hat T bezüglich der komplexen Basis $(e_1, \dots, e_n, e_1 j, \dots, e_n j)$ folgende Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}.$$

Wenn wir nun die komplexe Basis zur reellen Basis

$$(e_1, \dots, e_n; e_1 j, \dots, e_n j; e_1 i, \dots, e_n i; e_1 j i, \dots, e_n j i)$$

ergänzen, dann hat T folgende Matrizendarstellung nach dem bereits oben gezeigten, wobei wir A und B in Real- und Imaginärteil zerlegen, d.h. $A = A_1 + iA_2$ und $B = B_1 + iB_2$:

$$\begin{pmatrix} A_1 & -B_1 & -A_2 & B_2 \\ B_1 & A_1 & B_2 & A_2 \\ A_2 & -B_2 & A_1 & -B_1 \\ -B_2 & -A_2 & B_1 & A_1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir diese Basis noch auf die natürlichere Form

$$(e_1, \dots, e_n; e_1 i, \dots, e_n i; e_1 j, \dots, e_n j; e_1 k, \dots, e_n k)$$

bringen, dann hat T folgende Darstellung

$$\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 & -B_1 & -B_2 \\ A_2 & A_1 & -B_2 & B_1 \\ B_1 & B_2 & A_1 & -A_2 \\ B_2 & -B_1 & A_2 & A_1 \end{pmatrix}, \text{ mittels Konjugation mit } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir wollen mit $L_{\mathbb{H}}(n)$ den Teilraum von $L_{\mathbb{C}}(2n)$ bzw. $L(4n)$ mit den so beschriebenen quaternionischen Strukturen auf $\mathbb{C}^{2n}$ bzw. $\mathbb{R}^{4n}$ bezeichnen.

Da $\mathbb{H}$ ein schief-Körper ist, geht nun aber so manches schief. So gibt die übliche Formel für die Determinante nichts vernünftiges, da sie nicht $\mathbb{H}$-linear in den Spalten ist. Wir behaupten als nächstes, daß die komplexe Determinante auf $L_{\mathbb{H}}(E)$ positiv ist, und somit $\mathrm{Det}_{\mathbb{C}}(T) = +\sqrt{\mathrm{Det}(T)}$ gilt. Dazu rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}_{\mathbb{C}}\begin{pmatrix} A & -B \\ \overline{B} & \overline{A}\end{pmatrix} &= \mathrm{Det}_{\mathbb{C}}\begin{pmatrix} A_1 + iA_2 & -B_1 - iB_2 \\ B_1 - iB_2 & A_1 - iA_2\end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} A_1 & -B_1 \\ B_1 & A_1\end{pmatrix} + i^2\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A_2 & -B_2 \\ -B_2 & -A_2\end{pmatrix} \\
&\quad + i\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A_2 & -B_1 \\ -B_2 & A_1\end{pmatrix} - i\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A_1 & -B_2 \\ -B_1 & A_2\end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} A_1 & -B_1 \\ B_1 & A_1\end{pmatrix} + \mathrm{Det}\begin{pmatrix} A_2 & -B_2 \\ B_2 & A_2\end{pmatrix} \\
&\quad + i\Big(\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A_2 & -B_1 \\ -B_2 & A_1\end{pmatrix} - (-1)^2\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A_2 & -B_1 \\ -B_2 & A_1\end{pmatrix}\Big) \\
&= \mathrm{Det}_{\mathbb{R}}(A_1 + iB_1) + \mathrm{Det}_{\mathbb{R}}(A_2 + iB_2) \geq 0.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
GL_{\mathbb{H}}(E) &\subseteq GL^+_{\mathbb{C}}(E) := \{T \in GL_{\mathbb{C}}(E) : \mathrm{Det}_{\mathbb{C}}(T) > 0\} \\
GL_{\mathbb{H}}(E) &\cong \mathbb{R}^+ \times SL_{\mathbb{H}}(E) \\
SL_{\mathbb{H}}(E) &= \{T \in L_{\mathbb{H}}(E) : \mathrm{Det}_{\mathbb{C}}(T) = 1\} \subseteq SL_{\mathbb{C}}(E),
\end{aligned}$$

wobei der Isomorphismus wie im reellen Fall durch $T \mapsto (\mathrm{Det}(T)^{1/n}, \mathrm{Det}(T)^{-1/n} \cdot T)$ gegeben ist.

14.17 Quaternionische Formen, $Q(n,k)$, $Q_-(n)$

Sei schließlich $q : E \times E \to \mathbb{H}$ eine Form die quaternionisch linear in der zweiten Variable ist und konjugiert (schief)symmetrisch, nicht degeneriert. Dann bezeichnen wir mit

$$Q_q(E) := \{T \in GL_{\mathbb{H}}(E) : q(Tx, Ty) = q(x, y)\, \forall\, x, y \in E\}.$$

Wie zuvor zeigt man, daß dies eine Mannigfaltigkeit ist. Es ist also $q(x, y\lambda) = q(x, y)\lambda$, $\overline{q(y, x)} = \pm q(x, y)$ und damit $q(x\lambda, y) = \pm\overline{q(y, x\lambda)} = \pm\overline{q(y, x)\lambda} = \bar\lambda q(x, y)$. Wir setzen $s(x, y) := \mathfrak{Re}\, q(x, y) = \frac{q(x,y)+\overline{q(x,y)}}{2} = \frac{q(x,y)\pm q(y,x)}{2}$. Dann ist s (schief)symmetrisch (2. Darstellung), $\mathbb{R}$-wertig (1. Darstellung) und $\mathbb{R}$-linear. Und für alle $\lambda \in S^3 \subseteq \mathbb{H}$ gilt

$$s(x\lambda, y\lambda) = \frac{\bar\lambda q(x, y)\lambda \pm \bar\lambda q(y, x)\lambda}{2} = \bar\lambda s(x, y)\lambda = \bar\lambda\lambda s(x, y) = s(x, y),$$

da $s(x, y) \in \mathbb{R}$ mit allen Quaternionen vertauscht.

Es gilt $q(x,y) = s(x,y) + i\,s(xi,y) + j\,s(xj,y) + k\,s(xk,y)$, denn

$$\begin{aligned}
s(x,y) &+ i\,s(xi,y) + j\,s(xj,y) + k\,s(xk,y) = \\
&= \frac{1}{2}\Big((q(x,y) + i\,q(xi,y) + j\,q(xj,y) + k\,q(xk,y)) \\
&\qquad \pm (q(y,x) + i\,q(y,xi) + j\,q(y,xj) + k\,q(y,xk))\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(4q(x,y) \pm (q(y,x) + i\,q(y,x)\,i + j\,q(y,x)\,j + k\,q(y,x)\,k)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(4q(x,y) \mp 2\overline{q(y,x)}\Big) \\
&= q(x,y),
\end{aligned}$$

wobei wir für die vorletzte Zeile $q(x,y) = a + ib + jc + kd$ setzen, und dann alles ausmultiplizieren.

Man beachte auch, daß für $\lambda \in \{i,j,k\}$ die Form $(x,y) \mapsto s(x\lambda,y)$ $\mathbb{R}$-bilinear ist und $s(y\lambda,x) = \pm s(x,y\lambda) = \mp s(x\lambda^2,y\lambda) = \mp s(x\lambda,y)$ erfüllt, d.h. ebenfalls (schief)symmetrisch ist.

Umgekehrt sei $s : E \times E \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-bilinear und (schief-) symmetrisch und es existieren s-Isometrien I und J mit $I^2 = -1 = J^2$ und $IJ + JI = 0$. Dann können wir E zu einem quaternionischen Rechtsvektorraum machen durch $x \cdot (a + ib + jc + kd) = xa + I(x)b + J(x)c + JI(x)d$ und

$$q(x,y) := s(x,y) + i\,s(Ix,y) + j\,s(Jx,y) + k\,s(JIx,y)$$

definiert eine konjugiert (schief-)symmetrische nicht-degenerierte Form die $\mathbb{H}$-linear in der zweiten Variable ist. Offensichtlich ist jedes T, welches q und damit auch s, $s(I\_,\_)$, $s(J\_,\_)$, $s(JI\_,\_)$ invariant läßt, automatisch $\mathbb{H}$-linear, denn $s(ITx,Ty) = s(Ix,y) = s(TIx,Ty)$ und somit $ITx = TIx$ und analog für J. Es gilt also $Q_q(E) = O_s(E) \cap GL_{\mathbb{H}}(E)$.

Falls nun q eine Standardform ist, d.h. eine der folgenden Formen:

$$\begin{aligned}
q(z,w) &= \sum_{l=1}^{n} \bar{z}^l w^l \\
q(z,w) &= \sum_{l>k} \bar{z}^l w^l - \sum_{l\le k} \bar{z}^l w^l \\
q(z,w) &= \sum_{l=1}^{n} \bar{z}^l\, i\, w^l
\end{aligned}$$

dann werden die entsprechenden Gruppen mit $Q(n) = U_{\mathbb{H}}(n)$, $Q(n,k) = U_{\mathbb{H}}(n,k)$ sowie $Q_-(m) = U_\alpha(m) = Sp_{\mathbb{H}}(m)$ bezeichnet. Wir erhalten für s bezüglich der reellen Basis $(e_1,\dots;e_1 i,\dots;e_1 j,\dots;e_1 k,\dots)$ und der entsprechenden reellen Koordinaten

$$\begin{gathered}
(x^1,\dots;x^{n+1},\dots,x^{2n+1},\dots;x^{3n+1},\dots) \text{ für } z \text{ und} \\
(y^1,\dots;y^{n+1},\dots,y^{2n+1},\dots;y^{3n+1},\dots) \text{ für } w
\end{gathered}$$

wobei $z^l = x^l + ix^{n+l} + jx^{2n+l} + kx^{3n+l}$ und $w^l = y^l + iy^{n+l} + jy^{2n+l} + ky^{3n+l}$:

$$s(x,y) = \sum_l x^l y^l + x^{n+l}y^{n+l} + x^{2n+l}y^{2n+l} + x^{3n+l}y^{3n+l}$$

$$\begin{aligned} s(x,y) &= \sum_{l>k} x^l y^l + x^{n+l}y^{n+l} + x^{2n+l}y^{2n+l} + x^{3n+l}y^{3n+l} \\ &\quad - \sum_{l\le k} x^l y^l + x^{n+l}y^{n+l} + x^{2n+l}y^{2n+l} + x^{3n+l}y^{3n+l} \end{aligned}$$

$$s(x,y) = \sum_l -x^l y^{n+l} + x^{n+l}y^l - x^{2n+l}y^{3n+l} + x^{3n+l}y^{2n+l}$$

D.h. die Matrizendarstellungen sind

$$\begin{pmatrix} 1_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_k \end{pmatrix} \text{ mit } 1_k \text{ wie zuvor;}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \text{ mit } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} Q(n) &= O(4n) \cap L_{\mathbb{H}}(n) \subseteq SL_{\mathbb{H}}(n) \\ Q(n,k) &= \text{“}O(4n,4k)\text{”} \cap L_{\mathbb{H}}(n) \subseteq SL_{\mathbb{H}}(n) \\ Q_-(n) &= \text{“}Sp(4n)\text{”} \cap L_{\mathbb{H}}(n) \subseteq SL_{\mathbb{H}}(n) \end{aligned}$$

Wir können aber auch je zwei Komponenten zusammenfassen. Wie wir bereits für $U(n)$ gezeigt haben, ist $h(x,y) := s(x,y) + i\, s(xi,y)$ eine (schief-)hermitesche Form und $j\, q(xj,y) + k\, q(xk,y) = j\,(q(xj,y) + i\, q(xji,y)) = j\, h(xj,y)$, wobei $(x,y) \mapsto h(xj,y)$ (symmetrisch) schiefsymmetrisch und komplex bilinear ist, denn $h(yj,x) = s(yj,x) + i\, s(yji,x) = \pm s(xj,y) \pm i\, s(xji,y) = \pm h(xj,y)$. Also hat q eine Zerlegung $q(x,y) = h(x,y) + j\, h(xj,y)$ in (schief-)hermiteschen und (symmetrischen) schiefsymmetrischen $\mathbb{C}$-bilinearen Teil. Führt man das wieder für die Standardformen durch, so erhalten wir

$$\begin{aligned} q(z,w) &= \sum_l (\bar z^l - \bar z^{n+l} j)(w^l + jw^{n+l}) \\ &= \sum_l (\bar z^l w^l + \bar z^{n+l} w^{n+l}) + j \sum_l (z^l w^{n+l} - z^{n+l} w^l) \\ q(z,w) &= \sum_{l>k} (\bar z^l - \bar z^{n+l} j)(w^l + jw^{n+l}) - \sum_{l\le k} (\bar z^l - \bar z^{n+l} j)(w^l + jw^{n+l}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l>k}(\bar z^l w^l + \bar z^{n+l} w^{n+l}) - \sum_{l\le k}(\bar z^l w^l + \bar z^{n+l} w^{n+l}) \\
&\quad + j\sum_{l>k}(z^l w^{n+l} - z^{n+l} w^l) - j\sum_{l\le k}(z^l w^{n+l} - z^{n+l} w^l)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q(z,w) &= \sum_l (\bar z^l - \bar z^{n+l} j) i (w^l + j w^{n+l}) \\
&= \sum_l (\bar z^l i w^l + \bar z^{n+l}(-j) i w^l - \bar z^{n+l}(-j) i j w^{n+l} - \bar z^l i j w^{n+l}) \\
&= \sum_l i(\bar z^l w^l - \bar z^{n+l} w^{n+l}) - ji\sum_l (z^{n+l} w^l + z^l w^{n+l})
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
Q(n) &= U(2n) \cap Sp_{\mathbb{C}}(2n) \\
&= U(2n) \cap L_{\mathbb{H}}(n) = Sp_{\mathbb{C}}(2n) \cap L_{\mathbb{H}}(n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(n,k) &= \text{“}U(2n,2k)\text{”} \cap \text{“}Sp_{\mathbb{C}}(2n)\text{”} \\
&= \text{“}U(2n,2k)\text{”} \cap L_{\mathbb{H}}(n) = \text{“}Sp_{\mathbb{C}}(2n)\text{”} \cap L_{\mathbb{H}}(n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_-(n) &= U(2n,n) \cap \text{“}O_{\mathbb{C}}(2n)\text{”} \\
&= U(2n,n) \cap L_{\mathbb{H}}(n) = \text{“}O_{\mathbb{C}}(2n)\text{”} \cap L_{\mathbb{H}}(n)
\end{aligned}$$

14.18 Übersicht

Gruppe	Dim	kompakt	komplex	Kurzbeschreibung
$GL(n)$	n^2	$-$	$-$	$\mathrm{Det}_{\mathbb{R}} \neq 0$
$SL(n)$	n^2-1	$-$	$-$	$\mathrm{Det}_{\mathbb{R}} = 1$
$SO(n)$	$n(n-1)/2$	$+$	$-$	sym,lin,pos-def
$SO(n,k)$	$n(n-1)/2$	$-$	$-$	sym,lin,def
$Sp(n)$ [1)]	$n(n+1)/2$	$-$	$-$	alt,lin,def
$U(n)$	n^2	$+$	$-$	konj-sym,pos-def
$U(n,k)$	n^2	$-$	$-$	konj-sym,def
$SU(n)$	n^2-1	$+$	$-$	konj-sym,pos-def, $\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} = 1$
$SU(n,k)$	n^2-1	$-$	$-$	konj-sym,def, $\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} = 1$
$GL_{\mathbb{C}}(n)$	$2n^2$	$-$	$+$	$\mathbb{C}$-lin, $\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} \neq 0$
$SL_{\mathbb{C}}(n)$	$2n^2-2$	$-$	$+$	$\mathbb{C}$-lin, $\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} = 1$
$O_{\mathbb{C}}(n)$	$n(n-1)$	$-$	$+$	sym,$\mathbb{C}$-lin,def
$Sp_{\mathbb{C}}(n)$ [1)]	$n(n+1)$	$-$	$+$	alt,$\mathbb{C}$-lin,def
$Q(n)$	$n(2n+1)$	$+$	$-$	konj-sym,$\mathbb{H}$-lin,pos-def
$Q(n,k)$	$n(2n+1)$	$-$	$-$	konj-sym,$\mathbb{H}$-lin,def
$Q_-(n)$	$n(2n-1)$	$-$	$-$	schief-konj-sym,$\mathbb{H}$-lin,def
$GL_{\mathbb{H}}(n)$	$4n^2$	$-$	$-$	$\mathbb{H}$-lin, $\mathrm{Det}_{\mathbb{R}} \neq 0$
$SL_{\mathbb{H}}(n)$	$4n^2-1$	$-$	$-$	$\mathbb{H}$-lin, $\mathrm{Det}_{\mathbb{R}} = 1$

[1)] In diesen Fällen ist $n = 2m$ gerade.

14.19 Niedere Dimensionen

Gruppe	dim	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$SL(n)$	n^2-1	$\{1\}$	$S^1 \times \mathbb{C}$	$\dim = 8$
$SO(n)$	$n(n-1)/2$	$\{1\}$	S^1	$PSU(2)$
$SO(n,1)$	$n(n-1)/2$	$-$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$PSL(2)$
$Sp(n)$	$n(n+1)/2$	$-$	$S^1 \times \mathbb{C}$	$-$
$SU(n)$	n^2-1	$\{1\}$	S^3	$\dim = 8$
$SU(n,1)$	n^2-1	$-$	$S^1 \times \mathbb{C}$	$\dim = 8$
$SL_{\mathbb{C}}(n)$	$2n^2-2$	$\{1\}$	$\dim = 6$	$\dim = 16$
$SO_{\mathbb{C}}(n)$	$n(n-1)$	$\{1\}$	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\dim = 6$
$Sp_{\mathbb{C}}(n)$	$n(n+1)$	$-$	$\dim = 6$	$-$
$Q(n)$	$n(2n+1)$	S^3	$\dim = 10$	$\dim = 21$
$Q(n,1)$	$n(2n+1)$	$-$	$\dim = 10$	$\dim = 21$
$Q_-(n)$	$n(2n-1)$	S^1	$\dim = 6$	$\dim = 15$
$SL_{\mathbb{H}}(n)$	$4n^2-1$	S^3	$\dim = 15$	$\dim = 35$

dim= 0:
Offensichtlich ist
$\boldsymbol{SL(1)} = \{t \in \mathbb{R} : t = 1\}$, $\boldsymbol{SO(1)} = \{1\} \subseteq SL(1)$, $\boldsymbol{SU(1)} = \{z \in \mathbb{C} : z = 1\}$, $\boldsymbol{SL_{\mathbb{C}}(1)} = \{z \in \mathbb{C} : z = 1\}$, $\boldsymbol{SO_{\mathbb{C}}(1)} = \{1\} \subseteq SL_{\mathbb{C}}(1)$

dim= 1:

$\boldsymbol{U(1)} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z}z = 1\} = S^1 \subseteq \mathbb{C}$.

$\boldsymbol{Q_-(1)} = S^1$, denn $\overline{z}iw = \overline{\lambda z}i\lambda w = \overline{z}\overline{\lambda}i\lambda w$, genau dann, wenn $i = \bar{\lambda}i\lambda$, oder $|\lambda| = 1$ und $\lambda i = i\lambda$, i.e. $\lambda = a + ib$ mit $a^2 + b^2 = 1$.

Die definierende Gleichung der gesuchten Untergruppen von $SL_{\mathbb{C}}(2)$ ist neben $\det = 1$ durch $b(Tx, Ty) = b(x, y)$ gegeben. Dafür genügt es $(x, y) := b(e_1, e_1)$, $(x, y) := (e_1, e_2)$ und $(x, y) := (e_2, e_2)$ einzusetzen, oder wenn $b(x, y) = \langle Bx, y\rangle$ ist, die Matrizengleichung $T^*BT = B$ zu lösen. Da $T \in SL_{\mathbb{C}}(2)$ liegt, ist $T = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ invertierbar mit inverser Matrix $T^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$. Also läßt sich die Matrizengleichung auch als $BT = (T^*)^{-1}B$ schreiben, und liefert uns im Folgenden die nötigen Bedingungen an die Koeffizienten a, b, c und d.

Die Elemente der Abelsch'en unter den folgenden Gruppen G werden wir gemeinsam diagonalisieren. D.h. für jedes $T \in G$ werden wir die Eigenwerte $\lambda_\pm^T$ und zugehörige (von T unabhängige) Eigenvektoren $e_\pm$ bestimmen. Wenn Λ^T die Diagonalmatrix mit Eintragungen λ_+^T und λ_-^T ist, und U die Matrix mit Spalten e_+ und e_- ist, d.h. $U(e_1) = e_+$ und $U(e_2) = e_-$, dann ist $T \cdot U = U \cdot \Lambda^T$, d.h. $U^{-1} \cdot T \cdot U = \Lambda^T$. Die Konjugation mit U bildet also die Gruppe G isomorph auf eine Gruppe von Diagonalmatrizen in $SL_{\mathbb{C}}(2)$ ab.

$$\boldsymbol{SO(2)} = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1\right\} \cong \left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} : \lambda \in S^1\right\} \cong S^1,$$

$$\text{denn} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (1) & a^2 + c^2 = 1 \quad (b(e_1, e_1) = 1) \\ (2) & b^2 + d^2 = 1 \quad (b(e_2, e_2) = 1) \\ (3) & ab + cd = 0 \quad (b(e_1, e_2) = 0) \\ (4) & ad - bc = 1 \quad (\det = 1) \end{cases}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} d \cdot (3) - b \cdot (4) : &\quad -b = c(d^2 + b^2) = c, \\ b \cdot (3) + d \cdot (4) : &\quad d = a(b^2 + d^2) = a \end{aligned}$$

und somit $a^2 + b^2 = 1$. Kürzer folgt das alles auch aus der Matrizengleichung $BT = (T^t)^{-1}B$, mit $B = \mathrm{id}$.

Die Eigenwerte von T sind $\lambda_\pm = a \pm i\, b$ mit zugehörigen Eigenvektoren $e_\pm = (1, \pm i)$. Also bildet die Konjugation mit $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{smallmatrix}\right)$ die Gruppe $SO(2)$ isomorph auf die Diagonalmatrizen mit konjugiert komplexen Eintragungen vom Betrag 1 ab.

$$\boldsymbol{SO(2{,}1)} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R},\ a^2 - b^2 = 1\right\} \cong$$

$$\cong \left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/la \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} \cong \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

Analog wie bei der $SO(2)$ folgt die erste Gleichung aus der Matrizengleichung mit $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Der erste Isomorphismus ist dann analog durch Konjugation mit der Matrix $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ der Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_\pm := a \pm b$ gegeben. Nun konjugieren wir mit $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, welche die Standardbasis auf eine Basis mit

$b(e_j, e_j) = 0$ und $b(e_1, e_2) = 1$ abbildet. Dann ist

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b & 0\\ 0 & a-b\end{pmatrix}$$

und $(a+b)(a-b) = 1$.

dim= 2

$\boldsymbol{GL_{\mathbb{C}}(1)} = \mathbb{C}_*$.

$$\boldsymbol{SO}_{\mathbb{C}}\boldsymbol{(2)} = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, a^2 + b^2 = 1\right\} \cong \left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1/a\end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}_*\right\} \cong \mathbb{C}_*,$$

denn wie für $SO(2)$ erhalten erhalten wir die Gleichheit aus der Matrizengleichung und den Isomorphismus durch Konjugation mit $\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}$. Dann ist

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+ib & 0\\ 0 & a-ib\end{pmatrix}$$

und $(a+ib)(a-ib) = 1$.

dim= 3

$$\boldsymbol{SL(2)} = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1\right\}$$

$\boldsymbol{Sp(2)} = SL(2)$,

$$\begin{aligned}
\text{denn}\quad &\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in Sp(2) \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & cb - ad\\ ad - bc & 0\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow & ad - bc = 1
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{SU(2{,}1)} = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ \bar b & \bar a\end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1\right\} \cong SL(2),$$

denn die Gleichheit folgt analog wie bei der $SO(2,1)$ mit $B := \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$ und dem hermite'schen Produkt. Der Isomorphismus ist durch Konjugation mit $U := \left(\begin{smallmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{smallmatrix}\right)$ geben, siehe (34.5) und (72.62).
Beachte daß die Mannigfaltigkeit $\{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : |a|^2 - |b|^2 = 1\}$ vermöge $(a, b) \mapsto (\frac{a}{|a|}, b) = (\frac{a}{\sqrt{1+|b|^2}}, b)$ diffeomorph zu $S^1 \times \mathbb{C}$ ist. Allerdings sieht die induzierte Gruppenstruktur auf $S^1 \times \mathbb{C}$ sehr kompliziert aus.

$$\boldsymbol{SU(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \cong S^3$$

wobei die Gleichung wieder wie für die $SO(2)$ folgt und der Isomorphismus durch die Darstellung der Quaternionen $\mathbb{H}$ als Matrizen in $GL_{\mathbb{C}}(2)$ gegeben ist.

$\boldsymbol{Q(1)} = S^3$, denn $T \in Q(1)$ genau dann, wenn $T \in GL_{\mathbb{H}}(1) = \mathbb{H}$ mit $\bar{T}T = 1$, und

$$\begin{aligned} \overline{(a+ib+jc+kd)} \cdot (a+ib+jc+kd) &= (a-ib-jc-kd) \cdot (a+ib+jc+kd) \\ &= (a^2+b^2+c^2+d^2) + i0 + j0 + k0. \end{aligned}$$

$\boldsymbol{SL_{\mathbb{H}}(1)} = S^3$, denn

$$\begin{aligned} (t+ix+jy+kz) \cdot (a+ib+jc+kd) = (&ta - xb - yc - zd) \\ &+ i(xa + tb + yd - zc) \\ &+ j(tc + ya + kb - xd) \\ &+ k(za + td + xc - yb) \end{aligned}$$

also wirkt eine Quaternione $(a+ib+jc+kd)$ als folgende Matrix auf einem Vektor (t, x, y, z):

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

und hat reelle Determinante $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

$\boldsymbol{SO(3)} = PSU(2) = PS^3$, jede Einheitsquaternione $a+ib+jc+kd$ wirkt orthogonal auf $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ durch Konjugation und läßt die Zerlegung $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ invariant. Jedes Element aus $SO(3)$ ist durch eine Konjugation mit einer Einheitsquaternione gegeben. Geometrisch kann man das auch so sehen: Eine Drehung ist durch Drehachse und Drehwinkel festgelegt, also durch durch einen Vektor $u \in D^3$ welcher der Drehung mit der Achse $u/|u| \in S^2$ und dem Drehwinkel $\pi|u| \in [-\pi, \pi]/\sim = S^1$ entspricht. Also erhalten wir eine 2-blättrige Überlagerung $S^3 = D^3/\partial D^3 \to SO(3)$ aus folgendem Diagramm

$$\begin{tikzcd} S^2 \times [-1,1] \arrow[r, two heads, "\mathrm{id} \times e^{i\pi -}"] \arrow[d, two heads] & S^2 \times S^1 \arrow[d, two heads] \\ \mathbb{D}^3 \arrow[r, dotted] & SO(3), \end{tikzcd}$$

wobei die linke vertikale Abbildung durch $(x,t) \mapsto tx$ und die rechte durch $(v, ph) \mapsto$ "Drehung um v mit Winkel φ" gegeben sind. Siehe dazu auch (24.40). Beachte, daß das Zentrum $Z(SU(2))$ von $SU(2)$ durch $\{\pm \mathrm{id}\}$ gegeben ist und somit $PSU(2) := SU(2)/Z(SU(2)) = S^3/\mathbb{Z}_2$ ist.

$\boldsymbol{SO^+(3,1)} = PSL(2)$ wird analog wie für $SO(3) = PS^3$ gezeigt. Für Details dazu ebenso (24.40). Beachte, daß das Zentrum $Z(SL(2))$ von $SL(2)$ durch $\{\pm\,\mathrm{id}\}$ gegeben ist und somit $PSL(2) := SL(2)/Z(SL(2))$ ist.

15. Glatte Abbildungen

Um verschiedene Mannigfaltigkeiten miteinander in Beziehung zu setzen, benötigen wir natürlich auch den Begriff der glatten Abbildungen zwischen ihnen und den geben wir jetzt.

15.1 Definition (glatte Abbildung)

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen zwei glatten Mannigfaltigkeiten $M \subseteq \mathbb{R}^m$ und $N \subseteq \mathbb{R}^n$.
Die Abbildung f heißt GLATT (C^∞) :$\Leftrightarrow$ lokal läßt sie sich zu einer glatten Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ erweitern, d.h.

$$\forall\, p \in M\, \exists\, U(p) \underset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbb{R}^m\, \exists\, \tilde{f} : U(p) \to \mathbb{R}^n \text{ glatt mit} \tilde{f}|_{M\cap U(p)} = f|_{M\cap U(p)}.$$

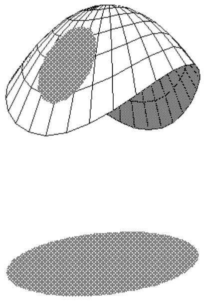
Die konstante Abbildung, die Identität und die Zusammensetzung glatter Abbildungen sind glatt: Seien $f : M_1 \to M_2$ sowie $g : M_2 \to M_3$ glatt und $\tilde{f} : U_1 \to \mathbb{R}^{n_2}$ bzw. $\tilde{g} : U_2 \to \mathbb{R}^{n_3}$ lokale, glatte Fortsetzungen, dann ist $(g \circ \tilde{f}) = \tilde{g} \circ \tilde{f} : \tilde{f}^{-1}(U_2) \to \mathbb{R}^{n_3}$ eine lokale, glatte Fortsetzung von $g \circ f$, also ist $g \circ f$ glatt.

15.2 Beispiele glatter Abbildungen.
(1) Für die klassischen Liegruppen G aus Abschnitt (14) ist die Multiplikation mult : $G \times G \to G$ glatt, denn für die offene Teilmenge $GL(E)$ von $L(E,E)$ ist dies die Einschränkung der bilinearen Abbildung $(T,S) \mapsto T\,S$, und die anderen klassischen Liegruppen G sind Teilmannigfaltigkeiten in $GL(E)$. Gleiches gilt für die Inversion inv : $G \to G$, denn für $GL(E)$ ist sie die Lösung der impliziten Gleichung $\mathrm{mult}(A, \mathrm{inv}(A)) = \mathrm{id}$, auf die der inverse Funktionensatz anwendbar ist. Die Ableitung ist dabei durch

$$\mathrm{inv}'(A)(B) = -A^{-1}BA^{-1}$$

gegeben.
(2) Orthogonales-Komplement-nehmen $\perp$: $G(k,n) \to G(n-k,n)$ ist glatt als Einschränkung der affinen, durch $P \mapsto 1 - P$ gegeben Abbildung $L_k(n,n) \to L_{n-k}n, n$.
(3) Die Bild-Abbildung Bild : $V(k,n) \to G(k,n)$ ist glatt, denn als Abbildung von $V(k,n) := \{T \in L(k,n) : T^tT = \mathrm{id}\} \to G(k,n) \subset L_k(n,n)$ ist sie durch $T \mapsto TT^t$ gegeben: Offensichtlich ist TT^t eine ortho-Projektion mit $\mathrm{Bild}\, T \subseteq \mathrm{Bild}\, TT^t \subseteq \mathrm{Bild}\, TT^tT = \mathrm{Bild}\, T$.

15.3 Lemma (Karten sind Diffeomorphismen).
Sei $\varphi : U \to M$ eine lokale Parametrisierung der Mannigfaltigkeit M. Dann ist φ lokal ein Diffeomorphismus.



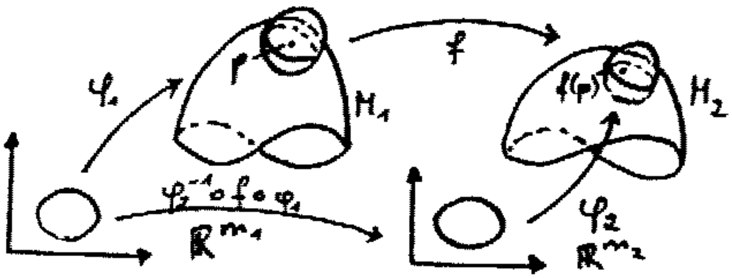
Beweis. Nach Voraussetzung ist φ glatt. Im Beweis der Richtung ($1 \Rightarrow 4$) von Satz (10.4) haben wir φ zu einem lokalen Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ erweitert. Aus der Bijektivität von φ (ist Voraussetzung) folgt, daß

$$\varphi^{-1} : M \cap V \to U$$

als Abbildung existiert. Sie ist sogar glatt, denn lokal läßt sie sich zu der glatten Abbildung Φ^{-1} erweitern. □

15.4 Lemma (Glatte Abbildungen). *Für eine stetige Abbildung $f : M \to N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist glatt.*
2. *Für jede lokale Parametrisierung φ von M und jede lokale Parametrisierung ψ von N gilt: Die Abbildung $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ ist glatt wo sie definiert ist.*
3. *Für jedes $p \in M$ existiert eine lokale Parametrisierung φ von M um p und existiert eine lokale Parametrisierung ψ von $f(p)$, sodaß die Kartendarstellung $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ glatt ist.*



Beweis. ($1\Rightarrow2$) Seien nun $\varphi : U_1 \to V_1 \cap M$ und $\psi : U_2 \to V_2 \cap N$ lokale Parametrisierungen. Die Abbildung $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ ist genau für jene $x \in U_1$ definiert, welche $f(\varphi(x)) \in V_2$ erfüllen. Das ist aber die offene Menge $U_1 \cap (f \circ \varphi)^{-1}(V_2)$. Obige Abbildung ist glatt, da sie nur aus glatten Funktionen zusammengesetzt ist.

($2\Rightarrow3$) Wenn die Aussage für alle lokalen Parametrisierungen gilt, dann erst recht für eine spezielle.

(3⇒1) Zu zeigen ist, daß f glatt ist. Dies ist eine lokale Eigenschaft, und lokal läßt sich f folgendermaßen als Komposition von glatten Abbildungen darstellen:

$$f = \psi \circ \underbrace{(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)}_{\text{glatt nach (3)}} \circ \varphi^{-1}. \qquad \square$$

16. Abstrakte Mannigfaltigkeiten

In diesen Abschnitt wollen wir den Mannigfaltigkeiten umgebenden Euklidischen Raum loswerden, und kommen so zum Begriff der abstrakten Mannigfaltigkeit.

Unsere vorläufige Definition einer Mannigfaltigkeit ist aber noch immer nicht zufriedenstellend: Bisher verwendeten wir ganz wesentlich die Eigenschaften des umgebenden Raumes, der mit dem Objekt, das wir beschreiben wollen, begrifflich nichts zu tun hat.

16.1 Beispiele

(Siehe auch Abschnitt (9)).

1. Das Möbiusband entsteht "topologisch", wenn man zwei Seiten eines Rechtecks miteinander identifiziert und das Ganze mit der Quotiententopologie versieht. Denkt man sich dieses Gebilde im $\mathbb{R}^3$ realisiert und zerschneidet es längs der Mittellinie, so entsteht bekanntlich ein mehrfach verdrehtes Band. Führen wir dasselbe aber "topologisch" durch, entsteht ein einfaches, nicht verdrehtes Band. Die beiden Figuren lassen sich aber im $\mathbb{R}^3$ nicht stetig ineinander überführen, das geht erst im $\mathbb{R}^4$.
2. Der "Klein'schen Flasche" oder vor allem der "projektiven Ebene" sieht man gar nicht ohne weiteres an, in welchen $\mathbb{R}^n$ sie "passen", in den $\mathbb{R}^3$ jedenfalls nicht.

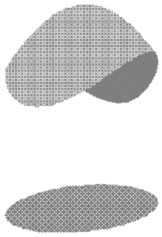
Im folgenden wollen wir die Definition von Teilmannigfaltigkeiten eines $\mathbb{R}^n$ erweitern zu einer solchen für abstrakte Mannigfaltigkeiten.

16.2 Definition (Abstrakte Mannigfaltigkeit)

Sei X eine beliebige Menge. Eine Karte (oder auch lokale Parametrisierung) von X ist eine injektive Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \to X$, definiert auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Zwei Karten φ_1, φ_2 heißen C^∞-kompatibel oder verträglich, falls der Kartenwechsel

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(\varphi_2(U_2)) \to \varphi_2^{-1}(\varphi_1(U_1))$$

ein Diffeomorphismus offener Mengen ist. Die Idee dahinter ist, daß jede Karte φ_1 glatt sein soll, und nach (15.4) sollte dazu $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ dort wo es definiert ist glatt sein. Ein C^∞-Atlas einer Menge X ist eine Familie C^∞-kompatibler Karten, deren Bilder ganz X überdecken. Zwei C^∞-Atlanten heißen äquivalent, wenn alle ihre Karten miteinander C^∞-kompatibel sind. Eine abstrakte C^∞-Mannigfaltigkeit ist eine Menge zusammen mit einer Äquivalenzklasse glatter Atlanten.



16.3 Definition (Topologie einer Mannigfaltigkeit)

Auf einer abstrakten Mannigfaltigkeit erhält man eine TOPOLOGIE , indem man definiert:$U \subseteq X$ heißt offen $:\Leftrightarrow \varphi^{-1}(U)$ ist offen im $\mathbb{R}^m$ für jede Karte des Atlas.

Die Karten $\varphi : U \to \varphi(U) \subset M$ werden dann zu Homöomorphismen. Denn stetig sind sie nach Konstruktion der Topologie auf M und falls $U_1 \subset U$ offen ist, so ist es auch $\varphi(U_1) \subset M$ denn $\psi^{-1}(\varphi(U_1)) = (\varphi^{-1} \circ \psi)^{-1}(U_1)$ ist das Bild unter dem Homöomorphismus $\varphi^{-1} \circ \psi$.

Man verlangt üblicherweise auch noch, daß diese Topologie HAUSDORFF ist, d.h.: je zwei disjunkte Punkte lassen sich durch disjunkte offene Umgebungen trennen.

Die folgende Proposition zeigt, daß diese Definition wirklich eine Erweiterung von Definition (10.4) ist.

16.4 Proposition. *Jede C^∞-Teilmannigfaltigkeit M eines $\mathbb{R}^n$ ist in natürlicher Weise eine C^∞-Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Einen Atlas auf M erhält man aus allen lokalen injektiven Parametrisierungen mittels (10.4). Die Kartenwechsel sind dann glatt nach (15.3) und die Topologie von M ist die induzierte Topologie des umgebenden $\mathbb{R}^n$, da die Parametrisierungen lokal Einbettungen sind, siehe den Beweis von (10.4). □

16.5 Proposition (Maximaler Atlas).
Sei $\mathcal{A}$ ein C^∞-Atlas für M, dann ist

$$\mathcal{A}_{\max} := \{\varphi : \varphi \textit{ Karte für } M \textit{ und } \varphi \textit{ verträglich mit allen } \psi \in \mathcal{A}\}$$

der eindeutig bestimmte maximale Atlas, der $\mathcal{A}$ umfaßt.

Beweis. Wir zeigen zuerst $\mathcal{A}_{\max}$ ist ein C^∞-Atlas: Seien φ, $\psi \in \mathcal{A}_{\max}$, dann ist zu zeigen, $\varphi^{-1} \circ \psi$ ist glatt. Sei $x \in \psi^{-1}(\operatorname{Bild}\varphi)$ also $\psi(x) \in \operatorname{Bild}\varphi \cap \operatorname{Bild}\psi$. Da $\mathcal{A}$ ein Atlas ist, folgt die Existenz eines $\chi \in \mathcal{A}$ mit $\psi(x) \in \operatorname{Bild}\chi$. Somit ist $\varphi^{-1} \circ \chi \circ \chi^{-1} \circ \psi = (\chi^{-1} \circ \varphi)^{-1} \circ (\chi^{-1} \circ \psi)$ lokal um x definiert. Die beiden geklammerten Teile sind laut Definition von $\mathcal{A}_{\max}$ glatt und folglich ist auch $\varphi^{-1} \circ \psi$ glatt.

Sei nun $\mathcal{B}$ ein C^∞-Atlas, der $\mathcal{A}$ umfaßt, dann ist z.z.: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_{\max}$. Sei $\varphi \in \mathcal{B}$, dann ist φ verträglich mit allen $\psi \in \mathcal{B}$. Da $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, ist φ verträglich mit allen $\psi \in \mathcal{A}$, also ist nach Konstruktion $\varphi \in \mathcal{A}_{\max}$. □

16.6

Die folgenden Überlegungen zeigen, daß die Kartenwechsel, also eine Familie von lokalen Abbildungen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, schon die ganze Information über M enthalten. Sei $\{f_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in A\}$ eine Familie von Diffeomorphismen offener Teilmengen endlichdimensionaler Vektorräume, sodaß $f_{\alpha\beta}^{-1} = f_{\beta\alpha}$ und (dort wo die linke Seite definiert ist) $f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma}$ gilt. (Das sind offensichtlich die Eigenschaften von Kartenwechseln.) Definiert man die Äquivalenzrelation: $x \sim y :\Leftrightarrow f_{\alpha\beta}(y) = x$ wobei $x \in \operatorname{Dom} f_{\alpha\alpha}$ und $y \in \operatorname{Dom} f_{\beta\beta}$, so ist $M := \left(\bigsqcup_{\alpha\in A} \operatorname{Dom} f_{\alpha\alpha}\right)/_\sim$ eine C^∞-Mannigfaltigkeit mit den Karten $\varphi_\alpha : \operatorname{Dom} f_{\alpha\alpha} \to M$, die durch $\varphi_\alpha(x) = [x]_\sim$ gegeben sind. Klarerweise gilt $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta = f_{\alpha\beta}$. Wir haben also tatsächlich eine Mannigfaltigkeit geschaffen, die die gegebenen Funktionen als Kartenwechsel hat.

16.7 Definition (Topologische Mannigfaltigkeit)

Ein topologischer Raum M heißt TOPOLOGISCHE MANNIGFALTIGKEIT $:\Leftrightarrow$ es gibt eine Familie von Homöomorphismen zwischen offenen Teilmengen eines endlichdimensionalen Vektorraums und offenen Teilmengen von M, deren Bilder M überdecken.

Solche Homöomorphismen heißen KARTEN von M. Und eine Familie von Karten, deren Bilder M überdecken, heißt ATLAS.

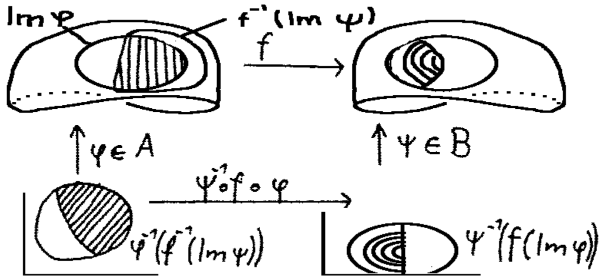
Bemerkungen

1. Falls M eine topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}$ ein Atlas für M ist, so sind alle Kartenwechsel automatisch Homöomorphismen auf offenen Teilen des $\mathbb{R}^m$. Man braucht also "nur" genügend viele unter ihnen zu finden, so daß die entsprechenden Kartenwechsel differenzierbar sind, um einen glatten Teilatlas zu erhalten, und somit M als glatte Mannigfaltigkeit zu erkennen.
2. Nicht jede topologische Mannigfaltigkeit besitzt aber einen C^∞-Atlas. Das erste Beispiel [**50**] war 10-dimensional. Heute ist 4 die niedrigste Dimension, für die es ein Beispiel gibt.

Wir wollen nun unseren Differenzierbarkeitsbegriff für Abbildungen zwischen Teilmannigfaltigkeiten auf abstrakte Mannigfaltigkeiten übertragen. Das Lemma (15.4) legt folgende Definition nahe:

16.8 Definition (Glatte Abbildung)

Seien $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ zwei C^∞-Mannigfaltigkeiten. Die Abbildung $f : M \to N$ heißt GLATT $:\Leftrightarrow$ f ist stetig, und für jeden Punkt $x \in M$ existieren Karten $\varphi \in \mathcal{A}$ und $\psi \in \mathcal{B}$, sodaß $x \in \operatorname{Bild}\varphi$, $f(x) \in \operatorname{Bild}\psi$ und die KARTENDARSTELLUNG $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ von f glatt ist. Das gilt dann ebenso für beliebige Karten $\varphi \in \mathcal{A}$ und $\psi \in B$.



Insbesonders ist die Identität $\mathrm{id} : (M, \mathcal{A}) \to (M, \mathcal{B})$ genau dann ein Diffeomorphismus, wenn die beiden Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ äquivalent sind. Weiters besteht $\mathcal{A}_{\max}$ aus all jenen Karten φ, die Diffeomorphismen auf ihr Bild sind, d.h. $\varphi^{-1} \circ \psi$ ist eine Diffeomorphismus offener Mengen für alle Karten $\psi \in \mathcal{A}$.

16.9 Bemerkungen

1. Die Stetigkeit von f setzt man voraus, damit die Kartendarstellung auf einer offenen Menge definiert ist.
2. Da der Kartenwechsel glatt ist, genügt es, obige Eigenschaft bei jedem x für eine Karte aus $\mathcal{A}$ und für eine aus $\mathcal{B}$ um $f(x)$ zu fordern, sie überträgt sich auf alle Karten.
3. Wenn man $\mathbb{R}$ als Mannigfaltigkeit auffaßt, lassen sich sehr leicht zwei C^∞-Strukturen angeben: $\mathcal{A}_1 := \{\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, und $\mathcal{A}_2 := \{\varphi(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Diese sind nicht verträglich, da $\varphi^{-1} \circ \mathrm{id} : x \to \sqrt[3]{x}$ nicht glatt ist (denn $\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x})$ existiert nicht bei 0). Allerdings sind die beiden Strukturen diffeomorph, also doch gewissermaßen gleich.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{R} \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$

hier Mannigfaltigkeiten

hier Vektorräume

Die Abbildung $f = \sqrt[3]{x}$ ist ein Diffeomorphismus: f, f^{-1} sind bijektiv und klarerweise stetig. Ebenso ist f glatt, da $(\mathrm{id}^{-1} \circ f \circ \varphi)(x) = f(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$ glatt ist. Analog ist f^{-1} glatt, da $(\varphi^{-1} \circ f^{-1} \circ \mathrm{id})(x) = \varphi^{-1}(x^3) = x$ glatt ist.
4. Ab $\dim M = 4$ gilt nicht mehr allgemein, daß zwei C^∞-Atlanten einer topologischen Mannigfaltigkeit bis auf Diffeomorphismus gleich sind. Für Dimension kleiner als 4 wurde es hingegen von [**56**] gezeigt. Nach [**33**] trägt zum Beispiel die S^7 mindestens 15 nicht diffeomorphe C^∞-Strukturen; die S^{31} mehr als $16 \cdot 10^6$. Genauer gilt:

$\dim = n$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
Strukturen auf S^n	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16	...

Für $\mathbb{R}^n$, $n \neq 4$ gibt es genau eine glatte Struktur. Für $n > 4$ wurde das von [**37**] bewiesen. Ganz überraschend konnte [Kirby1982] beweisen, daß für den $\mathbb{R}^4$ eine exotische C^∞-Struktur existiert. Von [**78**] wurde gezeigt, daß es sogar überabzählbar viele gibt.

5. Die Klasse der C^∞-Abbildungen zwischen zwei Mannigfaltigkeiten bilden eine Kategorie. Dabei versteht man unter einer Kategorie eine Klasse von Räumen (Objekten) und Abbildungen (Morphismen), sodaß zu jedem Objekt die Identität ein Morphismus und die Zusammensetzung von Morphismen wieder ein solcher ist. Es ist also für drei C^∞-Mannigfaltigkeiten M, N, P und glatte Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to P$ zu zeigen:
a) $g \circ f : M \to P$ ist glatt.
b) $\mathrm{id} : M \to M$ ist glatt.

16.10 Lemma (Offene Teilmannigfaltigkeit). *Sei $(M, \mathcal{A})$ eine C^∞-Mannigfaltigkeit, und U offen in M. Dann ist U in natürlicher Weise eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Ein Atlas auf U ist durch die Einschränkungen von Karten von M gegeben.*

Beweis. Klarerweise ist $(U, \mathcal{A}_U := \{\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} : \varphi \in \mathcal{A}\})$ eine topologische Mannigfaltigkeit. Bleibt zu zeigen, daß die Kartenwechsel glatt sind:

$$(\psi|_{\psi^{-1}(U)})^{-1} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)} = (\psi^{-1} \circ \varphi)|_{\varphi^{-1}(U)}$$

ist eine Einschränkung von C^∞-Funktionen und somit C^∞. □

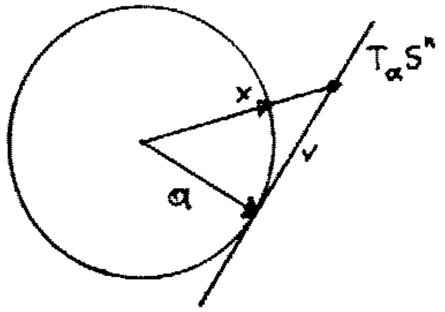
16.11 Bemerkungen

1. Es ist also sinnvoll, von C^∞-Abbildungen zu sprechen, die nur auf offenen Teilmengen einer C^∞-Mannigfaltigkeit definiert sind.
2. Die Karten φ einer C^∞-Mannigfaltigkeit sind Diffeomorphismen

$$\varphi : \mathbb{R}^m \underset{\text{off.}}{\supseteq} \operatorname{Dom}\varphi \to \operatorname{Bild}\varphi \underset{\text{off.}}{\subseteq} M.$$

16.12 Beispiele von Atlanten

1. $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$
Wir konstruieren Karten durch radial-Projektionen auf die Tangentialebenen ("Radialprojektion").



$$\alpha + v = \lambda x \quad \text{mit} \quad \langle \alpha, v\rangle = 0 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ x \mapsto v := \langle x, \alpha\rangle^{-1} \cdot x - \alpha,\ v \mapsto x := (\alpha + v) \cdot |\alpha + v|^{-1}.$$

Eine Karte für eine Umgebung von α ist also

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha :& \mathbb{R}^n \cong \alpha^\perp \to \{x \in S^n : \langle x, \alpha\rangle > 0\} \subseteq M\\ \varphi_\alpha(v) :&= (\alpha + v)\cdot |(\alpha+v)|^{-1}\\ \varphi_\alpha^{-1}(x) &= \langle x, \alpha\rangle^{-1}\cdot x - \alpha.\end{aligned}$$

Die Menge $\{\varphi_\alpha : \alpha \in S^n\}$ bildet einen C^∞-Atlas für S^n. Allerdings überdecken auch die Bilder der Karten $\varphi_{\pm e_i}$ für $i = 1 \dots n+1$ die S^n. Da sowohl φ_α als auch φ_α^{-1} glatt auf einer offenen Umgebung im $\mathbb{R}^{n+1}$ sind, sind klarerweise alle Kartenwechsel glatt.

2. Der Atlas der stereographischen Projektion für S^n hat als Karten ψ_α mit $\alpha \in S^n$:

$$\psi_\alpha : \begin{cases} \alpha^\perp \to S^n \setminus \{\alpha\} \\ v \mapsto \alpha + 2(v-\alpha)\cdot(|v|^2+1)^{-1}\end{cases}$$

mit der Umkehrabbildung

$$\psi_\alpha^{-1}(x) = (x - \langle x, \alpha\rangle \cdot \alpha)\cdot(1 - \langle x,\alpha\rangle)^{-1}.$$

Die Karte ψ_α ist für $S^n \setminus \{\alpha\}$ definiert. Für einen Kartenwechsel genügt es also, noch eine Karte für α zu finden, etwa $\psi_{-\alpha}$. Den Kartenwechsel für diese beiden Karten erhält man aus elementaren geometrischen Überlegungen: Es seien v und v^* die Bilder unter ψ_α^{-1} und $\psi_{-\alpha}^{-1}$. Die Dreiecke $(\alpha, x, -\alpha)$ und $(\alpha, 0, v)$ haben zwei gleiche Winkel, je einen rechten und jenen bei α, also sind sie ähnlich. Die Dreiecke $(0, v^*, -\alpha)$ und $(\alpha, x, -\alpha)$ sind aus entsprechenden Gründen ebenfalls ähnlich. Aus dem Strahlensatz erhält man:

$$\frac{|v|}{1} = \frac{1}{|v^*|} \Rightarrow |v| = |v^*|^{-1} \;\Rightarrow\; \psi_\alpha^{-1}\circ\psi_\alpha(v) = v^* = v\cdot|v|^{-2}.$$

3. Die naheliegende Frage, wie die beiden durch (1) und (2) gegebenen Strukturen auf S^n zusammenpassen, ist so zu beantworten: Die Karten sind verträglich (d.h. erzeugen denselben maximalen Atlas), denn

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha^{-1} &: x \mapsto x\cdot\langle x,\alpha\rangle^{-1} - \alpha\\ \psi_\beta &: v \mapsto \beta + 2(v-\beta)\cdot(|v|^2+1)^{-1}\\ \varphi_\alpha^{-1}\circ\psi_\beta &: v \mapsto \frac{\beta + 2(v-\beta)\cdot(|v|^2+1)^{-1}}{\langle \beta + 2(v-\beta)\cdot(|v|^2+1)^{-1}, \alpha\rangle} - \alpha\end{aligned}$$

ist eine – wenn auch komplizierte – C^∞-Funktion. Die Verträglichkeit der Karten kann auch daran erkannt werden, daß die Karten als lokale Diffeomorphismen des umgebenden Raums aufgefaßt werden können.

4. Einpunktkompaktifizierung des $\mathbb{R}^n$:

Wir definieren auf $\mathbb{R}^n_\infty := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ einen Atlas durch χ_0 und χ_∞, diese sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}
&\chi_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_\infty \\
&\chi_0(x) = x \\
&\chi_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_\infty \\
&\chi_\infty(0) = \infty \text{ und } \chi_\infty(x) = x \cdot |x|^{-2} \text{ sonst.}
\end{aligned}$$

Die Kartenwechsel $\chi_0^{-1} \circ \chi_\infty$ und $\chi_\infty^{-1} \circ \chi_0$ von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ errechnen sich als: $x \mapsto x \cdot |x|^{-2}$. Dieser Kartenwechsel ist uns schon in (2), bei der Sphäre, begegnet.

Behauptung: $\mathbb{R}^n_\infty \cong S^n$ mittels $f(\infty) = e_1$ und $f(x) = \psi_{e_1}(x)$. Es ist klar, daß f bijektiv ist; bleibt zu zeigen, daß sowohl f als auch f^{-1} glatt ist: Die zu untersuchenden Fälle sind:

1. $\psi_{e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_0 = \chi_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$
2. $\psi_{e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_\infty = \chi_0^{-1} \circ \chi_\infty$
3. $\psi_{-e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_0 = \chi_\infty^{-1} \circ \chi_0$
4. $\psi_{-e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_\infty = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$

Dies sind alles Diffeomorphismen, also ist f ein Diffeomorphismus.

5. Projektive Räume

$$P^n := \{ \text{ Geraden durch 0 im } \mathbb{R}^{n+1}\} = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/_\sim$$

wobei $x \sim y \Leftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodaß $\lambda x = y$. Als Karten wählt man etwa für $0 \le i \le n :$

$$\varphi_i : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \to P^n \\ (y^1, \dots, y^n) \mapsto \Big[(-1)^i (y^1, \dots, y^i, 1, y^{i+1}, \dots, y^n)\Big] \end{cases}$$

Das Vorzeichen ist dabei so gewählt, daß P^n so orientiert wie möglich wird, siehe (3) in (46.9). Die φ_i gehen bijektiv von $\mathbb{R}^n$ nach $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : x^{i+1} \neq 0\}/_\sim$. Der Kartenwechsel berechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)(y^1, \dots, y^n) = \\
&= \varphi_j^{-1}\Big[(-1)^i (y^1, \dots, y^i, 1, y^{i+1}, \dots, y^n)\Big] \xlongequal{\text{(O.B.d.A. } j > i)} \\
&= (y^j)^{-1} (-1)^i (-1)^j (y^1, \dots, y^i, 1, y^{i+1}, \dots, y^{j-1}, y^{j+1}, \dots, y^n).
\end{aligned}$$

Das ist ein Diffeomorphismus (auf dem Definitionsbereich). Also ist P^n eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Ganz analoges Vorgehen liefert $P^n_{\mathbb{C}}$ (komplexe Geraden in $\mathbb{C}^{n+1}$) mit $\dim P^n_{\mathbb{C}} = 2n$ und $P^n_{\mathbb{H}}$ mit $\dim P^n_{\mathbb{H}} = 4n$.

In (11.9) hatten wir eine weitere Beschreibung der projektiven Räume P^n als Graßmannmannigfaltigkeit $G(1, n+1) \subseteq L(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1})$ gegeben. Dabei hatten wir Geraden durch 0 im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit den orthogonal-Projektionen auf sie identifiziert. Wir wollen nun zeigen, daß dies diffeomorphe Räume beschreibt. Sei dazu $\bar\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ gegeben durch $(y^1, \dots, y^n) \mapsto (-1)^i (y^1, \dots, y^i, 1, y^{i+1}, \dots, y^n)$. Dann ist $\varphi_i = \pi \circ \bar\varphi_i$, wobei $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to P^n := \mathbb{R}^{n+1}/\sim$ die kanonische Projektion $x \mapsto [x]$ bezeichnet.

Für $a, b \in E := \mathbb{R}^{n+1}$ sei $a \otimes b \in L(E, E)$ definiert durch $(a \otimes b)(x) := \langle a, x\rangle b$ (Für eine Erklärung dieser Notation siehe (38)). Dann ist $(a \otimes b)^t = b \otimes a$, denn

$$\langle (a \otimes b)x, y\rangle = \langle a, x\rangle \cdot \langle b, y\rangle = \langle x, (b \otimes a)y\rangle.$$

Und weiters ist

$$(a_1 \otimes b_1) \circ (a_2 \otimes b_2) = \langle a_1, b_2\rangle\; a_2 \otimes b_1.$$

Folglich ist $P := a \otimes b$ genau dann eine ortho-Projektion (d.h. $P^t = P = P^2$), wenn $a = b$ und $\langle a, b\rangle = 1$ ist. Die ortho-Projektionen P vom Rang 1 sind also genau die P der Gestalt $P = a \otimes a$ mit $|a| = 1$. Die glatte Abbildung $x \mapsto \frac{x}{|x|} \otimes \frac{x}{|x|}$ ist somit eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to G(1, n+1)$ und faktorisiert zu einer glatten Bijektion $P^n \to G(1, n+1)$. Lokal erhalten wir eine inverse Abbildung, indem wir ein einer Abbildung P nahe $a \otimes a$ den Punkt $\pi(P(a)) \in P^n$ zuordnen. Es ist nämlich $P(a) = \langle b, a\rangle b$ für $P = b \otimes b$ und somit $f(\pi(P(a))) = f(\pi(b)) = b \otimes b = P$. Also ist f der gesuchte Diffeomorphismus.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\bar\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & S^n \arrow[d] & \\
& P^n \arrow[r, dotted, "\cong", "f"'] & G(1, n+1) \arrow[r, hook] & L(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1})
\end{tikzcd}$$

16.13 Bemerkung

Zwischen projektiven Räumen und Sphären gibt es einige Beziehungen:

(1) Die projektive Gerade $P^1 \cong S^1$.

Als Karten für die S^1 wählen wir $\psi_1 := \psi_{0,1}$ und $\psi_2 := \psi_{0,-1}$, die stereographischen Projektionen zu den Punkten $(0, 1)$ und $(0, -1)$ (vgl. Bsp. (16.12)). Für den Kartenwechsel erhalten wir:

$$(\psi_{0,1}^{-1} \circ \psi_{0,-1})(x) = (\psi_{0,-1}^{-1} \circ \psi_{0,1})(x) = x^{-1} \text{ auf } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Als Karten für P^1 ordnen wir jeder Ursprungsgeraden den Schnittpunkt mit den Geraden $y = 1$ (bzw. $x = 1$) zu:

$$\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to P^1 \setminus [(0, 1)] \\ x \mapsto [(1, x)] \end{cases} \text{ und } \varphi_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to P^1 \setminus [(1, 0)] \\ x \mapsto [(x, 1)] \end{cases}$$

Mit der Karte φ_1 erhalten wir alle Klassen bis auf $[(0, 1)]$ (das entspricht der y-Achse). Diesen Mangel behebt die Karte φ_2. Wir berechnen die Umkehrabbildungen:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1^{-1} : [(x, y)] = [(1, y \cdot x^{-1})] \mapsto y \cdot x^{-1} = \frac{y}{x} \\
&\varphi_2^{-1} : P^1 \setminus [(1, 0)] \to \mathbb{R} \text{ mit} \\
&\varphi_2^{-1} : [(x, y)] \mapsto x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y}
\end{aligned}$$

Nun zum Kartenwechsel:

$$(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(x) = \varphi_2^{-1}[(1, x)] = x^{-1}, \quad (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)(x) = \varphi_1^{-1}[(x, 1)] = x^{-1},$$

jeweils auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Sei $f: P^1 \to S^1$ gegeben durch:

$$f = \begin{cases} \psi_2 \circ \varphi_1^{-1} \text{ auf } P^1 \setminus [(0,1)] \\ \psi_1 \circ \varphi_2^{-1} \text{ auf } P^1 \setminus [(1,0)]. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da aus $\psi_2^{-1}\circ\psi_1 = \varphi_1^{-1}\circ\varphi_2$ folgt, daß $\psi_2\circ\varphi_1^{-1} = \psi_1\circ\varphi_2^{-1}$. Sie ist aber auch ein Diffeomorphismus. Dies müssen wir nur für die induzierte Funktion zeigen. Sei $x \in P^1 \setminus [(0,1)]$ dann ist $f(\operatorname{Bild}\varphi_1) = \operatorname{Bild}\psi_2$, $\psi_2^{-1}\circ f\circ\varphi_1 = \psi_2^{-1}\circ\psi_2\circ\varphi_1^{-1}\circ\varphi_1 = \mathrm{id}$. Das ist aber ein Diffeomorphismus.

$$\begin{tikzcd} P^1 \arrow[r, "f"] & S^1 \\ \mathbb{R} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, equal] & \mathbb{R} \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Analog für $x \in P^1 \setminus [(1,0)]$.

Einfacher sieht man $P^1 \cong S^1$ auch mittels (16.12.4):

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\chi_\infty"] & \\ P^1 \arrow[rr, dotted, "\cong"] & & \mathbb{R}_\infty \\ & \mathbb{R} \arrow[ul, "\varphi_2"] \arrow[ur, "\chi_0"'] & \end{tikzcd}$$

(2) $P^1_{\mathbb{C}} \cong S^2$: Geometrisch läßt sich das wie folgt veranschaulichen: Man parametrisiert die komplexen Ursprungsgeraden in $P^1_{\mathbb{C}}$ durch ihre eindeutigen Schnitte mit der komplexen Gerade $g := \{(z,1) : z \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{R}^2$. Nur die komplexe Gerade h parallel zu g d.h. $h = \{(z,0) : z \in \mathbb{C}\} \in P^1_{\mathbb{C}}$ bekommt kein Bild. Jene Geraden, die nahe bei h liegen, haben ihre Schnittpunkte weit draußen auf g. Also entspricht die noch fehlende Gerade h dem Punkt ∞ in der Einpunktkompaktifizierung $\mathbb{R}^2_\infty$ von $\mathbb{R}^2$. Daß diese beiden Räume isomorph sind, wissen wir aber (siehe Beispiel (16.12)).

17. Produkte und Summen von Mannigfaltigkeiten

Die einfachste Möglichkeit, aus Mannigfaltigkeiten neue zu basteln, ist die Bildung von Produkten und Summen, die wir in diesen Abschnitt behandeln.

17.1 Proposition (Produkte). *Für $i = 1,\dots,n$ sei $(M_i, \mathcal{A}_i)$ eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Dann ist $\prod_{i=1}^n M_i$ in natürlicher Weise eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Der Atlas auf $\prod M_i$ ist gegeben durch*

$$\prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i := \{\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_n : \varphi_i \in \mathcal{A}_i\}.$$

Das Produkt $\prod M_i$ hat folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder C^∞-Mannigfaltigkeit N und C^∞-Abbildungen $f_i : N \to M_i$ existiert eine eindeutige C^∞-Abbildung

$f = (f_1, \dots, f_n)$, sodaß $\mathrm{pr}_i \circ f = f_i$. Dabei bezeichnet $\mathrm{pr}_i : \prod M_i \to M_i$ die C^∞-Abbildung $(x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$. Die universelle Eigenschaft kann auch durch folgendes Diagramm ausgedrückt werden:

$$\begin{tikzcd} M_i & & \prod_i M_i \arrow[ll, "\mathrm{pr}_i"'] \\ & N \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, dotted, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Die auf $\prod_i M_i$ induzierte Topologie ist gerade die Produkttopologie.

Beweis. Offensichtlich ist durch den Atlas $\prod_i \mathcal{A}_i$ induzierte Topologie gerade die Produkttopologie, denn das Produkt von Homöomorphismen φ_i ist ebenso ein Homöomorphismus

$$\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_n : \mathrm{Dom}\,\varphi_1 \times \ldots \times \mathrm{Dom}\,\varphi_n \to \mathrm{Bild}\,\varphi_1 \times \ldots \times \mathrm{Bild}\,\varphi_n \subseteq \prod M_i.$$

Die Kartenwechsel

$$(\psi_1 \times \ldots \times \psi_n)^{-1} \circ (\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_n) = (\psi_1^{-1} \circ \varphi_1) \times \ldots \times (\psi_n^{-1} \circ \varphi_n).$$

sind als Produkte von Diffeomorphismen $(\psi_i^{-1} \circ \varphi_i)$ selbst Diffeomorphismen, und somit ist $\prod M_i$ eine C^∞-Mannigfaltigkeit.
Wir behaupten nun $\mathrm{pr}_i : \prod M_i \to M_i$ ist glatt.
Sei $(x^1, \dots, x^n) \in \prod M_i$ und $\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_n$ eine Karte um diesen Punkt. Dann ist φ_i Karte um x^i. Somit ist

$$\varphi_i^{-1} \circ \mathrm{pr}_i \circ (\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_n) : \mathbb{R}^{m_1 + \dots + m_n} \to \mathbb{R}^{m_i}, \quad (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$$

eine lineare Projektion, also glatt. Seien $f_i \in C^\infty(N, M_i)$, dann ist $x \mapsto f(x) = (f_1, \dots, f_n)$ die einzige Abbildung mit $\mathrm{pr}_i \circ f = f_i$. Bleibt noch zu zeigen: f ist C^∞. Sei φ eine Karte zentriert bei $x \in N$,

$$\begin{aligned} &(\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_n)^{-1} \circ f \circ \varphi(0) = \\ &= (\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_n)^{-1}(f_1(\varphi(0)), \dots, f_n(\varphi(0))) \\ &= (\varphi_1^{-1}(f_1(\varphi(0))), \dots, \varphi_n^{-1}(f_n(\varphi(0)))) \\ &= (\varphi_1^{-1} \circ f_1 \circ \varphi, \dots, \varphi_n^{-1} \circ f_n \circ \varphi)(0). \end{aligned}$$

Laut Vorraussetzungen waren $\varphi_i^{-1} \circ f_i \circ \varphi$ glatt (da die f_i glatt sind), also ist f glatt. □

17.2 Beispiele von Produkten

1. Der Zylinder Z ist eine Teilmenge im $\mathbb{R}^3$, nämlich das kartesische Produkt aus der S^1 und $]-1, 1[\cong \mathbb{R}$. Die Abbildung

   $$\varphi : \begin{cases} S^1 \times \mathbb{R} \to Z \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (x, y, t) \mapsto (x, y, \pi^{-1} \cdot 2 \arctan t) \end{cases}$$

   ist ein Diffeomorphismus. Also ist der Zylinder eine C^∞-Mannigfaltigkeit.

2. Der n-dimensionale Torus im $\mathbb{R}^{2n}$ entsteht durch das n-fache kartesische Produkt der $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$:
$$S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1 = \prod_{i=1}^{n} S^1 = (S^1)^n = T^n.$$
Für $n = 2$ ergibt sich der uns schon bekannte "Fahrradschlauch" T^2 (vgl. (11.6)), allerdings als Teilmenge von $\mathbb{R}^4$ anstelle von $\mathbb{R}^3$. Ein Diffeomorphismus $f : S^1 \times S^1 \to T^2$ kann folgendermaßen beschrieben werden:
$$f : (\varphi, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi(R + r\cdot\cos\psi) \\ \sin\varphi(R + r\cdot\cos\psi) \\ r\cdot\sin\psi \end{pmatrix}$$

17.3 Proposition (Summen).
Seien $(M_i, \mathcal{A}_i)$ C^∞-Mannigfaltigkeiten. Dann ist die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_i M_i$ in natürlicher Weise eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Ein Atlas $\mathcal{A}$ auf $\bigsqcup_i M_i$ ist gegeben durch $\bigcup_i \mathcal{A}_i$ (hier ist keine Beschränkung der Indexmenge nötig).
Zusätzlich hat $\bigsqcup M_i$ folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder C^∞-Mannigfaltigkeit N und für alle C^∞-Abbildungen $f_i : M_i \to N$ existiert eine eindeutige glatte Abbildung f mit
$$f := \bigsqcup_i f_i : \bigsqcup M_i \to N, \ \textit{sodaß}\ f|_{M_i} = f_i.$$
Dies kann auch durch folgendes Diagramm ausgedrückt werden:
$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f_i"'] & \bigsqcup_i M_i \arrow[d, dotted, "f"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Beweis. Offene Mengen in $\bigsqcup M_i$ sind Vereinigungen offener Mengen in M_i. Da $\varphi \in \bigcup \mathcal{A}_i$ folgt, daß $\varphi \in \mathcal{A}_i$ für zumindest ein i, d.h. φ ist ein Homöomorphismus. Für $\varphi, \psi \in \bigcup \mathcal{A}_i$ ist entweder $\varphi^{-1} \circ \psi = \emptyset$ oder ein i existiert mit $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_i$ und somit ist $\psi^{-1} \circ \varphi$ glatt. Der Beweis der universellen Eigenschaft erübrigt sich. □

18. Zerlegungen der Eins

Um aus lokalen Konstruktionen (wie sie z.B. in der Analysis behandelt werden) auch globale zu erhalten benötigen wir eine Methode, diese lokal zu verkleben. Wir brauchen dazu "Gewichts"-Funktionen, d.h. Funktionen, die nur lokal nicht verschwinden, größer oder gleich 0 sind und zusammen sich auf 1 summieren. Das sind die sogenannten Partitionen der Eins, die wir in diesen Abschnitt behandeln.

18.1 Definition (Partition der Eins)

Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M. Eine $\mathcal{U}$ unterordnete glatte Partition der Eins ist eine Menge $\mathcal{F}$ von glatten Abbildungen $M \to \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ mit den Eigenschaften:

1. Die Familie $\{\mathrm{Trg}(f) : f \in \mathcal{F}\}$ ist lokal endlich, d.h. $\forall\, p \in U\ \exists\, U(p)$ sodaß $\{f \in \mathcal{F} : \mathrm{Trg}(f) \cap U(p) \neq 0\}$ endlich ist. Dabei ist $\mathrm{Trg}(f)$ der Abschluß von $\{x : f(x) \neq 0\}$.
2. $\forall\, f \in \mathcal{F}\ \exists\, U_f \in \mathcal{U} : \mathrm{Trg}(f) \subseteq U_f$
3. $\sum_{f\in\mathcal{F}} f = 1$

18.2 Satz (Partition der Eins). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von U. Dann gibt es eine C^∞-Partition der Eins, die $\mathcal{U}$ untergeordnet ist.*

Beweis. Zuerst wollen wir bemerken, daß es immer Funktionen mit beliebig kleinem Träger gibt. Betrachten wir zum Beispiel die glatte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} \text{ für } t > 0 \\ 0 \text{ für } t \leq 0 \end{cases}$$

Wenn wir dazu nun $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf folgende Weise definieren: $\varphi(x) := h(r^2 - |x|^2)$; dann ist φ klarerweise auch glatt und $\varphi(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Weiters gilt

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow h(r^2 - |x|^2) = 0 \Leftrightarrow r^2 - |x|^2 \leq 0 \Leftrightarrow r \leq |x|,$$

das heißt also, der Träger von φ ist gegeben durch $\mathrm{Trg}\,\varphi = \{x : |x| \leq r\}$.

Jetzt wollen wir uns dem eigentlichen Beweis des Satzes zuwenden. Wir zeigen zuerst, daß U (und in der Tat jeder separable metrische Raum) Lindelöf ist. Dabei heißt ein Raum Lindelöf, wenn jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt.

Sei dazu $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von U. Sei weiters $W \in \mathcal{U}$ und p ein Punkt in $W \cap \mathbb{Q}^n$. Dann wissen wir: Es existiert ein $0 < r \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft, daß $U_p(r) := \{x : |x - p| < r\} \subseteq W$. Es gibt aber nur abzählbar viele Punkte und Radien mit dieser Eigenschaft. Diese Kugeln sind eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ und sie überdecken U. Zu jeder solchen Kugel wählen wir ein umfassendes $W \in \mathcal{U}$. Diese W sind eine abzählbare Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$ (d.h. U ist Lindelöf).

Sei $\mathcal{U}$ die gegebene offene Überdeckung von U. Zu jedem $x \in W \in \mathcal{U}$ wählen wir ein $r > 0 : \{y : |y - x| \leq r\} \subseteq W$. Nach obigem wissen wir, daß es ein $\varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ gibt mit

$$U_\varphi := \{y : |y - x| < r\} = \{y : \varphi(y) \neq 0\}.$$

Diese Mengen bilden eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$. Da U Lindelöf ist, können wir schließen, daß bereits abzählbar viele U_φ den Raum U überdecken. Seien nun $U_1, U_2, \ldots$ diese abzählbar vielen U_φ mit zugehörigen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Seien weiters W_n wie folgt definiert:

$$W_n := \{x \in U : \varphi_n(x) > 0 \wedge \varphi_i(x) < \frac{1}{n} \text{ für } 1 \leq i < n\}.$$

Es ist klar, daß die W_n offen sind (durch stetige Ungleichung gegeben), und Teilmengen von U_n sind.

Die W_n bilden eine Überdeckung von U, denn zu jedem $x \in U$ existiert ein minimales n_0 mit $\varphi_{n_0} > 0$. Dann ist aber $x \in W_{n_0}$.

Wir wollen jetzt beweisen, daß die W_n lokal endlich sind. Wählen wir $x \in U$ beliebig, dann existiert ein n, sodaß $x \in U_n$. Sei n_0 das kleinste n mit der Eigenschaft, daß $x \in U_{n_0}$. Nun definieren wir eine offene Umgebung um x:

$$U(x) := \left\{y : \varphi_{n_0}(y) > \tfrac{1}{2}\varphi_{n_0}(x)\right\}.$$

Falls $W_k \cap U(x) \neq \emptyset$, dann sei y im Durchschnitt dieser beiden Mengen gewählt und es folgt:

$$\varphi_i(y) < \tfrac{1}{k} \text{ für } i < k \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\varphi_{n_0}(x) < \varphi_{n_0}(y).$$

Falls k so groß ist, daß $\frac{1}{k} < \frac{\varphi_{n_0}(x)}{2}$ und k größer als n_0 ist, dann erhalten wir durch

$$\tfrac{1}{k} < \tfrac{1}{2}\varphi_{n_0}(x) < \varphi_{n_0}(y) < \tfrac{1}{k}$$

einen Widerspruch. Also existieren nur endlich viele k mit $W_k \cap U(x) \neq \emptyset$.
Wir definieren eine glatte Funktion $\psi_n : U \to \{t : 0 \leq t\}$ durch

$$\psi_n(x) := h(\varphi_n(x))h\Big(\frac{1}{n} - \varphi_1(x)\Big) \cdot \ldots \cdot h\Big(\frac{1}{n} - \varphi_{n-1}(x)\Big),$$

und rechnen wie folgt

$$\psi_n(x) \neq 0 \Leftrightarrow \Big(\varphi_n(x) > 0\Big) \wedge \Big(\tfrac{1}{n} - \varphi_1(x) > 0\Big) \wedge \ldots \wedge \Big(\tfrac{1}{n} - \varphi_{n-1}(x) > 0\Big) \Leftrightarrow x \in W_n.$$

Da $\{W_n : n\}$ lokal endlich ist, sind in der Summe $\sum_{n=1}^\infty \psi_n$ lokal nur endlich viele Summanden ungleich 0, und somit ist $\psi := \sum_{n=1}^\infty \psi_n \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Diese Funktion verschwindet nirgends, da die $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Überdeckung bilden.
Nun definieren wir $f_n := \frac{\psi_n}{\psi} \in C^\infty(U, \mathbb{R})$.

$$\sum f_n = \frac{\sum \psi_n}{\psi} = \frac{\psi}{\psi} = 1$$

damit hätten wir Punkt (1) und (3) von (18.1) gezeigt.
(2) folgt nun aus: $\mathrm{Trg}(f_n) \subseteq \bar{W}_n \subseteq \bar{U}_n \subseteq U_f$ für ein $U_f \in \mathcal{U}$. □

Bemerkung

Dieser Beweis funktioniert für Lindelöf-Räume, in denen die Mengen der Gestalt $\{x : f(x) \neq 0\}$ mit $f \in C^\infty$ eine Basis der Topologie bilden.

18.3 Definition (Parakompaktheit)

Ein topologischer Raum X heißt PARAKOMPAKT, falls es für jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine lokal-endliche Verfeinerung $\mathcal{V}$ gibt. D.h. $\mathcal{V}$ ist eine offene Überdeckung von X mit den Eigenschaften:

1. Für alle $V \in \mathcal{V}$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $V \subseteq U$ ("Verfeinerung").
2. Für alle $x \in X$ gibt es ein U_x, sodaß höchstens für endlichviele $V \in \mathcal{V}$ gilt: $U_x \cap V \neq \emptyset$ (d.h. ist lokal-endlich).

Eine große Klasse von Beispielen für parakompakte Räume liefert uns das

18.4 Lemma. *Sei X ein topologischer Raum mit $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, wobei K_n kompakt ist in X und $K_n \subseteq K_{n+1}^o$. Dann gilt ist X parakompakt und Lindelöf.*

Beweis. Wir definieren zuerst $A_n := K_{n+1} \setminus K_n^o$. Diese Menge ist kompakt. Die Menge

$$\mathcal{U}_n := \Big\{U \cap (K_{n+2}^o \setminus K_{n-1}) : U \in \mathcal{U}\Big\}$$

ist eine offene Überdeckung von A_n. Sei $\mathcal{U}'_n$ eine endliche Teilüberdeckung, dann ist $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}'_n$ eine offene Überdeckung von X und eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$. Es ist zu zeigen, daß $\mathcal{V}$ lokal-endlich ist. Für $x \in X$ gibt es ein n, sodaß $x \in A_n$. Nach Konstruktion von $\mathcal{V}$ können nur Mengen aus $\mathcal{U}'_{n-1} \cup \mathcal{U}'_n \cup \mathcal{U}'_{n+1}$ mit A_n nicht leeren Durchschnitt haben. Dies sind aber nur endlich viele, damit ist X parakompakt. Aus der abzählbaren offenen Überdeckung $\mathcal{V}$ gewinnt man auch leicht eine abzählbare Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$, und somit ist X Lindelöf. □

18.5 Folgerung (Fortsetzung glatter Funktionen). *Sei M eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$ ist genau dann glatt, wenn es eine offene Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$ gibt, die M umfaßt, und eine glatte Abbildung $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$, die f fortsetzt, d.h. $\tilde{f}|_M = f$.*

Beweis. Die Richtung von rechts nach links ist trivial! Umgekehrt existiert für alle $p \in M$ eine offene Umgebung $U(p) \subset \mathbb{R}^n$ und eine glatte Fortsetzung $\tilde{f}^p : U(p) \to \mathbb{R}$. Sei $\mathcal{U} := \{U(p) : p \in M\}$ und $U := \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{W\in\mathcal{U}} W$. Dann ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $M \subseteq U$. Nach (18.2) existiert eine Partition $\mathcal{G}$ der Eins, welche $\mathcal{U}$ untergeordnet ist. Die Abbildung $\tilde{f}$ definieren wir nun folgendermaßen:

$$\tilde{f} := \sum_{g\in\mathcal{G}} g \cdot \tilde{f}^{p(g)},$$

wobei $g \cdot f_{p(g)}$ auf $U \setminus \operatorname{Trg}(g)$ durch 0 fortgesetzt zu denken ist. In dieser Summe sind die einzelnen Summanden glatt, aber nur endlich viele sind $\neq 0$. Das heißt aber gerade, daß $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ ebenfalls glatt ist. Um auch die letzte Gleichung zu zeigen, schränken wir $\tilde{f}$ auf M ein und rechnen für ein $x \in M$:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{g\in\mathcal{G}} g(x) \cdot \underbrace{f_{p(g)}(x)}_{f(x)} = \underbrace{\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} g(x)\right)}_{1} \cdot f(x) = f(x). \qquad \square$$

18.6 Folgerung (Partition der Eins für Mannigfaltigkeiten).
Jede Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine C^∞-Partition der Eins.

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M. O.B.d.A. Seien $W \in \mathcal{U}$ so klein gewählt, daß sie Bilder von Parametrisierungen sind. Man kann auch schärfer o.B.d.A. vorraussetzen, daß es für jedes $U \in \mathcal{U}$ offene Teilmengen $\tilde{U}$ des $\mathbb{R}^n$ gibt, die M lokal trivialisieren, also insbesonders $\tilde{U} \cap M = U$ erfüllen. Die Teilmannigfaltigkeit M trägt also die Spurtopologie, die sie vom $\mathbb{R}^n$ erbt. Wenn wir U_0 durch

$$U_0 := \bigcup_{U\in\mathcal{U}} \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$$

definieren, dann ist U_0 offen und M ist abgeschlossen in U_0: Sei nämlich $x \in U_0 \setminus M$, dann $\exists\ U \in \mathcal{U} : x \in \tilde{U} \setminus M$ und somit folgt $\exists\ U(x) \subseteq \tilde{U} : U(x) \cap M = \emptyset$.

Nach (18.2) existiert eine Partition $\mathcal{F}$ der Eins, welche $\tilde{\mathcal{U}} := \{\tilde{U} : U \in \mathcal{U}\}$ untergeordnet ist. Also ist $\{f|_M : f \in \mathcal{F}\}$ eine Partition der Eins, welche $\mathcal{U}$ untergeordnet ist. □

18.7 Proposition (Nullstellenmengen).
Jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Nullstellenmenge einer C^∞-Abbildung.

Vergleiche das mit dem Satz (10.4) über Nullstellenmengen regulärer Abbildungen.

Beweis. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, und sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$, dann gibt es ein glattes f_x mit $x \in \operatorname{Trg} f_x \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}^n \setminus A$ mit Mengen der Gestalt $U_x = \{y : f_x(y) > 0\}$, wobei $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Da $\mathbb{R}^n \setminus A$ Lindelöf ist, besitzt $\mathcal{U}$ eine abzählbare Teilüberdeckung. Seien $f_1,\ f_2,\ \ldots$ die ensprechenden Funktionen. O.B.d.A. sei

$$\left|\frac{\partial f_k^{t_1+\ldots+t_n}}{\partial x_1^{t_1}\ldots\partial x_n^{t_n}}\right| \le \frac{1}{2^k} \text{ für } t_1+..+t_n \le k.$$

Dies erreicht man durch Multiplikation von f_k mit einer genügend kleinen Zahl. Die Abbildung $f(x) := \sum_k f_k(x)$ konvergiert dann in allen partiellen Ableitungen gleichmäßig. D.h. f ist glatt und $f \ge 0$. Weiters gilt: $f(x) = 0 \Leftrightarrow f_k(x) = 0$ für alle $k \Leftrightarrow x \notin U_y$ für alle $y \in \mathbb{R}^n \setminus A \Leftrightarrow x \in A$. □

19. Topologisches über Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt wollen wir die topologischen Eigenschaften von abstrakten Mannigfaltigkeiten besprechen. Insbesonders interessiert uns die Reichhaltigkeit der glatten Funktionen auf ihnen. Das betrifft einerseits Trennungseigenschaften wie Hausdorff oder vollständige Regularität aber auch Begriffe wie Lokalkompaktheit, Separabilität und Parakompaktheit und somit Partitionen der Eins, die wir bereits in (18) kennengelernt haben. Wir werden auch die Existenz endlicher Atlanten skizzieren und damit erhalten, daß jede hinreichend reguläre abstrakte Mannigfaltigkeit sich als konkrete Mannigfaltigkeit in einem Euklidischen Raum realisieren läßt. Dies zeigt zwar, daß der Verzicht auf den umgebenden Raum nicht wirklich nötig war, aber dennoch hilft er klarer zu erkennen, welches die intrinsischen (d.h. nicht vom umgebenden Raum abhängigen) Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten sind.

19.1 Lemma (Topologie von Mannigfaltigkeiten).
Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit, dann hat M folgende Eigenschaften:

1. *M ist T_1, d.h. $x \neq y \Rightarrow \exists\, U$ offen mit $x \in U$ und $y \notin U$.*
2. *Jedes $x \in M$ hat eine abzählbare Umgebungsbasis.*
3. *M ist lokal wegzusammenhängend (d.h. $x \in M \Rightarrow \exists\, U_x$, sodaß $\forall\, y \in U_x$ gilt: es gibt eine glatte Kurve, die x und y verbindet).*

Beweis. Ad (1) Sei $x \neq y$ und $x \in \operatorname{Bild}\varphi$. Dann ist entweder $y \notin \operatorname{Bild}\varphi$ und $\operatorname{Bild}\varphi$ ist die gesuchte Menge. Oder es ist $y \in \operatorname{Bild}\varphi$, dann sind $\varphi^{-1}(x)$ und $\varphi^{-1}(y)$ verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^m$. Der $\mathbb{R}^m$ ist aber klarerweise T_1. Also gibt es eine Teilmenge $O \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $\varphi^{-1}(x) \in O$ und $\varphi^{-1}(y) \notin O$. Wenn wir nun $U = \varphi(O)$ wählen, dann ist $y \notin U$.
(2) und (3) ergeben sich unmittelbar aus der lokalen Isomorphie von M und $\mathbb{R}^m$. (In (3) wähle im $\mathbb{R}^m$ ein Geradensegment von $\varphi^{-1}(x)$ nach $\varphi^{-1}(y)$.) □

19.2 Folgerungen (Zusammenhangskomponenten).

1. *Die Wegzusammenhangskomponenten M_i von M sind offen:*
   $x \in M_i \Rightarrow \exists\, U_x$, sodaß für alle $y \in U_x$ gilt: $y \in M_i$.

2. *Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und M_i die Familie der Wegzusammenhangskomponenten von M. Dann sind die M_i offen in M und also selbst (wegzusammenhängende) C^∞-Mannigfaltigkeiten und $M = \bigsqcup M_i$ (siehe (17.3)).*

Beweis. Die Atlanten für M_i ergeben sich als

$$\mathcal{A}_i = \{\varphi|_{\varphi^{-1}(M_i)} : \varphi \in \mathcal{A}\}.$$

Diese Karten liegen in $\mathcal{A}_{max}$, also liegt der kanonische Atlas von $(\bigsqcup M_i, \bigcup \mathcal{A}_i)$, in $\mathcal{A}_{max}$. Da die Atlanten verträglich sind, ist insbesondere der von ihnen erzeugte maximale Atlas gleich. □

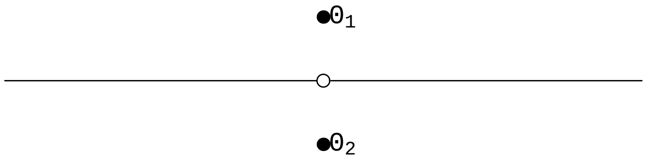
19.3 Definition (Dimension)

Bei wegzusammenhängenden glatten Mannigfaltigkeiten kann für jede Karte derselbe Vektorraum verwendet werden, denn die Ableitung des Kartenwechsels ist ein linearer Isomorphismus, also ist die Dimension der modellierenden Vektorräume gleich. Damit ist die Dimension der Mannigfaltigkeit wohldefiniert.

Für topologische Mannigfaltigkeiten ist es sehr viel schwieriger ein analoges Resultat zu erhalten!

19.4 Beispiel einer nicht-Hausdorff Mannigfaltigkeit

Die Menge $M := (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{0_1, 0_2\}$ mit folgendem Atlas ist eine Mannigfaltigkeit, die nicht Hausdorff (kurz T_2, d.h. $x \neq y \Rightarrow \exists\, U_x,\ \exists\, U_y,$ sodaß $U_x \cap U_y \neq \emptyset$) ist.



Der Atlas bestehe aus folgenden zwei Karten φ_i für $i = 1, 2$:

$$\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{0_i\},\ \varphi_i(0) = 0_i,\ \varphi_i(t) = t \text{ für } t \neq 0$$

Der Kartenwechsel $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ ist die Identität auf $R \setminus \{0\}$ und damit auch glatt, d.h. M ist eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Aber M ist nicht Hausdorff: Eine Umgebungsbasis des Punktes 0_i ist

$$\Big\{]-\varepsilon, 0[\cup \{0_i\} \cup]0, \varepsilon[: \varepsilon > 0 \Big\}.$$

Somit enthält der Durchschnitt beliebiger Umgebungen von 0_1 und 0_2 ein punktiertes Intervall $]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\}$.

So eine Situation kann klarerweise nur dann auftreten, wenn es keine gemeinsame Karte für die in Rede stehenden Punkte gibt. (Sonst verwende man die gemeinsame Karte und die T_2- Eigenschaft des $\mathbb{R}^n$.) In [**27**] findet sich ein Beispiel für eine nicht Hausdorff Mannigfaltigkeit, auf der jede glatte Funktion konstant ist.

19.5 Lemma (Topologie von Hausdorff Mannigfaltigkeiten).
Sei M eine Hausdorff C^∞-Mannigfaltigkeit, dann gilt:

1. *M ist lokalkompakt (d.h. $\forall\, x \in M\ \exists\, U_x$, sodaß U_x^- kompakt ist; anders gesagt: es gibt relativ-kompakte Umgebungen).*
2. *Die C^∞-Funktionen $M \to \mathbb{R}$ trennen Punkte. Sie trennen sogar Punkte von abgeschlossenen Mengen (d.h. für $x \notin A$, wo A abgeschlossen ist, existiert ein glattes $f : M \to \mathbb{R}$, sodaß $f(x) = 1$ und $f(y) = 0$ für alle $y \in A$). Insbesondere ist M also vollständig regulär.*

Beweis. (1) Sei $x \in M$ und φ ein Karte um x mit $\operatorname{Dom}\varphi \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. O.B.d.A. gelte $\varphi(0) = x$. Sei $W_x \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Kugel um 0, wobei $W_x^- \subseteq \operatorname{Dom}\varphi$ kompakt ist. Dann ist $\varphi(W_x)$ eine offene Umgebung von x, und $\varphi(W_x^-)$ ist kompakt in M, da φ ein Diffeomorphismus ist. Also ist $\varphi(W_x)^- = \varphi(W_x^-)$ und somit kompakt.

Ad (2) Sei $x \notin A$ und A abgeschlossen, dann existiert eine relativ-kompakte Umgebung W_x von x, deren Abschluß ganz in einer Karte φ liegt. Somit ist

$$\varphi^{-1}(x) \in \varphi^{-1}(W_x) \subseteq \varphi^{-1}(W_x^-)$$

wobei $\varphi^{-1}(W_x)$ offen und $\varphi^{-1}(W_x^-)$ kompakt sind. Da $\varphi^{-1}(x) \notin \varphi^{-1}(A)$ ist, gibt es ein r, sodaß

$$\{y \in \mathbb{R}^m : d(y, \varphi^{-1}(x)) \le r\} \subseteq \varphi^{-1}(W_x) \text{ und}$$
$$\{y \in \mathbb{R}^m : d(y, \varphi^{-1}(x)) \le r\} \cap \varphi^{-1}(A) = \emptyset.$$

Aus Satz (18.7) wissen wir, daß es eine glatte Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ gibt, sodaß

$$f(\varphi^{-1}(x)) = 1 \text{ und } \operatorname{Trg} f \subseteq \{y \in \mathbb{R}^m : d(y, \varphi^{-1}(x)) \le r\}.$$

Setzen wir nun $g : M \to \mathbb{R}$ mit

$$g(z) = \begin{cases} f(\varphi^{-1}(z)) & \text{falls } z \in \operatorname{Bild}\varphi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $g(x) = 1$ und $A \subseteq (M \setminus \operatorname{Trg} g)$, also $g = 0$ auf A. Da f und φ beide glatt sind, ist auch g glatt. Das war die Behauptung. □

19.6 Satz (Parakompakte Mannigfaltigkeiten). *Sei M eine Hausdorff C^∞-Mannigfaltigkeit, so ist äquivalent:*

1. *M besitzt C^∞-Partitionen der Eins.*
2. *M ist parakompakt, d.h. zu jeder offenen Überdeckung existiert eine lokalendliche offene Verfeinerung die M überdeckt.*
3. *Jede Zusammenhangskomponente ist σ-KOMPAKT, d.h. sie ist Vereinigung abzählbar vieler kompakter Teilmengen.*
4. *Jede Zusammenhangskomponente ist* LINDELÖF, *d.h. zu jeder offenen Überdeckung existiert eine abzählbare Teilüberdeckung.*
5. *M ist* METRISIERBAR, *d.h. es existiert eine Metrik, die die Topologie erzeugt.*

Die Äquivalenz mit 5 soll hier nur erwähnt, später bewiesen werden.

Bemerkung

Es besitzt nicht jede Hausdorff C^∞-Mannigfaltigkeit die oben genannten Eigenschaften, als Beispiel dient die "Lange Linie": Sei Ω die Menge der abzählbaren Ordinalzahlen,

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, \omega, \omega+1, \dots, 2\omega, 2\omega+1, \dots, \omega^2, \omega^2+1, \dots, \omega^3, \dots \\ \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots\dots\dots\}.$$

Betrachtet man $\Omega \times [0,1) \setminus \{(0,0)\}$, versehen mit der lexikographischen Ordnung, d.h. $((\alpha,t) \leq (\beta,s)) \Leftrightarrow (\alpha < \beta$ oder $(\alpha = \beta$ und $t \leq s))$. Diese "Linie" kann mit der Ordnungstopologie zu einer C^∞-Mannigfaltigkeit gemacht werden, die zwar Hausdorff, aber nicht parakompakt ist. Siehe [**51**, Vol.I, Appendix A]

Beweis. (des Satzes)

($1 \Rightarrow 2$) Sei $\mathcal{U}$ offene Überdeckung und f_α zugehörige Partition der Eins $\Rightarrow \ \forall\ x$ existiert U_x sodaß $I := \{\alpha : \operatorname{Trg} f_\alpha \cap U_x \neq \emptyset\}$ endlich ist (dies entspricht der 2.Bedingung für eine Partition der Eins). Somit ist $(\operatorname{carr} f_\alpha)_\alpha$, für $\alpha \in I$ eine lokalendliche Verfeinerung von $\mathcal{U}$.

($2 \Rightarrow 3$) Sei M_i eine Zusammenhangskomponente. Es existiert eine Überdeckung mit relativ-kompakten Mengen (vgl. Lemma (19.5)). Diese kann, da M_i parakompakt ist, als lokal-endlich angenommen werden. Sei $\mathcal{U}$ so eine Überdeckung, dann gilt sogar:

$$\{U \in \mathcal{U} : U \cap W \neq \emptyset\} \text{ ist endlich für jedes } W \in \mathcal{U},$$

denn zu jedem $x \in W^-$ existiert ein V_x, sodaß V_x nur endlich viele $U \in \mathcal{U}$ trifft. Da W^- kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$:

$$\bigcup_{i=1}^n V_{x_i} \supseteq W^- \supseteq W.$$

Nun gilt $U \cap W \neq \emptyset$. Somit existiert ein i, sodaß $U \cap V_{x_i} \neq \emptyset$. Für endlich viele i tritt dieser Fall nur endlich oft ein. Also ist auch

$$\{U \in \mathcal{U} : U \cap W \neq \emptyset\}$$

endlich.

Wir wählen nun ein $W_1 \in \mathcal{U}$. Sei W_2 die Vereinigung über jene $U \in \mathcal{U}$, deren Schnitt mit $W_1 \neq \emptyset$ ist.
Induktiv sei nun W_n die Vereinigung über jene $U \in \mathcal{U}$, deren Schnitt mit $W_{n-1} \neq \emptyset$ ist. Jedes W_i ist Vereinigung endlich vieler relativ-kompakter Mengen, also selbst relativ-kompakt. Ist $W := \bigcup_n [W_n]$, so ist W offen. Wir wollen zeigen, daß $W = M_i$. Dafür genügt es zu zeigen, daß $M_i \setminus W$ offen ist. Sei also $x \notin W$, dann existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$. Klarerweise gilt $U \cap W = \emptyset$, sonst gäbe es ein n, sodaß $U \cap W_n \neq \emptyset$, also $x \in U \subseteq W_{n+1} \subseteq W$. Dies ist ein Widerspruch.

Nun ist also $M_i = W \cup (M_i \setminus W)$, und sowohl W als auch $M_i \setminus W$ sind beide offen. Da M_i zusammenhängend ist, muß W oder $M_i \setminus W$ leer sein. Aber $W \neq \emptyset$, also $M_i \setminus W = \emptyset$, und somit ist $M_i = W$. Die Gleichung $M_i = \bigcup_n W_n^-$ zeigt die σ -Kompaktheit von M_i.

($3 \Rightarrow 4$) Dies folgt aus (18.4) (und (19.5)).

($4 \Rightarrow 1$) In (18.2) wurde ein Beweis für die Existenz von C^∞-Partitionen der Eins gegeben, der als Voraussetzung Lindelöf und die Existenz von C^∞-Funktionen mit beliebig kleinen Trägern verwendet. Beides ist hier erfüllt. □

Zum Abschluß dieses Exkurses in die Topologie noch einige Bemerkungen zur Dimensionstheorie: (Für detailliertere Ausführungen siehe [**62**, General Topology])

19.7 Definition (Überdeckungsdimension)

Sei X ein parakompakter Hausdorff-Raum. Man sagt die Überdeckungsdimension von X ist höchstens n (kurz: $\text{ÜD-dim}\, X \le n$), falls es zu jeder offenen Überdeckung von X eine offene Verfeinerung der Ordnung $n+1$ gibt. ($\mathcal{U}$ heißt von Ordnung $n+1$, wenn der Durchschnitt über $n+2$ verschiedene Mengen aus $\mathcal{U}$ immer leer ist.) Die $\text{ÜD-dim}\, X = n \Leftrightarrow \text{ÜD-dim}\, X \le n$, aber nicht $\text{ÜD-dim} \le n-1$.

19.8 Satz (Eigenschaften der Überdeckungsdimension). *Es gilt:*

1. $\text{ÜD-dim}[0,1]^n = n$.
2. *Wenn A abgeschlossen in X ist, dann gilt*
$$\text{ÜD-dim}\, A \le \text{ÜD-dim}\, X.$$
3. *Für eine lokal-endliche abgeschlossene Überdeckung $\mathcal{A}$ von X gilt:*
$$\text{ÜD-dim}\, X \le \sup\{\text{ÜD-dim}\, A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Ohne Beweis, siehe [**62**, S.295,268,278]

19.9 Folgerung. *Für jede m-dimensionale, parakompakte, Hausdorff Mannigfaltigkeit M ist* $\text{ÜD-dim}\, M = m$.

Beweis. M besitzt eine offene Überdeckung durch Mengen $\varphi((0,1)^n)$, wobei φ eine Karte für M ist. Da M parakompakt ist, existiert eine lokal-endliche Verfeinerung $\mathcal{U}$. Sei $\overline{\mathcal{U}} := \{\overline{V} : V \in \mathcal{U}\}$, so ist $\overline{\mathcal{U}}$ eine lokal-endliche abgeschlossene Überdeckung. $\varphi^{-1}(\overline{V}) \subseteq [0,1]^n$. Da φ Homöomorphismus ist, gilt unter Verwendung von (19.8):

$$\text{ÜD-dim}\, \overline{V} = \text{ÜD-dim}\, \varphi^{-1}(\overline{V}) \overset{(2)}{\le} \text{ÜD-dim}[0,1]^n \overset{(}{=} 1) = n,$$
$$\text{ÜD-dim}\, M \overset{(3)}{\le} \sup\{\text{ÜD-dim}\, \overline{V} : \overline{V} \in \mathcal{V}\},$$

also $\text{ÜD-dim}\, M \le n$. Umgekehrt gilt: Ist $\varphi : [0,1]^n \to M$ Karte, so ist $\varphi([0,1]^n)$ abgeschlossen in M, also ist nach (19.8):

$$\text{ÜD-dim}\, M \overset{(2)}{\ge} \text{ÜD-dim}\, \varphi([0,1]^n) = \text{ÜD-dim}[0,1]^n \overset{(}{=} 1) = n.$$

Zusammen folgt die Behauptung: $\text{ÜD-dim}\, M = n$. □

19.10 Folgerung. *Sei M eine parakompakte und zusammenhängende Hausdorff-Mannigfaltigkeit. Sei $\mathcal{O}$ eine offene Überdeckung von M, dann existiert ein $p \le (\dim M) + 1$ und eine Verfeinerung von $\mathcal{O}$ folgender Gestalt:*

$$\mathcal{V} = \{V_i^n : i \le p, n \in \mathbb{N}\},$$

sodaß $V_i^n \cap V_i^m = \emptyset,\ \forall\, n \ne m$.

Beweis. Nach (19.9) ist die Überdeckungsdimension von M gleich $\dim M$, also existiert zur offenen Überdeckung $\mathcal{O}$ eine Verfeinerung $\mathcal{O}'$ der Ordnung $p \leq$ ÜD-dim $M+1$. Da M parakompakt ist, existiert eine lokal endliche Verfeinerung $\mathcal{O}''$ und da M nach (19.6) Lindelöf ist, können wir annehmen, daß diese Überdeckung $\mathcal{O}''$ abzählbar ist. O.B.d.A. ist also $\mathcal{O}$ eine abzählbare lokal endliche Überdeckung der Ordnung p.

Wir zeigen nun mittels Induktion nach p, daß jede solche Überdeckung eine Verfeinerung der gewünschten Form besitzt.

Dazu schrumpfen wir die Mengen in $\mathcal{O}$ zu einer kleineren Überdeckung $\mathcal{U}$. Das soll heißen, wir konstruieren für jedes $O \in \mathcal{O}$ ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\bar{U} \subseteq O$ derart, daß die U noch immer eine Überdeckung bilden.

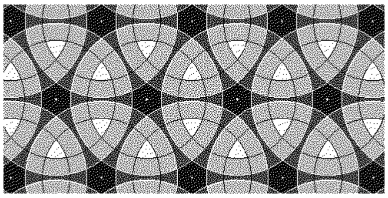
Dies kann induktiv geschehen: Sei $\mathcal{O} := \{O_n : n \in \mathbb{N}\}$. Zwischen $M \setminus \bigcup_{n\geq 2} O_n$ und O_1 (erstere ist abgeschlossen, zweitere offen) schalten wir U_1 und $\bar{U}_1$ und erhalten eine Überdeckung $\{U_1\} \cup \{O_n : n > 1\}$. (Dies kann geschehen, da nach (18.7) eine C^∞-Funktion f existiert mit Träger in $\bar{O}_1$, die auf $M \setminus \bigcup_{n\geq 1} O_n$ identisch 1 ist. Nun erhält man U_1 etwa durch $U_1 := \{x : f(x) > 1/2\}$.) Im zweiten Schritt finden wir genauso ein U_2 zwischen $M \setminus U_1 \cup \bigcup_{n>2} O_n$ und O_2; und so weiter.

Nun betrachten wir die beiden Familien:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_p &:= \text{ die Menge der Durchschnitte von je } p \text{ der } O \in \mathcal{O},\\ \mathcal{A}_p &:= \text{ die Menge der Durchschnitte von je } p \text{ der } \bar{U} \text{ für } U \in\end{aligned}$$

und bezeichnen ihre Vereinigungen mit $V_p := \bigcup \mathcal{V}_p$ und $A_p := \bigcup \mathcal{A}_p$.

Im folgenden Bild sind die großen Scheiben die Mengen in $\mathcal{O}$, die kleinen Scheiben jene in $\mathcal{U}$, die hellen "6-Ecke" sind die Punkte die in genau einem $O \in \mathcal{O}$ liegen, die Punkte in den nächst dünkleren Streifen liegen in genau 2 der O's, die nächst dünkleren "3-Ecke" liegen in genau 3 der $O's$ (sind also die Elemente von $\mathcal{V}_p$) und die schwarzen "Dreiecke" sind die Elemente von $\mathcal{A}_p$.



Es ist $\mathcal{V}_p$ eine Familie offener disjunkter Mengen, denn angenommen zwei verschiedene Mitglieder von $\mathcal{V}_p$ hätten nichtleeren Durchschnitt, so hätten zumindest $p+1$ der $O \in \mathcal{O}$ nichtleeren Durchschnitt, und das ist ein Widerspruch. Folglich ist $V_p \subseteq M$ offen.

Die Familie $\mathcal{A}_p$ besteht aus abgeschlossen Mengen und ist lokal endlich, da die entsprechenden Elemente von $\mathcal{V}_p$ disjunkt sind. Somit ist A_p als lokal endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen und es gilt $A_p \subseteq V_p$.

Wir behaupten nun, daß $\mathcal{U}$ eine abzählbare lokal endliche Überdeckung von $M \setminus A_p$ der Ordnung kleiner als p ist.

Angenommen, es gibt p Mengen in $\mathcal{U}$, deren Durchschnitt – eingeschränkt auf $M \setminus A_p$ – nicht-leer ist, so ist ebendieser Durchschnitt auch im Durchschnitt der nicht eingeschränkten Abschlüsse enthalten und liegt also nach Konstruktion in A_p. Das ist ein Widerspruch.

Nach Induktionsvorraussetzung existiert also eine Verfeinerung der Gestalt $\{V_i^n : i < p,\ n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathcal{U}$, welche $M \setminus A_p$ überdeckt und sodaß $V_i^n \cap V_i^m = \emptyset \,\forall\, i < p \,\forall\, n \neq m$. Zusammen mit der disjunkten Familie $\mathcal{V}_p =: \{V_p^n : n \in \mathbb{N}\}$ bilden diese Mengen dann die gewünschte Verfeinerung von $\mathcal{O}$. □

19.11 Folgerung (Endlicher Atlas). *Jede zusammenhängende, parakompakte, m-dimensionale, glatte Hausdorff Mannigfaltigkeit von Dimension m besitzt einen Atlas mit höchstens $m+1$ Karten.*

Beweis. Sei $\mathcal{O}$ eine offene Überdeckung einer solchen Mannigfaltigkeit M mit Bildern $\varphi(U)$ von Karten $\varphi : U \to M$ mit offenen U im $\mathbb{R}^m$. O.B.d.A. sei $\mathcal{O}$ abzählbar (M ist Lindelöf), d.h.

$$\mathcal{O} = \{\varphi_i(U_i) : i \in \mathbb{N}\},$$

wobei wir die U_i als disjunkt annehmen können. Es gibt (vgl. oben) eine Verfeinerung der Gestalt:

$$\{O_i^n : i \le p,\ n \in \mathbb{N}\},$$

wobei $p \le \dim M + 1$ und für $m \neq n : O_i^n \cap O_i^m = \emptyset$. Zu O_i^n gibt es ein $U_i^n \subseteq \mathbb{R}^m$, vermittels einer gewissen Karte φ_i^n. Wir definieren nun

$$\varphi_i : \begin{cases} \bigcup_n U_i^n \to \bigcup_n O_i^n \\ x \mapsto \varphi_i^n(x) \in O_i^n, \end{cases}$$

falls $x \in U_i^n$. So sind die φ_i Diffeomorphismen, deren Bilder M überdecken, d.h.: $\{\varphi_i : 1 \le i \le p\}$ ist ein C^∞-Atlas. □

Als einfache Folgerung werden wir in (21.13) zeigen, daß jede solche Mannigfaltigkeit bis auf einen Diffeomorphismus als Teilmannigfaltigkeit eines $\mathbb{R}^n$ realisiert werden kann.

III. Tangentialraum

In diesem Kapitel werden wir den Begriff der Ableitung auf Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten übertragen. Da Ableitungen Richtungsvektoren ineinander überführen, wirken sie nicht zwischen den Mannigfaltigkeiten sondern den ebenso zu besprechenden Tangentialräumen. Als Anwendung werden wir dann erste einfache infinitesimale Eigenschaften wie Immersivität und Submersivität von Abbildungen besprechen. Unter zusätzlichen lokalen bis globalen Eigenschaften erhalten wir dann Einbettungen, Faserbündel und als Spezialfall die bereits im ersten Kapitel angerissenen Überlagerungen.

20. Tangentialraum und Derivationen

Die Ableitung $f'(x)$ einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist definiert als die lineare Approximation an $f - f(x)$ im Punkte x. Auf Mannigfaltigkeiten läßt sich das nun nicht ohne weiteres übertragen, denn um von einer linearen Abbildung $f'(x)$ sprechen zu können, muß diese zwischen Vektorräumen (und nicht zwischen Mannigfaltigkeiten wie f es macht) laufen. Wir benötigen also zuallererst eine lineare Approximation an eine Mannigfaltigkeit M im Punkt $x \in M$. Diese soll dann der Definitionsbereich bzw. Wertebereich der linearen Approximation von f bei x werden.

20.1 Satz (Beschreibung des Tangentialraums).
Sei M eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $p \in M$. Dann sind folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ident:

1. $\operatorname{Bild} \varphi'(0)$*, wobei φ eine lokale Parametrisierung von M mit $\varphi(0) = p$ ist.*
2. $\{c'(0) : c : I \to M \text{ glatt}, c(0) = p\}$.
3. $\operatorname{Ker} f'(p)$*, wobei f eine reguläre Gleichung ist, die M lokal um p beschreibt.*
4. $\operatorname{Graph} g'(\bar{p})$*, wobei M lokal um p als Graph der Funktion g beschrieben wird mit $p = (\bar{p}, g(\bar{p}))$.*

Beweis. ($1 \subseteq 2$) Sei $\varphi'(0)(v) \in \operatorname{Bild}(\varphi'(0))$, wobei $v \in \mathbb{R}^n$ ist. Wenn wir die lokal in M glatte Kurve c durch

$$c(t) := \varphi(0 + tv)$$

definieren, erhalten wir $c'(0) = \varphi'(0)(v)$.
($2 \subseteq 3$) Wir betrachten nun ein $c'(0)$ für eine Kurve $c \in C^\infty(I, M)$ mit $c(0) = p$ und eine lokal reguläre Gleichung f für M,

$$f'(\underbrace{p}_{c(0)})(c'(0)) = (\underbrace{f \circ c}_{0})'(0) = 0.$$

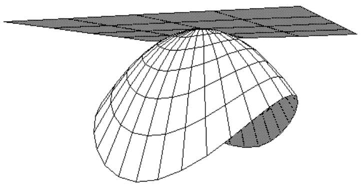
d.h. $c'(0) \in \operatorname{Ker} f'(p)$

($3 \subseteq 1$) Da wir bereits $1 \subseteq 2 \subseteq 3$ gezeigt haben, genügt zu zeigen, daß die Teilräume in (1) und (3) gleiche Dimension haben:

$$\dim \operatorname{Ker} f'(p) = n - \dim \underbrace{\operatorname{Bild} f'(p)}_{\mathbb{R}^{n-m}} = m$$
$$\dim \operatorname{Bild} \varphi'(0) = \dim \mathbb{R}^m = m.$$

($1 = 4$) Eine Parametrisierung von M ist durch $\varphi(u) = (u, g(u))$ gegeben.

$$\operatorname{Bild} \varphi'(\bar p) = \operatorname{Bild}(\mathrm{id}, g'(\bar p)) = \{(v, g'\bar p)(v) : v \in \mathbb{R}^m\} = \operatorname{Graph} g'(\bar p) \qquad \square$$



20.2 Definition (Tangentialraum und Tangentialabbildung)

Den in (20.1) beschriebenen Teilraum des $\mathbb{R}^n$ nennt man den Tangentialraum an M im Punkt p und bezeichnet ihn mit T_pM. Seine Elemente heißen Tangentialvektoren.

Für $f : M \to N$ definiert

$$T_pf : \begin{cases} T_pM \to T_{f(p)}N \\ c'(0) \mapsto (f \circ c)'(0) \text{für } c \in C^\infty(I, M) \text{ mit } c(0) = p \end{cases}$$

die Tangentialabbildung zu f bei $p \in M$. Diese ist linear, denn $(T_pf)(c'(0)) = (f \circ c)'(0) = (\tilde f)'(p)(c'(0))$ also ist $T_pf = (\tilde f)'(p)|_{T_pM}$.

Diese Definition ist sinnvoll, d.h. hängt nicht von der Wahl von c ab, sondern nur von $c'(0)$. Seien c_1 und c_2 zwei solche Kurven mit $c_1'(0) = c_2'(0)$. Zu $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to N \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert eine glatte Abbildung

$$\tilde f : \mathbb{R}^m \overset{\text{offen}}{\supseteq} U(p) \to \mathbb{R}^n \text{ mit} \tilde f|_M = f.$$

Dazu rechnen wir nun:

$$(f \circ c_1)'(0) = (\tilde f \circ c_1)'(0) = \tilde f'(p)(c_1'(0)) =$$
$$= \tilde f'(p)(c_2'(0)) \xlongequal{\text{analog}} (f \circ c_2)'(0).$$

20.3 Beispiel (Quadriken).

Es sei $f : E \to \mathbb{R}$ eine quadratische (d.h. $f(tx) = t^2 f(x)$ und insbesonders $f(0) = 0$) glatte Form und $c \neq 0$. Dann ist die Quadrik $M := f^{-1}(c) = \{x \in E : f(x) = c\}$ eine Teilmannigfaltigkeit von E, denn Differenzieren der Homogenitätsgleichung liefert $f'(tx)(tv) = t^2 f'(x)(v)$, also $f'(tx)(v) = tf'(x)(v)$ und weiters $f''(tx)(tw, v) = tf''(x)(w, v)$, also $f''(x) = f''(tx) = f''(0)$ für $t \to 0$. Somit ist $f(x) = b(x, x)$, wobei $b := \frac{1}{2}f''(0)$ eine symmetrische quadratische Form ist. Die Ableitung von f ist $f'(x)(v) = b(x,v) + b(v,x) = 2b(x,v)$ und somit surjektiv bezüglich v für $x \in M$, denn $2b(x,x) = f(x) = c \neq 0$. Der Tangentialraum von M bei x ist somit $\{v \in E : b(x,v) = 0\} =: v^\perp$.

Ein erstes Beispiel ist die Sphäre als Quadrik $S^n = f^{-1}(1)$, wobei $f(x) := |x|^2$.

Die spezielle lineare Gruppe $SL(E) := \{T \in L(E) : \det(T) = 1\}$ hat als Tangentialraum bei $\mathrm{id} \in SL(E)$ den Teilraum $\{T \in L(E) : 0 = \det'(\mathrm{id})(T) = \mathrm{Spur}(T)\}$ der spurfreien linearen Abbildungen.

Die orthogonale Gruppe $O(E) := \{T \in L(E) : T^tT = \mathrm{id}\}$ hat als Tangentialraum bei id den Teilraum $\{T \in L(E) : 0 = f'(\mathrm{id})(T) = T^t + T\}$ der schiefsymmetrischen (d.h. antiselbstadjungierten) linearen Abbildungen, wobei f die quadratische Form $f(T) := T^tT$ ist.

Allgemeiner ist für eine bilineare nicht-degenerierte Form $b : E \times E \to \mathbb{R}$ der Tangentialraum der Gruppe $O_b(E) := \{T \in L(E) : b(Tx,Ty) = b(x,y) \forall\ x,y \in E\} = \{T \in L(E) : T^tBT = B\}$ (mit $b(x,y) = \langle Bx, y\rangle$) bei id gerade der Teilraum $\{T \in L(E) : T^tB + BT = 0\}$, der bezüglich B schiefsymmetrischen linearen Abbildungen.

Für die in (14.7)-(14.19) behandelten Gruppen G erhalten wir auf entsprechende Weise folgende Beschreibungen des Tangentialraums bei $\mathrm{id} \in G$, woraus wir wieder leicht die Dimension von G ablesen können.

G	$T_{\mathrm{id}}G$	dim
$GL(n)$	$L(n)$	n^2
$GL_{\mathbb{C}}(n)$	$L_{\mathbb{C}}(n)$	$2n^2$
$GL_{\mathbb{H}}(n)$	$L_{\mathbb{H}}(n)$	$4n^2$
$SL(n)$	$\{T \in L(n) : \mathrm{Spur}_{\mathbb{R}}(T) = 0\}$	$n^2 - 1$
$SL_{\mathbb{C}}(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : \mathrm{Spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\}$	$2(n^2 - 1)$
$SL_{\mathbb{H}}(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{H}}(n) : \mathrm{Spur}_{\mathbb{R}}(T) = 0\}$	$4n^2 - 1$
$O(n), SO(n)$	$\{T \in L(n) : T^t + T = 0\}$	$n(n-1)/2$
$O(n,k), SO(n,k)$	$\{T \in L(n) : T^tI_k + I_kT = 0\}$	$n(n-1)/2$
$O_{\mathbb{C}}(n), SO_{\mathbb{C}}(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^t + T = 0\}$	$n(n - 1)$
$U(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^* + T = 0\}$	n^2
$U(n,k)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^*I_k + I_kT = 0\}$	n^2
$SU(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^* + T = 0, \mathrm{Spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\}$	$n^2 - 1$
$SU(n,k)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^*I_k + I_kT = 0, \mathrm{Spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\}$	$n^2 - 1$
$Q(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{H}}(n) : T^* + T = 0\}$	$n(2n + 1)$
$Q(n,k)$	$\{T \in L_{\mathbb{H}}(n) : T^*I_k + I_kT = 0\}$	$n(2n + 1)$
$Q_-(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{H}}(n) : T^*i + iT = 0\}$	$n(2n - 1)$
$Sp(2n)$	$\{T \in L(2n) : T^tJ + JT = 0\}$	$n(2n + 1)$
$Sp_{\mathbb{C}}(2n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(2n) : T^tJ + JT = 0\}$	$2n(2n+1)$

Im Detail bedeutet das z.B. für die $O(n,k)$, daß

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in O(n,k) \subseteq L(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow A^t + A = 0, \quad B^t = C, \quad D^t + D = 0$$

und für die $Sp(2n)$, daß

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2n) \subseteq L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow C^t = C, \quad -A^t = D, \quad B^t = B.$$

20.4 Lemma (Kettenregel). *Für drei Mannigfaltigkeiten M, N, P und zwei glatte Abbildungen f, g mit $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ gilt die Kettenregel:*

$$T_p(g \circ f) = T_{f(p)}g \circ T_p f.$$

Für die Identität $\mathrm{id} : M \to M$ *gilt:*

$$T_p(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T_pM} : T_pM \to T_pM.$$

Sind $f, g : M \to \mathbb{R}$ glatt, so gilt die Produktregel

$$T_p(f \cdot g) = f(p) \cdot T_p g + g(p) \cdot T_p f.$$

Die Tangentialabbildung $T_p f : T_pM \to T_{f(p)}N$ ist linear, für $f \in C^\infty(M, N)$.
Es ist f genau dann ein lokaler Diffeomorphismus um p, wenn $T_p f$ ein Isomorphismus ist.

Beweis. Indem man alle auftretenden Funktionen glatt auf Umgebungen in den umgebenden Vektorräumen erweitert, folgen diese Aussagen sofort aus den klassischen. □

Leider können wir die in (20.1) gegebenen Beschreibungen des Tangentialraums nicht direkt für abstrakte Mannigfaltigkeiten verwenden, da der umgebende Vektorraum wesentlich eingeht. Wir brauchen also noch andere (abstraktere) Beschreibungen. Dazu beachten wir, daß $v \in T_pM$ durch seine Wirkung auf $C^\infty(M, \mathbb{R})$ eindeutig bestimmt st und somit geben wir folgende

20.5 Definition (Derivation)

Eine Abbildung $\partial : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ heißt DERIVATION über x, wenn sie linear ist und die Produktregel erfüllt, d.h. für $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\partial(f + g) = \partial f + \partial g$
2. $\partial(\alpha f) = \alpha \cdot \partial f$
3. $\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g(x) + f(x) \cdot \partial g$

Mit $\mathrm{Der}_p(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge aller Derivationen über $p \in M$. Bezüglich der punktweisen Operationen, ist dies ein Vektorraum.

20.6 Satz (Tangentialvektoren als Derivationen). *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} T_pM \times C^\infty(M,\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ (v,f) &\mapsto (T_pf)(v) \end{aligned}$$

induziert einen linearen Isomorphismus

$$\Phi : \begin{cases} T_pM \to & \mathrm{Der}_p(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \\ v \mapsto & \partial_v\Big(: f \mapsto (T_pf)(v)\Big) \end{cases}$$

Für jedes glatte $f : M \to N$ entspricht der Tangentialabbildung T_xf von f via Φ folgende Zuordnung auf der Seite der Derivation:

$$\begin{tikzcd} T_xM \arrow[r, "\Phi_x"] \arrow[d, "T_xf"'] & \mathrm{Der}_x(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \arrow[d] & \ni & \partial \arrow[d] \\ T_{f(x)}N \arrow[r, "\Phi_{f(x)}"] & \mathrm{Der}_{f(x)}(C^\infty(N,\mathbb{R}),\mathbb{R}) & \ni & (g \mapsto \partial(g\circ f)) = \partial \circ f^* \end{tikzcd}$$

Beweis. Die Abbildung $T_pM \times C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(v,f) \mapsto (T_pf)(v)$ ist klarerweise bilinear, also induziert sie eine lineare Abbildung $T_pM \to L(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ durch $v \mapsto (f \mapsto (T_pf)(v))$. Diese Abbildung hat Werte im Raum der Derivationen über p, denn seien $f,g : M \to \mathbb{R}$ zwei glatte Funktionen und $v \in T_pM$ dann gilt nach der Produktregel (20.4):

$$\partial_v(f\cdot g) = T_p(f\cdot g)(v) = f(p)\cdot(T_pg)(v) + g(p)\cdot(T_pf)(v).$$

Sei $f : M \to N$ glatt und $x \in M$. Dann kommutiert obiges Diagramm, denn für $v \in T_xM$ und $g \in C^\infty(N,\mathbb{R})$ ist $(\Phi_{f(x)} \circ T_xf)(v)(g) = (T_{f(x)}g)((T_xf)(v)) = (T_x(g\circ f))(v) = \partial(g\circ f)$, da $\partial := \Phi_x(v)$ auf $h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ durch $\partial(h) = (T_xh)(v)$ wirkt.

Wir wollen nun die Surjektivität von Φ beweisen:
Sei dazu ∂ eine Derivation von $C^\infty(M,\mathbb{R})$ über $p \in M$.

Wir zeigen zuerst, daß ∂ ein lokaler Operator ist, d.h. der Wert $\partial(f)$ nur von $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ nahe p abhängt.
Seien also $f_1, f_2 \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ mit $f_1 = f_2$ nahe p vorgegeben. Sei $f := f_1 - f_2$ und sei $g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ so gewählt, daß $g(p) = 1$ und daß der Träger von g in der Menge der x mit $f(x) = 0$ enthalten ist. Dann gilt:

$$0 = \partial(0) = \partial(g\cdot f) = \underbrace{g(p)}_{1}\cdot\partial(f) + \underbrace{f(p)}_{0}\cdot\partial(g) = \partial(f).$$

Daraus ergibt sich auch, daß $\partial(f) = 0$ für alle konstanten Funktionen f, denn $\partial(1) = \partial(1\cdot 1) = 1\cdot\partial(1) + \partial(1)\cdot 1$, also $\partial(1) = 0$.

Wir wollen zuerst für den Spezialfall $0 = p \in M = U \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^m$ die Surjektivität von Φ beweisen. Um eine Idee für das Urbild $v \in \mathbb{R}^m$ zu bekommen, beginnen wir umgekehrt mit $v \in T_pM = \mathbb{R}^m$. Sei $(e_i)_{i=1}^m$ die Standardbasis im $\mathbb{R}^m$ ist, dann kann man v in der Basis als $v = \sum_i v^i e_i$ entwickeln. Betrachten wir nun

$$\Phi : T_pM \ni v \mapsto \partial_v \in \operatorname{Der}_p(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R})$$

$$\text{mit } \partial_v(f) := (T_pf)(v) = f'(p)(v) = \sum_{i=1}^m (\partial_i f)(p) \cdot v^i,$$

wobei $\partial_i f$ die i-te partielle Ableitung von f ist, d.h. $(\partial_i f)(p) = \frac{\partial}{\partial t}\big|_0 f(p + te^i) = f'(p)(e^i)$. Also ist die Abbildung ∂_v nichts anderes als "Richtungsabbleitung d_v in Richtung v zu nehmen".

Umgekehrt erhalten wir für $\partial \in \operatorname{Der}_0(C^\infty(U,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ und $f \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ folgendes:

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^1 f'(tx)(x)dt = \int_0^1 \sum_i (\partial_i f)(tx)x^i dt \\ &= \sum_{i=1}^m x^i \underbrace{\int_0^1 (\partial_i f)(tx)dt}_{=:h_i(x)} \text{ für } x \text{ nahe } 0. \end{aligned}$$

und weiters, da ∂ ein lokaler Operator ist,

$$\begin{aligned} \partial(f) &= \partial(f(0)) + \partial\left(\sum_{i=1}^m \operatorname{pr}^i \cdot h_i\right) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^m \left(\partial(\operatorname{pr}^i)\ \underbrace{h_i(0)}_{(\partial_i f)(0)} + \underbrace{\operatorname{pr}^i(0)}_{=0} \cdot \partial(h_i)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \partial(f) = \sum_{i=1}^m \partial\underbrace{(\operatorname{pr}^i)}_{=:v^i} \cdot (\partial_i f)(0) \\ &\Rightarrow \partial_v(f) = \partial(f) \end{aligned}$$

Damit wäre zunächst der Spezialfall bewiesen.

Sei nun allgemein $p \in M$ und sei φ eine lokale Parametrisierung von M in p. Folgendes Diagramm zeigt, daß Φ_p eine Isomorphismus ist:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, equal] & T_0U \arrow[rr, "T_0\varphi", "\cong"'] \arrow[d, "\Phi_0"', "\cong"] & & T_pM \arrow[r, hook] \arrow[d, "\Phi_p"'] & \mathbb{R}^n \\ & \operatorname{Der}_0(C^\infty(U,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \arrow[r, "(\varphi^*)^*", "\cong"'] & \operatorname{Der}_p(C^\infty(\varphi(U),\mathbb{R}),\mathbb{R}) \arrow[r, "(\mathrm{incl}^*)^*", "\cong"'] & \operatorname{Der}_p(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R}) & \end{tikzcd}$$

Dabei ist $T_0\varphi$ ein Isomorphismus nach (20.4); Φ_0 ist einer wegen des Spezialfalls; $(\varphi^*)^* : \partial \mapsto (f \mapsto \delta(f \circ \varphi))$ ist einer, da $\varphi : U \to \varphi(U)$ ein Diffeomorphismus ist; und schließlich ist der rechte untere ein solcher, da Derivationen lokale Operatoren sind; Also ist auch Φ_p ein Isomorphismus, und somit der Satz bewiesen. □

Wir können den Satz (20.6) nun dazu verwenden um den Tangentialraum abstrakter Mannigfaltigkeiten wie folgt zu definieren:

20.7 Definition (Tangentialraum einer abstrakten Mannigfaltigkeit)

Unter dem Tangentialraum einer abstrakten Mannigfaltigkeit M bei p versteht man den Vektorraum

$$T_pM := \mathrm{Der}_p(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R}).$$

Ist $f \in C^\infty(M,N)$ und $p \in M$, dann heißt die durch

$$\partial \mapsto ((T_pf)(\partial) : g \mapsto \partial(g \circ f)) \text{ für } \partial \in T_pM \text{ und } g \in C^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$$

definierte Abbildung $T_pf = (f^*)^* : T_pM \to T_{f(p)}N$, die Tangentialabbildung von M bei p.

20.8 Basen des Tangentialraums

Wenn wir wie für Abbildungen zwischen $\mathbb{R}^m$'s die Ableitung einer Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten als Matrix (also als Jacobimatrix) schreiben wollen so benötigen wir eine Basis. Aber selbst wenn wir im umgebenden Vektorraum eine Basis gewählt haben, so bekommen wir noch lange keine ausgezeichnete Basis des Tangentialraums. Wir können aber wie folgt vorgehen. Sei dazu M eine Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und φ eine Karte von M zentriert bei p. Dann ist $T_0\varphi : T_0\mathbb{R}^m \to T_pM$ ein linearer Isomorphismus nach (20.4) falls M eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist, aber auch im allgemeinen Fall einer abstrakten Mannigfaltigkeit, da (20.4) für diese ganz leicht zu zeigen ist. Die Standardbasis $(e_i)_{i=1}^m$ des $\mathbb{R}^m$ wird durch den Isomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^m \cong \mathrm{Der}_0(C^\infty(U,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ auf die Basis der partiellen Ableitungen $(\partial_i)_{i=1}^m$ in $T_0U = T_0\mathbb{R}^m$ abgebildet. Der Isomorphismus $T_0\varphi$ bildet diese Basis weiter auf eine Basis $(\partial_i^\varphi|_p := T_0\varphi(e_i))_{i=1}^m$ in T_pM ab. Im Fall einer Teilmannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$, sind dies gerade die partiellen Ableitungen $(T_0\varphi)(e_i) = (\partial_i\varphi)(0) = \varphi'(0)(e_i)$ der Parametrisierung φ. Seien $(u^1,\dots,u^m) := \varphi^{-1}$ die zu φ gehörenden lokalen Koordinaten, dann bezeichnen wir $\partial_i^\varphi|_p \in T_pM = \mathrm{Der}_p(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ auch als $\frac{\partial}{\partial u^i}\big|_p$. Es drückt die Schreibweise ∂_i^φ zwar deutlicher aus, daß diese Derivation von der Karte φ abhängt und nicht, wie man der Bezeichnungsweise $\frac{\partial}{\partial u^i}$ fälschlicherweise entnehmen könnte, nur von der i-ten Komponente u^i der Umkehrfunktion $\varphi^{-1} = (u^1,\dots,u^m)$. Die Bezeichnung $\frac{\partial}{\partial u^i}$ ist allerdings die üblichere und macht auch keine Probleme, falls man sie nur als $\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_i$ und nicht als $\frac{\partial}{\partial(u^i)}$ interpretiert. Es gilt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_p\right)(f) = (T_0\varphi)(\partial_i|0)(f) = \partial_i(f \circ \varphi)(0).$$

Also wirkt $\frac{\partial}{\partial u^i}\big|_p$ auf f durch partielles Ableiten der Kartendarstellung $f \circ \varphi$ von f in die i-te Richtung e_i. Ist φ nicht bei p zentriert, dann ist

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_p (f) = \partial_i^\varphi|_p(f) = \partial_i(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) \text{ für } f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$$

und insbesonders ist

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_p (u^j) = \partial_i(u^j \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) = \partial_i(\mathrm{pr}^j)(0) = \delta_i^j.$$

20.9 Transformationsverhalten von Tangentialvektoren

Sei nun $g \in C^\infty(M,N)$ und seien $\varphi^{-1} = u = (u^1,\dots,u^m)$ lokale Koordinaten von M bei p, ebenso seien $\psi^{-1} = v = (v^1,\dots,v^n)$ lokale Koordinaten von N bei $g(p)$. Wir wissen, daß $T_pg : T_pM \to T_{g(p)}N$ linear ist und $(\frac{\partial}{\partial u^i}\big|_p)$ eine Basis von T_pM sowie $(\frac{\partial}{\partial v^i}\big|_{f(p)})$ eine von $T_{f(p)}N$ ist. Wie sieht nun die Matrixdarstellung $[T_pg]$ von T_pg bezüglich dieser Basen?

Da nach Definition von T_pg und wegen (20.6) das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m \arrow[r, "(\bar g)'(0)"] \arrow[d, "\Phi"', "\cong"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\Phi"', "\cong"] \\
\mathrm{Der}_0(C^\infty(U,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \arrow[r, "T_0\bar g"] \arrow[d, "T_0\varphi"', "\cong"] & \mathrm{Der}_0(C^\infty(V,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \arrow[d, "T_0\psi"', "\cong"] \\
\mathrm{Der}_p(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \arrow[r, "T_pg"] & \mathrm{Der}_{g(p)}(C^\infty(N,\mathbb{R}),\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

werden die entsprechenden Basen wie folgt abgebildet:

$$\begin{tikzcd}
e_i \arrow[r, "(\bar g)'(0)"] \arrow[d, "\Phi"', "\cong"] & \bar g'(0)(e_i) \arrow[r, equal] & \sum_j \partial_i \bar g^j(0)\cdot e_j \arrow[d, "\Phi"', "\cong"] \\
\partial_i \arrow[r, "T_0\bar g"] \arrow[d, "T_0\varphi"', "\cong"] & (T_0\bar g)(\partial_i) \arrow[r, equal] & \sum_j \partial_i \bar g^j(0)\cdot \partial_j \arrow[d, "T_0\psi"', "\cong"] \\
\partial_i^\varphi \arrow[r, "T_pg"] & (T_pg)(\partial_i^\varphi) \arrow[r, equal] & \sum_j \partial_i \bar g^j(0)\cdot \partial_j^\psi
\end{tikzcd}$$

Für die Komponenten von Tangentialvektoren erhalten wir also folgendes: Es sei $\xi = \sum_i \xi^i \partial_i^\varphi \in T_pM$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(T_pg)(\xi) &= (T_pg)\Big(\sum_i \xi^i \cdot \partial_i^\varphi\Big) \\
&= \sum_i \xi^i \cdot (T_pg)(\partial_i^\varphi) = \sum_i \xi^i \cdot \sum_j \partial_i \bar g^j(0)\cdot \partial_j^\psi \\
&= \sum_j \Big(\sum_i \xi^i \cdot \partial_i \bar g^j(0)\Big)\cdot \partial_j^\psi
\end{aligned}$$

Die Komponenten von $\eta = \sum_j \eta^j \partial_j^\psi := (T_pg)(\xi) \in T_{g(p)}N$ sind somit durch

$$\eta^j = \sum_i \xi^i \cdot \partial_i \bar g^j(0)$$

geben, bzw. in Matrizen-Schreibweise

$$\begin{pmatrix}\eta^1\\ \vdots \\ \eta^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_1\bar g^1(0) & \dots & \partial_m \bar g^1(0)\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \bar g^n(0) & \dots & \partial_m \bar g^n(0)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi^1\\ \vdots\\ \xi^m\end{pmatrix},$$

also gerade durch Multiplikation mit der Jacobi-Matrix der Koordinatendarstellung $\bar{g} = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ von g.

Wählen wir insbesonders $g = \mathrm{id}_M$ und zwei Karten φ und ψ zentriert bei $p \in M$. Dann ist g der Kartenwechsel von den Koordinaten $(u^1, \dots, u^m) := \varphi^{-1}$ zu den Koordinaten $(v^1, \dots, v^m) = \psi^{-1}$. Wenn wir die Formel $(T_p g)(\partial_i^\varphi) = \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot \partial_j^\psi$ formal als Multiplikation von Matrizen auffassen, dann ist

$$\begin{pmatrix} \partial_1^\varphi \\ \vdots \\ \partial_m^\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \bar{g}^1(0) & \dots & \partial_1 \bar{g}^m(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_m \bar{g}^1(0) & \dots & \partial_m \bar{g}^m(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1^\psi \\ \vdots \\ \partial_m^\psi \end{pmatrix}$$

also erhalten wir die Basis (∂_i^φ) aus der Basis (∂_j^ψ) indem wir mit der transponierten Jacobimatrix des inversen Kartenwechsels von φ zu ψ multiplizieren.

Wenn wie nun $\frac{\partial}{\partial u^i} := \partial_i^\varphi$, $\frac{\partial}{\partial v^j} := \partial_j^\psi$ und $\frac{\partial f}{\partial u^i} := \frac{\partial}{\partial u^i} f$ setzen und beachten, daß $(\partial_i^\varphi)|_p(f) = \partial_i(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p))$ ist und somit

$$\partial_i(\bar{g}^j)(0) = \partial_i((\psi^{-1} \circ g \circ \varphi)^j)(\varphi^{-1}(p)) = \partial_i(v^j \circ g \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) = \partial_i^\varphi(v^j \circ g)(p)$$

gilt, dann besagt obige Formel, daß

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_j \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial}{\partial v^j}$$

bzw. in Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial v^m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial u^m}{\partial v^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u^1}{\partial v^m} & \dots & \frac{\partial u^m}{\partial v^m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u^m} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial v^1}{\partial u^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v^m}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial v^m}{\partial u^m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^m \end{pmatrix}.$$

20.10 Beispiel

Sei $M = \mathbb{R}^3$. Wir wählen 3 verschiedene Koordinatensysteme:

(1) Kartesischen Koordinaten x, y, z mit zugehörigen Basisvektoren: $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$.

(2) Zylinderkoordinaten r, φ, z mit zugehörigen Basisvektoren: $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial}{\partial z}$.

(3) Kugelkoordinaten R, φ, ψ mit zugehörigen Basisvektoren: $\frac{\partial}{\partial R}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial}{\partial \psi}$.

Für den Kartenwechsel und die Jacobimatrizen der Kartenwechsel erhalten wir für (2) $\to$ (1): $x = r \cdot \cos\varphi, y = r \cdot \sin\varphi, z = z$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r \cdot \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r \cdot \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

für (3) → (2): $r = R \cdot \cos\psi$, $z = R \cdot \sin\psi$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{\partial r}{\partial \varphi} & \frac{\partial r}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial R} & \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -R\cdot\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & R\cdot\cos\psi \end{pmatrix},$$

und schließlich für (1) → (3) : $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi = \arctan(y/x)$, $\psi = \arccos(z/y)$. Das Ausrechnen der Jacobimatrizen des Kartenwechsels überlassen wir dem Leser als Übung.

Es gibt auch die Möglichkeit, den Tangentialraum einer abstrakten Mannigfaltigkeit geometrischer zu beschreiben.

20.11 Lemma (Tangentialvektoren via Kurven).
Sei $C^\infty_x(\mathbb{R}, M) := \{c \in C^\infty(\mathbb{R}, M) : c(0) = x\}$ *die Menge der glatten Kurven durch* $x \in M$. *Für eine solche glatte Kurve* c *und eine glatte Funktion* $f : M \to \mathbb{R}$ *sei* $\partial_c(f) := (f \circ c)'(0)$. *Dann definiert* $c \mapsto \partial_c$ *eine surjektive Abbildung*

$$\partial : C^\infty_x(M,\mathbb{R}) \to \operatorname{Der}_x(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R}).$$

Wir können also T_xM *mit* $C^\infty_x(M,\mathbb{R})/\sim$ *identifizieren, wobei* $\sim$ *folgende Äquivalenzrelation auf* $C^\infty_x(M,\mathbb{R})$ *ist:*

$$c_1 \sim c_2 \quad :\Leftrightarrow \quad (f\circ c_1)'(0) = (f \circ c_2)'(0).$$

Die Tangentialabbildung einer glatten Funktion $g : M \to N$ *sieht in dieser Beschreibung so aus:*

$$(T_xg)(\partial_c) = \partial_{g\circ c}.$$

Dies entspricht also der Beschreibung von T_xM für Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ in (2) von (20.1). Sie hat allerdings den Nachteil, die Vektorraumstruktur von T_pM nicht erkennen zu lassen.

Beweis. Die folgende Rechnung zeigt, daß ∂_c eine Derivation über x ist:

$$\begin{aligned}
\partial_c(f+g) &= \Big((f+g)\circ c\Big)'(0) = \Big((f\circ c) + (g \circ c)\Big)'(0) \\
&= (f\circ c)'(0) + (g\circ c)'(0) = \partial_c f + \partial_c g \\
\partial_c(\lambda f) &= \Big((\lambda f)\circ c\Big)'(0) = \Big(\lambda(f\circ c)\Big)'(0) \\
&= \lambda (f\circ c)'(0) = \lambda \cdot \partial_c f \\
\partial_c(f\cdot g) &= \Big((f\cdot g)\circ c\Big)'(0) = \Big((f\circ c)\cdot(g\circ c)\Big)'(0) \\
&= (f\circ c)'(0)\cdot(g\circ c)(0) + (f\circ c)(0)\cdot(g\circ c)'(0) \\
&= (\partial_c f)\cdot g(x) + (\partial_c g)\cdot f(x)
\end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß die Zuordnung $c \mapsto \partial_c$ surjektiv ist, wählen wir lokale Koordinaten $\varphi^{-1} = (u^1,\dots,u^m)$ zentriert um $x \in M$. Jedes Element von $T_xM = \operatorname{Der}_x(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ hat dann die Gestalt $\sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. Wir definieren nun eine (lokale) Kurve $c : \mathbb{R} \to M$ durch $c(t) := \varphi(t\xi^1,\dots,t\xi^m)$, d.h. $u^i(c(t)) := t\xi^i$ für $i = 1,\dots,m$, dann gilt für $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}(f\circ c)'(0) &= \Big((f\circ\varphi)\circ(\varphi^{-1}\circ c)\Big)'(0) = (f\circ\varphi)'(0)\Big((\varphi^{-1}\circ c)'(0)\Big)\\ &= (f\circ\varphi)'(0)(\xi^1,\dots,\xi^m) = \sum_{i=1}^m \partial_i(f\circ\varphi)(0)\xi^i\\ &= \sum_{i=1}^m \tfrac{\partial}{\partial u^i}(f)\xi^i = \sum_{i=1}^m \xi^i\tfrac{\partial}{\partial u^i}(f).\end{aligned}$$

Somit ist ∂_c das vorgegebene Element von T_xM, mit dem einzigen Schönheitsfehler, daß c nur lokal definiert ist. Da aber obige Rechnung nur vom Aussehen von c nahe 0 abhängt, können wir c so umparametrisieren, daß sich nahe 0 nichts ändert, aber $c(t)$ ganz in $\mathrm{Dom}(\varphi)$ bleibt.

Daß T_xg die angegebene Gestalt hat ergibt sich sofort aus:

$$\begin{aligned}\Big((T_xg)(\partial_c)\Big)(f) &= \partial_c(f\circ g) = \Big((f\circ g)\circ c\Big)'(0)\\ &= \Big(f\circ(g\circ c)\Big)'(0) = \partial_{g\circ c}(f). \qquad \square\end{aligned}$$

Vor allem unter Physikern ist auch folgende Beschreibung des Tangentialraums üblich:

20.12 Lemma (Tangentialvektoren via Koordinaten). *Für jede lokale Parametrisierung φ von M zentriert um x seien die Koordinaten $(\xi^i_\varphi)_{i=1}^m$ eines Vektors $\xi_\varphi \in \mathbb{R}^m$ so vorgegeben, daß sie sich richtig transformieren, d.h. für je zwei Karten φ_1 und φ_2 mit Kartenwechsel $\psi = \varphi_2^{-1}\circ\varphi_1$ gelte $\xi_{\varphi_2} = \psi'(0)\xi_{\varphi_1}$, oder in Koordinaten $\xi^i_{\varphi_2} = \sum_{j=1}^m \partial_j\psi^i(0)\xi^j_{\varphi_1}$. Dann entspricht diesem Koordinaten-Schema ein eindeutiger Tangentialvektor in T_pM und umgekehrt.*

Ist $g: M\to N$ eine glatte Funktion, so bildet T_xf solch ein Schema $\xi_\varphi\in\mathbb{R}^m$ auf das Schema $\eta_\psi \in \mathbb{R}^n$ ab, mit $\eta_\psi = (\psi^{-1}\circ f\circ\varphi)'(0)(\xi_\varphi)$.

Beweis. Sei $\xi_\varphi \in \mathbb{R}^m$ für eine lokale Parametrisierung φ vorgegeben und seien $(u^1,\dots,u^m) := \varphi^{-1}$ die zugehörigen lokalen Koordinaten. Dann definieren wir eine Derivation $\partial_\xi \in T_xM$ durch $\partial_\xi := \sum_{i=1}^m \xi^i_\varphi \frac{\partial}{\partial u^i}$. Diese Definition macht Sinn, d.h. ist unabhängig von der Wahl der Karte φ, denn die ξ_φ transformieren sich genauso wie die Koeffizienten einer Derivation bezüglich der Basen $(\frac{\partial}{\partial u^i})$.

Umgekehrt bilden die Koeffizienten ξ^i_φ einer Derivation $\partial \in T_xM$ bezüglich der zu $\varphi = (u^1,\dots,u^m)^{-1}$ gehörenden Basis $(\frac{\partial}{\partial u^i})$, genau ein richtig transformierendes Koordinaten-Schema.

Daß T_xg diese Schemata auf angegebene Weise abbildet, folgt sofort aus der Koordinatendarstellung von T_xf bezüglich der Basen $(\frac{\partial}{\partial u^i})$ und $(\frac{\partial}{\partial v^j})$ von T_xM und $T_{g(x)}N$. $\square$

21. Immersionen

Wir wollen in den verbleibenden Abschnitten dieses Kapitels die Tangentialabbildung verwenden, um spezielle Eigenschaften von glatten Abbildungen zu studieren. Insbesondere interessieren wir uns für den richtigen Begriff von "Unterobjekten" sowie "Quotientenobjekten" von Mannigfaltigkeiten.

21.1 Definition (Immersionen und Submersionen)

Es sei $f \in C^\infty(M,N)$, wo M, N Mannigfaltigkeiten sind. Dann heißt:

$$\begin{aligned} f \text{ regulär } &:\Leftrightarrow \operatorname{rang}(T_x f) \text{ ist maximal } \forall\ x \in M; \\ f \text{ immersiv } &:\Leftrightarrow T_x f \text{ ist injektiv } \forall\ x \in M; \\ f \text{ submersiv } &:\Leftrightarrow T_x f \text{ ist surjektiv } \forall\ x \in M. \end{aligned}$$

Man beachte, daß eine Abbildung genau dann immersiv ist, wenn sie regulär ist und $\dim M \le \dim N$ gilt. Ebenso ist sie genau dann submersiv, wenn sie regulär ist und $\dim M \ge \dim N$ gilt.

21.2 Rangsatz. *Es sei $f \in C^\infty(M,N)$ und sei $\operatorname{rang} T_x f = r \ \ \forall\ x \in M$.*
Dann existiert eine Karte φ um x und eine Karte ψ um $f(x)$, sodaß die lokal definierte Abbildung:

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r} \to \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$$

die Gestalt $(x,y) \mapsto (x,0)$ hat.

Beweis. O.B.d.A. sei $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$, $x = 0$ und $f(x) = 0$. Es sei $F_1 := \operatorname{Bild}(f'(0))$, $F_2 := F_1^\perp$, $E_2 := \operatorname{Ker}(f'(0))$ und $E_1 := E_0^\perp$. Es ist $r = \operatorname{rang} f'(0) = \dim(F_1)$ und somit $\dim(E_1) := m - \dim(E_2) = \dim(F_1)$ und die Komponenten-Darstellung von $f'(0) : E_1 \oplus E_2 \to F_1 \oplus F_2$ hat folgende Gestalt:

$$f'(0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mit invertierbaren $A \in L(E_1, F_1)$. Wenn wir $f = (f_1, f_2)$ schreiben, dann ist $A = \partial_1 f_1(0,0)$. Wir betrachten nun die glatte Funktion $F : E_1 \oplus E_2 \to F_1 \oplus E_2$ gegeben durch:

$$F : (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1, x_2), x_2).$$

Dann sieht die Jacobi-Matrix von F in 0 wie folgt aus:

$$F'(0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(0,0) & \partial_1 f_2(0,0) \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}$$

also ist $F'(0)$ invertierbar und wegen den inversen Funktionen Satz (10.2) ist F ein lokaler Diffeomorphismus. Sei φ der zu F inverse lokale Diffeomorphismus und sei $g := f \circ \varphi$, dann hat $g = (g_1, g_2) = f \circ F^{-1}$ folgende Gestalt:

$$g(y_1, y_2) = (y_1, g_1(y_1, y_2)).$$

Denn

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2) := F^{-1}(y_1, y_2) \Rightarrow \\ y = (y_1, y_2) = F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), x_2) \Rightarrow \\ y_1 = f_1(x_1, x_2) = (f_1(F^{-1}(y_1, y_2))) = g_1(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Weiters gilt $\operatorname{Rang} g'(y) = \operatorname{Rang} f'(\varphi(y)) = r$, da φ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Also ist in der Komponenten-Darstellung von $g'(y)$

$$g'(y) = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ \partial_1 g_2 & \partial_2 g_2 \end{pmatrix}$$

die rechte untere Ecke $\partial_2 g_2 = 0$ und somit $g_2(y_1, y_2) = g_2(y_1, 0)$. Sei $\psi^{-1} : F_1 \oplus F_2 \to F_1 \oplus F_2$ definiert durch

$$\psi^{-1}(y_1, y_2) = (y_1, y_2 - g_2(y_1, 0)).$$

Dann ist die Komponenten-Darstellung von $(\psi^{-1})'(x)$ gegeben durch

$$(\psi^{-1})'(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ \partial_1 g_2(y_1, y_2) & \mathrm{id} \end{pmatrix}$$

und somit ψ^{-1} ein lokaler Diffeomorphismus, also wirklich das Inverse eines ψ. Weiters gilt

$$\begin{aligned} (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)(x_1, x_2) &= \psi^{-1}(y_1, g_2(x_1, x_2)) \\ &= (x_1, g_2(x_1, x_2) - g_2(x_1, 0)) = (x_1, 0) \qquad \square \end{aligned}$$

21.3 Folgerung (Charakterisierung von Diffeomorphismen). *Für glatte Abbildungen f gilt:*

$$f \text{ ist Diffeomorphismus } \Leftrightarrow f \text{ und alle } T_x f \text{ sind bijektiv.}$$

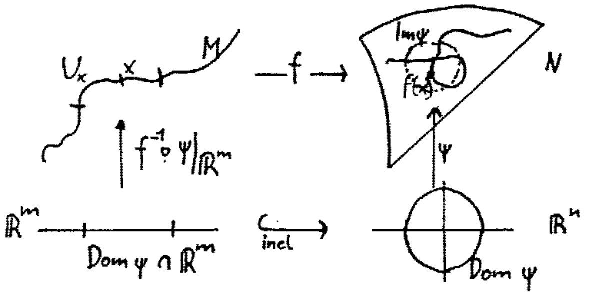
Beweis. ($\Rightarrow$) Die Abbildung f ist klarerweise bijektiv. Daß auch $T_x f$ bijektiv ist, haben wir in (20.4) bereits gezeigt.

($\Leftarrow$) Die Abbildung $g := f^{-1}$ ist wohldefiniert und stetig, da f als lokaler Diffeomorphismus offen ist. Nach dem Rangsatz existieren also Karten φ und ψ um x bzw. $f(x)$, sodaß $f(\operatorname{Im}(\varphi)) \subseteq \operatorname{Im}(\psi)$ und $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi = \mathrm{id}$. Es kann O.B.d.A. folglich $\operatorname{Dom}\psi = \operatorname{Dom}\varphi$ gewählt werden.

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Bild}\varphi \arrow[r, "f"] & \operatorname{Bild}\psi & \\ \mathbb{R}^m & \operatorname{Dom}\varphi \arrow[l, hook'] \arrow[u, "\varphi", "\cong"'] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \operatorname{Dom}\psi \arrow[u, "\psi"', "\cong"] \arrow[r, hook] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Somit ist $z \mapsto f^{-1}(z) = (\varphi \circ \psi^{-1})(z)$ glatt auf $\operatorname{Bild}\psi$ und f ein Diffeomorphismus, da ψ^{-1} eingeschränkt auf $\operatorname{Bild}\varphi$ einer ist. $\square$

21.4 Proposition (Charakterisierung von Immersionen).
Sei $f \in C^\infty(M, N)$, dann ist f immersiv $\Leftrightarrow \forall\, x \in M\ \exists\, U_x$ offen in M und eine Karte ψ zentriert bei $f(x)$ in N, sodaß $f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \operatorname{Dom}\psi \cap \mathbb{R}^m \to U_x$ ein wohldefinierter Diffeomorphismus (und somit eine Karte von M) ist.



Beweis. Man bemerke zuerst, daß

$$f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \operatorname{Dom}\psi \cap \mathbb{R}^m \to U_x$$

genau dann eine wohldefinierte Bijektion ist, falls $f|_{U_x}$ injektiv ist und

$$\psi(\mathbb{R}^m) = \operatorname{Bild}\psi \cap f(U_x).$$

Es ist dann

$$(f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1} = \psi^{-1} \circ f|_{U_x}.$$

($\Leftarrow$) Zu zeigen ist, daß $T_x f$ injektiv ist. Die Kartendarstellung von f bezüglich der Karte $f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m}$ von M um x und der Karte ψ von N um $f(x)$ ist aber gerade die Inklusion $\operatorname{incl} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, also immersiv.

($\Rightarrow$) Der Rangsatz impliziert, daß Karten φ und ψ existieren, s.d. lokal

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi = \operatorname{incl} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

Insbesonders ist $f \circ \varphi = \psi|_{\mathbb{R}^m}$. Sei $\operatorname{Dom}\varphi$ so klein gewählt, daß $f(\operatorname{Bild}\varphi) \subseteq \operatorname{Bild}\psi$ und sei $U_x = \varphi(\operatorname{Dom}\varphi)$. Dann ist $f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} = \varphi$ also ein wohldefinierter Diffeomorphismus.

$$\psi|_{\mathbb{R}^m} = \psi \circ \operatorname{incl} = f \circ \varphi \Rightarrow f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} = f|_{U_x}^{-1} \circ f \circ \varphi = \varphi. \qquad \square$$

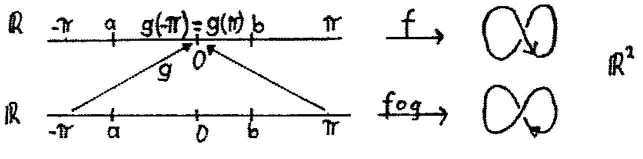
21.5 Folgerung. *Es sei $f \in C^\infty(M,N)$ eine Immersion und $g : P \to M$ eine stetige Abbildung mit $f \circ g \in C^\infty(P,N)$.*
$\Rightarrow$ g ist selbst glatt. $\square$

21.6 Bemerkungen

(1) Dabei ist die Stetigkeit von g wesentlich: Sei nämlich $g : \,]-\pi,\pi[\, \to \,]-\pi,\pi[$, definiert durch

$$g : t \mapsto \begin{cases} \pi - t & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \\ -\pi - t & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

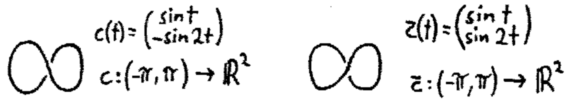
und $f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(t) := (\sin t, -\sin 2t)$



Dann ist $f \circ g$ glatt, aber g ist nicht stetig, ergo auch nicht glatt.

(2) Eine Mannigfaltigkeit M, die Teilmenge einer Mannigfaltigkeit N ist, heißt IMMERSIVE TEILMANNIGFALTIGKEIT, falls die Inklusion incl : $M \to N$ eine Immersion ist. Eine immersive Teilmannigfaltigkeit ist im allgemeinen keine Teilmannigfaltigkeit, wohl aber umgekehrt. (Siehe auch Einbettungen.) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ist injektive Immersion, aber $f(\mathbb{R})$ ist keine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

Die Mannigfaltigkeitsstruktur einer immersiven Teilmannigfaltigkeit ist im allgemeinen nicht durch die von N festgelegt. Seien $c_1, c_2 : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $c_1(t) := (\sin t, -\sin 2t)$ und $c_2(t) := (\sin t, \sin 2t)$. Dann erzeugen sie verschiedene Mannigfaltigkeitsstrukturen.



21.7 Definition (Initiale und finale Abbildungen)

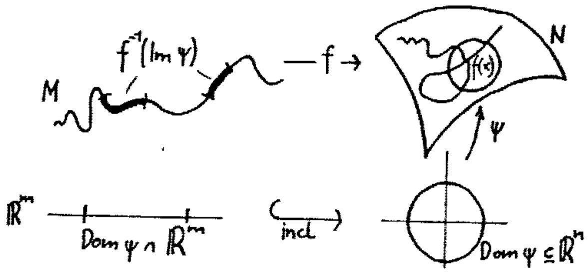
Sei $f \in C^\infty(M, N)$. Die Abbildung f heißt INITIAL :$\Leftrightarrow$ für jede Abbildung $g : P \to M$ mit der Eigenschaft, daß $f \circ g$ glatt ist, g selbst glatt ist.

Die Abbildung f heißt FINAL :$\Leftrightarrow$ für jedes $g : N \to P$ mit der Eigenschaft, daß $g \circ f$ glatt ist, g selbst glatt ist.

21.8 Satz (Charakterisierung initialer Immersionen).
Sei $f : M \to N$ glatt. Dann ist f eine initiale Immersion $\Leftrightarrow$ für jedes $x \in M$ existiert eine Karte ψ zentriert um $f(x) \in N$, sodaß

$$f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \operatorname{Dom} \psi \cap \mathbb{R}^m \to f^{-1}(C^\infty\text{-}\mathrm{Wegkomp}_{f(x)}(\operatorname{Bild} f \cap \operatorname{Bild} \psi))$$

ein wohldefinierter Diffeomorphismus ist.
*Dabei sei C^∞-*Wegkomp$_x(A) := \{c(1) :\ c \in C^\infty(\mathbb{R}, A)$ *mit* $c(0) = x\}$ *für* $A \subseteq N$.



Beweis. Man bemerke zuerst, daß

$$f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \operatorname{Dom} \psi \cap \mathbb{R}^m \to f^{-1}(C^\infty\text{-}\mathrm{Wegkomp}_{f(x)}(\operatorname{Bild} f \cap \operatorname{Bild} \psi))$$

genau dann eine wohldefinierte Bijektion ist, wenn f injektiv ist und $\psi(\mathbb{R}^m) = C^\infty\text{-}\mathrm{Wegkomp}_{f(x)}(\operatorname{Bild} f \cap \operatorname{Bild} \psi)$ gilt.

($\Leftarrow$) Wir beweisen zuerst, daß f Immersion ist, dabei es genügt zu zeigen:

$$U_x := f^{-1}(C^\infty\text{-}\mathrm{Wegkomp}_{f(x)}(\operatorname{Bild} f \cap \operatorname{Bild} \psi)) \subseteq M \text{ ist offen}$$

(wegen der Charakterisierung von Immersionen).
Sei $x \in f^{-1}(C^\infty\text{- Wegkomp}_{f(x)}(\operatorname{Bild} f \cap \operatorname{Bild}\psi))$. Wir zeigen, daß die offene Umgebung $C^\infty\text{- Wegkomp}_x(f^{-1}(\operatorname{Bild}\psi))$ in dieser Menge enthalten ist. Sei dazu $y \in C^\infty\text{- Wegkomp}_x(f^{-1}(\operatorname{Bild}\psi))$, d.h. eine glatte Kurve $c : \mathbb{R} \to f^{-1}(\operatorname{Bild}\psi)$ existiert mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$. Die Abbildung $f \circ c : \mathbb{R} \to \operatorname{Bild}\psi \cap \operatorname{Bild} f$ ist glatt, und es gilt

$$(f \circ c)(0) = f(x) \in C^\infty\text{- Wegkomp}_{f(x)}(\operatorname{Bild} f \cap \operatorname{Bild}\psi).$$

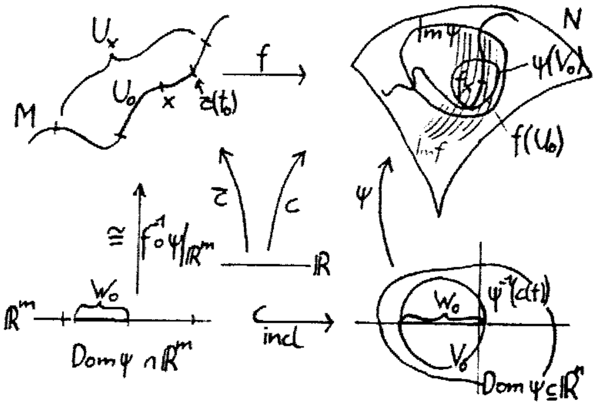
Wir zeigen nun, daß f initial ist. Sei dazu $g : P \to M$ sodaß $f \circ g$ glatt ist. Dann ist zu zeigen, g ist stetig, denn dann ist g glatt wegen (21.5). Sei dazu $p \in P$ und ψ Karte um $(f \circ g)(p)$ wie oben. Wir wählen eine C^∞-wegzusammenhängende Umgebung U_p um p mit $U_p \subseteq (f \circ g)^{-1}(\operatorname{Bild}\psi)$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (f \circ g)(U_p) \subseteq \operatorname{Bild}\psi \cap \operatorname{Bild} f,\ C^\infty\text{-wegzusammenhängend}\\
&\Rightarrow (f \circ g)(U_p) \subseteq C^\infty\text{- Wegkomp}_{f(g(p))}(\operatorname{Bild} f \cap \operatorname{Bild}\psi)\\
&\Rightarrow \psi^{-1} \circ f \circ g = \operatorname{incl} \circ (f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1} \circ g \text{ ist stetig,}\\
&\text{also auch } (f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1} \circ g|_{U_p}
\end{aligned}$$

und somit $g|_{U_p}$, da

$$g(U_p) \subseteq \operatorname{Bild}(f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m}) = f^{-1}(C^\infty\text{- Wegkomp}_{fg_p}(\operatorname{Bild} f \cap \operatorname{Bild}\psi))$$

und $f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m}$ Homöomorphismen sind.
($\Rightarrow$) Sei f eine Immersion. Dann existiert ein $U_x \subseteq M$ offen und eine Karte ψ um $f(x)$ mit der Eigenschaft für Immersionen, d.h. $(f|_{U_x})^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \operatorname{Dom}\psi \cap \mathbb{R}^m \to U_x$ ist ein Diffeomorphismus. Wir wollen U_x und $\operatorname{Bild}\psi$ so verkleinern, daß $U_x = f^{-1}(C^\infty\text{- Wegkomp}_{f(x)}(\operatorname{Bild} f \cap \operatorname{Bild}\psi))$ wird.



Wir wählen dazu eine offene Umgebung U_0 von x_0 in M, welche $\overline{U_0} \subseteq U_x$ erfüllt.
Sei $W_0 := (f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}(U_0) \subseteq \mathbb{R}^m$. Dann ist W_0 offen und sei $V_0 \subseteq \operatorname{Dom}\psi$ so gewählt, daß $W_0 = V_0 \cap \mathbb{R}^m$. Weil f injektiv ist, genügt es zu zeigen, daß

$$f(U_0) = C^\infty\text{- Wegkomp}_{f(x)}(\operatorname{Bild} f \cap \psi(V_0)).$$

($\subseteq$) Folgt unmittelbar aus $f(U_0) \subseteq \operatorname{Bild} f$ und $f(U_0) = \psi(W_0) \subseteq \psi(V_0)$, weil $f(U_0)$ C^∞-wegzusammenhängend ist.

($\supseteq$) Sei $c : \mathbb{R} \to \operatorname{Bild} f \cap \psi(V_0)$ und $c(0) = f(x)$; dann ist zu zeigen:

$$c(1) \in f(U_0).$$

Wir definieren $\bar{c} := (f|_{U_x})^{-1} \circ c : \mathbb{R} \to M$. Da f eine initiale Immersion ist folgt, daß $\bar{c}$ glatt ist. Es genügt zu zeigen: $\bar{c}([0,1]) \subseteq U_0$. Angenommen: $\bar{c}([0,1]) \not\subseteq U_0$. Wegen $\bar{c}(0) = x$ kann $t_0 > 0$ minimal gewählt werden, sodaß $\bar{c}(t_0) \notin U_0$, d.h. für $t < t_0$ ist $\bar{c}(t) \in U_0$ und damit $\bar{c}(t_0) \in U_0^- \subseteq U_x$. Somit ist $(((f|_{U_x})^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1} \circ \bar{c})(t) \in (f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}(U_0) = W_0$ für $t < t_0$ aber nicht für $t = t_0$.
Andererseits gilt $((f|_{U_x})^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}(\bar{c}(t)) = \psi^{-1}(c(t)) \in V_0$ für alle $t \le t_0$ und damit ist $((f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1} \circ \bar{c})(t_0) \in V_0 \cap \mathbb{R}^m = W_0$, ein Widerspruch. □

21.9 Bemerkungen

1. In dieser Situation (d.h. falls es eine initiale Immersion $f : M \to N$ gibt) ist die Mannigfaltigkeitsstruktur auf M eindeutig durch jene auf N bestimmt. Eine Teilmenge M von N mit obiger Eigenschaft trägt eine eindeutige Mannigfaltigkeitsstruktur, sodaß $\mathrm{incl} : M \to N$ eine initiale Immersion wird, M heißt initiale Teilmannigfaltigkeit.
2. Jede initiale C^∞-Abbildung ist injektiv. (Das wurde auch oben im Satz verwendet.) Sei f initial, $f(x) = f(y)$, $x \neq y$; $g(t) = x$ für $t > 0$, $g(t) = y$ sonst, so ist g nicht stetig, aber $f \circ g$ ist konstant, also $C^\infty \Rightarrow g$ ist C^∞ (Widerspruch)!
3. In [**40**] wurde bewiesen, daß $f : t \to (t^2, t^3)$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine initiale C^∞-Abbildung ist. Sie ist aber klarerweise nicht immersiv, da $f'(0) = (0, 0)$.
4. Ein wichtiges Beispiel einer initialen Teilmannigfaltigkeit ist eine nichtperiodische Spirallinie auf dem Torus $S^1 \times S^1$ gegeben durch

$$f : t \mapsto (\exp(2\pi i t), \exp(2\pi i \alpha t))$$

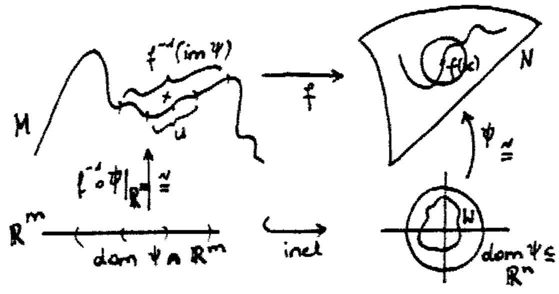
   mit irrationalem Anstieg α.
   Hier zeigt sich, daß eine initiale Teilmannigfaltigkeit nicht die Spurtopologie tragen muß. Denn kein offene Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gibt es ein offenes $U \subseteq S^1 \times S^1$, sodaß $I = f^{-1}(U)$ (äquivalent $f(I) = U \cap \operatorname{Bild}(f)$), da $f(t)$ immer wieder in U liegt für $t \to \pm\infty$. Das motiviert die folgende restriktivere Definition.

21.10 Definition (Einbettung)

Es sei $f : M \to N$ glatt, dann heißt f Einbettung $:\Leftrightarrow$ f ist injektive Immersion und $f : M \to f(M)$ ist ein Homöomorphismus, dabei trage $f(M)$ die Spurtopologie von N.

21.11 Satz (Charakterisierung von Einbettungen).

Ist $f \in C^\infty(M, N)$, dann ist f Einbettung $\Leftrightarrow$ für jedes $x \in M$ gibt es eine Karte ψ von N zentriert bei $f(x)$, sodaß $f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \operatorname{Dom}\psi \cap \mathbb{R}^m \to f^{-1}(\operatorname{Bild}\psi)$ ein wohldefinierter Diffeomorphismus (und somit eine Karte) ist.



Beweis. Man bemerke zuerst, daß für ein injektives f die Zusammensetzung

$$f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \operatorname{Dom} \psi \cap \mathbb{R}^m \to f^{-1}(\operatorname{Bild} \psi)$$

genau dann eine wohldefinierte Bijektion ist, wenn $\psi(\mathbb{R}^m) = \operatorname{Bild} \psi \cap \operatorname{Bild} f$. Dann ist $(f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1} = \psi^{-1} \circ f$.

($\Leftarrow$)f muß injektiv sein. Sonst sei ψ eine Karte um $f(x_1) = f(x_2)$, mit $x_1 \neq x_2$, dann sind $x_1, x_2 \in f^{-1}(\operatorname{Bild} \psi)$, aber $(\psi^{-1} \circ f)(x_1) = (\psi^{-1} \circ f)(x_2)$, also ist $f^{-1} \circ \psi$ nicht wohldefiniert.

-f ist immersiv nach (21.4).

-f ist Homöomorphismus aufs Bild: Sei $U \subseteq M$ offen. Wir müssen zeigen: $f(U) \subseteq f(M)$ ist offen bezüglich der Spurtopologie von N auf $f(M)$. O.B.d.A. sei $U \subseteq f^{-1}(\operatorname{Bild} \psi)$ für ein ψ mit obiger Eigenschaft. Dann ist

$$(f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^m$$

offen, also existiert ein $W \subseteq \operatorname{Dom} \psi$ offen, mit

$$W \cap \mathbb{R}^m = (f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}(U),$$

und es ist $f(U) = \psi(W) \cap \operatorname{Bild} f$, also offen in der Spurtopologie, denn

$$\begin{aligned} &\psi : \mathbb{R}^m \cap \operatorname{Dom} \psi \to \operatorname{Bild} f \cap \operatorname{Bild} \psi \text{ ist bijektiv } \Rightarrow \\ \Rightarrow\ &\psi(W) \cap \operatorname{Bild} f = \psi(W \cap \mathbb{R}^m) = \psi((f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}(U)) = \\ &= (\psi \circ \psi^{-1} \circ f)(U) = f(U). \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Sei f eine Einbettung. Da f eine Immersion ist, existiert für $x \in M$ ein $U_x \subseteq M$ offen und eine Karte ψ um $f(x)$, sodaß

$$f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \operatorname{Dom} \psi \cap \mathbb{R}^m \to U_x$$

ein wohldefinierter Diffeomorphismus ist. Da f ein Homöomorphismus auf das Bild ist, gibt es $W \subseteq \operatorname{Bild} \psi$ offen mit $W \cap \operatorname{Bild} f = f(U_x)$. O.B.d.A. sei $\operatorname{Bild} \psi = W$, dann ist $U_x = f^{-1}(\operatorname{Bild} \psi)$, denn

$$U_x = (f^{-1} \circ f)(U_x) = f^{-1}(W \cap \operatorname{Bild} \psi) = f^{-1}(\operatorname{Bild} \psi). \qquad \square$$

21.12 Definition (Teilmannigfaltigkeit)

Eine Teilmenge M einer Mannigfaltigkeit N, die die obige Eigenschaft bezüglich der Inklusion $\mathrm{incl} : M \hookrightarrow N$ besitzt, heißt (REGULÄRE) TEILMANNIGFALTIGKEIT. Diese Definition stimmt für $N = \mathbb{R}^n$ mit der in (10.1) gegebenen überein. Das Bild jeder Einbettung ist also eine reguläre Teilmannigfaltigkeit, und die Einbettung ist Diffeomorphismus aufs Bild.

21.13 Whitney'scher Einbettungssatz.
Es sei M eine zusammenhängende separable (und somit parakompakte) C^∞-Mannigfaltigkeit der Dimension m, dann existiert eine Einbettung von M in einen endlichdimensionalen Vektorraum. Jede abstrakte Mannigfaltigkeit läßt sich also als Teilmannigfaltigkeit eines $\mathbb{R}^n$ realisieren.

Für elementare Beweise siehe z.B. [**79**, S.73] mit $n > 2m$ oder [**57**, S.55] mit $n = 2m + 1$.

Beweis. Sei $\{\psi_i : 0 \le i \le m\}$ ein endlicher Atlas ((19.11)) und sei f_i eine zu $\{\mathrm{Bild}\,\psi_i\}$ gehörige Partition der Eins. Setzen $f : M \to \prod_{i=0}^m (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ durch

$$x \mapsto \big(f_i(x), f_i(x)\psi_i^{-1}(x)\big)_{i=0}^m .$$

Diese Abbildung f ist dann glatt.
f ist injektiv:
Angenommen $f(x) = f(\bar x)$, dann gibt es ein i, sodaß $f_i(x) > 0$. Falls $\bar x$ derart ist, daß $f_i(\bar x) > 0$ so liegt $x, \bar x \in \mathrm{Bild}\,\psi_i$ und es ist $f_i(x)\psi_i^{-1}(x) = f_i(\bar x)\psi_i^{-1}(\bar x)$. Da $f_i(x) > 0$ ist folgt $\psi_i^{-1}(x) = \psi_i^{-1}(\bar x)$ und schließlich $x = \bar x$ wegen der Bijektivität von ψ_i.
f besitzt eine lokale Linksinverse:
Sei dazu

$$\begin{aligned} V_i :&= \{(t,y) : t_i > 0, \frac{1}{t_i} y_i \in \mathrm{Dom}\,\psi_i\},\\ g_i :&V_i \to M, \quad (t,y) \mapsto \psi_i(t_i^{-1} \cdot y_i)\\ U_i :&= f^{-1}(V_i) = \{x \in M : f_i(x) > 0\}. \end{aligned}$$

Dann ist $g_i \circ f = \mathrm{id}$ auf U_i, denn

$$U_i \ni x \mapsto g_i \circ f(x) = \psi_i\left(\frac{f_i(x)\psi_i^{-1}(x)}{f_i(x)}\right) = \psi_i(\psi_i^{-1}(x)) = x$$

f ist Immersion:

$$T_x(g_i \circ f) = T_x(\mathrm{id}) = T_{f(x)}g_i \circ T_x f$$

impliziert, daß $T_x f$ injektiv ist und somit f eine Immersion ist.
f ist ein Homöomorphismus aufs Bild:
Sei nämlich $(x_n) \in M$ eine Folge mit $f(x_n) \to f(x)$. Dann gilt $(g_i \circ f)(x_n) \to (g_i \circ f)(x)$ für alle i. Da ein i existiert mit $f_i(x) > 0$, ist $x \in U_i$ und ebenso fast alle x_n. Also gilt $x_n = (g^{-1} \circ f)(x_n) \to (g^{-1} \circ f)(x) = x$. □

21.14 Bemerkungen

1. Es sei M eine $m-$dimensionale Mannigfaltigkeit, dann läßt sich M in $\mathbb{R}^n$ einbetten, wobei
(i) für $n = 2m + 1$ der Beweis relativ einfach ist, siehe [**57**, S.55];
(ii) für $n = 2m$ stammt er von [**25**].
Vermutung: Das minimale $n = 2m - \alpha(m) + 1$, wobei $\alpha(m)$ die Anzahl der Einser in der Dualentwicklung von m ist.
Welches n ist nötig für Immersion?
(i) für $n = 2m$ ist der Beweis relativ einfach, siehe [**57**, S.24]
(ii) für $n = 2m - 1$ stammt er von [**25**] Vermutung: Das minimale $n = 2m - \alpha(m)$ um Immersionen zu erhalten. Diese Vermutung konnte schließlich bewiesen werden! Auf kompakten Mannigfaltigkeiten von [**12**] und allgemein von [**4**].
2. Der Rang-Satz liefert uns auf einfachste Weise weitere reguläre Teilmannigfaltigkeiten:
Sei $f \in C^\infty(M, N)$. Dann gilt $\operatorname{rang}(T_x f) = r \;\; \forall \;\; x \in M \Rightarrow f^{-1}(y)$ ist reguläre Teilmannigfaltigkeit von M.
Bew.: Dies ist lokale Eigenschaft, wir können also o.B.d.A. annehmen, daß $M \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann folgt aus (21.2), daß f lokal wie $(x, y) \mapsto (x, 0)$ aussieht und das Urbild $f^{-1}(0)$ somit wie $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-r}$.

21.15 Folgerung (Retrakte sind Mannigfaltigkeiten). *Sei $f \in C^\infty(M, M)$, sodaß $f \circ f = f$. Dann ist $A := f(M)$ reguläre Teilmannigfaltigkeit. D.h. glatte Retrakte von Mannigfaltigkeiten sind wieder Mannigfaltigkeiten.*

Beweis. Man beachte, daß $x \in A := f(M)$ genau dann wenn $f(x) = x$ gilt: Denn $x = f(y) \Rightarrow f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$, und umgekehrt $x = f(x) \in f(M)$.
Sei $x_0 \in M$ und $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \to \varphi(U) \subseteq M$ eine um x_0 zentrierte Karte. Für alle y in der Umgebung $V := f^{-1}(\varphi(U)) \cap \varphi(U)$ gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(M) &\Leftrightarrow f(y) = y \\ &\Leftrightarrow (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)^{-1}(\varphi(y)) = (\varphi^{-1} \circ f)(y) = \varphi^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{id} - \tilde{f})(\varphi^{-1}(y)) = 0, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{f} := \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \supseteq \varphi^{-1}(V) \to U \subseteq \mathbb{R}^m$.
Für z nahe 0 gilt:

$$\begin{aligned} (\tilde{f} \circ \tilde{f})(z) &= (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)(z) = \\ &= (\varphi^{-1} \circ f^2 \circ \varphi)(z) = (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)(z) = \tilde{f}(z), \end{aligned}$$

d.h. o.B.d.A. sei $0 \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ erfülle $f(0) = 0$ und $f \circ f = f$ lokal um 0, und wir haben zu zeigen, daß $\mathrm{id} - f$ eine reguläre Gleichung lokal um 0 ist.
Es ist $\operatorname{rang} T_z(\mathrm{id} - f) \geq \operatorname{rang} T_0(\mathrm{id} - f) =: r$. Aus $f \circ (\mathrm{id} - f) = 0$ folgt $T_{(\mathrm{id} - f)(z)} f \circ (\mathrm{id} - T_z f) = 0$ und somit $\operatorname{Bild}(\mathrm{id} - T_z f) \subseteq \operatorname{Ker}(T_{(\mathrm{id} - f)(z)} f)$. Also ist lokal

$$\begin{aligned} \mathrm{rang(T_z(id\text{-}f))} &\leq \dim \operatorname{Ker}(T_{(\mathrm{id} - f)(z)} f) = m - \dim \operatorname{Bild}(T_{(\mathrm{id} - f)(z)} f) \leq \\ &\leq m - \dim \operatorname{Bild}(T_0 f) = \dim \operatorname{Bild}(\mathrm{id} - T_0 f) = r, \end{aligned}$$

wobei wir für die lineare Projektion $T_0 f$ die offensichtliche Gleichung $T_0\mathbb{R}^m = \operatorname{Bild}(T_0 f) \oplus \operatorname{Bild}(\mathrm{id} - T_0 f)$ verwendet haben. □

21.16 Bemerkung

Man kann umgekehrt zeigen, daß jede Teilmannigfaltigkeit M einer Mannigfaltigkeit N das Retrakt einer offenen Menge in N ist. Siehe [**57**, S.110]. Zusammen mit dem Einbettungssatz besagt das, daß zusammenhängende separable Mannigfaltigkeiten - bis auf Diffeomorphismen - genau die Retrakte offener Teilmengen endlichdimensionaler Vektorräume sind.

Für $f \in C^\infty(M, N)$ sei der Graph von f definiert als

$$\operatorname{Graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in M\} \subseteq M \times N.$$

Dann ist $\operatorname{Graph}(f)$ eine reguläre Teilmannigfaltigkeit. Der Beweis bleibt als Übung. Hinweis: $\operatorname{Graph}(f) \cong M$

21.17 Satz von Sard. *Die Menge der kritischen Werte einer glatten Abbildung zwischen separablen Mannigfaltigkeiten hat Lebesgue-Maß 0.*

Siehe auch [**79**, S.58] und [**57**, p.68].

Dieses Resultat gilt auch noch, wenn $f \in C^r(M, N)$ mit $r > \dim M - \dim N$ ist. In [**25**, A function not constant on a connected set of critical points, Duke Math. J. 1(1935) 514-517] wurde eine C^1-Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ konstruiert, die auf einem Bogen I kritisch, aber nicht konstant ist. Der Graph von f ist also eine Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$, auf welcher ein Bogen $f(I)$ liegt, sodaß die Tangentialebene an S in jeden Punkt horizontal ist, aber dennoch hat $f(I)$ nicht konstante Höhe.

Definition. Dabei heißt für eine Abbildung $f : M \to N$ ein Punkt $x \in M$ KRITISCH, falls $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ nicht maximalen Rang hat. Ein Punkt $y \in N$ heißt KRITISCHER WERT, falls ein kritischer Punkt $x \in f^{-1}(y)$ existiert. Manchmal wir für kritische Punkte nur verlangt, daß $T_x f$ nicht surjektiv ist. Zumindestens für den Satz von Sard macht das aber keinen Unterschied, denn nur im Fall $\dim M < \dim N$ erhalten wir mehr kritische Werte (nämlich alle im Bild). Diese bilden aber nach der Folgerung in (21.18) ebenfalls eine Lebesgue-Null-Menge.

Eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt LEBESGUE-NULL-MENGE, falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge von Würfeln (oder Quadern oder Kugeln) $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existiert mit $N \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}$ und $\sum_{k\in\mathbb{N}} |Q_k| < \varepsilon$.

Eine Teilmenge $N \subseteq M$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M heißt LEBESGUE-NULL-MENGE, wenn daß Urbild unter jeder Karte eine Lebesgue-Null-Menge ist.

21.18 Lemma. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $N \subseteq U$ eine Lebesgue-Null-Menge. Weiters sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Abbildung. Dann ist auch $f(N)$ eine Lebesgue-Null-Menge.*

Beweis. Da U die Vereinigung abzählbar vieler kompakter konvexer Mengen ist (z.B. der Kugeln mit rationalen Mittelpunkts-Koordinaten und rationalem Radius, die in U enthalten sind), und weil die abzählbare Vereinigung von Lebesgue-Null-Mengen wieder eine Lebesgue-Null-Menge ist, dürfen wir annehmen, daß N in einer kompakten konvexen Teilmengen von U enthalten ist. Weiters können wir auch annehmen, daß die Würfel einer Überdeckung von N ebenfalls in einer (etwas größeren) kompakten konvexen Teilmenge $K \subseteq U$ enthalten sind.

Da $f : U \to \mathbb{R}^m$ C^1 ist, ist $\kappa := \sup\{\|f'(x)\| : x \in K\} := \|f'|_K\|_\infty < \infty$. Sei Q ein Quader in K mit Seitenlänge a. Dann ist nach dem Hauptsatz

$$\begin{aligned}|f(x_1) - f(x_0)| &= \Big|\int_0^1 f'(x_0 + t(x_1 - x_0))\,(x_1 - x_0)\,dt\Big|\\ &\le \kappa \cdot |x_1 - x_0| \le \kappa\, a\, \sqrt{m}.\end{aligned}$$

für alle $x_1, x_0 \in Q$. Also ist $f(Q)$ enthalten in einem Quader mit Seitenlänge $2\,\kappa\, a\,\sqrt{m}$ und Volumen $(2\,\kappa\, a\,\sqrt{m})^m = (2\,\kappa\sqrt{m})^m\,|Q|$. Das Bild einer abzählbaren Überdeckung mit Quadern von Gesamt-Volumen kleiner als $\delta = \frac{1}{(2\,\kappa\sqrt{m})^m}\varepsilon > 0$ ist also in einer Überdeckung mit Quadern von Gesamt-Volumen kleiner als $(2\,\kappa\sqrt{m})^m \cdot \delta = \varepsilon$ enthalten. □

Es ist also eine Teilmenge $N \subseteq M$ einer Mannigfaltigkeit genau dann eine Lebesgue-Null-Menge, wenn die Urbilder unter den Karten eines festen Atlasses Lebesgue-Null-Mengen sind.

Folgerung. *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ C^1 und $n < m$, dann ist $f(\mathbb{R}^n)$ eine Lebesgue-Null-Menge.* □

Wir benötigen noch den

21.19 Satz von Fubini. *Es sei $N \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt und $N \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ eine Lebesgue-Null-Menge für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist N eine Lebesgue-Null-Menge in $\mathbb{R}^n$.*

Für einen Beweis siehe [**79**, S.59].

Beweis des Satzes von Sard (21.17). Es genügt den Fall $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ zu betrachten. Sei D die Menge der kritischen Punkte. Wir machen Induktion nach m. Für $m = 0$ ist der Satz trivial. Sei

$$D_k := \{x \in U : \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x) = 0 \text{ für alle } |\alpha| \le k\}.$$

Die D_k sind abgeschlossen und erfüllen $D \supseteq D_1 \supseteq D_2 \supseteq \dots$.

Es ist $f(D \setminus D_1)$ eine Lebesgue-Null-Menge:

Sei dazu $x \in D \setminus D_1$. OBdA. ist $\frac{\partial}{\partial x^1} f_1(x) \ne 0$. Dann ist $h : U \to \mathbb{R}^m$, $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (f_1(x), x^2, \dots, x^n)$ ein Diffeomorphismus und $g := f \circ h^{-1}$ hat die Gestalt

$$\begin{aligned}g &: (f_1(x), x^2, \dots) \mapsto (x^1, \dots, x^n) \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))\\ g &: (z^1, \dots, z^m) \mapsto (z^1, g^2(z), \dots, g^m(n)).\end{aligned}$$

Die Hyperebene $H_t := \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ bleibt invariant, und die Einschränkung $g_t(x) = (g^2(t,x), \dots, g^n(t,x))$ hat x als kritischen Punkt genau dann, wenn (t,x) ein kritischer Punkt von g ist. Nach Induktionsvoraussetzung, sind die kritischen Werte von g_t eine Lebesgue-Null-Menge, und nach dem Satz von Fubini auch jene von g. Und damit auch jene von $f = g \circ h$, da h ein Diffeomorphismus ist.

Es ist auch $f(D_k \setminus D_{k+1})$ eine Lebesgue-Null-Menge:

Sei $x \in D_k \setminus D_{k+1}$. OBdA. ist $\frac{\partial^{k+1} f_1}{\partial x^1 \partial x^{m_1} \dots \partial x^{m_k}}(x) \ne 0$ und sei $w := \frac{\partial^k f_1}{\partial x^{m_1} \dots \partial x^{m_k}}$. Dann ist $w|_{D_k} = 0$ und $\frac{\partial w}{\partial x_1}(x) \ne 0$. Es sei $h(x) := (w(x), x_2, \dots, x_m)$. Dann ist $h : U \to \mathbb{R}^m$ ein Diffeomorphismus und $h(D_k \cap U) \subseteq \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \subseteq \mathbb{R}^m$. Wir betrachten die

Abbildung $g := f \circ h^{-1}$ und ihre Einschränkung $g_0 : \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^n$. Die kritischen Werte von g_0 sind nach Induktions-Voraussetzung eine Lebesgue-Null-Menge und jeder Punkt aus $h(D_k \cap U)$ ist kritisch für g_0, weil alle partiellen Ableitungen von g der Ordnung $\le k$ und insbesonders die der Ordnung 1 von g_0 verschwinden. Also ist $f(D_k \cap U) = g_0(h(D_k \cap U))$ eine Lebesgue-Null-Menge.

Für $k > \frac{m}{n} - 1$ ist $f(D_k)$ eine Lebesgue-Null-Menge:

Es sei Q ein Würfel der Seitenlänge a. Aus der Taylor-Formel erhalten wir $|f(x+h) - f(x)| \le \tau\, |h|^{k+1}$ für alle $x \in D_k \cap Q$. Wir zerlegen Q in r^m Würfel der Seitenlänge $\frac{a}{r}$. Sei Q' solch ein Würfel, der einen Punkt $x \in D_k$ enthält. Dann ist jeder Punkt in Q' von der Form $x + h$ mit $|h| \le \frac{\sqrt{n}a}{r}$ und somit ist $f(Q')$ enthalten in einem Würfel der Kantenlänge $2\,\tau \left(\frac{\sqrt{n}\,a}{r}\right)^{k+1} =: \frac{b}{r^{k+1}}$. Alle Würfel zusammen haben Gesamtvolumen höchstens $r^m \frac{b^n}{r^{n(k+1)}}$ und für $n(k+1) > m$ konvergiert dieser Ausdruck gegen Null für $r \to \infty$. □

21.20 Definition (Transversale Abbildungen)

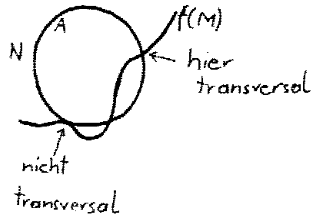
Es seien M, N Mannigfaltigkeiten, $A \subseteq N$ eine Teilmannigfaltigkeit. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt TRANSVERSAL zu A, falls

$$T_x f(T_x M) + T_{f(x)} A = T_{f(x)} N \quad \forall\ x \in M \text{ mit } f(x) \in A$$

gilt.

21.21 Beispiel

Sei $A := S^1$ in $N := \mathbb{R}^2$ und $M := \mathbb{R}$ sowie $f : M \to N$ wie im folgenden Bild.



Es ist aber nicht gefordert, daß die Summe "direkt" ist; Z.B. ist die Identität $f : M := N \to N$ transversal zu jeder Teilmannigfaltigkeit $A \subseteq N$ aber im allgemeinen ist $\mathrm{Bild}(T_x f) \cap T_{f(x)} A \ne \{0\}$.

21.22 Satz (Urbilder von Teilmannigfaltigkeiten). *Es sei $f \in C^\infty(M, N)$ und K eine reguläre Teilmannigfaltigkeit N. Ist f transversal zu K, so ist $f^{-1}(K)$ eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von M.*

Insbesonders wenn f die Inklusion einer zweiten Teilmannigfaltigkeit M von N ist, dann ist unter der Transversalitätsbedingung $T_x M + T_x K = T_x N$ für $x \in K \cap M$ der Durchschnitt $K \cap M$ selbst eine Teilmannigfaltigkeit.

Beweis. Sei $x \in f^{-1}(K)$ und ψ eine Karte zentriert bei $f(x)$, die K trivialisiert. Dann gilt für x' nahe x:

$$x' \in f^{-1}(K) \Leftrightarrow f(x') \in K \Leftrightarrow \psi^{-1}(f(x')) \in \mathbb{R}^k \Leftrightarrow (\mathrm{pr}_{n-k} \circ \psi^{-1} \circ f)(x') = 0.$$

Wir können somit (10.4) anwenden, um $f^{-1}(K)$ als Teilmannigfaltigkeit von M zu erkennen, wenn wir zeigen, daß die lokale Gleichung $\mathrm{pr}_{n-k} \circ \psi^{-1} \circ f$ regulär ist. Es ist $T_x(\mathrm{pr}_{n-k} \circ \psi^{-1} \circ f) = \mathrm{pr}_{n-k} \circ (T_0\psi)^{-1} \circ T_x f$, und da wegen der Transversalität $T_{f(x)}N = \mathrm{Bild}(T_x f) + T_{f(x)}K = \mathrm{Bild}(T_x f) + \mathrm{Bild}(T_0\psi)(\mathbb{R}^k)$ ist, ist $T_x(\mathrm{pr}_{n-k} \circ \psi^{-1} \circ f)$ surjektiv, denn für $w \in \mathbb{R}^{n-k}$ sei $T_0\psi(w) = T_x f(v) + k$ mit $v \in T_x M$ und $k \in T_{f(x)}(K)$ und somit ist

$$\begin{aligned} T - x(\mathrm{pr}_{n-k} \circ \psi^{-1} \circ f)(v) &= \mathrm{pr}_{n-k}((T_0\psi)^{-1}(T_x f(v))) \\ &= \mathrm{pr}_{n-k}(w - (T_0\psi)^{-1}(k)) = w, \end{aligned}$$

da $(T_0\psi)^{-1}(T_{f(x)}K) = \mathbb{R}^k$. □

In (24.46) wird ein Beispiel gegeben, das zeigt, daß dieser Satz "stärker" ist als (2) in (21.14).

21.23 Folgerung (Pull-back von Mannigfaltigkeiten).
Sei $f_i \in C^\infty(M_i, N)$, $(i = 1, 2)$; und f_1 transversal zu f_2, (d.h. $f_1(x_1) = f_2(x_2) \Rightarrow$ $\mathrm{Bild}\, T_{x_1} f_1 + \mathrm{Bild}\, T_{x_2} f_2 = T_y N$*). Dann ist das* Pull-back

$$\{(x_1, x_2) : f_1(x_1) = f_2(x_2)\}$$

eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von $M_1 \times M_2$.

Beweis. Die Abbildung $f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \to N \times N$ ist glatt. $K := \{(x, x) : x \in N\}$ ist reguläre Teilmannigfaltigkeit von $N \times N$, da K etwa als Graph von $\mathrm{id} : N \to N$ aufgefaßt werden kann. Gelingt es uns zu zeigen, daß $f_1 \times f_2$ transversal zu K ist,

$$\begin{aligned} &\text{d.h: } (f_1(x_1), f_2(x_2)) = (y, y) \in K \;\Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow\; \mathrm{Bild}\, T_{(x_1,x_2)}(f_1, f_2) + T_{(y,y)}K = T_{(y,y)}(N \times N), \end{aligned}$$

so sind wir nach dem vorigen Satz fertig. Die zweite Bedingung wollen wir zur besseren Handhabung erst noch etwas umformen:

$$\mathrm{Bild}\, T_{x_1} f_1 \times \mathrm{Bild}\, T_{x_2} f_2 + T_{(y,y)}K = T_y N \times T_y N.$$

Sei $(w_1, w_2) \in T_y N \times T_y N$, dann ist $(w_1 - w_2) \in T_y N$, und da f_1 transversal zu f_2 ist, existieren v_1, v_2 mit $w_1 - w_2 = T_{x_1} f_1(v_1) + T_{x_2} f_2(v_2)$. Nun geben wir einfach an, wie das Paar (w_1, w_2) in der gewünschten Weise dargestellt wird:

$$(T_{x_1} f_1, T_{x_2} f_2)(v_1, -v_2) + (T_{x_2} f_2(v_2) + w_2, T_{x_2} f_2(v_2) + w_2) = (w_1, w_2). \qquad \square$$

Um die Bedeutung des Begriffs "transversal" zu unterstreichen, sei noch folgendes Theorem ohne Beweis angegeben:

21.24 Transversalitätssatz. *Sei $f : M \to N$ glatt und $K \subseteq N$ eine reguläre Teilmannigfaltigkeit. Dann existiert "beliebig nahe" an f eine Abbildung $g : M \to N$, die transversal zu K ist.*

("Beliebig nahe" heißt dabei "in jeder Umgebung von f". Wobei die Umgebungen der zugrundeliegenden Topologie wie folgt beschrieben werden können: Sei $\{\varphi_i\}$ ein Atlas von M, $\{K_i\}$ eine Überdeckung mit kompakten Mengen $K_i \subseteq \mathrm{Bild}(\varphi_i)$, ψ_i eine

Familie von Karten auf N mit $f(K_i) \subseteq \mathrm{Bild}(\psi_i)$, zuletzt seien noch $\delta_i > 0$ und $r \in N$ gegeben. Eine Umgebung von f hat dann die Gestalt:

$$\{g : g(K_i) \subseteq \mathrm{Bild}(\psi_i) \text{ und } |(\psi_i^{-1} \circ g \circ \varphi_i)^k(x) - (\psi_i^{-1} \circ f \circ \varphi_i)^k(x)| < \delta_i \quad \text{für } k < r \text{ und } x \in K_i\}.)$$

Für einen Beweis siehe [**57**, S.74] *oder* [**79**, S.158].

Nach der Diskussion von Immersionen und initialen Abbildungen nun zu den dualen Begriffen:

22. Submersionen

22.1 Proposition (Charakterisierung von Submersionen).
Sei $f \in C^\infty(M, N)$, dann gilt

$$f \text{ Submersion} \Leftrightarrow f \text{ besitzt lokale Schnitte.}$$

(D.h. $\forall\ x \in M\ \exists\, U_{f(x)} \subseteq N\ \exists\, g^x \in C^\infty(U_{f(x)}, M) : g^x(f(x)) = x$ und $f \circ g^x = \mathrm{id}$ auf $U_{f(x)}$, also dort, wo g^x definiert ist. Lokal gibt es also ein Rechtsinverses.)

Beweis. ($\Leftarrow$) Seien $U_{f(x)}$ und g^x wie vorausgesetzt, dann gilt:

$$T_{f(x)}\,\mathrm{id} = \mathrm{id}_{T_{f(x)}N} = T_{f(x)}(f \circ g^x) = T_x f \circ T_{f(x)} g^x \Rightarrow T_x f \text{ ist surjektiv.}$$

($\Rightarrow$) Nach dem Rangsatz existieren Karten φ um x, ψ um $f(x)$, sodaß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Bild}\,\varphi \arrow[r, "f"] & \mathrm{Bild}\,\psi & \\
\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \cong \mathbb{R}^m \supseteq & \mathrm{Dom}\,\varphi \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] & \mathrm{Dom}\,\psi \arrow[u, "\psi"'] & \subseteq \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ die Projektion. Setzen wir jetzt: $U_{f(x)} := \mathrm{Bild}(\psi)$ und $g^x := \varphi \circ \mathrm{incl} \circ \psi^{-1}$, dann ist g^x glatt mit $g^x(f(x)) = x$. Bleibt also noch folgendes nachzurechnen:

$$f \circ g^x = f \circ \varphi \circ \mathrm{incl} \circ \psi^{-1} = \psi \circ \mathrm{pr} \circ \mathrm{incl} \circ \psi^{-1} = \mathrm{id}_{U_{f(x)}}. \qquad \square$$

22.2 Folgerung (Submersionen sind offen und final). *Jede Submersion $f : M \to N$ ist eine offene Abbildung. Jede surjektive Submersion f ist zusätzlich final.*

Beweis. -f ist offen: Sei $U \subseteq M$ offen, $x \in U$, $y = f(x) \Rightarrow \exists\, U_y$, g^x mit $g^x(y) = x$ und $f \circ g^x = \mathrm{id}$. O.B.d.A. sei $(g^x)^{-1}(U) \supseteq U_y \Rightarrow f(U) \supseteq (f \circ g^x)(U_y) = U_y \Rightarrow f(U)$ ist offen.

-f ist final: Sei $g : N \to P$, sodaß $g \circ f$ glatt ist. Da f surjektiv ist, gibt es zu $y \in N$ ein $x \in M$ mit $f(x) = y$, dazu haben wir noch U_y und das glatte $g^x : U_y \to M$ zur Verfügung, sodaß

$$f \circ g^x = \mathrm{id}_{U_y} \Rightarrow g|_{U_y} = g \circ f \circ g^x$$

glatt ist, also auch g. $\square$

23. Faserbündel

Eine stärkere Eigenschaft als Submersivität werden wir jetzt kennenlernen:

23.1 Definition (Faserbündel)

Eine glatte Abbildung $p : P \to M$ heißt FASERBÜNDEL $:\Leftrightarrow$ p ist lokal trivial, d.h. $\forall\ y \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subset M$, eine C^∞-Mannigfaltigkeit F sowie ein Diffeomorphismus $\psi : U \times F \to p^{-1}(U)$, sodaß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
U \times F \arrow[rr, "\psi", "\cong"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"] & & p^{-1}(U) \arrow[rr, hook] \arrow[dl, "p"] & & P \arrow[dl, "p"] \\
& U \arrow[rr, hook] & & M &
\end{tikzcd}$$

dabei heißt F TYPISCHE FASER (Auf Zusammenhangskomponenten von M sind alle Fasern diffeomorph).

Ein Faserbündel p ist eine ÜBERLAGERUNG $:\Leftrightarrow$ die typische Faser F von p ist diskret. Dies ist die glatte Version von der Definition, die wir in (3.5) gegeben haben.

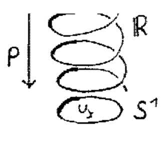
23.2 Beispiele von Faserbündeln

1. Für zwei Mannigfaltigkeiten M und N ist $\mathrm{pr}_1 : M \times F \to M$, $(x, y) \mapsto x$ ein Faserbündel mit typischer Faser F. So geartete Faserbündel heißen GLOBAL TRIVIAL (oder kurz trivial).
2. Die Projektion M"ob $\to S^1$ des Möbiusbandes auf die Mittellinie ist ein Faserbündel mit typischer Faser $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$.

3. Die Hopffaserung: $S^3 \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong S^2$ ist Faserbündel mit typischer Faser S^1, siehe (11.7).

Beispiele von Überlagerungen sind:

4 Die Abbildung $\mathbb{R} \to S^1$ gegeben durch $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ist eine abzählbarblättrige Überlagerung.



1. Folgende Abbildung $\mathbb{R} \times (-1, 1) \to$ M"ob

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\cos 2\varphi)(1 + t\cos\varphi) \\ (\sin 2\varphi)(1 + t\cos\varphi) \\ t\sin\varphi \end{pmatrix}$$

ist eine abzählbarblättrige Überlagerung. Daraus erhält man eine zweiblättrige Überlagerung des Möbiusbandes durch dem Zylinder $S^1 \times (-1,1)$ mittels

$$(x,y,t) \mapsto \Big((x^2-y^2)(1+tx), 2xy(1+tx), ty\Big).$$

2. $S^n \to P^n$ ist eine zweiblättrige Überlagerung, siehe Aufgabe (72.53).
3. $S^3 \to SO(3)$ und $S^3 \times S^3 \to SO(4)$ sind zweiblättrige Überlagerungen, siehe Aufgabe (72.66) und (72.67).

24. Überlagerungen

Wir wollen in diesem Abschnitt die grundlegenden Dinge aus der (Homotopie-)Theorie der Überlagerungen vorstellen. Diese sind durchwegs topologischer Natur. Da aber für eine topologische Überlagerung $p : Y \to X$ im Sinn von (3.5) die Basis X genau dann zu einer glatten Mannigfaltigkeit gemacht werden kann, wenn es der Totalraum Y gemacht werden kann, und p dann eine glatte Überlagerung im Sinn von (23.1) ist, kann der Leser durchaus annehmen, daß alle Räume (bis auf Ausnahmen in den Beispielen) glatte Mannigfaltigkeiten sind, und alle auftretenden stetigen Abbildungen glatt sind.

Eine Überlagerungsabbildung $p : Y \to X$ ist also eine surjektive stetige Abbildung, so daß jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ hat, für welche $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \to U$ bis auf einen Homöomorphismus gerade die Projektion $\mathrm{pr} : \bigsqcup_J U \to U$ für irgendeine Menge $J \neq \emptyset$ ist. D.h. wir haben folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "p"'] & p^{-1}(U) \arrow[l, hook'] \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(U)}"] & & \bigsqcup_J U \arrow[ll, "\cong"'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \\
& X & U \arrow[l, hook'] & U \arrow[l, "\mathrm{id}"] \arrow[u, hook, "\mathrm{inj}_j"']
\end{tikzcd}$$

Die Bilder der Summanden U in $p^{-1}(U) \subseteq Y$ haben wir Blätter genannt und U trivialisierende Umgebung. Die inversen Bilder von Punkten unter p sind die Fasern.

24.1 Beispiele und Bemerkungen.

1. Es sei $Y := \{(\sin(2\pi t), \cos(2\pi t), t) : t \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$ und $p = \mathrm{pr}_{1,2} : Y \to S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann ist p eine Überlagerungsabbildung. Siehe (3.5) und auch (24.19) für $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
2. Die Abbildung $z \mapsto z^n : S^1 \to S^1$ ist eine n-fache Überlagerungsabbildung. Siehe auch (24.19) für $S^1 = S^1/\mathbb{Z}_n$.
3. Die Abbildung $S^n \to P^n$ ist eine zweifache- Überlagerungsabbildung. Siehe Aufgabe (72.53) und (24.19) für $P^n = S^n/\mathbb{Z}_2$.
4. Es seien $p_1 : Y_1 \to X_1$ und $p_2 : Y_2 \to X_2$ zwei Überlagerungsabbildungen, dann ist auch $p_1 \times p_2 : Y_1 \times Y_2 \to X_1 \times X_2$ eine. Beispiele dafür sind $\mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times S^1$ und $\mathbb{R} \times S^1 \to S^1 \times S^1$.
5. Es gibt eine zweifache Überlagerungsabbildung von $I \times S^1$ mit dem Möbius Streifen. Siehe (46.11), (11.10) und (24.19) für die Wirkung von $\mathbb{Z}_2$ auf $[-1,1] \times S^1$ gegeben durch $(t,\varphi) \mapsto (-t, \varphi + \pi)$.

6. Der Torus ist eine zweifache Überlagerung der Kleinschen Flasche. Vergleiche mit (24.19) für die Wirkung von $\mathbb{Z}_2$ auf $S^1 \times S^1$ gegeben durch $(\varphi, \psi) \mapsto (-\varphi, \psi + \pi)$.
7. S^3 ist eine zweifache Überlagerung von $SO(3)$. Vergleiche mit den Aufgaben (72.66) und (72.67) sowie mit (24.19) für die Wirkung von S^3 auf $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ gegeben durch $x \mapsto (y \mapsto \operatorname{conj}_x(y))$. Insbesonders haben wir $P^3 \cong SO(3)$.
8. Es seien $q : Z \to Y$ und $p : Y \to X$ zwei Überlagerungsabbildungen. Ist dann $p \circ q$ eine Überlagerungsabbildung? Wenn X lokal einfach zusammenhängend ist, da Blätter von p über einer einfachzusammenhängenden Umgebung U wieder einfach zusammenhängend und daher trivialisierende Umgebungen von q also ist $(p \circ q)^{-1}(U) = q^{-1}(p^{-1}(U)) = q^{-1}(\bigsqcup_J V_j) = \bigsqcup_j q^{-1}(V_j)$ und $q^{-1}(V_j) \cong \bigsqcup_{J_j} V_j$ (vgl. mit der Folgerung in (24.31)).
9. Es sei $p : Y \to X$ eine Überlagerungsabbildung und $A \subseteq X$. Dann ist $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ eine Überlagerungsabbildung.

24.2 Lemma. *Es sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung. Dann gilt:*

1. *Die Fasern sind diskret in Y.*
2. *Jede offene Teilmenge einer trivialisierenden Menge ist trivialisierend.*
3. *Wenn $B \subseteq Y$ zusammenhängend ist und $p(B) \subseteq U$ für irgendeine trivialisierende Menge U ist, dann ist B in irgendeinem Blatt enthalten.*
4. *Die Projektion ist ein surjektiver offener lokaler Homöomorphismus und daher eine Quotientenabbildung.*

Beweis. (1) Punkte in der Faser sind durch die Blätter separiert.
(2) Nimm die Einschränkung des obigen Diagramms.
(3) B wird überdeckt durch die Blätter. Da jedes Blatt offen und abgeschlossen in $p^{-1}(U)$ ist, ist die Spur auf B ebenfalls offen und abgeschlossen, und daher ist der Durchschnitt mit B genau für ein Blatt nicht leer.
(4) Offensichtlich ist die Projektion ein lokaler Homöomorphismus. Daher ist sie offen und eine Quotientenabbildung. □

24.3 Bemerkungen

(1) Es sei $f : M \to N$ eine Submersion, nach dem Rangsatz gibt es Karten φ um x und ψ um $f(x)$, sodaß das Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \supseteq & \operatorname{Dom}\varphi \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] & \operatorname{Bild}\varphi \arrow[d, "f|_{\operatorname{Bild}\varphi}"] & \subseteq M \\
\mathbb{R}^m \supseteq & \operatorname{Dom}\psi \arrow[r, "\cong"] & \operatorname{Bild}\psi & \subseteq N
\end{tikzcd}$$

Trifft man o.B.d.A. folgende Annahmen: $U_1 \subseteq \mathbb{R}^m$, $U_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$, beide offen, $\operatorname{Dom}\varphi = U_1 \times U_2, \operatorname{Bild}\psi = f(\operatorname{Bild}(\varphi))$, und schließlich $\operatorname{Dom}(\psi) = \operatorname{pr}(\operatorname{Dom}(\varphi)) = U_1$, dann kommutiert folgendes Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\psi(U_1)\times U_2 \arrow[r, "\psi^{-1}\times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & U_1\times U_2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \varphi(U_1\times U_2) \arrow[d, "f"'] \\
\psi(U_1) \arrow[r, "\psi^{-1}"] & U_1 \arrow[r, "\psi"] & \psi(U_1)
\end{tikzcd}$$

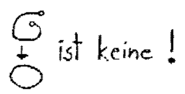
Sei $U := \varphi(U_1 \times U_2)$, so gilt $f(U) = (f \circ \varphi)(U_1 \times U_2) = \psi(U_1)$ und

$$\begin{tikzcd}
f(U)\times U_2 \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & U \arrow[dl, "f"] \\
& f(U) &
\end{tikzcd}$$

Dieses Bild ist dem für Faserbündel geforderten schon recht ähnlich. Kann nämlich $U = f^{-1}(f(U))$ gewählt werden, dann ist f ein Faserbündel mit trivialisierender Umgebung $V := f(U)$.

$$\begin{tikzcd}
V\times F \arrow[rr, "\psi", "\cong"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & f^{-1}(V) = U \arrow[dl, "f"] \\
& V &
\end{tikzcd}$$

(2) Nicht jeder surjektive lokale Diffeomorphismus ist eine Überlagerung. Zum Beispiel kann man ein endliches offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ der Länge größer als 2π nehmen. Dann ist die Einschränkung $I \to S^1$ der Überlagerung aus (1) in (24.1) keine Überlagerung mehr.



Andererseits haben wir das folgende:

Lemma. *Es seien X und Y wegzusammenhängend und Hausdorff. Weiters sei Y kompakt und $f : Y \to X$ sei ein lokaler Homöomorphismus. Dann ist f eine Überlagerung.*

Beweis. Da f ein lokaler Homöomorphismus ist, ist das inverse Bild von jedem Punkt $x \in X$ diskret und abgeschlossen und daher auch endlich, da Y kompakt ist.

Wir zeigen zunächst, daß f surjektiv ist. In der Tat ist das Bild offen in X, da f ein lokaler Homöomorphismus ist. Es ist abgeschlossen, da Y kompakt und X Hausdorff ist. Da X (Weg)zusammenhängend angenommen ist, muß es ganz X sein.

Es sei $x \in X$. Für jedes $y \in f^{-1}(x)$ sei U_y eine Umgebung, welche homöomorph abgebildet wird auf irgendeine Umgebung von x. Da $f^{-1}(x)$ endlich ist, dürfen wir die U_y als disjunkt voraussetzen. Indem wir die inversen Bilder des (endlichen) Durchschnitts der entsprechenden Umgebungen von x nehmen, dürfen wir annehmen, daß das Bild die selbe Umgebung U ist für alle $y \in U_y$. Daher ist $p : Y \to X$ eine Überlagerung. $\square$

Liftungseigenschaften

Es sei $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung und $f : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ eine Abbildung. Nimm eine trivialisierende Umgebung U von x_0 und es sei $\tilde{U}$ das Blatt von p über U, welches y_0 enthält. Dann ist $(p|_{\tilde{U}}) : \tilde{U} \to U$ ein Homöomorphismus und daher ist $(p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ f : Z \supseteq f^{-1}(U) \to \tilde{U} \subseteq Y$ ein stetiger lokaler Lift von f.

Es sei $\tilde{f}$ irgendein stetiger (lokaler) Lift von f mit $\tilde{f}(z_0) = y_0$. Dann ist $W := \tilde{f}^{-1}(\tilde{U})$ eine Umgebung von z_0 und $\tilde{f}(W) \subseteq \tilde{U}$, daher impliziert $f = p \circ \tilde{f}$, daß $(p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ f = (p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ p|_{\tilde{U}} \circ \tilde{f} = \tilde{f}$ auf W, d.h. lokal ist der Lift von $\tilde{f}$ eindeutig.

Wir können nun zeigen, daß der Lift global eindeutig ist und wir wollen bestimmen wann er existiert.

24.4 Proposition. *Es sei $p : Y \to X$ eine Überlagerungsabbildung und $f : Z \to X$ sei stetig mit zusammenhängendem Y. Dann stimmen zwei Lifte von f, welche in einem Punkte gleich sind, überein.*

Beweis. Es seien f^1, f^2 zwei Lifte von f. Dann ist die Menge $\{y \in Y : f^1(y) = f^2(y)\}$ offen-abgeschlossen. In der Tat, wenn U^j das Blatt über U ist, welches $f^j(y)$ enthält, dann ist $f^j = (p|_{U^j})^{-1} \circ f$ auf der Umgebung $(f^1)^{-1}(U^1) \cap (f^2)^{-1}(U^2)$. Daher gilt $f^1 = f^2$ lokal um y genau dann wenn $f^1(y) = f^2(y)$. □

24.5 Proposition. *Jeder Weg $w : I \to X$ hat einen eindeutigen Lift ${}^y\tilde{w}$ mit Startwert ${}^y\tilde{w}(0) = y$ für gegebenes $y \in p^{-1}(w(0))$. Wege, die homotop sind relativ ihren initialen Werten, haben homotope Lifte. Insbesonders haben wir eine Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf $p^{-1}(x_0)$, welche durch $[u] : y \mapsto {}^y\tilde{u}(1)$ gegeben ist.*

Siehe auch (3.8).

Beweis. Nach (24.4) haben wir die Existenz eines Lifts zu zeigen. Indem wir einen Weg w als Homotopie, welche im zweiten Faktor konstant ist, ansehen, genügt es zu zeigen, daß Homotopien $h : I \times I \to X$ geliftet werden können.

Dafür wählen wir eine Partition von I^2 in Quadrate $Q_{i,j}$, sodaß $h(Q_{i,j})$ enthalten ist in einer trivialisierenden Umgebung $U_{i,j}$ von X. Nun konstruieren wir induktiv einen Lift $\tilde{h}^1$ längs $\bigcup_i Q_{i,1}$, indem wir das Blatt $\tilde{U}_{i,1}$ über der trivialisierenden Umgebung von $Q_{i,1}$ nehmen, welches das Bild unter $\tilde{h}^1$ der rechten unteren Ecke von $Q_{i-1,1}$ enthält und daher auch jenes der rechten Kante von $Q_{i-1,1}$ (nach (24.2)). Dann kann $\tilde{h}^1|_{Q_{i,1}}$ definiert werden als $(p|_{U_{i,1}})^{-1} \circ h|_{Q_{i,1}}$. Nun setzen wir die Induktion in der selben Art fort und erhalten Lifte $\tilde{h}^j$ für alle Streifen $\bigcup_i Q_{i,j}$. Nach Induktion können wir zeigen, daß die Lifte auf den horizontalen Linien übereinstimmen: In der Tat ist das Bild von h auf einer horizontalen Ecke enthalten im Durchschnitt der trivialisierenden Mengen, welches das Bild des oberen und unteren Quadrats enthalten. Und da die Lifte $\tilde{h}^j$ und $\tilde{h}^{j-1}$ enthalten sind in den diesbezüglichen Blättern, und also auch in dem Blatt über dem Durchschnitt, sind sie gleich. Wir nennen die eben konstruierte geliftete Homotopie ${}^{y_0}\tilde{h}$.

Angenommen, h sei eine Homotopie rel. $\dot{I}$ zwischen zwei Wegen w_0 und w_1 von x_0 nach x_1 und es sei $y_0 \in p^{-1}(x_0)$. Die Homotopie ${}^{y_0}\tilde{h}$ hat als Randwerte Lifte $\tilde{w}_0$ und $\tilde{w}_1$ mit $\tilde{w}_0(0) = y_0$. Da $s \mapsto {}^{y_0}\tilde{h}(0, s)$ ein Lift des konstanten Wegs x_0 ist, muß er konstant sein, daher gilt $\tilde{w}_1(0) = y_0$. Also sind diese genau die Lifte von w_j. Da

$s \mapsto {}^{y_0}\tilde{h}(1,s)$ ein Lift des konstanten Wegs x_1 ist, ist er selbst konstant, d.h. ${}^{y_0}\tilde{h}$ ist eine Homotopie rel. $\dot{I}$.

Kompositionsgesetz: Der Lift ${}^{y_0}\widetilde{u\cdot v}$ ist ${}^{y_0}\tilde{u}\cdot {}^{y_1}\tilde{v}$, wo $y_1 := {}^{y_0}\tilde{u}(1)$. □

Bemerkung. Die Liftungseigenschaft (24.32) liefert eine Abbildung von $\pi_1(X,x_0)$ in die Bijektionen von $p^{-1}(x_0)$ indem wir $[u](y) := {}^{y}\tilde{u}(1)$ setzen. Diese ist wohldefiniert, denn Kurven u homotop relativ $\dot{I}$ haben Lifte ${}^{y}\tilde{u}$ homotop relativ $\dot{I}$, und daher haben sie den selben Endpunkt.

Weiters haben wir $[u\cdot v](y) = {}^{y}\widetilde{u\cdot v}(1) = ({}^{y}\tilde{u}\cdot {}^{y_1}\tilde{v})(1) = {}^{y_1}\tilde{v}(1) = [v](y_1) = [v]([u](y))$, wo $y_1 = {}^{y}\tilde{u}(1) = [u](y)$. Daher betrachten wir diese Abbildung als Rechtswirkung, d.h. wir schreiben $y\cdot[u]$ für $[u](y)$. Dann haben wir $y\cdot([u]\cdot[v]) = (y\cdot[u])\cdot[v]$.

Beachte, daß Y genau dann wegzusammenhängend ist, wenn X wegzusammenhängend ist und diese Wirkung transitiv ist (d.h. es existiert ein $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ mit $y_0 \cdot \pi_1(X,x_0) = p^{-1}(x_0)$, oder äquivalent: Für alle $y_1, y_2 \in p^{-1}(x_0)$ existiert ein $g \in \pi_1(X,x_0)$ mit $y_1\cdot g = y_2$): In der Tat, wenn Y wegzusammenhängend ist, dann ist es auch das surjektive Bild X. Und weiters hat eine Kurve v, die $y_1, y_2 \in p^{-1}(x_0)$ verbindet, eine geschlossene Kurve $u := p\circ v$ als Bild und es gilt $v = {}^{y_1}\tilde{u}$ und somit $y_1\cdot[u] = y_2$.

Umgekehrt sei $y_1 \in Y$ beliebig. Da X wegzusammenhängend ist, haben wir eine Kurve u, die $p(y_1)$ mit x_0 verbindet. Ihr Lift ${}^{y_1}\tilde{u}$ verbindet y_1 mit $y := {}^{y_1}\tilde{u}(1) \in p^{-1}(x_0)$. Da $\pi_1(X,x_0)$ transitiv auf $p^{-1}(x_0)$ wirkt, gibt es ein $[u'] \in \pi_1(X,x_0)$ mit $y\cdot[u'] = y_0$, d.h. die Kurve ${}^{y}\tilde{u}'$ verbindet y mit y_0.

Wir werden diesen Gruppen-Homomorphismus $\pi_1(X,x_0) \to \mathrm{Bij}(p^{-1}(x_0))$ in (24.15) und in (24.17) studieren.

24.6 Proposition. *Es sei X wegzusammenhängend. Dann können die Fasern von irgendeiner Überlagerung $p : Y \to X$ bijektiv aufeinander abgebildet werden indem man eine Kurve, die Fußpunkte verbindet, liftet.*

Beweis. Es sei $F_0 := p^{-1}(x_0)$, $F_1 := p^{-1}(x_1)$ und es sei u ein Weg von x_0 nach x_1 dann definiert $y \mapsto {}^{y}\tilde{u}(1)$ eine Abbildung $F_0 \to F_1$ und $y \mapsto {}^{y}\widetilde{u^{-1}}(1)$ eine Abbildung $F_1 \to F_0$ und diese Abbildungen sind invers zu einander, denn der Lift der Kurve $u\cdot u^{-1} \sim 0$ ist 0-homotop rel. $\dot{I}$ und daher geschlossen. □

24.7 Theorem. *Es sei Z wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Es sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung und $f : Z \to X$ stetig. Es seien $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ und $z_0 \in Z$ Basispunkte und alle Abbildungen basispunkterhaltend. Dann hat f ein basispunkterhaltenden Lift $\tilde{f}$ genau dann, wenn* $\mathrm{Bild}(\pi_1(f)) \subseteq \mathrm{Bild}(\pi_1(p))$*, oder genauer* $\pi_1(f)\pi_1(Z,z_0) \subseteq \pi_1(p)\pi_1(Y,y_0)$.

Beweis. ($\Rightarrow$) Wenn $f = p\circ\tilde{f}$ ist, dann ist $\mathrm{Bild}(\pi_1(f)) = \mathrm{Bild}(\pi_1(p)\circ\pi_1(\tilde{f})) \subseteq \mathrm{Bild}(\pi_1(p))$.

($\Leftarrow$) Es sei $z \in Z$ beliebig. Wähle einen Weg w von z_0 nach z und nimm den Lift ${}^{y_0}\widetilde{f\circ w}$ und definiere $\tilde{f}(z) := {}^{y_0}\widetilde{f\circ w}(1)$.

Zuerst haben wir zu zeigen, daß diese Definition unabhängig von der Wahl von w ist. Seien dazu w_j zwei Wege von z_0 nach z. Dann ist $f\circ(w_0\cdot w_1^{[-1]}) = (f\circ w_0)\cdot(f\circ w_1)^{-1}$ ein abgeschlossener Weg durch x_0, daher existiert nach Voraussetzung ein abgeschlossener

Weg v durch y_0 mit $p\circ v \sim (f\circ w_0)\cdot(f\circ w_1)^{-1}$ rel. $\dot I$ und daher ist $(p\circ v)\cdot(f\circ w_1) \sim (f\circ w_0)$. Also gilt ${}^{y_0}\widetilde{f\circ w_0}(1) = {}^{y_0}\widetilde{(p\circ v)\cdot(f\circ w_1)}(1) = ({}^{y_0}\widetilde{p\circ v}\cdot{}^{y_0}\widetilde{f\circ w_1})(1) = {}^{y_0}\widetilde{f\circ w_1}(1)$.

Verbleibt zu zeigen, daß $\tilde f$ stetig ist. Es sei $z\in Z$ fix und es sei $\tilde U$ ein kleines Blatt über einer trivialisierenden Umgebung U von $f(z)$, welches $\tilde f(z)$ enthält. Es sei W eine wegzusammenhängende Umgebung von z mit $f(W)\subseteq U$ und es sei w ein Weg von z_0 nach z. Dann können wir für jedes $z'\in W$ einen Weg $w_{z'}$ in W von z nach z' wählen. Daher gilt $\tilde f(z') = \widetilde{f\circ(w\cdot w_{z'})}^{y_0}(1) = ({}^{y_0}\widetilde{f\circ w}\cdot{}^{\tilde f(z)}\widetilde{f\circ w_{z'}})(1) = {}^{\tilde f(z)}\widetilde{f\circ w_{z'}}(1)$. Aber da $f\circ w_{z'}$ enthalten ist in der trivialisierenden Umgebung U und $\tilde U$ das Blatt über U ist, welches den Lift $\tilde f(z)$ enthält, haben wir, daß ${}^{\tilde f(z)}\widetilde{f\circ w_{z'}} = (p|_{\tilde U})^{-1}\circ f\circ w_{z'}$ ist, und daher gilt $\tilde f(z') = ((p|_{\tilde U})^{-1}\circ f)(z')$ und ist somit stetig. □

Also ist es wichtig, das Bild von $\pi_1(p):\pi_1(Y,y_0)\to\pi_1(X,x_0)$ zu bestimmen.

24.8 Proposition. *Es sei $p:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ eine Überlagerung. Dann ist $\pi_1(p):\pi_1(Y,y_0)\to\pi_1(X,x_0)$ injektiv und das Bild wird von jenen Klassen in $\pi_1(X,x_0)$ gebildet, für die jeder Lift ${}^{y_0}\tilde w$ eines Repräsentanten w abgeschlossen ist.*

Also wird das Bild von jenen $g\in\pi_1(X,x_0) =: G$ gebildet, welche auf y_0 trivial wirken. Dies ist die sogenannte Isotropie-Untergruppe G_{y_0} von G bei y_0.

Beweis. Injektivität: Es sei $[v]\in\pi_1(Y,y_0)$ so, daß $1=[p\circ v]$, d.h. $p\circ v\sim \mathrm{const}_{x_0}$. Nach (24.5) können wir die Homotopie liften. Da der Lift von const_{x_0} gerade const_{y_0} ist haben wir $[v]=1$.

Wenn irgendein u einen abgeschlossenen Lift v hat, dann ist $\pi_1(p)[v]=[p\circ v]=[u]$. Daher gilt $[u]\in\mathrm{Bild}(\pi_1(p))$. Umgekehrt sei $[u]\in\mathrm{Bild}\,\pi_1(p)$. Dann existiert eine geschlossene Kurve v durch y_0 mit $[p\circ v]=\pi_1(p)[v]=[u]$. Daher ist $u\sim p\circ v$ rel. $\dot I$, und somit gilt ${}^{y_0}\tilde u\sim {}^{y_0}\widetilde{p\circ v} = v$ rel. $\dot I$, also ist ${}^{y_0}\tilde u$ ebenso abgeschlossen. □

Wir haben einen Gruppen-Homomorphismus $G\to\mathrm{bij}(F)$ mit Kern $\{g\in G: g\cdot y = y\} = \bigcap_{y\in F} G_y$. Aber sein Bild enthält im allgemeinen nicht $\mathrm{Aut}_G(F)$. Jedoch, da jedes $\varphi\in\mathrm{Aut}_G(F)$ eindeutige bestimmt ist durch sein Bild von y_0 und jedes solche Bild für irgendein $g\in G$ in der Form $g\cdot y_0$ geschrieben werden kann, versuchen wir herauszufinden, welche $g\in G$ möglich sind und wie eindeutig sie sind.

24.9 Lemma. *Es wirke G transitiv auf F von rechts. Dann gilt:*

1. *Es ist $G_{y\cdot g} = g^{-1}G_y g$.*
2. *Die Menge $\{G_y : y\in F\}$ ist eine Konjugiertheitsklasse von Untergruppen von G.*
3. *Es sei H eine Untergruppe von G. Dann trägt die Menge $H\backslash G := \{Hg : g\in G\}$ von rechten Nebenklassen eine eindeutige (transitive) rechte G-Modul-Struktur, derart daß die kanonische Projektion $\pi: G\to H\backslash G$, $g\mapsto Hg$ G-äquivariant ist.*
4. *Für $y\in F$ faktorisiert die Abbildung $G\to F$, welche durch $g\mapsto y\cdot g$ gegeben ist, zu einem G-Isomorphismus $G_y\backslash G\to F$.*
5. *Es sei $\varphi\in\mathrm{Hom}_G(F,F') := \{\varphi: F\to F' : \varphi(y\cdot g) = \varphi(y)\cdot g$ for all $g\in G, y\in F\}$. Dann ist $G_y\subseteq G_{\varphi(y)}$.*
6. *Es sei $A\subseteq\mathrm{Aut}_G(F)$. Dann gilt $A=\mathrm{Aut}_G(F)\Leftrightarrow \forall\, y_0,y_1: G_{y_0}=G_{y_1}\Rightarrow \exists\,\varphi\in A:\varphi(y_0)=y_1$.*

Wir setzen $\mathrm{Aut}_G(F) := \{\varphi \in \mathrm{bij}(F) : \varphi(y\cdot g) = \varphi(y)\cdot g \text{ for all } y \in F, g \in G\}$. *Also ist das die Kommutante des Bildes von* G *in* $\mathrm{bij}(F)$*, oder die* G*-Modul-Isomorphismen von* F*, oder die* G*-äquivarianten Bijektionen von* F*.*

Beweis. (1) Wir haben $g^{-1}G_y g = G_{y\cdot g}$, da $h \in G_{y\cdot g} \Leftrightarrow y\cdot g\cdot h = y\cdot g \Leftrightarrow y\cdot(ghg^{-1}) = y$, d.h. $ghg^{-1} \in G_y$.

(2) Aus (1) schließen wir, daß die Untergruppen G_y konjugiert zueinander sind. Umgekehrt, wenn $H = g^{-1}G_y g = G_{y\cdot g}$ ist, ist sie von dieser Form.

(3) Die einzige mögliche Wirkung auf $H\backslash G$, so daß π G-äquivariant ist, ist gegeben durch $Hg\cdot g' = \pi(g)\cdot g' := \pi(g\cdot g') = \pi(gg') = H(gg')$. Daß die so definiert Wirkung Sinn macht, folgt aus $Hg_1 = Hg_2 \Rightarrow H(g_1 g) = (Hg_1)g = (Hg_2)g = H(g_2 g)$.

(4) Betrachte $G \to y\cdot G$ gegeben durch $g \mapsto y\cdot g$. Diese Abbildung hat Bild $y\cdot G = F$, da G transitiv wirkt. Weiters haben g' und g das selbe Bild $y\cdot g' = y\cdot g$ genau dann, wenn $g'g^{-1} \in G_y$.

(5) Wir haben $G_y = \{g : y\cdot g = y\} \subseteq \{g : \varphi(y)\cdot g = \varphi(y\cdot g) = \varphi(y)\} = G_{\varphi(y)}$.

(6) Beachte, daß die rechte Seite gerade besagt, daß A transitiv auf $S := \{y : G_y = G_{y_0}\}$ wirkt.
($\Rightarrow$) Es sei $G_{y_0} \subseteq G_{y_1}$ und $y \in F$. Da G transitiv wirkt, existiert ein $g \in G$ mit $y = y_0\cdot g$. Wir setzen $\varphi(y) = \varphi(y_0\cdot g) := \varphi(y_0)\cdot g = y_1\cdot g$. Diese Definition macht Sinn, denn $y_0\cdot g' = y_0\cdot g$ impliziert $g'g^{-1} \in G_{y_0} \subseteq G_{y_1}$ und daher $y_1\cdot g' = y_1\cdot g$. Nach Konstruktion ist φ G-äquivariant.
In der selben Art können wir φ^{-1} konstruieren, und sie sind invers zueinander, da jedes Element in $\mathrm{Aut}_G(F)$ eindeutig bestimmt ist durch seine Werte auf y_0 (benutze, daß G transitiv wirkt).

($\Leftarrow$) Es sei $\varphi \in \mathrm{Aut}_G(F)$. Dann ist $G_{y_0} = G_{\varphi(y_0)}$ nach (5) und daher existiert ein $\psi \in A$ mit $\psi(y_0) = \varphi(y_0)$. Wegen der Transitivität der Wirkung haben wir $\varphi = \psi \in A$. □

Für $H' := g^{-1}Hg \neq H$ haben wir eine G-äquivariante Bijektion $H\backslash G \to H'\backslash G$, welche gegeben ist durch $Hg' \mapsto H'g^{-1}g'$. Sie ist wohldefiniert, da $Hg_1 = Hg_2 \Leftrightarrow g_2 g_1^{-1} \in H \Leftrightarrow g^{-1}g_2 g_1^{-1} g \in g^{-1}Hg = H' \Leftrightarrow H'g^{-1}g_2 = H'g^{-1}g_1$. Sie ist G-äquivariant, da $g' \mapsto g^{-1}g'$ von $G \to G$ G-äquivariant ist.

24.10 Folgerung. *Es sei* $p : Y \to X$ *eine Überlagerung mit wegzusammenhängendem* Y *und es sei* $x_0 \in X$*. Die Bilder* $\pi_1(p)(\pi_1(Y,y))$ *für* $y \in p^{-1}(x_0)$ *bilden eine Konjugiertheitsklasse von Untergruppen in* $\pi_1(X,x_0)$*.* □

Diese Konjugiertheitsklasse heißt charakterisierende Konjugiertheitsklasse der Überlagerung p.

Definition. Es seien $p : Y \to X$ und $p' : Y' \to X$ zwei Überlagerungen. Ein Homomorphismus f von Überlagerungen ist eine fasererhaltende Abbildung $f : Y \to Y'$, d.h. es kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Wir bezeichnen die Menge aller Homomorphismen von $p : Y \to X$ nach $p' : Y' \to X$ mit $\mathrm{Hom}(p, p')$. Beachte, daß ein Homomorphismus f nichts anderes ist als ein Lift von $p : Y \to X$ längs $p' : Y' \to X$.

24.11 Lemma. *Es seien $p : Y \to X$ und $q : Z \to X$ Überlagerungen des lokal wegzusammenhängenden Raums X und $f : Z \to Y$ sei stetig und surjektiv mit $p \circ f = q$. Dann ist f eine Überlagerung. Wenn Y wegzusammenhängend ist, dann ist f automatisch surjektiv.*

Beweis. Nimm eine wegzusammenhängende trivialisierende Menge $U \subseteq X$. Wir zeigen, daß jedes Blatt $\tilde{U}^q$ von q über U durch f in ein Blatt $\tilde{U}^p$ von p über U abgebildet wird. In der Tat, da die Blätter homöomorph zu U sind, sind sie ebenso wegzusammenhängend, daher ist $f(\tilde{U}^q)$ vollständig enthalten in einem Blatt $\tilde{U}^p$ von p über $U = (p \circ f)(\tilde{U}^q)$. Also ist $f^{-1}(\tilde{U}^p)$ die topologische disjunkte Vereinigung von gewissen Blättern $\tilde{U}^q$ von q über U.

Es sei z_0 ein Basispunkt in Z und wir setzen $y_0 := f(z_0)$ und $x_0 := p(y_0)$. Wenn Y wegzusammenhängend ist und $y \in Y$ beliebig ist, können wir einen Weg v von y_0 nach y finden. Es sei ${}^{z_0}\widetilde{p \circ v}$ der Lift bezüglich q und z sei sein Endpunkt. Dann ist $f \circ {}^{z_0}\widetilde{p \circ v}$ ein Lift von $p \circ f \circ {}^{z_0}\widetilde{p \circ v} = q \circ {}^{z_0}\widetilde{p \circ v} = p \circ v$, und stimmt daher überein mit v. Daher ist $f(z) = v(1) = y$. □

24.12 Proposition. *Es sei X lokal wegzusammenhängend. Es seien $p : Y \to X$ und $p' : Y' \to X$ zwei wegzusammenhängende Überlagerungen mit typischer Fasern $F := p^{-1}(x_0)$ und $F' := (p')^{-1}(x_0)$ und es sei $G := \pi_1(X, x_0)$. Dann ist* $\mathrm{Hom}(p, p') \cong \mathrm{Hom}_G(F, F')$ *via* $\Phi \mapsto \Phi|_F$.

D.h. der Funktor von $\mathrm{Cov}_{pc}(X) \to \mathrm{Act}_{tr}(G)$ ist voll und treu. Dabei heißt ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ VOLL (bzw. TREU), wenn $f \mapsto F(f)$ von $\mathcal{A}(A_1, A_2) \to \mathcal{B}(F(A_1), F(A_2))$ surjektiv (bzw. injektiv) ist für alle Objekte A_1, A_1 in $\mathcal{A}$. Es bezeichne $\mathrm{Cov}(X)$ die Kategorie von Homomorphismen zwischen Überlagerungen von X. Es sei $\mathrm{Cov}_{\mathrm{pc}}(X)$ die VOLLE TEILKATEGORIE (d.h. die Inklusion ist ein voller Funktor) von wegzusammenhängenden Überlagerungen. Es bezeichne $\mathrm{Act}(G)$ die Kategorie von G-Homomorphismen zwischen G-Moduln, d.h. Wirkungen von G auf Mengen F. Es sei $\mathrm{Act}_{tr}(G)$ die volle Teilkategorie von transitiven Wirkungen.

Beweis. Wir zuerst zeigen, daß $\Phi|_F \in \mathrm{Hom}_G(F, F')$ für $\Phi \in \mathrm{Hom}(p, p')$ gilt. Es sei $[u] \in G$ und $y \in F$. Dann ist $\Phi(y \cdot [u]) = \Phi({}^y\tilde{u}(1)) = {}^{\Phi(y)}\tilde{u}(1) = \Phi(y) \cdot [u]$, da $\Phi \circ {}^y\tilde{u}$ der Lift von u mit Startwert $\Phi(y)$ ist.

Diese Abbildung ist injektiv, denn $\Phi_1|_F = \Phi_2|_F$ impliziert $\Phi_1(y_0) = \Phi_2(y_0)$ und daher gilt $\Phi_1 = \Phi_2$ wegen der Eindeutigkeit der Lifte von p nach (24.4).

Nun die Surjektivität: Es sei $\varphi : F \to F'$ G-äquivariant. Als $\Phi : Y \to Y'$ nehmen wir jenen Lift von $p : Y \to X$, welcher $y_0 \in F$ auf $\varphi(y_0)$ in F' abbildet. Dieser Lift existiert nach (24.7), denn $\pi_1(p)(Y, y_0) = G_{y_0} \subseteq G_{\varphi(y_0)} = \pi_1(p')(Y', \varphi(y_0))$ und Y ist lokal wegzusammenhängend nach (4) in (24.2).

Schlußendlich ist $\Phi|_F = \varphi$, denn beide sind G-äquivariant und stimmen auf y_0 überein. □

24.13 Folgerung. *Es sei* Y *wegzusammenhängend und* X *sei lokal wegzusammenhängend. Für jede Überlagerungsabbildung* $p : Y \to X$ *haben wir*

$$\mathrm{Aut}(p) \cong \mathrm{Aut}_{\pi_1(X,x_0)}(p^{-1}(x_0)).$$

Die Elemente von $\mathrm{Aut}(p)$ *heißen Decktransformationen.*

Beweis. Da die Elemente von Aut gerade die Isomorphismen eines Objekts mit sich selbst sind, folgt das direkt aus (24.12) □

24.14 Theorem. *Es wirke* G *transitiv von rechts auf* F *und es sei* $y_0 \in F$*. Dann ist* $\mathrm{Aut}_G(F) \cong \mathrm{Norm}_G(G_{y_0})/G_{y_0}$.

Für eine Untergruppe H heißt die Menge von Elementen $g \in G$, welche $g^{-1}Hg = H$ erfüllen, die NORMALISIERENDE UNTERGRUPPE von H in G. Sie ist die größte Untergruppe von G, in welcher N eine normale Untergruppe ist, und wir wollen sie mit $\mathrm{Norm}_G(H) := \{g \in G : g^{-1}Hg \subseteq H\}$ bezeichnen.

Beweis. Wegen (6) in (24.9) wissen wir, daß um $y_0 \mapsto y_1 := y_0 \cdot g$ zu einem $\varphi \in \mathrm{Aut}_G(F)$ zu erweitern, wir die Gleichung $G_{y_0} = G_{y_1} = G_{y_0 \cdot g} = g^{-1}\,G_{y_0}\,g$ brauchen. Also haben wir gezeigt, daß genau die $g \in \mathrm{Norm}_G(G_{y_0})$ Anlaß für ein (eindeutig bestimmtes) $\varphi_g \in \mathrm{Aut}_G(F)$ geben. D.h. $\mathrm{ev}_{y_0} : \mathrm{Aut}_G(F) \cong \{y : G_y = G_{y_0}\}$.

Wir zeigen als nächstes, daß $g \mapsto \varphi_g$ ein Gruppen-(anti-)Homomorphismus ist. Dazu sei $g_1, g_2 \in \mathrm{Norm}_G(G_{y_0})$. Wir haben zu zeigen, daß $\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$ den Punkt y_0 auf $y_0 \cdot g_1 \cdot g_2$ abbildet. Wir haben

$$\begin{aligned}(\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2})(y_0) &= \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(y_0)) = \varphi_{g_1}(y_0 \cdot g_2)\\ &= \varphi_{g_1}(y_0) \cdot g_2 = y_0 \cdot g_1 \cdot g_2.\end{aligned}$$

Verbleibt den Kern von diesem Homomorphismus zu berechnen:

$$\{g \in \mathrm{Norm}_G(G_{y_0}) : \varphi_g = \mathrm{id}\} = \{g : y_0 = y_0 \cdot g\} = G_{y_0}. \quad \square$$

24.15 Folgerung. *Es sei* $p : Y \to X$ *eine wegzusammenhängende Überlagerung mit lokal wegzusammenhängender Basis. Dann ist die Gruppe der Decktransformationen isomorph mit* $\mathrm{Norm}(\pi_1(p)(\pi_1(Y,y_0)))/\pi_1(p)(\pi_1(Y,y_0))$*. Der Isomorphismus ist durch Zuordnen von* $[u] \in \mathrm{Norm}(\pi_1(p)(\pi_1(Y,y_0)))$ *zur eindeutigen Decktransformation* f *gegeben, welche* y_0 *auf* ${}^{y_0}\tilde{u}$ *abbildet.*

Beweis. Kombiniere (24.14) mit (24.13). □

24.16 Folgerung. *Wenn* $p : Y \to X$ *eine einfachzusammenhängende Überlagerung mit lokal wegzusammenhängend Basis ist, dann ist die Gruppe der Decktransformationen isomorph zu* $\pi_1(X, x_0)$*.*

Beweis. In dieser Situation ist $\pi_1(Y, y_0) = \{1\}$ und daher $N = \pi_1(X, x_0)$ und so erhalten wir $G \cong N/\{1\} \cong N$. □

24.17 Proposition. *Eine wegzusammenhängende Überlagerung eines lokal wegzusammenhängenden Raums* X *heißt* NORMAL *(oder auch regulär), genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

1. $\pi_1(p)(\pi_1(Y, y_0))$ *ist normal für (ein) jedes* y_0 *in der Faser über* x_0*.*
2. *Die Konjugiertheitsklasse der Überlagerung besteht aus einer einzigen Gruppe.*

3. *Die Überlagerungstransformationen wirken transitiv auf der Faser über x_0.*
4. *Wenn ein Lift eines geschlossenen Weges durch x_0 geschlossen ist, dann sind es alle Lifte.*

Insbesonders ist dies erfüllt, wenn $\pi_1(X, x_0)$ abelsch ist oder die Überlagerung eine 2-fache ist oder $\pi_1(Y, y_0) = \{1\}$ gilt.

Beweis. Diese Aussagen entsprechen gerade folgenden Aussagen für transitive Wirkungen von G auf irgendeiner Menge F:

1. G_y ist normal für alle $y \in F$;
2. $G_y = G_{y'}$ für alle $y, y' \in F$;
3. $\mathrm{Aut}_G(F)$ wirkt transitiv auf F;
4. Wenn g einen Fixpunkt hat, dann wirkt es wie die Identität.

(2⇒1) ist offensichtlich, da $G_y = G_{y\cdot g} = g^{-1} \cdot G \cdot g$.

(1⇒3) Wenn G_y normal ist, dann ist $\mathrm{Norm}_G(G_y) = G$ und daher gilt $\mathrm{Aut}_G(F) = G/G_y$, und dieser Raum wirkt offensichtlich transitiv, da G es tut.

(3⇒4) Es sei $y_0 \cdot g = y_0$ und $y \in F$. Da $\mathrm{Aut}_G(F)$ transitiv wirkt, gibt es einen Automorphismus φ mit $y = \varphi(y_0) = \varphi(y_0 \cdot g) = \varphi(y_0) \cdot g = y \cdot g$.

(4⇒2) Es sei $g \in G_y$, d.h. y ist ein Fixpunkt von g. Daher wirkt g wie die Identität, und somit ist $g \in G_{y'}$ für alle $y' \in F$. □

Siehe (24.39) für Beispiele von Überlagerungen, welche nicht normal sind.

24.18 Proposition. *Es sei $p : Y \to X$ eine normale Überlagerung mit wegzusammenhängendem Y und es sei X lokal wegzusammenhängend. Dann faktorisiert p über $Y \to Y/\mathrm{Aut}(p)$ und gibt einen Homöomorphismus $Y/\mathrm{Aut}(p) \cong X$.*

Beweis. Da jedes $\Phi \in \mathrm{Aut}(p)$ fasererhaltend ist, haben wir, daß p konstant auf den $\mathrm{Aut}(p)$-Bahnen ist und daher zu einer surjektiven Abbildung $Y/\mathrm{Aut}(p) \to X$ faktorisiert. Wenn $\mathrm{Aut}(p)$ transitiv wirkt (d.h. p normal ist), dann ist diese Faktorisierung injektiv, da je zwei Punkte in der selben Faser im selben Orbit unter $\mathrm{Aut}(p)$ sind. Da $Y \to X$ und $Y \to Y/\mathrm{Aut}(p)$ Quotientenabbildungen sind muß diese Bijektion ein Homöomorphismus sein. □

Wir haben also für gewisse auf einem Raum Y wirkende Gruppen G, daß $Y \to Y/G$ eine Überlagerung ist. Es sei G eine Gruppe so, daß $\pi : Y \to Y/G$ eine Überlagerung ist. Dann muß für jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung $U \subseteq Y/G$ existieren, sodaß π^{-1} eine disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen $\tilde{U}$ ist, welche homöomorph via π zu U sind. Somit ist $U = \pi(\tilde{U})$ und $\pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(\pi(\tilde{U})) = G(\tilde{U})$. Also hätten wir gerne, daß $g(\tilde{U}) \cap g'(\tilde{U}) = \emptyset$ für alle $g \neq g'$ gilt. Man sagt, daß eine Gruppe, die diese Bedingungen erfüllt, strikt unstetig auf Y wirkt, d.h. jedes $y \in Y$ eine Umgebung V hat, sodaß $g(V) \cap V = \emptyset$ für alle $g \neq e$.

Offensichtlich hat die Wirkung der Überlagerungstransformationen diese Eigenschaft, denn $\Phi(\tilde{U}) \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ impliziert, daß irgendein $y \in \tilde{U}$ mit $\Phi(y) \in \tilde{U}$ existiert. Aus $p(\Phi(y)) = p(y)$ und weil $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$ injektiv ist schließen wir, daß $\Phi(y) = y$, aber dann gilt $\Phi = \mathrm{id}$ nach (24.4).

Umgekehrt gilt:

24.19 Proposition. *Es sei G eine Gruppe, welche strikt unstetig auf einem Raum Y wirkt. Dann ist $p : Y \to Y/G$ eine Überlagerung. Wenn Y wegzusammenhängend ist, dann gilt $\mathrm{Aut}(p) = G$. Ist Y einfach zusammenhängend, dann ist $\mathrm{Aut}(p) = \pi_1(Y/G)$. Ist Y zusätzlich eine C^∞-MF und G wirke strikt unstetig durch Diffeomorphismen, dann ist auch Y/G eine C^∞-MF und $p : Y \to Y/G$ eine C^∞-Überlagerung.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $p : Y \to Y/G$ die Quotientenabbildung. Im ersten Schritt versuchen wir $p : Y \to Y/G$ zumindest mengentheoretisch als Überlagerung zu erkennen. Für jeden Punkt $p(x) = Gx \in Y/G$ existiert nach Voraussetzung eine offene Umgebung V in Y mit $gV \cap V = \emptyset\, \forall\, g \neq 1$. Also ist

$$p^{-1}(p(V)) = GV = \bigsqcup_{g\in G} gV,$$

und jedes gV ist offen in Y. Weiters ist $p|_{gV} : gV \to p(V)$ offensichtlich bijektiv. Also haben wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "p"'] & p^{-1}(p(V)) \arrow[l, hook'] \arrow[r, equal] \arrow[dr] & \bigsqcup_{g\in G} gV \arrow[r, "p", "\cong"'] & \bigsqcup_{g\in G} p(V) \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \\
& Y/G & p(V) \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

Wir haben also, daß $p(V)$ trivialisierend mit Blättern ΦV für $\Phi \in G$ ist.

Offensichtlich wirkt jedes $\Phi \in G$ wie eine Überlagerungstransformation. Umgekehrt sei $\Phi : Y \to Y$ eine Überlagerungstransformation. Dann gilt $p(y) = p(\Phi(y))$ und daher gibt es irgendein $\Phi_y \in G$ mit $\Phi_y \cdot y = \Phi(y)$. Da die zwei Abbildungen Φ und Φ_y die Identität überdecken und auf y übereinstimmen, sind sie gleich. Die restlichen Resultate über $\mathrm{Aut}(p)$ finden sich in (24.15) und (24.16).

Es wirke nun G auf der C^∞-Mannigfaltigkeit Y durch Diffeomorphismen. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß obiges V Bild einer Karte $\mathbb{R}^m \supseteq \underline{V} \xrightarrow[\cong]{\varphi} V \subseteq Y$ ist.

Als Karten von Y/G verwenden wir nun die bijektiven Abbildungen $\mathbb{R}^m \supseteq \underline{V} \xrightarrow[\cong]{\varphi} V \xrightarrow[\cong]{p} p(V) \subseteq Y$.

Der Kartenwechsel für zwei derartige Karten $p\circ\varphi : \underline{V} \to p(V)$ und $p \circ \psi : \underline{W} \to p(W)$ ist auf der Menge

$$\begin{aligned}\{x \in \underline{V} : p(\varphi(x)) \in p(\psi(\underline{W}))\} &= \{x \in \underline{V} : \varphi(x) \in G(\psi(\underline{W}))\}\\ &= \{x \in \underline{V} : \exists\, g \in G, \exists\, y \in \underline{W} \text{ mit } \varphi(x) = g(\psi(y))\}.\end{aligned}$$

Da φ, ψ und g stetig sind, ist diese Menge offen. Und die Kartenwechselabbildung $(p\circ\psi)^{-1} \circ (p \circ \varphi)$ ist gerade durch $x \mapsto y$ gegeben, d.h. durch $\psi^{-1} \circ g^{-1} \circ \varphi$ und ist somit glatt.

In der durch diesen Atlas definierte Mannigfaltigkeit Y/G sind folglich die Kartenbilder $p(V)$ offen, und $p|_V : V \to p(V)$ ein Diffeomorphismus. Somit auch $p \circ g : V \to gV \to p(V)$, also ist $p : Y \to Y/G$ eine Überlagerungsabbildung.

Wenn Y separabel ist, dann offensichtlich auch Y/G. □

24.20 Beispiele.

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}/\mathbb{Z} &\cong S^1\\
\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\{1\} &\cong S^1\times\mathbb{R}\\
\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 &\cong S^1\times S^1\\
(S^1\times\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2 &\cong \text{Möbius-Band},\ \text{wo } \mathbb{Z}_2=\langle (z,s)\mapsto(-z,-s)\rangle\\
\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} &\cong \text{Möbius-Band},\ \text{wo } \mathbb{Z}=\langle (t,s)\mapsto(t+1,-s)\rangle\\
(S^1\times S^1)/\mathbb{Z}_2 &\cong \text{Kleinsche-Flasche},\ \text{wo } \mathbb{Z}_2=\langle (z,w)\mapsto(-z,-w)\rangle\\
(\mathbb{R}\rtimes\mathbb{R})/(\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}) &\cong \text{Kleinsche-Flasche},\\
&\quad \text{wo } \mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}=\{(t,s)\mapsto(t+k,(-1)^k s+l):k,l\in\mathbb{Z}\}\\
S^n/\mathbb{Z}_2 &\cong \mathbb{P}^n,\ \text{wo } \mathbb{Z}_2=\langle z\mapsto -z\rangle\\
S^{2k-1}/\mathbb{Z}_q &\cong L(q;p_1,\dots,p_k)\dots \text{ dem Linsenraum},\\
&\quad \text{wo } \mathbb{Z}_q=\{(z_1,\dots,z_k)\mapsto(w^{p_1}z_1,\dots,w^{p_k}z_k):w^q=1\}\\
(\mathbb{C}_*\times SL_{\mathbb{C}}(n))/\mathbb{Z}_n &\cong GL_{\mathbb{C}}(n),\ \text{wo } \mathbb{Z}_n=\{(\frac{1}{z},z\,\mathrm{id}):z^n=1\}\\
S^3/\mathbb{Z}_2 &\cong SO(3),\ \text{wo } \mathbb{Z}_2=\{1,-1\} \text{ und } q\mapsto(x\mapsto qxq^{-1}\in\mathbb{R}^\perp\subseteq\mathbb{H})\\
(S^3\times S^3)/\mathbb{Z}_2 &\cong SO(4),\ \text{wo } \mathbb{Z}_2=\{1,-1\} \text{ und } (q',q)\mapsto(x\mapsto q'xq^{-1}\in\mathbb{H})
\end{aligned}$$

24.21 Beispiel. Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt}=\cos^2 x,\quad \frac{dy}{dt}=\sin x.$$

Da dieses Vektorfeld beschränkt ist, existieren die Lösungen global und wir erhalten eine glatte Funktion $\varphi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, welche zu jedem $t\in\mathbb{R}$ und $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ die Lösung mit Werten (x,y) bei 0 zur Zeit t assoziiert.
Wenn der initiale Wert $\cos^2 x=0$ erfüllt, dann ist die Lösung $y(t)=y(0)+t\cdot\sin x$. Andernfalls haben wir $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x}$, daher muß sie enthalten sein in Translaten von $\{(y,x):y(x)=\frac{1}{\cos x}\}$. Weiters ist die Zeit, die man benötigt um von $x=x_0$ zu $x=x_1$ zu gelangen, durch $t(x_1)-t(x_0)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{dt}{dx}=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x|_{x=x_0}^{x_1}$ gegeben. Man kann diese Differentialgleichung sogar explizit lösen, denn

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}=\cos^2 x &\Rightarrow d\tan x=\frac{dx}{\cos^2 x}=dt\\
&\Rightarrow \tan x(t)=t+c\Rightarrow x(t)=\arctan(t+c_1)\\
\frac{dy}{dt}=\sin x &=\sin(\arctan(t+c_1))=\pm\frac{\tan(t+c)}{\sqrt{1+\tan^2(t+c_1)}}\\
&\Rightarrow y(t)=c_2\pm\sqrt{1+(t+c_1)^2}.
\end{aligned}$$

Beachte, daß der Quotientenraum $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ nicht Hausdorff ist. Er besteht aus einer abzählbaren Vereinigung $\bigsqcup_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}'s$ zusammen mit den Punkten $\pi/2+\pi\cdot\mathbb{Z}$. Ein Umgebungsbasis von $\pi/2+k\pi$ wird durch Endintervalle der zwei umgebenden $\mathbb{R}'s$ gegeben.

Wir können den Raum $X := ([-\pi/2,\pi/2]\times\mathbb{R})/\sim$ bilden, wobei $(-\pi/2,-t)\sim(\pi/2,t)$. Da die Wirkung von $\mathbb{R}$ verträglich mit dieser Äquivalenz-Relation ist, wirkt $\mathbb{R}$ ebenso fixpunktfrei auf diesem Möbius-Streifen X. Die Bahnen der diskreten Untergruppe $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}$ sind offensichtlich abgeschlossene Teilmengen. Jedoch ist die Wirkung nicht strikt unstetig, da für irgendeine Umgebung von $[(\pi/2,0)]$ irgendein Translat um $t\in\mathbb{Z}$ es wieder trifft.

24.22 Lemma. *Es sei M eine Mannigfaltigkeit und $G<\mathrm{Diff}(M)$ eine strikt diskontinuierlich wirkende Untergruppe. Dann ist die Topologie von M/G genau dann regulär, wenn $\{g\in G: gK\cap K\neq\emptyset\}$ endlich ist für jede kompakte Menge $K\subseteq M$.*

Beweis. Wenn G strikt diskontinuierlich wirkt, dann ist Gx eine diskrete Teilmenge, da aus $gU\cap U=\emptyset\,\forall\ g\neq 1$ folgt, daß $U\cap Gx=\{x\}$. Somit ist für jede kompakte Menge K die Menge $Gx\cap K$ diskrete und kompakt also endlich.

Wir behaupten, daß jeder Punkt $x\in M$ eine Umgebung $U'\subseteq U$ besitzt, s.d. $\{g\in G: gU\cap K\neq\emptyset\}$ endlich ist. Sei $\{g\in G: gU\cap K\neq\emptyset\}=\{g_1,\dots,g_n\}$ und $K':=K\setminus\bigcup_{i=1}^n g_iU$. Dann ist K' kompakt und $Gx\cap K'=\emptyset$. Also ist $p(x)\notin p(K)$. Wenn M/Gregulär ist, so finden wir eine offene Umgebung V von $p(x)$, die $p(K)$ nicht trifft. Dann ist $U':=U\cap p^{-1}(V)$ die gesuchte Umgebung, denn für alle $g\in G$ gilt gU' trifft K' nicht, und für $g\notin\{g_1,\dots,g_n\}$ gilt $gU'\subseteq gU$ trifft $\bigcup_{i=1}^n g_iU$ nicht also auch nicht $K=K'\cup\bigcup_{i=1}^n g_iU$.

Die Familie $\{U'_k: k\in K\}$ bildet eine offene Überdeckung der kompakten Menge K, also reichen endlich viele, sagen wir $\{U'_1,\dots,U'_n\}$, aus. Dann ist

$$\{g\in G: gK\cap K\neq\emptyset\}\subseteq\{g\in G: g(\bigcup_{i=1}^n U'_i)\cap K\neq\emptyset\}=$$
$$=\bigcup_{i=1}^n\{g\in G: g(U'_i)\cap K\neq\emptyset\}\text{ endlich.}$$

Nun zur Umkehrung. Wir müssen wegen (19.5) nur zeigen, daß M/G Hausdorff ist. Sei dazu $y_1\neq y_2$ in $N:=M/G$. Falls y_1,y_2 in einer trivialisierenden Menge $V\subseteq N$ liegen, dann können wir ein Blatt U über V wählen, die beiden Punkte $x_1:=(p|_U)^{-1}(y_1)$ und $x_2:=(p|_U)^{-1}(y_2)$ dort durch offene Umgebungen trennen, und da $p|_U: U\to V$ ein Homöomorphismus ist, trennen die Bilder y_1 von y_2. Falls y_2 nicht in einer trivialisierenden Umgebung V von y_1 liegt. Dann wählen wir ein Urbild x_1 von y_1 und eine relativ kompakte Umgebung U_1 von x, deren Abschluß $K:=\bar U_1$ im Blatt über V von x_1 enthalten ist. Dann ist $G\cdot K$ abgeschlossen, denn falls $x\notin G\cdot K$, dann existiert eine Umgebung U von x, s.d. $\{g\in G: gU\cap K\neq\emptyset\}$ endlich ist. Und indem wir für diese endlich vielen $g_i\in G$, die Menge U so verkleinern, daß $g_iU\cap K=\emptyset$ (geht, da $g_ix\notin K$), dann ist $GU\cap K=\emptyset$ und damit auch $U\cap GK=\emptyset$. Somit ist $U_2:=M\setminus G\cdot K$ offen und disjunkt von $G\cdot U_1$ und die Bilder $V_j:=p(U_j)$ sind offene Mengen, die y_1 und y_2 trennen. □

Wir werden später ein Beispiel angeben, daß es nicht genügt zu fordern, daß die Bahnen diskret sind (und die $g\neq 1$ fixpunktfrei sind) um eine Überlagerung zu erhalten.

Und es genügt nicht, daß G strikt diskontinuierlich wirkt um einen Hausdorff-Quotienten zu erhalten.

In den meisten unserer Beispiele ist aber M eine Lie-Gruppe, und G ist eine Untergruppe von M, die durch Linksmultiplikation auf M wirkt.

24.23 Lemma. *Eine Untergruppe $G < \operatorname{Diff}(M)$ ist genau dann diskrete, wenn sie strikt diskontinuierlich wirkt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die stärkere Bedingung*

$$\{g : gK \cap K \neq \emptyset\} \text{ ist endlich für alle kompakten } K \subseteq M$$

erfüllt ist.

Beweis. (1⇐2) Aus $gU \cap U = \emptyset$ folgt insbesonders $g \notin U$.
(1⇒3) Sei $K \subseteq M$ kompakt. Da $(g,h) \mapsto gh^{-1}$ stetig ist, ist $K\,K^{-1} := \{k'k^{-1} : k', k \in K\}$ kompakt und somit der Durchschnitt mit der diskreten Teilmenge G endlich. D.h. $\{g \in G : g \in K\,K^{-1}\} = \{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$ ist endlich. □

Bekanntlich kann man den Raum G/M, bzw. den Raum der linken Nebenklassen Gx, genau dann zu einer Gruppe und $p : M \to G/M$ zu einen Gruppenhomomorphismus machen, wenn G ein Normalteiler in M ist, d.h. $xGx^{-1} \subseteq G$ für alle $x \in M$.

24.24 Lemma. *Falls M zusammenhängend ist, dann ist eine diskrete Untergruppe $G < M$ genau dann ein Normalteiler, wenn sie im Zentrum $Z(M) := \{z \in M : xz = zx\, \forall\, x \in M\}$ liegt.*

Beweis. (⇐) ist trivial.
(⇒) Da die Abbildung $z \mapsto zxz^{-1}$ stetig ist und für $x \in G$, Werte in der diskreten Teilmenge G hat, ist sie konstant und somit ist gleich $zxz^{-1} = 1x1^{-1} = x$, d.h. $z \in Z(M)$. □

Wenn G ein Normalteiler ist, dann ist klarerweise M/G eine Lie-Gruppe, lokal isomorph zu M ist. Umgekehrt folgt aus den Liftungseigenschaften einer Überlagerung sofort, daß die universelle Überlagerung $\tilde{H}$ einer Lie-Gruppe H ebenfalls Lie-Gruppe ist. Und es läßt sich ebenso zeigen, daß lokal isomorphe Lie-Gruppen isomorphe universelle Überlagerungen besitzen. Wir erhalten also bis auf Isomorphie alle lokal isomorphen Gruppen, indem wir aus der entsprechenden universellen Überlagerung $\tilde{G}$ alle diskreten zentralen Untergruppen herausfaktorisieren. Falls das Zentrum $Z(\tilde{G})$ selbst diskret ist (was z.B. bei allen halbeinfachen Gruppen der Fall ist), dann haben wir als anderen Extremfall $\operatorname{ad}(\tilde{G}) := \tilde{G}/Z(\tilde{G})$, die sogenannte adjungierte Gruppe.

24.25 Lemma. *Es sei $N \hookrightarrow G \to H$ eine Überlagerung von Gruppen und G zusammenhängend (dann ist es auch H). Dann ist $Z(H)$ genau dann diskret, wenn $Z(G)$ es ist, und $Z(H) \cong Z(G)/(Z(G) \cap N)$ und $\operatorname{Ad}(G) = G/Z(G) \cong H/Z(H) = \operatorname{Ad}(H)$.*

Beweis. Für jeden surjektiven Gruppenhomomorphismus $p : G \to H$ gilt, daß $p(Z(G)) \subseteq Z(H)$. Sei nun $g \in G$ so, daß $q(g) \in Z(H)$. Dann liegt $xgx^{-1}g^{-1}$ in dem diskreten Normalteiler $\operatorname{Ker}(p) =: N$, und da G zusammenhängend ist, ist dies gerade $x1x^{-1}1^{-1} = 1$, d.h. $g \in Z(G)$. Also ist $Z(G) = p^{-1}(Z(H))$ und $N \subseteq Z(G)$. Daraus folgen die übrigen Eigenschaften mittels Isomorphiesatz:

$$H/Z(H) = (G/N)/(Z(G)/N) \cong (G/Z(G)) \quad \square$$

Wir wollen nun für einige Gruppen die diskreten Untergruppen, bzw. das Zentrum bestimmen. Falls G abelsch ist, dann ist $Z(G) = G$. Wir werden in (71.8) zeigen, daß in diesem Fall die universelle Überlagerung $(\mathbb{R}^n, +)$ ist. Weiters gilt

24.26 Lemma. *Die diskreten Untergruppen von $\mathbb{R}^n$ sind genau die von linear unabhängigen Vektoren erzeugten Untergruppen.*

Beweis. Wir beweisen das mittels Induktion nach n. Für $n = 0$ ist es trivial. Sei nun $n > 0$ und $H < G$ eine diskrete Untergruppe. Wir wählen eine maximal linear unabhängige Teilmenge $H_0 := \{h_1, \dots, h_k\}$ von H. Falls $k < n$ ist, dann liegt H in der von H_0 aufgespannte Hyperebene, und ist somit nach Induktionsvoraussetzung von H_0 erzeugt. Andernfalls ist $k = n$ und wir betrachten die von $\{h_1, \dots, h_{n-1}\}$ aufgespannte Hyperebene E. Dann ist $H \cap E$ eine diskrete Untergruppe von E und wird somit nach Induktionsvoraussetzung von linear unabhängigen $\{h'_1, \dots, h'_{k'}\}$ erzeugt. Da für $j < n$ die $h_j \in H \cap E$ liegen, muß $k' = k$ sein, und wir können o.B.d.A. annehmen, daß die $\{h_1, \dots, h_{k-1}\}$ diese Erzeuger sind. Sei nun Q der kompakte Quader $\{\sum_{j\le n} t_j\, h_j : 0 \le t \le 1\}$. Dann ist $H \cap Q$ endlich, und wir wählen ein $h' = \sum_{j\le n} t_j\, h_j \in H \cap Q$ mit minimalen $t_n > 0$ (solche gibt es, z.B. h_n). Wir behaupten, daß H von $\{h_1, \dots, h_{n-1}, h'\}$ erzeugt wird. Jedes $h \in \mathbb{H}$ läßt sich natürlich als $h = \sum_{j<n} s_j h_j + s_n h'$ schreiben mit $s_j \in \mathbb{R}$. Für geeignet gewählte $k_j \in \mathbb{Z}$ betrachten wir

$$H \ni h'' := h - \sum_{j<n} k_j h_j - k_n h' = \sum_j (s_j - k_j) h_j + (s_n - k_n)(\sum_j t_j h_j)$$
$$= \sum_j \Big(s_j - k_j + (s_n - k_n) t_j\Big) h_j + (s_n - k_n) h_n.$$

Wenn wir $k_n := [s_n]$ und $k_j := [s_j + (s_n - k_n) t_j]$ setzen, dann ist $h'' \in Q$ und der Koeffizient von h_n kleiner als jener von h', also muß er 0 sein, d.h. $s_n \in \mathbb{Z}$. Dann ist aber auch $h - s_n h' \in H \cap E$ und somit nach Induktionsvoraussetzung auch alle anderen $s_j \in \mathbb{Z}$. □

24.27 Folgerung. *Die einzigen n-dimensionalen zusammenhängenden abelschen Lie-Gruppen sind $(S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ für ein $0 \le k \le n$.*

Beweis. Jede abelsche Lie-Gruppe ist von der Form $A \cong \mathbb{R}^n/D$, wobei D von k linear unabhängigen Vektoren erzeugt wird. Nach Anwenden einer linearen Abbildung (uns somit eines Gruppenautomorphismuses)) können wir o.B.d.A. annehmen, daß $D = \langle e_1, \dots, e_k\rangle_{Gr} = \mathbb{Z}^k \times \{0\}$ ist, und somit ist $A = \mathbb{R}^n/DD = (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k})/(\mathbb{Z}^k \times \{0\}) = (\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k) \times (\mathbb{R}^{n-k}/\{0\}) = (S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. □

Um nun für einige nicht Abelsche Gruppen G das Zentrum zu bestimmen, beachten wir folgendes: Falls $G < \operatorname{Diff}(M)$ ist, und für $g \in G$ wir mit $\operatorname{Fix}_g := \{x \in M : gx = x\}$ bezeichnen, dann gilt für $h \in Z(G)$, daß $h(\operatorname{Fix}_g) \subseteq \operatorname{Fix}_g$, denn $h(x) = h(g(x)) = g(h(x))$.

24.28 Proposition. *Die Gruppe $G := \{ax + b : a > 0, a, b \in \mathbb{R}\}$ hat als Zentrum $Z = 1 = \{x\}$. Die Gruppen $SL(n)$, $SO(n)$, $SO(n,k)$, $Sp(n)$, $SO_{\mathbb{C}}(n)$, $SP_{\mathbb{C}}(n)$, $SL_{\mathbb{H}}(n)$ haben als Zentrum alle Vielfachen der Identität, die zu diesen Gruppen gehören. Im Detail heißt das:*

$$Z(G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & n \equiv 0 \mod 2 \\ 1 & n \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$$

Ebenso gilt

$$Z(SL_{\mathbb{C}}(n)) = \mathbb{Z}_n.$$

Die Gruppen Spin(n) haben als Zentrum

$$Z(Spin(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & n \equiv 1 \mod 2 \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathbb{Z}_4 & n \equiv 2 \mod 4 \end{cases}$$

Beweis. Die $ax+b$-Gruppe G ist eine Untergruppe der Diffeomorphismen von $\mathbb{R}$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ existiert ein $g \in G$ mit $\mathrm{Fix}_g = \{t\}$ (z.B. $a := 2$, $b := -t$). Also hält $h \in Z(G)$ jedes $t \in \mathbb{R}$ fix, d.h. $h = \mathrm{id}$.

Für die Gruppen $G \in \{SL(n), \dots, SL_{\mathbb{C}}(n)\}$ gehen wir wie folgt vor. Jede Hyperebene tritt als Fixpunktmenge eines $g \in G$ auf. Also ist jeder eindimensionale Teilraum ein Durchschnitt von Fixpunktmengen und somit muß jeder Vektor $x \neq 0$ eine Eigenvektor sein. Das ist aber nur dann möglich, wenn g ein Vielfaches der Identität ist.

Für die $SO(n)$ erhalten wir folglich: Es ist $\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, \lambda y\rangle = \lambda^2 \langle x, y\rangle \,\forall\, x, y$ genau dann, wenn $\lambda^2 = 1$ ist.

Für die $SL_{\mathbb{C}}(n)$ muß $1 = \det(\lambda) = \lambda^n$ sein, d.h. λ eine n-te Einheitswurzel sein.

Für die Spin(3) und Spin(4) erhält man das Zentrum direkt aus den Isomorphismen mit S^3 und $S^3 \times S^3$. Für die allgemeinen Spin-Gruppen Spin(n) folgt es mittels des Zentrums der Clifford-Algebren Cliff(n). □

24.29 Nicht strikt diskontinuierliche Wirkungen

Wir wollen nun aber auch Gruppen untersuchen die nicht strikt diskontinuierlich wirken (siehe dazu auch (70)). Das ergibt sich z.B. wenn wir eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$x'(t) = f(x(t))$$

betrachten. Falls für jeden Startwert $x(0)$ die Lösungen x global existiert, dann erhalten wir eine Abbildung $\mathrm{Fl} : \mathbb{R} \times M \to M$, wobei $\mathrm{Fl}(\_, x_0)$ gerade die Lösung zum Anfangswert x_0 ist. Diese Abbildung induziert einen Gruppen-Homomorphismus $\mathrm{Fl}^\vee : \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$.

Betrachten wir das zuerst lokal (also o.B.d.A. $M = \mathbb{R}^m$). Falls $f(0) \neq 0$, dann können wir $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}\, f(0) \oplus f(0)^\perp$ zerlegen, und die Abbildung $\mathbb{R} \times f(0)^\perp \to \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R} \oplus f(0)^\perp$, $(t, x) \mapsto \mathrm{Fl}(t, x)$ hat als Ableitung bei $(0, 0)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \mathrm{Fl}(t, 0), \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{x=0} x\right) = (f(0), \mathrm{id}_{f(0)^\perp}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}.$$

Also ist dies eine lokaler Diffeomorphismus, unter dem der Fluß gerade durch $(s; t, x) \mapsto (s + t, x)$ gegeben ist und f durch $(t, x) \mapsto (1, 0)$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \times f(0)^\perp \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(\_+s)\times f(0)^\perp"'] & E \arrow[d, "\mathrm{Fl}_s"] \\ \mathbb{R} \times f(0)^\perp \arrow[r, "\cong"] & E \end{tikzcd}$$

Für eine kleine Umgebung U von 0 ist also $U/G \cong f(0)^\perp$.

Wenn andernfalls $f(0)$ verschwindet, dann approximieren wir die Differentialgleichung durch die Ableitung $A := f'(0)$, d.h. wir betrachten die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$x'(t) = A \cdot x(t).$$

Mittels eines Basiswechsels können wir A auf Jordan'sche Normalform bringen. Danach können wir das transformierte System rekursiv von unten beginnend lösen.

Sehen wir uns das im Fall $m = 2$ genauer an: Die Jordansche Normalform ist von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \qquad \text{wobei } \lambda,\ \mu \text{ die Eigenwerte sind und } \varepsilon \in \{0,1\} \text{ ist.}$$

Der Fall $\varepsilon = 1$ kann nur für $\lambda = \mu$ auftreten. Also ist das transformierte System

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda \cdot x(t) + \varepsilon \cdot y(t) \\ y'(t) &= \mu \cdot y(t). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung $y'(t) = \mu \cdot y(t)$ hat als Lösung $y(t) = e^{\mu\, t} y(0)$ und die erste Gleichung $x'(t) = \lambda \cdot x(t) + \varepsilon \cdot y(t) = \lambda \cdot x(t) + \varepsilon e^{\mu\, t} y(0)$ ist eine möglicherweise inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist $x(t) = e^{\lambda\, t} c$ für jede Konstante c. Variation der Konstanten c liefert den Ansatz $x(t) = e^{\lambda\, t} c(t)$ für die inhomogene Gleichung. Es ist $x'(t) = \lambda\, x(t) + \varepsilon e^{\mu\, t} y(0)$ genau dann wenn $\lambda\, e^{\lambda\, t}\, c(t) + e^{\lambda\, t}\, c'(t) = \lambda\, e^{\lambda\, t}\, c(t) + \varepsilon\, e^{\mu\, t} y(0)$, also wenn $c'(t) = \varepsilon e^{(\mu-\lambda)\, t}\, y(0)$. Da $\varepsilon = 0$ ist, falls $\lambda \neq \mu$, genügt es den Fall $\lambda = \mu$ zu behandeln, i.e. $c(t) = t\, y(0) + c(0)$. Also ist

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{cases} e^{\lambda\, t}\, x(0) & \text{für } \varepsilon = 0 \\ e^{\lambda\, t}\, (x(0) + t\, y(0)) & \text{für } \varepsilon = 1 \end{cases} \\ y(t) &= e^{\mu\, t}\, y(0) \end{aligned}$$

Wir haben folgende triviale Fälle:

1 $\lambda = \mu = \varepsilon = 0$
Es ist $A = 0$ und alle Punkte Fixpunkte. Also ist $\mathbb{R}^2/\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$.

2 $\lambda = \mu = 0 \neq \varepsilon$
Es besteht $\mathbb{R}\, e_1$ aus lauter Fixpunkten und die parallelen Geraden sind Orbits.

3 $\lambda = \varepsilon = 0 \neq \mu$
Es besteht $\mathbb{R}\, e_1$ aus lauter Fixpunkten und die Orbits stehen normal auf sie.

Immer sonst ist 0 ein isolierter Fixpunkt und wir setzen $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wir haben dann folgende Beschreibungen:

4 $\lambda = \mu \in \mathbb{R}, \varepsilon = 0$
Die übrigen Orbits sind die Halbstrahlen durch 0 und $M/\mathbb{R} \cong S^1$.

5 $\lambda = \mu \in \mathbb{R}, \varepsilon = 1$
Die übrigen Orbits sind tangential an $\mathbb{R}\, e_1$ und $M/\mathbb{R} \cong S^1$.

6 $\lambda\mu > 0, \lambda \neq \mu$
Die Koordinaten-Halbachsen sind Orbits, und alle anderen sind tangential an die Achse mit absolut größeren Eigenwert. Wieder ist $M/\mathbb{R} \cong S^1$.

7 $\lambda\mu < 0, \lambda \neq \mu$
Die Koordinaten-Halbachsen sind Orbits, und alle anderen sind tangential an je zwei normal stehende Halbachsen. Es besteht also $M/\mathbb{R}$ aus vier Kopien von $\mathbb{R}$ und vier nicht isolierten Punkten.
8 $\mu = \bar{\lambda} \notin \mathbb{R}$
Die Orbits sind Spiralen um 0. Wieder ist $M/\mathbb{R} \cong S^1$.
9 $\mu = -\lambda \in \mathbb{R} \cdot i$
Die Orbits sind Kreise um 0 und somit ist $M/\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$.

24.30 Universelle Überlagerung

Wir wenden uns nun der Frage der Surjektivität von $\mathrm{Cov}_{pc}(X) \to \mathrm{Act}_{tr}(G)$ zu. Dazu versuchen wir zuerst "maximale" Elemente zu finden. Für transitive Wirkungen ist das maximale Objekt G mit der Rechtsmultiplikation auf sich selbst nach (24.6), denn für jede solche Wirkung von G auf irgendeinem F haben wir eine G-äquivariante Abbildung $G \to F$.
Die entsprechende maximale Überlagerung $\pi : \tilde{X} \to X$ sollte also $G = \pi_1(X, x_0)$ als Faser haben und die Wirkung sollte durch Rechtsmultiplikation gegeben sein. Insbesonders müssen wir $G_y = \{1\}$ für alle $y \in G$ haben. Sei $y_0 \in \tilde{X}$ ein Basispunkt und $x_0 := p(y_0)$. Da $G_{y_0} = \pi(p)\pi(\tilde{X}, y_0)$ ist, haben wir, daß $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend sein sollte.
Für jeden Punkt $y \in \tilde{X}$ finden wir einen Weg v_y von y_0 nach y und, da $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, ist die Homotopie-Klasse $[v_y]$ rel. $\dot{I}$ ist unabhängig von der Wahl des Weges v_y definiert. Also haben wir eine Bijektion

$$\tilde{X} \cong C((I, \{0\}), (\tilde{X}, y_0))/\underset{\text{rel.}\dot{I}}{\sim}\,.$$

Wegen der Liftungseigenschaft (24.5) entsprechen diesen Homotopie-Klassen bijektiv die Homotopie-Klassen von Wegen startend bei x_0, d.h.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "\pi"'] & C((I,\{0\}),(\tilde{X},y_0))/\underset{\text{rel.}\dot{I}}{\sim} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\pi\circ\mathrm{ev}_1"] & C((I,\{0\}),(X,x_0))/\underset{\text{rel.}\dot{I}}{\sim} \arrow[dl, "\mathrm{ev}_1"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Es sei U eine trivialisierende wegzusammenhängende Umgebung von $x_1 \in X$. Wir berechnen $p^{-1}(U)$. Beachte dazu, daß

$$p^{-1}(x_1) = \{[u] : u \text{ ist ein Weg in } X \text{ von } x_0 \text{ nach } x_1\} \text{ gilt.}$$

$$\begin{aligned}
p^{-1}(U) &= \{[w] : w(1) \in U\} \qquad \text{(schreibe } w = w \cdot u^{-1} \cdot u) \\
&= \{[v] \cdot [u] : v(0) = x_0, v(1) = x_1, u(0) = x_1, u(I) \subseteq U\} \\
&= \{[v] \cdot [u] : [v] \in p^{-1}(x_1), u(0) = x_1, u(I) \subseteq U\} \\
&= \bigcup_{[v] \in p^{-1}(x_1)} {}^{[v]}\tilde{U},
\end{aligned}$$

wobei ${}^{[v]}\tilde U := \{[v]\cdot[u] : u(0) = x_1, u(I) \subseteq U\}$. Wenn U wegzusammenhängend ist, dann ist $\pi|_{{}^{[v]}\tilde U} : {}^{[v]}\tilde U \to U$ surjektiv. Um zu zeigen, daß sie injektiv ist, brauchen wir: $u_0(1) = u_1(1) \Rightarrow [u_0] = [u_1]$, d.h. jede geschlossene Kurve in U durch x_1 sollte 0-homotop in X sein. Ein Raum X, der eine Umgebungsbasis von Mengen mit dieser Eigenschaft hat, heißt SEMI-LOKAL EINFACHZUSAMMENHÄNGEND. Jede Mannigfaltigkeit hat offensichtlich diese Eigenschaft, den sie hat sogar kontrahierbare Umgebungen (sternförmige Bilder der Karten).

Für einen wegzusammenhängenden, lokal wegzusammenhängenden und semi-lokal einfachzusammenhängenden Raum X definieren wir also die Menge $\tilde X$ als $C((I,\{0\}),(X,x_0))/\underset{\text{rel.}\dot I}{\sim}$ und $\pi : \tilde X \to X$ durch $\pi([u]) := u(1)$. Da wir für jedes U wie oben wollen, daß ${}^{[u]}\tilde U$ ein Blatt über U ist, erklären wir jene Mengen in $\tilde X$ als offen. Um zu zeigen, daß diese Mengen die Basis einer Topologie bilden, müssen zwei solche Umgebungen U_0 und U_1 mit $y \in {}^{y_0}\tilde U_0 \cap {}^{y_1}\tilde U_1$ nehmen. Dann ist $\pi(y) \in U_0 \cap U_1$ und daher können wir eine solche Umgebung $U \subseteq U_0 \cap U_1$ von $\pi(y)$ finden. Dann ist $y \in {}^{y}\tilde U$ und ${}^{y}\tilde U \subseteq \tilde U_0^{y_0} \cap \tilde U_1^{y_1}$.

Offensichtlich haben wir, daß $\pi|_{{}^{y}\tilde U} : {}^{y}\tilde U \to U$ ein Homöomorphismus ist, und daher $\pi : \tilde X \to X$ eine Überlagerungsabbildung ist.

Beachte, daß wir für irgendeinen Weg u, der bei x_0 startet, haben, daß $t \mapsto [u_t]$ der Lift mit Startwert $[\mathrm{const}_{x_0}] =: y_0$ ist, wobei $u_t(s) := u(ts)$.

Also ist $\tilde X$ wegzusammenhängend, da für $[u] \in \tilde X$ der Weg $[u_t]$ den Punkt $[\mathrm{const}_{x_0}]$ mit $[u]$ in $\tilde X$ verbindet.

Schließlich ist $\tilde X$ einfachzusammenhängend: Es sei dafür v eine geschlossene Kurve durch y_0. Dann ist $u := p \circ v$ eine geschlossene Kurve durch x_0. Es gilt $v(t) = [s \mapsto u(ts)]$, da beide Seiten Lifte von u mit Startpunkt y_0 sind. Daher ist $[\mathrm{const}_{x_0}] = v(0) = v(1) = [u]$. Da Homotopien geliftet werden können, haben wir $\mathrm{const}_{y_0} \sim v$ rel. $\dot I$.

24.31 Theorem. *Es sei X wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semi-lokal einfachzusammenhängend. Dann existiert eine wegzusammenhängende, einfachzusammenhängende Überlagerung von X.*
Ist X eine separable Mannigfaltigkeit so auch die universelle Überlagerung.
Jede einfache-zusammenhängende und wegzusammenhängende Überlagerung von X überlagert jede andere wegzusammenhängende Überlagerung.

Beweis. Wir müssen für den ersten Teil nur die Separabilität der universellen Überlagerung $\tilde X$ beweisen falls X eine separable Mannigfaltigkeit ist. Dazu genügt es die σ-Kompaktheit zu zeigen: Sei $X = \bigcup_i U_i$, wo die U_i trivialisierende relativ-kompakte Umgebungen sind. Da X Lindelöf ist, kann die Indexmenge als abzählbar angenommen werden. Sei $x_0 \in \tilde X$, sodaß $p(x_0) \in U_0$. Es sei W_0 jenes Blatt über U_0, welches x_0 enthält. Wir definieren rekursiv die Menge W_n als die Vereinigung aller Blätter über U_i mit $i \le n$ die einen Punkt aus W_{n-1} enthalten. Jedes W_n besteht nur aus endlich vielen Blättern und ist somit kompakt. Damit ist $\{W_i\}$ eine abzählbare Familie relativ kompakter Mengen, die $\tilde X$ überdecken.

Die letzte Aussage folgt, da wir die Projektion von irgendeiner einfach-zusammenhängenden Überlagerung nach (24.7) liften können, und der Lift eine Überlagerung ist nach (24.11). □

Folgerung. *Es sei X einfachzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und $Y \to X$ sei eine wegzusammenhängende Überlagerung. Dann ist p ein Homöomorphismus. Insbesonders ist jede einfachzusammenhängende offene Teilmenge der Basis einer Überlagerung ein trivialisierende Umgebung.*

Beweis. Da $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ transitiv auf $p^{-1}(x_0)$ wirkt, muß die Faser ein Punkt sein. □

24.32 Proposition. *Es sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung. Wenn X eine topologische Gruppe ist, so ist auch Y eine.*

Beweis. Die Gruppen-Operationen $X \times X \to X$ und $X \to X$ können zu Abbildungen $Y \times Y \to Y$ und $Y \to Y$ geliftet werden: In der Tat, wähle $1 \in p^{-1}(1)$. Dann ist $\pi_1(\mu \circ (p \times p))([u_1], [u_2]) = [(p \circ u_1) \cdot (p \circ u_2)] = \pi_1(p)[u_1 \cdot u_2]$. Also hat $\mu \circ (p \times p)$ einen eindeutigen Lift nach $\tilde{\mu} : Y \times Y \to Y$ wegen (24.11). Ähnlich zeigt man $\pi_1(\nu \circ p)([u]) = [p \circ u]^{-1} = \pi_1(p)[u]^{-1}$. □

24.33 Lemma. *Es wirke G transitiv auf F und F'. Dann gilt: $F \cong_G F' \Leftrightarrow \{G_y : y \in F\} = \{G_{y'} : y' \in F'\}$.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Es sei $\varphi : F \to F'$ ein G-äquivarianter Isomorphismus. Dann ist $G_y \subseteq G_{\varphi(y)} \subseteq G_{\varphi^{-1}(\varphi(y))} = G_y$.
($\Leftarrow$) Nach Voraussetzung sind $y \in F$ und $y' \in F'$ mit $G_y = G_{y'}$. Daher ist $F \cong_G G_y \backslash G = G_{y'} \backslash G \cong_G F'$. □

24.34 Folgerung. *Zwei wegzusammenhängende Überlagerungen eines lokal wegzusammenhängenden Raums sind genau dann äquivalent, wenn ihre Konjugiertheitsklassen die selben sind.*

Beweis. Benütze, daß $p \cong p' \Leftrightarrow F \cong_G F'$ wegen (24.12). □

24.35 Lemma. *Es sei $q : Z \to Y$ und $p : Y \to X$ gegeben mit lokal einfachzusammenhängendem X und wegzusammenhängendem Y. Wenn zwei der drei Abbildungen p, q und $p \circ q$ Überlagerungen sind, dann auch die dritte.*

Beweis. Es seien $p \circ q$ und p Überlagerungen. Dann ist q eine Überlagerung nach (24.11).

Es seien $p \circ q$ und q Überlagerungen. Wir behaupten, daß p eine Überlagerung ist. Es sei U wegzusammenhängend und trivialisierend für $p \circ q$ und wir nehmen eine (notwendigerweise offene) Wegkomponente V von $p^{-1}(U)$. Es sei W eine Weg-Komponente von $q^{-1}(V)$. Dann ist W enthalten in $q^{-1}(V) \subseteq q^{-1}(p^{-1}(U)) = (p \circ q)^{-1}(U)$ und daher ist es enthalten in irgendeinen Blatt $\tilde{U}$ von $p \circ q$ über U. Also ist $p \circ q|_W : W \to X$ eine Einbettung, und daher auch $q|_W : W \to V$. Da q offen ist und $V \subseteq p^{-1}(U) = q(q^{-1}(p^{-1}(U))) = q((p \circ q)^{-1}(U))$ gilt, können wir wegen dem Wegenzusammenhang von V schließen, daß $q|_W : W \to V$ surjektiv ist und daher ein Homöomorphismus ist. Also ist $p|_V = p \circ q \circ (q|_W)^{-1}|_V$ ein Homöomorphismus.

Es seien p und q Überlagerungen. Dann ist $p \circ q$ eine nach (24.1), falls X lokal einfachzusammenhängend ist. □

24.36

Nun wollen wir Überlagerungen mit beliebig gegebener transitiver Wirkung von G auf irgendeinem F finden. Nach (24.9) haben wir, daß $F \cong_G H\backslash G$, wo H irgendeine Isotropie-Untergruppe G_y für die Wirkung auf F ist. Da die universelle Überlagerung $\tilde{X}$ der Wirkung von G auf G durch Rechtsmultiplikation entspricht und als Automorphismus Gruppe G hat, wirkt die Untergruppe H strikt unstetig auf $\tilde{X}$ und $\tilde{X} \to \tilde{X}/H =: Y$ ist eine Überlagerung. Weiters faktorisiert die Abbildung $\pi : \tilde{X} \to X$ über $\tilde{X} \to Y$ und gibt eine Abbildung $p : Y \to X$. Nach Lemma (24.35) haben wir, daß p eine Überlagerungsabbildung ist und seine Standard-Faser $H\backslash\pi^{-1}(x_0) = H\backslash G \cong F$ ist. Weiters, da die Wirkung von G auf $G = \pi^{-1}(x_0)$ durch Rechtsmultiplikation gegeben ist, ist das auch richtig für die Wirkung auf $p^{-1}(x_0) = H\backslash G$. Also entspricht der Wirkung auf Y gerade die natürliche Wirkung von G auf $H\backslash G$. Bis auf den Isomorphismus $H\backslash G \cong_G F$ haben wir also die gewünschte Überlagerung von X gefunden, d.h. wir haben gezeigt:

24.37 Folgerung. *Wenn ein lokal wegzusammenhängender Raum X eine einfach-zusammenhängende Überlagerung hat, dann existiert für jede Untergruppe H von $G := \pi_1(X, x_0)$ eine Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ mit $H = \pi_1(p)\pi_1(Y, y_0)$. Weiters stehen die Isomorphieklassen von wegzusammenhängenden Überlagerungen von X in Bijektion zu Konjugiertheitsklassen von Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.* □

24.38 Theorem. *Es sei X wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semi-lokal einfachzusammenhängend. Dann haben wir eine Äquivalenz zwischen der Kategorie von wegzusammenhängenden Überlagerungen von X und transitiven Wirkungen von $G := \pi_1(X, x_0)$.*

$$\mathrm{Cov}_{pc}(X) \sim \mathrm{Act}_{tr}(G).$$

Insbesonders haben wir eine Bijektion zwischen Isomorphieklassen von wegzusammenhängenden Überlagerungen von X mit Standard-Faser F und Konjugiertheitsklassen von transitiven Wirkungen von $G := \pi_1(X, x_0)$ auf F.

Beweis. Es ist ein allgemeines kategorielles Resultat, daß ein voller und treuer Funktor, der bis auf Isomorphismen surjektiv auf Objekten ist, eine Äquivalenz ist. In der Tat ist ein Inverses gegeben durch die Auswahl eines inversen Bildes für jedes Objekt im Bild bis auf einen Isomorphismus, und wegen der Vollheit und Treue kann dies zu einem Funktor erweitert werden.

Insbesonders haben wir, daß das Skelett der zwei Kategorien isomorph ist. Somit haben wir eine Bijektion zwischen Isomorphie-Klassen von wegzusammenhängenden Überlagerungen und Isomorphie-Klassen von transitiven Wirkungen erhalten. Beachte, daß ein Isomorphismus transitiver Wirkungen nichts anderes ist als eine Bijektion der Darstellungsräume, welche die Wirkungen vertauscht, d.h. $\rho(g, y) = \varphi^{-1}(\rho(g, \varphi(y)))$ erfüllt. Wenn $F = F'$ ist, dann ist dies gerade eine Bijektion φ von F, sodaß die zwei Wirkungen konjugiert zueinander sind via φ. □

Bemerkung. Wir wollen nun ein Beispiel geben, daß für zwei Überlagerungen $p : Y \to X$ und $p' : Y' \to X$ bis auf Isomorphie mehr als ein Element in $\mathrm{Hom}(p, p')$ sein kann.

Nach (24.37) genügt es die entsprechende Frage für transitive Wirkungen zu betrachten. Dazu nehmen wir Untergruppen $H < H' < G$, für welche $\mathrm{Norm}_G(H) = H$ und $\mathrm{Norm}_G(H') = H'$ gilt und für welche ein $g \notin H'$ mit $gHg^{-1} \subseteq H'$ existiert.

Insbesonders ist dann $\mathrm{Aut}_G(H\backslash G) = \{1\}$ und $\mathrm{Aut}_G(H'\backslash G) = \{1\}$. Als nächstes definieren wir zwei G-äquivariante Abbildungen $\varphi_j : H\backslash G \to H'\backslash G$. Solch eine Abbildung φ ist eindeutig bestimmt durch ihre Werte $\varphi(H) = H'g$ auf H, da dann $\varphi(Hg') = \varphi(H \cdot g') = H'g \cdot g' = H'(gg')$ gilt. Diese Definition macht Sinn, da $Hg_1 = Hg_2$ gilt, d.h. $g_1 g_2^{-1} \in H \Rightarrow g g_1 g_2^{-1} g^{-1} \in gHg^{-1} \subseteq H'$, d.h. $H'gg_1 = H'gg_2$. Also können wir das angenommene g und e verwenden. Diese zwei Abbildungen sind nicht dieselben, da $g \notin H' \Rightarrow Hg \neq He$.

Verbleibt zu zeigen, daß H, H', G und g gefunden werden können. Sei dazu F endlich, $G := \mathrm{Bij}(F)$ und es sei $\{F_j : j \in J\}$ eine Partition von F in disjunkte Teilmengen von verschiedener Kardinalität ungleich Null. Dann ist $H := \{\varphi \in G : \forall\, j \in J : \varphi(F_j) = F_j\}$ eine Untergruppe mit $\mathrm{Norm}_G(H) = H$. In der Tat, sei $g \in G$ so, daß $gHg^{-1} \subseteq H$ gilt und wir nehmen an, es gäbe irgendein F_j mit $g(F_j) \neq F_j$. Da $|g(F_j)| = |F_j|$ ist, existieren $j \in J$ und $y_1, y_2 \in F_j$, sodaß $g(y_1)$ und $g(y_2)$ in verschiedenen Mengen F_{j_1} und F_{j_2} sind. Nun nimm $h \in H$, welches durch Austauschen von y_1 und y_2 gegeben ist. Dann bildet ghg^{-1} den Punkt $g(y_1)$ auf $g(y_2)$ ab, und daher ist F_{j_1} nicht invariant, also ist $ghg^{-1} \notin H$.

Es sei $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ und $F_1 = \{1\}$, $F_2 = \{2, 3\}$, $F_3 = \{4, 5, 6\}$ und $F_4 = \{7, 8, 9, 10\}$. Es sei H durch die Partition $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ gegeben und H' sei gegeben durch $\{F_1 \cup F_2, F_3 \cup F_4\}$ und es sei $g := (1, 4)(2, 5)(3, 6) \notin H'$. Dann ist $gHg{-}1 \subseteq H'$, denn $g^{-1}(F_1 \cup F_2) = F_3$, $g^{-1}(F_3) = F_1 \cup F_2$ und $g^{-1}(F_4) = F_4$, daher gilt $ghg^{-1}(F_3) = gh(F_1 \cup F_2) = g(F_1 \cup F_2) = F_3$, $ghg^{-1}(F_1 \cup F_2) = gh(F_3) = g(F_3) = F_1 \cup F_2$ und $ghg^{-1}(F_4) = F_4$.

24.39 Beispiel. Wir wollen nun alle 3-fachen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$, dem Torus $S^1 \times S^1$ und der Klein'schen Flasche bestimmen. Für die Homotopiegruppe G haben wir in diesen Fällen $\langle \alpha, \beta : \emptyset \rangle$, $\langle \alpha, \beta : \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$ und $\langle \alpha, \beta : \alpha^2\beta^2 = 1 \rangle$.

Zuerst haben wir alle transitiven Wirkungen von $\langle \alpha, \beta : \emptyset \rangle$ auf $\{0, 1, 2\}$ zu bestimmen. Wir schreiben die Bijektionen von $\{0, 1, 2\}$ in der Zykel Bezeichnung, d.h. diese sind

$$\{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}.$$

Wobei (1) Ordnung 1 hat, und (123) und (132) haben Ordnung 3 und der Rest hat Ordnung 2. Bis auf Symmetrie dürfen wir annehmen, daß das Bild a von α kleiner oder gleiche Ordnung hat wie das Bild b von β.

Wenn $\mathrm{ord}\, a = 1$, d.h. $a = (1)$, dann muß $\mathrm{ord}\, b = 3$ sein (andernfalls ist die Wirkung nicht transitiv) und die zwei möglichen Wahlen sind via (123) konjugiert.

Wenn $\mathrm{ord}\, a = 2$, dann kann $\mathrm{ord}\, b = 2$ sein, aber b muß verschieden von a sein (andenfalls ist die Wirkung nicht transitiv) und irgendwelche zwei Wahlen sind via dem dritten Element von Ordnung 2 konjugiert, oder b hat Ordnung 3, und wieder sind alle möglichen Wahlen äquivalent. Nach Konjugation mit b erhalten wir $a \sim a'$ und $b \sim b$ und nach Konjugation mit a' erhalten wir $a' \sim a'$ und $b \sim b'$.

Wenn die Ordnung von a und b gerade 3 ist, können diese Elemente entweder gleich oder verschieden sein.

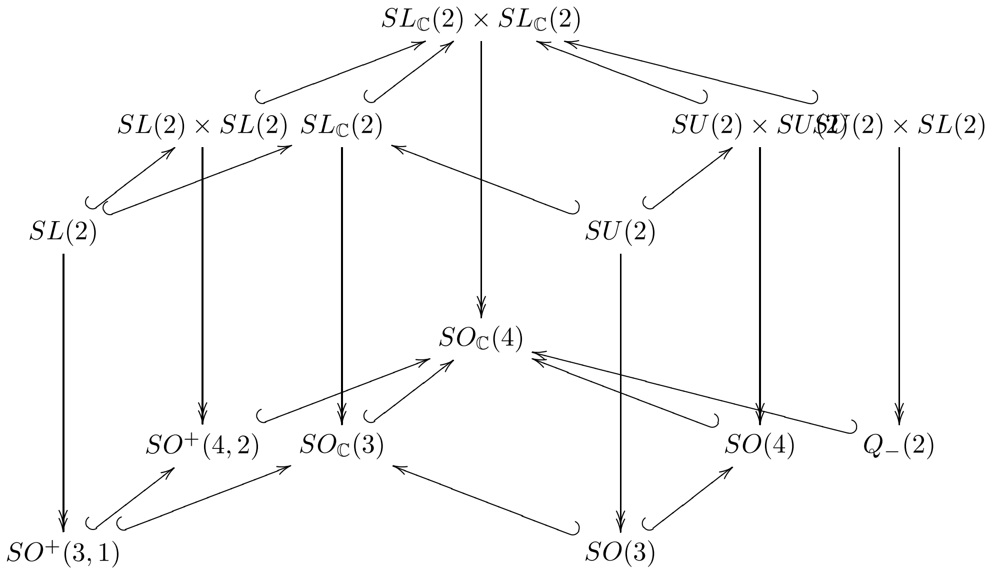
Beachte, daß die Wirkung genau dann normal ist, wenn jedes $g \in G$ entweder Fixpunkt- frei wirkt oder die Identität ist. Also müssen zumindest a und b von Ordnung 3 oder 1 sein. Diese schließt die 3 Wirkungen in der Mitte der nachstehenden Tabelle aus. Da die von a und b erzeugte Gruppe $\{(1), (123), (132)\}$ ist, ist in allen anderen Fällen die Wirkung normal. Die letzten zwei Spalten bestimmt man durch Überprüfen von $ab = ba$ und $a^2b^2 = 1$

Wir erhalten somit die folgenden Repräsentanten für alle transitive Wirkungen:

a	b	normal	Torus	Klein.Flasche
(1)	(123)	+	-	+
(123)	(1)	+	-	+
(12)	(13)	-	+	-
(12)	(123)	-	-	-
(123)	(12)	-	-	-
(123)	(123)	+	-	+
(123)	(132)	+	+	+

24.40 Die Überlagerungen mittels $SL_{\mathbb{C}}(2)$

Wir wollen nun die folgenden Überlagerungen, die im Zusammenhang mit der $SL_{\mathbb{C}}(2)$ auftauchen beschreiben:



Die Überlagerung $SL_{\mathbb{C}}(2) \times SL_{\mathbb{C}}(2) \to SO_{\mathbb{C}}(4)$

Die Wirkung von $\rho : L_{\mathbb{C}}(2) \times L_{\mathbb{C}}(2) \to L_{\mathbb{C}}(L_{\mathbb{C}}(2))$ durch $(T,S) \mapsto (R \to T\,R\,S^{-1})$ eingeschränkt auf $SL_{\mathbb{C}}(2) \times SL_{\mathbb{C}}(2)$ erhält die quadratische Form $\det_{\mathbb{C}} : L_{\mathbb{C}}(2) \to \mathbb{C}$, die als zugehörige nicht degenerierte symmetrische $\mathbb{C}$-Bilinearform die Abbildung $b : L_{\mathbb{C}}(2) \times L_{\mathbb{C}}(2) \to \mathbb{C}$, $b(T,S) := \operatorname{Trace}(T \cdot S^{ad})$ hat. Es ist $SO_b(L_{\mathbb{C}}(2)) \cong SO_{\mathbb{C}}(4)$.

Die Überlagerung $SL_{\mathbb{C}}(2) = Sp_{\mathbb{C}}(2) \to SO_{\mathbb{C}}(3) = SO^+(4,1)$

Die Wirkung ρ eingeschränkt auf die Diagonale $SL_{\mathbb{C}}(2) \subseteq SL_{\mathbb{C}}(2) \times SL_{\mathbb{C}}(2)$ läßt die Identität $\mathrm{id} \in L_{\mathbb{C}}(2)$ invariant und somit auch das Komplement der spurfreien Matrizen $\{T \in L_{\mathbb{C}}(2) : \mathrm{Spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\} \cong \mathbb{C}^3$.

Die Wirkung $\rho_1 : SL_{\mathbb{C}}(2) \times SL_{\mathbb{C}}(2) \to L_{\mathbb{C}}(L_{\mathbb{C}}(2))$, $(T, S) \mapsto (R \mapsto T\,R\,S^*)$ läßt ebenfalls $\det_{\mathbb{C}}$ und somit auch b invariant. Eingeschränkt auf $SL_{\mathbb{C}}(2)$ läßt sie den Teilraum der hermite'schen und der anti-hermite'schen Matrizen invariant. Die Bilinearform b hat auf $\{T \in L_{\mathbb{C}}(2) : T^* = T\}$ Signatur 3 und somit ist $SO_b(\{T \in L_{\mathbb{C}}(2) : T^* = T\}) \cong SO^+(4,3) = SO^+(4,1)$.

Die Überlagerung $SL(2) \times SL(2) \to SO^+(4,2)$

Da das Bild der Wirkung ρ in $L_{\mathbb{C}}$ liegt, und die Einschränkung auf die Untergruppe $SL(2) \times SL(2)$ den Real- und den Imaginärteil invariant läßt, ist ρ eine Komplexifizierung dieser Einschränkung. Die Form b ist reelwertig auf $L(2)$ und hat Signatur 2. Also ist $SO_b(L(2)) \cong SO^+(4,2)$.

Die Überlagerung $SL(2) = SU(2,1) = Sp(2) \to SO^+(3,1)$

Die Einschränkung der Wirkung auf die Diagonale $SL(2)$ läßt ebenfalls den Realteil invariant. Die Form b ist reellwertig auf $\{T \in L(2) : \mathrm{Spur}(T) = 0\}$ und hat Signatur 2. Also ist $SO_b(\{T \in L(2) : \mathrm{Spur}(T) = 0\}) = SO^+(3,2) \cong SO^+(3,1)$.

Die Überlagerung $SU(2) \times SU(2) \to SO(4)$

Der Raum $\mathbb{H}$ der Quaternionen ist ein Teilraum von $L_{\mathbb{C}}(2)$ und wird von $SU(2) \times SU(2)$ invariant gelassen. Die Bilinearform b ist positiv definit auf $\mathbb{H}$ und somit ist $SO_b(\mathbb{H}) \cong SO(4)$.

Die Überlagerung $SU(2) = SL_{\mathbb{H}}(1) = Q(1) = S^3 \to SO(3)$

Die Einschränkung der Wirkung auf die Diagonale $SU(2)$ läßt $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}$ invariant und somit auch das b-orthogonale Komplement. Es ist $SO_b(\mathbb{H}/\mathbb{R}) \cong SO(3)$.

Die Überlagerung $SU(2) \times SL(2) \to Q_-(2)$

Es ist $SU(2,1) = \{T \in SL_{\mathbb{C}}(2) : T^* J T = J\}$ und das Bild von $SU(2,1) \times SU(2)$ unter der Wirkung ρ läßt zusätzlich die sesquilinearform $q : (R_1, R_2) \mapsto \frac{1}{2i}\,\mathrm{Spur}(J\,R_1\,R_2^*)$ invariant, denn

$$\begin{aligned} q(TR_1S^{-1}, TR_2S^{-1}) &= \mathrm{Spur}(JTR_1S^{-1}(TR_2S^{-1})^*) \\ &= \mathrm{Spur}(JTR_1S^{-1}(S^*)^{-1}R_2^*T^*) \\ &= \mathrm{Spur}(JTR_1(S^*S)^{-1}R_2^*T^*) \\ &= \mathrm{Spur}(T^*JTR_1R_2^*) = \mathrm{Spur}(JR_1R_2^*) \\ &= q(R_1, R_2). \end{aligned}$$

Die Matrizen

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

bilden eine orthonormal Basis bezüglich q. Und somit hat $SU(2) \times SL(2)$ Werte in $SO_{\mathbb{C}}(4) \cap L_{\mathbb{H}}(2) = Q_-(2)$.

Als nächstes wollen wir die universelle (zweiblättrige) Überlagerung der $O(n,k)$ beschreiben. Dazu benötigen wir die folgende Algebra:

24.41 Die Clifford-Algebra. *Es sei $b : E \times E \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum E. Dann existiert eine Lösung folgenden universellen Problems: Es ist $\operatorname{Cliff}_b(E)$ eine assoziative Algebra mit 1 zusammen mit einer linearen Abbildung $i : E \to \operatorname{Cliff}_b(E)$ die*

$$i(x)^2 = b(x,x)\,1$$

erfüllt. Und für jede andere lineare Abbildung $f : E \to A$ die (*) erfüllt mit Werten in einer assoziativen Algebra A mit 1, existiert ein eindeutiger Algebra-Homomorphismus $\tilde f$, welcher folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \operatorname{Cliff}_b(E) \arrow[dl, dotted, "!"', "\tilde f"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Ist $(e_i)_{i=1}^m$ eine Basis von E, so ist $(e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k})_{i_1 < \dots < i_k}$ eine Basis von $\operatorname{Cliff}_b(E)$.

Beweis. Wir wählen das Ideal I in der Tensoralgebra $\bigotimes E = \bigoplus_{n=0}^\infty \bigotimes_{k=1}^n E$, welches von $\{v \otimes v - b(v,v)\,1 : v \in E\}$ erzeugt wird, und definieren $\operatorname{Cliff}_b(E) := \bigotimes E/I$ und $i : E \to \operatorname{Cliff}_b(E)$ durch $E \subseteq \bigotimes E \to \bigotimes E/I$. Dann ist offensichtlich $\operatorname{Cliff}_b(E)$ eine assoziative Algebra mit 1 und $i : E \to \operatorname{Cliff}_b(E)$ erfüllt (*), da wir die Relationen $v \otimes v \sim b(v,v)\,1$ für alle $v \in E$ herausfaktorisiert haben.
Wegen $4\,b(v,w)\,1 = b(v+w,v+w)\,1 - b(v-w,v-w)\,1 \sim (v+w)^2 - (v-w)^2 = 2\,(v \cdot w + w \cdot v)$ haben wir die Relation $v \cdot w + w \cdot v = 2\,b(v,w) \cdot 1$ in $\operatorname{Cliff}_b(E)$ und somit ist klar, daß die $e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k}$ mit $i_1 < \dots < i_k$ bereits $\operatorname{Cliff}_b(E)$ erzeugen.
Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, beachte man zuerst, daß $\operatorname{Cliff}_0(E)$ die äußere Algebra $\bigwedge E$ ist. Wenn wir mit C_n das Bild von $\bigoplus_{k=0}^n \bigotimes^k E$ in $\operatorname{Cliff}_b(E)$ bezeichnen. So ist $\operatorname{Cliff}_b(E) = \bigcup_{n=1}^\infty C_n$ und die Abbildung $\bigwedge^n E \to \bigotimes^n E \subseteq C_n \to C_n/C_{n-1}$ ist eine Bijektion. In der Tat ist nach den Isomorphiesätzen

$$\begin{aligned} C_n/C_{n-1} &\cong (A_n/I \cap A_n)/(A_{n-1}/I \cap A_{n-1}) \\ &\cong (A_n/I \cap A_n)/((A_{n-1} + I \cap A_n)/I \cap A_n) \\ &\cong A_n/(A_{n-1} + I \cap A_n) \\ &\cong A_n/(A_{n-1} + J_n) \cong \bigwedge^n E, \end{aligned}$$

wobei $J_n \subseteq \bigotimes^n E$ gerade jenes Ideal ist, welches $\bigwedge^n E = \bigotimes^n E/J_n$ beschreibt.

$$\begin{tikzcd}
(I\cap A_n)/(I\cap A_{n-1}) \arrow[rr, hook] & & A_n/A_{n-1} \arrow[r, two heads] & C_n/C_{n-1} \\
I\cap A_n \arrow[u, two heads] \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & A_n \arrow[u, two heads] \arrow[r, two heads] \arrow[ur, two heads] & C_n \arrow[u, two heads] \\
& A_{n-1}+I\cap A_n \arrow[uul, two heads] \arrow[ur, hook] \arrow[drr, two heads] & & \\
I\cap A_{n-1} \arrow[uu, hook] \arrow[rr, hook] & & A_{n-1} \arrow[uu, hook] \arrow[r, two heads] \arrow[ul, hook] & C_{n-1} \arrow[uu, hook]
\end{tikzcd}$$

Somit ist $\mathrm{Cliff}_b(E)$ als Vektorraum isomorph zu $\bigoplus_{n=1}^\infty C_n/C_{n-1} \cong \bigoplus_{n=1}^\infty \bigwedge^n E = \bigwedge E$, und somit bilden die angegebenen Elemente eine Basis.
Die universelle Eigenschaft folgt nun sofort, da f zu einem Algebra-Homomorphismus $\bigotimes E \to A$ fortgesetzt werden kann, und diese die Erzeuger des Ideals annihiliert. □

24.42 Definition. Es gibt eine Antiinvolution $* : \mathrm{Cliff}_b(E) \to \mathrm{Cliff}_b(E)$, welche durch $v_1 \cdot \dots \cdot v_k \mapsto (-1)^k\, v_k \cdot \dots \cdot v_1$ gegeben ist, also durch die Zusammensetzung von

$$\alpha : v_1 \cdot \dots \cdot v_k \mapsto (-1)^k\, v_1 \cdot \dots \cdot v_k$$

mit

$$\tau : v_1 \cdot \dots \cdot v_k \mapsto v_k \cdot \dots \cdot v_1.$$

Wir identifizieren E mit seinen Bild in $\mathrm{Cliff}_b(E)$ und bezeichnen mit $\mathrm{Pin}_b(E)$ die Gruppe

$$\mathrm{Pin}_b(E) := \{x \in \mathrm{Cliff}_b(E) : x \cdot x^* = \pm 1 = x^* \cdot x, \quad x \cdot E \cdot x^* \subseteq E\}.$$

Dabei darf ± 1 nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und b mit Signatur auch den Wert -1 annehmen. Weiters sei $\rho : \mathrm{Pin}_b(E) \to GL(E)$ definiert durch $\rho(x)(v) := \alpha(x) \cdot v \cdot x^*$. Mit $\mathrm{Spin}_b(E)$ bezeichnen wir dann die Gruppe

$$\mathrm{Spin}_b(E) := \rho^{-1}(SO_b(E)).$$

24.43 Theorem. *Die Abbildung $\rho : \mathrm{Pin}_b(E) \to O_b(E)$, sowie ihre Einschränkung $\rho : \mathrm{Spin}_b(E) \to SO_b(E)$ sind zweiblättrige Überlagerungen.*

Proof. Wir zeigen zuerst, daß $\rho(x) \in O_b(E)$ gilt:

$$\begin{aligned}
b(\rho(x)(v), \rho(x)(v)) &= \rho(x)(v) \cdot \rho(x)(v) = -\rho(x)(v) \cdot \rho(x)(v)^* \\
&= -\alpha(x) \cdot v \cdot x^* \cdot (\alpha(x) \cdot v \cdot x^*)^* \\
&= -\alpha(x) \cdot v \cdot x^* \cdot x \cdot v^* \alpha(x)^* = -\alpha(x) \cdot v \cdot v^* \alpha(x)^* \\
&= b(v,v)\, \alpha(x \cdot x^*) = b(v,v).
\end{aligned}$$

Es wird $O_b(E)$ nach (14.10) durch Spiegelungen $T_x : v \mapsto v - 2\frac{b(v,x)}{b(x,x)} x$ mit $b(x,x) \neq 0$ erzeugt. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist oder $-b$ positiv definit ist, so können wir $b(x,x) = -1$ voraussetzen. Dann liegt $x \in \mathrm{Pin}_b(E)$, denn $x \cdot x^* = -x \cdot x = -b(x,x) = 1$. Falls $-b$ Signatur hat, dann haben wir in der Definition von $\mathrm{Pin}_b(E)$ die Gleichung $x \cdot x^* = \pm 1$ verwendet. Es ist $\rho(x)(x) = \alpha(x) \cdot x \cdot x^* = \alpha(x) = -x$ und für $b(v,x) = 0$ ist

$\rho(x)(v) = \alpha(x) \cdot v \cdot x^* = -x \cdot v \cdot x^* = v \cdot x \cdot x^* = v$, also ist $T_x = \rho(x)$.
Es sei $x \in \operatorname{Ker}\rho$, dann setzen wir $x = x_+ + x_- \in \mathrm{Cliff}_b^+(E) \oplus \mathrm{Cliff}_b^-(E)$. Aus $x \cdot x^* = 1$ folgt $1 = x_+ \cdot x_+^* + x_- \cdot x_-^*$ und $0 = x_+ \cdot x_-^* + x_- \cdot x_+^*$; und aus $\alpha(x) \cdot v \cdot x^* = v$ für alle $v \in E$ folgt $v = x_+ \cdot v \cdot x_+^* - x_- \cdot v \cdot v_-^*$ und $0 = x_+ \cdot v \cdot x_-^* - x_- \cdot v \cdot x_+^*$. Somit ist $v \cdot x_+ = x_+ \cdot v$ und damit liegt x_+ im Zentrum von $\mathrm{Cliff}_b(E)$, und $v \cdot x_- = -x_- \cdot v$. Somit ist $x_+ \in \mathbb{K}$ und $x_- = 0$. Aus $1 = x^2 = x_+^2$ folgt $x = \pm 1$.
Es ist $\mathrm{Pin}_b(E)$ und $\mathrm{Spin}_b(E)$ zusammenhängend, denn $t \mapsto (\cos(t)v + \sin(t)w) \cdot (\cos(t)v - \sin(t)w)$ für $t \in [0, \pi/2]$ verbindet -1 mit 1 falls $v, w \in E$ so gewählt werden daß $b(v, w) = 0$ und $b(v, v) = -1 = b(w, w)$ ist. $\square$

24.44 Beispiele und Anwendungen

Die Formel

$$s : t \mapsto \begin{pmatrix} t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

gibt einen Schnitt für folgende kurze exakte Sequenzen von Gruppen

$$1 \longrightarrow SL(n) \hookrightarrow GL(n) \twoheadrightarrow \mathbb{R}_* \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow SO(n) \hookrightarrow O(n) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow SO(n,k) \hookrightarrow O(n,k) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow SL_{\mathbb{C}}(n) \hookrightarrow GL_{\mathbb{C}}(n) \twoheadrightarrow \mathbb{C}_* \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow SU(n) \hookrightarrow U(n) \twoheadrightarrow S^1 \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow SU(n,k) \hookrightarrow U(n,k) \twoheadrightarrow S^1 \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow SO_{\mathbb{C}}(n) \hookrightarrow O_{\mathbb{C}}(n) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

und somit semidirekte Produkte

$$\begin{aligned} GL(n) &\cong SL(n) \ltimes \mathbb{R}_* \\ O(n) &\cong SO(n) \ltimes \mathbb{Z}_2 \\ O(n,k) &\cong SO(n,k) \ltimes \mathbb{Z}_2 \\ GL_{\mathbb{C}}(n) &\cong SL_{\mathbb{C}}(n) \ltimes \mathbb{C}_* \\ U(n) &\cong SU(n) \ltimes S^1 \\ U(n,k) &\cong SU(n,k) \ltimes S^1 \\ O_{\mathbb{C}}(n) &\cong SO_{\mathbb{C}}(n) \ltimes \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

Die Abbildung $(t,T)\mapsto tT$ liefert exakte Gruppen-Sequenzen

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}\times SL(2n+1) \longrightarrow GL(2n+1) \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{C}_*\times SL_{\mathbb{C}}(n) \longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(n) \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}_+\times SL_{\mathbb{H}}(n) \longrightarrow GL_{\mathbb{H}}(n) \longrightarrow 1,$$

wobei die erste und die letzte folglich ein Isomorphismen beschreiben.

Es ist $D(n)\times SO(n)\cong_{MF} SL(n)$, wobei $D(n)$ die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit positiven Eintragungen auf der Diagonale und Determinante gleich 1 sind. Der Isomorphismus ist durch $(T,S)\mapsto T\cdot S$ gegeben. Eine Inverse erhält man, indem man auf die Spalten einer Matrix in $SL(n)$ das Gramm-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren anwendet:

Sei (e_j) die standard-Orthonormalbasis. Und $f_j := T(e_j) = \sum_k e_k\, T^k_j$ für ein $T\in SL(n)$. Wir wenden nun das Orthonormalisierungsverfahren auf f_j an und erhalten eine Orthonormalbasis f'_j mit $f'_k = \sum_{j\le k} f_j\, D^j_k$ mit $D^j_j>0$ und $D^j_k=0$ für $j>k$. Es sei S die orthogonale Abbildung $S(e_j)=f'_j=\sum_k e_k\, S^k_j$. D.h. $S=D\circ T$, wobei D die Abbildung ist, die f_j auf f'_j abbildet. Also gilt

$$\sum_k e_k \sum_i T^k_i\, D^i_j = \sum_i\sum_k e_k\, T^k_i\, D^i_j = \sum_i f_i\, D^j_i = f'_j = S(e_j) = \sum_k e_k\, S^k_j$$

Also ist $S^k_j=\sum_i T^k_i\, D^i_j$, bzw. $[T]=[S]\,[D]^{-1}$, wobei $[S]\in SO(n)$ und $[D]$ eine obere Dreicksmatrix ist. Diese Darstellung ist eindeutig, da der Durchschnitt dieser beiden Gruppen gerade $\{1\}$ ist. Das Verfahren funktioniert genauso für $SU(n)\subseteq SL_{\mathbb{C}}(n)$ und $Q(n)\subseteq SL_{\mathbb{H}}(n)$.

24.45 Einige transitive Wirkungen

Die Gruppen G der Form $O_b(E)$, $U_b(E)$ und $Q_b(E)$ wirken per Definition auf E (durch $T\mapsto (x\mapsto T(x))$) bzw. auch diagonal auf $E\times E$ (d.h. $T\mapsto ((x,y)\mapsto (Tx,Ty))$) und lassen die Niveau-Flächen $E_c := \{x\in E : b(x,x)=c\}$ (bzw. $(E\times E)_c := \{(x,y) : b(x,y)=c\}$) für jedes $c\in\mathbb{K}$ invariant. Für festes $x\in E_c$ bzw. $(x,y)\in(E\times E)_c$ sei $\rho : L(E)\to E_c$ bzw. $\rho: L(E)\to (E\times E)_c$ die durch $T\mapsto T(x)$ bzw. $T\mapsto (T(x),T(y))$ gegebenen linearen Abbildungen. Wir werden zeigen, daß für alle diese Gruppen (bei geeigneter Wahl von c) zumindest eine dieser beiden Abbildung ρ surjektiv ist, also G auf der Niveaufläche $M=G\cdot x$ transitiv wirkt. Weiters werden wir zeigen, daß die Fixpunktgruppe G_x eines festen Punkts x in der Niveaufläche vom selben Typ aber kleinerer Dimension wie G ist. Die daraus erhaltenen Hauptfaserbündel

$$G_x \hookrightarrow G \twoheadrightarrow M$$

lassen uns dann mit Induktion unter anderem die Homotopiegruppen von G berechnen.

$SO(n)$. Diese Gruppe wirkt offensichtlich auf $\mathbb{R}^n$. Der Orbit durch einen Punkt $x_0\in\mathbb{R}^n$ ist $\{x\in\mathbb{R}^n : b(x,x)=b(x_0,x_0)\}\cong S^{n-1}$. In der Tat können wir (für $n\ge 2$) sowohl x als auch x_0 zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis ergänzen (ergänze zu irgendeiner Basis und wende das Gramm-Schmidt Verfahren an), und der Basiswechsel gehört dann zu $SO(n)$. Insbesonders wirkt also $SO(n)$ transitiv auf S^{n-1} und die Fixgruppe bzgl. $1 = (0,\dots,0,1) \in S^{n-1}$ ist isomorph zu $SO(n-1)$ (denn T läßt dann auch $1^\perp = \mathbb{R}^{n-1}$ invariant), d.h. wir haben die Sequenz:

$$SO(n-1) \hookrightarrow SO(n) \twoheadrightarrow S^{n-1}.$$

SU(n) wirkt entsprechend auf $\mathbb{C}^n$ mit Orbits $\{x \in \mathbb{C}^n : h(x,x) = c\}$, wobei h die Standard Hermite'sche Form ist. Insbesonders wirkt also $SU(n)$ transitiv auf S^{2n-1} mit Fixgruppe bzgl. $1 = (0,\dots,0,1)$ isomorph zu $SU(n-1)$, d.h. wir haben die Sequenz:

$$SU(n-1) \hookrightarrow SU(n) \twoheadrightarrow S^{2n-1}.$$

Q(n) wirkt schließlich auf $\mathbb{H}^n$ mit Orbits $\{x \in \mathbb{C}^n : q(x,x) = c\}$, wobei q die Standard Hermite'sche Form ist. Insbesonders wirkt also $Q(n)$ transitiv auf S^{4n-1} mit Fixgruppe bzgl. $1 = (0,\dots,0,1)$ isomorph zu $Q(n-1)$, d.h. wir haben die Sequenz:

$$Q(n-1) \hookrightarrow Q(n) \twoheadrightarrow S^{4n-1}.$$

SO⁺(n,k). Diese Gruppe wirkt für $k < n$ transitiv auf $\{x \in \mathbb{R}^n : b(x,x) = 1\} \cong \mathbb{R}^k \times S^{n-k-1}$ und die Fixgruppe von $1 = (0,\dots,0;1)$ ist isomorph zu $SO^+(n-1,k)$. Also haben wir die Sequenz:

$$SO^+(n-1,k) \hookrightarrow SO^+(n,k) \twoheadrightarrow \mathbb{R}^k \times S^{n-k-1}.$$

In der Tat $\{x \in \mathbb{R}^n : b(x,x) = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} : -|x|^2 + |y|^2 = 1\} \cong \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^k \times S^{n-k-1}\}$, wobei der Isomorphismus durch $(x,y) \mapsto (x, \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} y)$ gegeben ist. Da $1^\perp = \mathbb{R}^{n-1}$ ist $G_1 = SO^+(n-1,k)$. Schließlich folgt die Transitivität, indem wir für $x \neq y$ mit $b(x,x) = 1 = b(y,y)$ in der x-y-Ebene x in y drehen. (geht durch Zusammensetzung von zwei Spiegelungen um $x - z$ und $y - z$, wobei z ein Vektor in dieser Ebene mit $b(z,z) = 1$ und $b(z,x) \neq 1 \neq b(z,y)$ ist).
SU(n,k) und ***Q(n,k)***. Hier gehen wir analog vor und erhalten

$$SU(n-1,k) \hookrightarrow SU(n,k) \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{2k} \times S^{2n-2k-1}$$
$$Q(n-1,k) \hookrightarrow Q(n,k) \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{4k} \times S^{4n-4k-1}.$$

Sp(n) wirkt transitiv auf $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : b(x,y) = 1\}$ und die Fixgruppe von (e_m, e^m) ist isomorph zu $Sp(n-2)$, wobei $n = 2m$ ist. Also haben wir die Sequenz:

$$Sp(n-2) \hookrightarrow Sp(n) \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n \times S^{n-1}.$$

Daß $Sp(n)$ transitiv auf M wirkt, können wir wie folgt sehen: Für $b(x,y) = 1 = b(x',y')$ ergänzen wir x und y zu komplementierten Lagrange Teilräumen L und M und ebenso x' und y' zu L' und M'. Wir können nun x mit Vektoren in $y^\perp$ zu einer Basis $(x, e_2, \dots, e_m)$ von L ergänzen und in M die via $z \mapsto b(z, \_)$ duale Basis $(y, e_{m+2}, \dots, e_{2m})$ wählen. Und ebenso erhalten wir zweitens eine Basis $(x', e'_2, \dots, e'_m; y', e'_{m+2}, \dots, e'_{2m})$ von E. Der Basiswechsel ist klarerweise der gesuchte Symplektomorphismus. Schließlich wollen wir noch $\{(x,y) : b(x,y) = 1\}$ bestimmen.

Es ist $b(x,y) = \langle Jx, y\rangle$ und somit erhalten wir eine Kette von Diffeomorphismen:

$$\begin{aligned}
M &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : b(x,y) = \langle Jx, y\rangle = 1 (\Rightarrow y \neq 0)\} \quad \text{via } J \times 1\\
&\cong \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : \langle x, y\rangle = 1\} \quad \text{via } (x,y) \mapsto (x + \frac{1}{|y|^2} y, y)\\
&\cong \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n_* : \langle x, y\rangle = 0\} \quad \text{via } (x,y) \mapsto (x, \frac{1}{|y|} y, |y|)\\
&\cong \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ : \langle x, y\rangle = 0\} \quad \text{via } (x,y,t) \mapsto (y, x; \ln t)\\
&\cong TS^{n-1} \times \mathbb{R} \quad \text{via } (y,x;t) \mapsto (y, x + t\, y)\\
&\cong S^{n-1} \times \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

$Sp_{\mathbb{C}}(n)$ und ***$SO_{\mathbb{C}}(n)$***. Hier erhalten wir analog

$$\begin{aligned}
SO_{\mathbb{C}}(n-1) \hookrightarrow SO_{\mathbb{C}}(n) \twoheadrightarrow \{x \in \mathbb{C}^n : b(x,x) = 1\} \cong TS^{n-1}\\
Sp_{\mathbb{C}}(n-2) \hookrightarrow Sp_{\mathbb{C}}(n) \twoheadrightarrow \{(x,y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : b(x,y) = 1\}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
M &:= \{x \in \mathbb{C}^n : b(x,x) = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : |x|^2 - |y|^2 = 1, \langle x, y\rangle = 0\}\\
&\cong \{(x,y) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = 0\}\\
&\cong TS^{n-1}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
M &:= \{(z,w) \in \mathbb{C}^{2n} : b(z,w) = \langle J\bar{z}, w\rangle_{\mathbb{C}} = 1\} \quad \text{via } J \times 1\\
&= \{(z,w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n_* : \langle z, w\rangle_{\mathbb{C}} = 1\} \quad \text{via } (z,w) \mapsto \Big(z - \tfrac{w}{|w|^2}, w\Big)\\
&= \{(z,w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n_* : \langle z, w\rangle_{\mathbb{C}} = 0\} \quad \text{via } (z,w) \mapsto \Big(z, \tfrac{w}{|w|}, |w|\Big)\\
&= \{(z,w,t) \in \mathbb{C}^n \times S^{2n-1} \times \mathbb{R}_+ : \langle z, w\rangle + i\, \langle iz, w\rangle = 0\}\\
&\qquad\qquad \text{via } (z,w,t) \mapsto (z + tw, w)\\
&= \{(z,w) \in \mathbb{C}^n \times S^{2n-1} : \langle iz, w\rangle = 0\} \quad \text{via } (z,w) \mapsto (z, iw)\\
&= \{(z,w) \in \mathbb{C}^n \times S^{2n-1} : \langle z, w\rangle = 0\} = TS^{2n-1} \quad \text{da } \langle w, iw\rangle = 0
\end{aligned}$$

$Q_-(n)$ wirkt transitiv auf $\{x \in \mathbb{H}^n : q(x,x) = i\}$ mit Fixpunktgruppe $Q_-(n-1)$ bzgl. $1 := (0, \dots, 0; 1)$. Also erhalten wir eine Sequenz

$$Q_-(n-1) \hookrightarrow Q_-(n) \twoheadrightarrow TS^{2n-1}/\mathbb{R},$$

wobei $TS^{2n-1}/\mathbb{R}$ das (ziemlich nicht triviale) Komplement des durch Multiplikation mit i gegeben trivialen Linienbündels des Tangentialbündels TS^{2n-1} ist, siehe (25.2).

In der Tat ist $q(x,x) = -\overline{q(x,x)}$, d.h. $q(x,x) \in \{0\} \times \mathbb{R}^3$, bzw. in Koordinaten

$$
\begin{aligned}
q(x,x) = i(&\sum_l (x^l)^2 + (x^{n+l})^2 - (x^{2n+l})^2 - (x^{3n+l})^2) \\
&+ 2j(\sum_l x^{n+l} x^{2n+l} - x^l x^{3n+l}) \\
&+ 2k(\sum_l x^l x^{2n+l} + x^{n+l} x^{3n+l}).
\end{aligned}
$$

Und somit ist

$$
\begin{aligned}
M &:= \{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : q(x,x) = i\} \\
&= \{(x,y,z,u) : |x|^2 + |y|^2 = 1 + |z|^2 + |u|^2, \\
&\qquad \langle (x,y),(z,u)\rangle = 0, \\
&\qquad \langle (x,y),(-u,z)\rangle = 0\} \\
&\cong \{(v,w) \in S^{2n-1} \times \mathbb{C}^n : v \perp w, v \perp iw\} =: E,
\end{aligned}
$$

also ist E das Komplement des trivialen Linienbündels

$$
\{(v,iv) : v \in S^{2n-1}\} \subseteq TS^{2n-1} = \{(v,w) : v \in S^{2n-1}, v \perp w\}.
$$

Die Fixpunktgruppe ist offensichtlich $Q_-(n)$, denn $1^\perp = \mathbb{H}^{n-1}$. Das $Q_-(n)$ auf M transitiv wirkt, sehen wir wie folgt: Die Standardbasis e_l erfüllt $q(e_j,e_k) = i\,\delta_{j,k}$. Wir nennen so eine Basis eine Orthonormalbasis für q. Jeder Vektor f_1 mit $q(f_1,f_1) = i$ läßt sich zu einer Orthogonalbasis (f_j) induktiv wie folgt erweitern. Seinen $(f_j)_{j\le k}$ bereits gewählt. Sei $x \ne 0$ in $\{x : q(f_j,x) = 0\,\forall\, j \le k\}$. Dann ist x linear unabhängig von $\{f_1,\dots,f_k\}$, denn andernfalls ist $x = \sum_{j\le k} f_j\,\lambda_j$ mit $\lambda_j \in \mathbb{H}$, und $0 = q(f_j,x)$ liefert induktiv $\lambda_j = 0$, d.h. $x = 0$. Da q nicht degeneriert ist, existiert ein x' mit $q(x,x') \ne 0$. Dann setzen wir $x'' := x' + \sum_{j\le q} f_j\, i\, q(f_j,x')$ und es gilt: $q(x,x'') = q(x,x') \ne 0$ und $q(f_j,x'') = q(f_j,x') + q(f_j,x')\,i^2 = 0$. Nun ist $q(x + x''\lambda, x + x''\lambda) = q(x,x) + \overline{\lambda}\,q(x'',x) + q(x,x'')\,\lambda + \overline{\lambda}\,q(x'',x'')\,\lambda$. Wäre also $q(x,x) = 0$ für alle $x \in \langle f_1,\dots,f_k\rangle^\perp$, dann wäre $\overline{q(x,x'')\,\lambda} + q(x,x'')\,\lambda = 0$ für alle λ und somit $q(x,x'')\,\lambda \in \{0\} \times \mathbb{R}^3$ für alle λ und somit $q(x,x'') = 0$. Da $\lambda \mapsto (\overline{\lambda} \cdot x \cdot \lambda)$ transitiv auf $\{0\} \times \mathbb{R}^3$ wirkt, können wir o.B.d.A. annehmen, daß $q(x,x) = i$ ist, und somit ist x das gesuchte f_{k+1}.

Zusammenfassend haben wir also die folgenden Hauptfaserbündel mit den angegebenen Dimensionen

$$\begin{array}{ccccc} SO^+(n-1,k) & \hookrightarrow & SO^+(n,k) & \twoheadrightarrow & \mathbb{R}^k \times S^{n-k-1} \\ \frac{(n-1)(n-2)}{2} & & \frac{n(n-1)}{2} & & n-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} SU(n-1,k) & \hookrightarrow & SU(n,k) & \twoheadrightarrow & \mathbb{R}^{2k} \times S^{2n-2k-1} \\ n^2-2n & & n^2-1 & & 2n-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} Q(n-1,k) & \hookrightarrow & Q(n,k) & \twoheadrightarrow & \mathbb{R}^{4k} \times S^{4n-4k-1} \\ (n-1)(2n-1) & & n(2n+1) & & 4n-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} Sp(n-2) & \hookrightarrow & Sp(n) & \twoheadrightarrow & \mathbb{R}^{n} \times S^{n-1} \\ \frac{(n-2)(n-1)}{2} & & \frac{n(n+1)}{2} & & 2n-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} SO_{\mathbb{C}}(n-1) & \hookrightarrow & SO_{\mathbb{C}}(n) & \twoheadrightarrow & TS^{n-1} \\ (n-1)(n-2) & & n(n-1) & & 2n-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} Sp_{\mathbb{C}}(n-2) & \hookrightarrow & Sp_{\mathbb{C}}(n) & \twoheadrightarrow & TS^{2n-1} \\ (n-2)(n-1) & & n(n+1) & & 4n-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} Q_-(n-1) & \hookrightarrow & Q_-(n) & \twoheadrightarrow & TS^{2n-1}/\mathbb{R} \\ (n-1)(2n-3) & & n(2n-1) & & 4n-3 \end{array}$$

Nun das in (21.22) versprochene Beispiel über Transversalität:

24.46 Das Möbiusband als Nullstellenmenge

Betrachten wir das Möbiusband M"ob $\subseteq \mathbb{R}^3$. Dieses kann nicht die Nullstellenmenge einer regulären $\mathbb{R}$-wertigen Funktion sein, sonst wäre das Möbiusband orientierbar (siehe (46.8)). Wir wollen nun M"ob als Urbild der Einbettung $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ unter einer Abbildung vom Volltorus nach $\mathbb{P}^2$ darstellen, die transversal zu $\mathbb{P}^1$ ist. Dazu die folgende Überlagerung des Volltorus:

$$p : \mathbb{R} \times D^2 \to \text{Volltorus} \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{wobei} \quad D^2 = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + s^2 \leq 1\}$$

$$p : \begin{pmatrix} \varphi \\ t \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\varphi(1 + t \cdot \cos\varphi - s \cdot \sin\varphi) \\ \sin 2\varphi(1 + t \cdot \cos\varphi - s \cdot \sin\varphi) \\ t \cdot \sin\varphi + s \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}$$

p ist Zusammensetzung von Ψ_1 und Ψ_2 mit

$$\Psi_1 : \begin{pmatrix} \varphi \\ t \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi \\ t \cdot \cos\varphi - s \cdot \sin\varphi \\ t \cdot \sin\varphi + s \cdot \cos\varphi \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \varphi \\ \bar{t} \\ \bar{s} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\Psi_2 : \begin{pmatrix} \varphi \\ \bar{t} \\ \bar{s} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\varphi(1 + \bar{t}) \\ \sin 2\varphi(1 + \bar{t}) \\ \bar{s} \end{pmatrix}$$

mit den Ableitungen:

$$\Psi_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ * & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\Psi_2' = \begin{pmatrix} -2\sin 2\varphi(1 + \bar{t}) & \cos 2\varphi & 0 \\ 2\cos 2\varphi(1 + \bar{t}) & \sin 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist p ein lokaler Diffeomorphismus, d.h. eine submersive Immersion

$$p^{-1}(\text{M"ob}) = \{(\varphi, t, 0)\} \text{ (vergleiche (9.3))}$$
$$p^{-1}(\text{Möbiusband, das um } \pi/2 \text{ verdreht startet}) = \{(\varphi, 0, s)\}.$$

Sei die glatte Abbildung $\bar p : S^1 \times D^2 \to \text{Volltorus} \subseteq \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x^2-y^2)(1+tx-sy) \\ 2xy\cdot(1+tx-sy) \\ ty+sx \end{pmatrix}.$$

Da

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{R}\times D^2 \to S^1\times D^2 \\ (\varphi,t,s) \to (\cos\varphi, \sin\varphi, t, s) \end{cases}$$

eine Submersion (sogar die universelle Überlagerung) ist und $p = \bar p \circ \pi$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, und da jeder Punkt des Torus unter $\bar p$ zwei Urbilder hat, ist $\bar p$ eine zweiblättrige Überlagerung. Außerdem gilt $\bar p^{-1}(\text{M"ob}) = \{(x,y;t,0)\}$. Sei nun die glatte Abbildung f gegeben durch

$$f : \begin{cases} S^1\times D^2 \to S^2 \\ (x,y;t,s) \mapsto (x,y,s)\cdot(\sqrt{1+s^2})^{-1} \end{cases}$$

dann ist $f^{-1}(S^1) = \bar p^{-1}(\text{M"ob})$, wo $S^1 \subseteq S^2$ der Äquator (i.e. $s=0$). Da $q : S^2 \to \mathbb{P}^2$ per Definition eine Überlagerung ist, und

$$\begin{aligned}
\bar p(x,y;t,s) = \bar p(x_1,y_1;t_1,s_1) &\Rightarrow \\
&\Rightarrow (x,y;t,s) = \pm(x_1,y_1;t_1,s_1) \\
&\Rightarrow f(x,y;t,s) = (x,y,s)\cdot(\sqrt{1+s^2})^{-1} \\
&\qquad\qquad\quad = \pm(x_1,y_1,s_1)\cdot(\sqrt{1+s_1^2})^{-1} = \pm f(x_1,y_1;t_1,s_1) \\
&\Rightarrow q(f(x,y;t,s) = q(f(x_1,y_1;t_1,s_1)),
\end{aligned}$$

läßt sich also $\bar f$:Volltorus $\to \mathbb{P}^2$ durch folgendes Diagramm wohldefinieren:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\times D^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}\times D^2 \arrow[d, "p"] \\
S^1\times D^2 \arrow[r, "\bar p"] \arrow[d, "f"'] & \text{Volltorus} \arrow[d, "\bar f"] \\
S^2 \arrow[r, "q"] & \mathbb{P}^2
\end{tikzcd}$$

Die Einschränkung von $\bar f$ auf M"ob macht folgendes Diagramm kommutativ.

$$\begin{tikzcd}
S^1\times D^2 \arrow[d, "f"'] & \supseteq & S^1\times(-1,1)\times\{0\} \arrow[r, "\bar p"] \arrow[d, "f"'] & \text{M"ob} \arrow[d, "f|\,\text{M"ob}"'] & \subseteq & \text{Volltorus} \arrow[d, "\bar f"] \\
S^2 & \supseteq & S^1 \arrow[r, "q|S^1"] & \mathbb{P}^1 & \subseteq & \mathbb{P}^2,
\end{tikzcd}$$

denn klarerweise ist

$$\bar f^{-1}(\mathbb{P}^1) = \bar f^{-1}(q(S^1)) = \bar p(f^{-1}(S^1)) = \bar p(S^1\times(-1,1)\times\{0\}) = \text{M"ob}\,.$$

Da f transversal zur S^1 ist, ist auch $\bar{f}$ transversal zu $\mathbb{P}^1$ (q ist Überlagerung). Sei nämlich $v := (v_0, v_1, v_2) \in T_{(x,y,0)}S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann ist $v \perp (x, y, 0) = f(x, y, t, 0)$, d.h. $(v_0, v_1) \perp (x, y)$, i.e. $(v_0, v_1) \in T_{(x,y)}S^1$. Weil $\frac{d}{dt}|_{t=0} t \cdot (1 + t^2)^{-1} = 1$ und $\frac{d}{dt}|_{t=0}(1 + t^2)^{-1} = 0$) ist $(0, 0, v_2) = T_{(x,y,t,0)}f(x, y; t, v_2)$, also $T_{f(x,y,t,0)}S^2 = T_{(x,y,0)}S^1 + \operatorname{Bild} T_{(x,y,t,0)}f$. □

IV. Vektorfelder

Gewöhnliche Differentialgleichungen werden auf Mannigfaltigkeiten durch Vektorfelder beschrieben. Um von der Glattheit jener sprechen zu können, benötigen wir das Tangentialbündel als Mannigfaltigkeit bzw. besser als Vektorbündel und diese beiden Dinge stellen wir in den ersten beiden Abschnitten bereit. Die nächsten beiden sind den Differentialgleichungen und ihren Lösungen, den lokalen Flüssen, gewidmet. Es wird dann die Lie-Klammer als Obstruktion gegen das Vertauschen der lokalen Flüsse zweier Vektorfelder behandelt. Schließlich folgt noch die Verallgemeinerung zu Integralmannigfaltigkeiten von Teilvektorbündeln und der zentrale Satz von Frobenius über deren Existenz.

25. Tangentialbündel

25.1 Motivation

Wir wollen gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung auf Mannigfaltigkeiten behandeln. Dazu betrachten wir zuerst den klassischen Fall:Ist eine Differentialgleichung $x'(t) = f(x(t))$ bzw. $x'(t) = f(t, x(t))$ gegeben, wobei $f : U \to \mathbb{R}^n$, $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist, so erhält man als Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ eine lokal definierte differenzierbare Kurve $x : (a, b) \to U$.

Wir wollen nun U durch eine Mannigfaltigkeit M ersetzen. Als Lösungskurve $x : (a, b) \to M$ werden wir wohl eine differenzierbare Kurve in der Mannigfaltigkeit erhalten. Deren Ableitung $x'(t)$ an der Stelle t ist ein Tangentialvektor in $T_{x(t)}M$. Die die Differentialgleichung konstituierende Funktion f muß folglich Punkte $x \in M$ auf Tangentialvektoren in diesen Punkten abbilden:

$$f : M \ni p \mapsto f(p) \in T_pM, \quad \text{d.h.} \quad f : M \to \bigsqcup_{p \in M} T_pM,$$

wobei $\bigsqcup_{p\in M} T_pM$ die disjunkte Vereinigung aller T_pM mit $p \in M$ bezeichnet.

25.2 Definition (Tangentialbündel)

Sei M eine Mannigfaltigkeit, so ist der Tangentialraum von M definiert durch:

$$TM := \bigsqcup_{p\in M} T_pM := \bigcup_{p\in M} \{p\} \times T_pM.$$

Auf TM existiert eine Abbildung $\pi_M : TM \to M$, definiert durch $\pi_M : \{p\} \times T_pM \ni (p, v) \mapsto p \in M$, die sogenannte Fusspunktabbildung. Jedes glatte $f : M \to N$

mit der TANGENTIALABBILDUNG von f bei p: $T_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$ induziert eine Abbildung $Tf : TM \to TN$, die sogenannte TANGENTIALABBILDUNG von f, die durch $(Tf)(p,v) := (f(p), T_p f(v))$ definiert ist. Es ist also $Tf|_{T_p M} = T_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$ linear.
Seien $f : M \to N$ und $g : N \to P$ glatt, dann nimmt die Kettenregel die sehr einfache Gestalt

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf$$

an, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}(T(g \circ f))(x,v) &= \Big((g \circ f)(x), T_x(g \circ f)(v)\Big)\\ &= \Big(g(f(x)), T_{f(x)} g\big((T_x f)(v)\big)\Big)\\ (Tg \circ Tf)(x,v) &= Tg(Tf(x,v)) = Tg(f(x), T_x f(v))\\ &= \Big(g(f(x)), T_{f(x)} g\big((T_x f)(v)\big)\Big)\end{aligned}$$

Weiters gilt $T\,\mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{TM}$ und $(Tf)^{-1} = T(f^{-1})$.

25.3 Bemerkungen

Um von f schöne Eigenschaften (insbesondere Differenzierbarkeit) fordern zu können, brauchen wir eine glatte Mannigfaltigkeitsstruktur auf $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M$. Betrachten wir dazu vorerst wieder Teilmannigfaltigkeiten M eines $\mathbb{R}^n$.
Sei $M = U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, dann ist $T_p M = \mathbb{R}^m$ und somit $TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \mathbb{R}^m = M \times \mathbb{R}^m$. Für eine glatte Abbildung $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Tangentialabbildung $Tf : U \times \mathbb{R}^m \to V \times \mathbb{R}^n$ gegeben durch $(Tf)(x,v) = (f(x), f'(x)(v))$.
Sei nun M eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und sei $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \to W \cap M$ eine lokale Parametrisierung. Dann ist

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M \subseteq M \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}.$$

Weiters ist $T\varphi : \mathbb{R}^{2m} \supseteq U \times \mathbb{R}^m = TU \to TM$, $(x,v) \mapsto (\varphi(x), \varphi'(x)(v))$ eine lokale Parametrisierung von TM: Sie ist klarerweise C^∞ und ist auf der offenen Teilmenge TU des $\mathbb{R}^{2m}$ definiert.
Die Jacobimatrix von $T\varphi$ bei (x,v) ist:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x) & \frac{\partial}{\partial v}\varphi(x) \\ \frac{\partial}{\partial x}\varphi'(x)(v) & \frac{\partial}{\partial v}\varphi'(x)(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ * & \varphi'(x) \end{pmatrix}.$$

Da φ regulär ist, ist $\varphi'(x)$ invertierbar und somit auch die Jacobimatrix von $T\varphi$, d.h. $T\varphi$ ist regulär.
Sei $f : M \to N$ glatt und seien $\varphi : \mathbb{R}^m \to M$ sowie $\psi : \mathbb{R}^n \to N$ lokale Parametrisierungen. Dann sind $T\varphi$ und $T\psi$ lokale Parametrisierungen von TM und TN nach (2). Die lokale Darstellung von Tf bezüglich dieser Parametrisierungen ist:

$$(T\psi)^{-1} \circ Tf \circ T\varphi = T(\psi^{-1}) \circ Tf \circ T\varphi = T(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi).$$

Da die lokale Darstellung $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ von f glatt ist, gilt gleiches auch für die von Tf, also ist auch Tf glatt.

Falls nun M eine abstrakte Mannigfaltigkeit ist, dann sollten wir mittels der Karten $\varphi : \mathbb{R}^M \supseteq U \to M$ von M einen glatten Atlas $\{T\varphi : TU = U \times \mathbb{R}^M \to TM\}$ von TM definieren können. In der Tat zeigt die selbe Rechnung wie für konkrete Mannigfaltigkeiten, daß der Kartenwechsel glatt ist.

25.4 Lemma (Tangentialbündel als Faserbündel). *Für jede Mannigfaltigkeit M ist $TM \xrightarrow{\pi}$ ein Faserbündel.*

Beweis. Wir müssen lokale Trivialisierungen von $TM \xrightarrow{\pi} M$ finden. Sei dazu $\varphi : U \to M$ eine Karte von M. Dann ist $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq M$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge von M und $T\varphi : U \times \mathbb{R}^m = TU \to TM$ ist eine Karte von TM nach (25.3). Das Bild von $T\varphi$ ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Bild}(T\varphi) &= \{(x,v) \in TM : x \in \operatorname{Bild}\varphi =: V,\ v \in T_xM\}\\ &= \{(x,v) \in TM : x \in V\} = \pi_M^{-1}(V).\end{aligned}$$

Eine Trivialisierung von π über V ist nun durch folgendes Diasgramm gegeben:

$$\begin{tikzcd}
TM \arrow[d, "\pi"'] & \pi^{-1}(V) \arrow[l, hook', "\supseteq"'] \arrow[d, "\pi"'] & TU \arrow[l, "T\varphi"'] \arrow[d, "\pi"'] & \cong & U \times \mathbb{R}^m \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & V \times \mathbb{R}^m \arrow[l, "\varphi^{-1}\times\mathbb{R}^m"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] \\
.M & V \arrow[l, hook', "\supseteq"'] & U \arrow[l, "\varphi"'] & \cong & U & V \arrow[l, "\varphi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$
□

Bemerkung

Wir haben noch eine zusätzliche Struktur auf TM, denn die Fasern $T_xM = \pi^{-1}(x)$ sind Vektorräume und $T_0\varphi : \mathbb{R}^m = T_0\mathbb{R}^m \to T_xM$ ist linear.

25.5 Definition (Vektorbündel)

Ein Faserbündel $p : E \to M$ heißt VEKTORBÜNDEL (VB), falls alle Fasern $p^{-1}(x) =: E_x$ Vektorräume sind und für jedes $x_0 \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq M$ sowie eine Trivialisierung ψ existiert,

$$\begin{tikzcd}
U \times \mathbb{R}^k \arrow[rr, "\psi", "\cong"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p"'] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

die faserweise linear ist, d.h. $\psi_x := \psi(x, .) : \mathbb{R}^k \to E_x$ ist linear für jedes $x \in U$. So eine Trivialisierung heißt dann VEKTORBÜNDELKARTE.

Unter einem Vektorbündel $E \to M$ kann man sich eine Familie $\{E_x : x \in M\}$ von Vektorräumen vorstellen, welche durch M in einen gewissen Sinn glatt parametrisiert ist.

25.6 Satz (Tangentialbündel als Vektorbündel).
Das Tangentialbündel $TM \to M$ jeder Mannigfaltigkeit M ist ein Vektorbündel.

Beweis. Sei $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \xrightarrow{\cong} V \subseteq M$ eine lokale Trivialisierung von M. Dann erhalten wir eine lokale Parametrisierung Ψ von TM als oberste Zeile des folgenden kommutativen Diagramms:

$$\begin{tikzcd}
V \times \mathbb{R}^m \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & U \times \mathbb{R}^m \arrow[l, "\varphi\times\mathrm{id}"', "\cong"] \arrow[r, "T\varphi", "\cong"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & TM|_V \arrow[d, "\pi"] \\
V & U \arrow[l, "\varphi"', "\cong"] \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] & V
\end{tikzcd}$$

Bleibt zu zeigen, daß $v \mapsto \Psi(x, v)$ von $\mathbb{R}^m \to \{x\} \times T_x M$ linear ist. Diese Abbildung ist aber

$$v \mapsto (\varphi^{-1}(x), v) \mapsto T\varphi(\varphi^{-1}(x), v) = (\underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(x))}_{=x}, \varphi'(\varphi^{-1}(x))(v))$$

und als Ableitung klarerweise linear. □

25.7 Bemerkungen

1. Der Vektorbündelkartenwechsel
$$\begin{aligned}\psi_V^{-1} \circ \psi_U : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \to p^{-1}(U \cap V) \to (U \cap V) \times \mathbb{R}^k,\\ (x, v) \mapsto \big(x, \psi_U(x) \cdot v\big) \mapsto \big(x, (\psi_V^{-1} \circ \psi_U)(x) \cdot v\big)\end{aligned}$$
hat als wesentliche Komponente die Abbildung
$$\begin{aligned}\psi_{VU} : U \cap V \to L(k, k),\\ \big(x, \psi_{VU}(x) \cdot v\big) := (\psi_V^{-1} \circ \psi_U)(x, v).\end{aligned}$$
Diese Abbildung ψ_{VU} heißt TRANSITIONSFUNKTION. Folglich hat ψ_{VU} Werte in $GL(k) \subset L(k, k)$, denn die Inverse zu $\psi_{VU}(x)$ ist $\psi_{UV}(x)$.
2. Im Falle des Tangentialbündels $TM \to M$ erhalten wir Transitionsfunktionen wie folgt:
$$\begin{aligned}\psi_i(x, v) &:= (x, {\varphi_i}'({\varphi_i}^{-1}(x))(v)) \quad \Rightarrow\\ (x, \psi_{i,j}(x)(v)) &:= ({\psi_i}^{-1} \circ \psi_j)(x, v)\\ \Rightarrow \quad &= \Big(x, \big({\varphi_i}'({\varphi_i}^{-1}(x))\big)^{-1} \big({\varphi_j}'({\varphi_j}^{-1}(x))\big)(v)\Big)\\ &= (x, ({\varphi_i}^{-1} \circ \varphi_j)'({\varphi_j}^{-1}(x))(v)) \quad \Rightarrow\\ \Rightarrow \quad \psi_{i,j}(x) &:= ({\varphi_i}^{-1} \circ \varphi_j)'({\varphi_j}^{-1}(x)).\end{aligned}$$
Also sind diese im Wesentlichen die Ableitung des Kartenwechsels ${\varphi_i}^{-1} \circ \varphi_j$ von M.
3. Die Transitionsfunktionen erfüllen allgemein die Kozykel-Gleichungen:
$$\begin{aligned}\psi_{U_3U_2}(x) \circ \psi_{U_2U_1}(x) = \psi_{U_3U_1}(x) \text{ für alle } x \in U_1 \cap U_2 \cap U_3\\ \psi_{UU}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \text{ für alle } x \in U\end{aligned}$$
4. Nach Konstruktion ist die Abbildung $\tilde\psi_{UV} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ mit $\tilde\psi_{VU} : (x, v) \mapsto \psi_{VU}(x) \cdot v$ glatt. Und wir behaupten nun, daß dies dazu äquivalent ist,

daß $\psi_{VU} : U \cap V \to GL(k) \subseteq L(k,k)$ selbst glatt ist. Um das zu beweisen, bezeichnen wir mit m die glatte (da bilineare) Multiplikation $L(k,k) \times L(k,k) \to L(k,k)$.
($\Leftarrow$) Dies gilt, weil

$$\tilde{\psi}_{VU} = m \circ (\psi_{VU} \times \mathrm{id}|_{\mathbb{R}^k}) : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \to L(k,k) \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$

($\Rightarrow$) Umgekehrt gilt: $\psi_{VU} : U \cap V \to L(k,k)$ ist C^∞, falls $ev_y \circ \psi_{VU}$ glatt $\forall \;\; y \in \mathbb{R}^k$ ist. Das ist der Fall, denn

$$\begin{aligned} ev_y \circ \psi_{VU}(x) &= \psi_{VU}(x) \cdot y = \tilde{\psi}_{VU}(x,y) \\ \Rightarrow ev_y \circ \psi_{VU} &= \tilde{\psi}_{VU}(.,y) \text{ ist } C^\infty \quad \forall \;\; y. \end{aligned}$$

5. Eine Familie von Trivialisierungen $\psi_U : U \times \mathbb{R}^k \to p^{-1}(U)$ des Faserbündels $p : V \to M$ mit der Eigenschaft, daß $\psi_{VU} : U \cap V \to GL(k)$ glatt ist, definiert eine Vektorraumstruktur auf den Fasern V_x vermöge der Abbildung ψ_V, die $\{x\} \times \mathbb{R}^k$ auf V_x isomorph abbildet. So wird $p : V \to M$ ein Vektorbündel und $\{\psi_U\}$ ein VB-Atlas.
6. Aus (16.7) wissen wir, daß sich eine Mannigfaltigkeit aus ihren Kartenwechseln zurückgewinnen läßt. Bei Transitionsfunktionen eines VB haben wir eine ähnliche Situation: Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M. Ein Kozykel von Transitionsfunktionen, d.h. eine Familie von glatten Funktionen $\psi_{VU} : U \cap V \to GL(k)$ für $U, V \in \mathcal{U}$, welche die Kozykel-Gleichungen erfüllt, definiert ein bis auf Isomorphie eindeutiges Vektorbündel.
Um das zu zeigen, definieren wir: $E_x := \{(U,w) : x \in U,\ w \in \mathbb{R}^k\}/\sim$, wobei

$$(U,w) \sim (V,w') \Leftrightarrow w' = \psi_{UV}(x) \cdot w.$$

Es ist E_x ein Vektorraum, da $\psi_U(x) : w \mapsto [(U,w)]$, ein Vektorraum-Isomorphismus ist $\mathbb{R}^k \to E_x$. Die disjunkte Vereinigung

$$E := \bigsqcup_{x \in M} E_x := \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times E_x)$$

ist ein Vektorbündel über M mit der Fußpunktabbildung $E \ni (x,v) \mapsto x \in M$. Es ist $E|_U := p^{-1}(U) = \bigsqcup_{x \in U} E_x \cong U \times \mathbb{R}^k$. Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \big(x, \psi_U(x) \cdot v\big) \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & (x,v) \arrow[l, "\psi_U"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ x \arrow[r, equal] & x \end{tikzcd}$$

und sehen,daß ψ_U Trivialisierung ist.
Für den Kartenwechsel gilt:

$$(\psi_V^{-1} \circ \psi_U)(x,w) = \psi_V^{-1}\big(x, \psi_U(x) \cdot w\big) = (x,w'),$$

wobei aus $[(V,w')] = [(U,w)]$ folgt, daß $(x,w) \mapsto (x, \psi_{VU}(x) \cdot w)$.

25.8 Lemma (Einschränkung eines Vektorbündels). *Sei $p : E \to M$ ein Vektorbündel und $A \subseteq M$ eine Teilmannigfaltigkeit, dann ist $E|_A := p^{-1}(A) \to A$ ein Vektorbündel.*

Beweis. Da $E \to M$ einen VB-Atlas besitzt, existieren VB-Karten ψ_U, für die gelten:

$$\begin{tikzcd} E|_U = p^{-1}(U) \arrow[d, "p"'] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[l, "\psi_U"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ U \arrow[r, equal] & U \end{tikzcd}$$

Eine Einschränkung auf A liefert:

$$\begin{tikzcd} (E|_A)|_U = p^{-1}(U \cap A) \arrow[d, "p"'] & U \cap A \times \mathbb{R}^k \arrow[l, "\psi_U|_A"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ U \cap A \arrow[r, equal] & U \cap A \end{tikzcd}$$

Wir sehen also, daß $\psi_U|_{\mathbb{R}^k \times A}$ eine Vektorbündelkarte für $E|_A$ ist. □

25.9 Definition (Vektorbündelhomomorphismen)

Sind $p : V \to M$ und $q : W \to N$ Vektorbündel, so heißt eine glatte Funktion $\bar{f}$ Vektorbündelhomomorphismus über $f : M \to N$, falls folgendes Diagramm kommutiert und $\bar{f}_x : V_x \to W_{fx}$ linear ist $\forall\ x \in M$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "p"'] & W \arrow[d, "q"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

25.10 Lemma. *Das Tangentialbündel ist durch folgende Eigenschaften bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt: Für jede abstrakte Mannigfaltigkeit M ist mit $\pi_M : TM \to M$ ein Vektorbündel über M gegeben, und für jedes glatte $f : M \to N$ ein VB-Homomorphismus $Tf : TM \to TN$ über f, sodaß gilt:*

1. $T(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}(TM)$, $T(f \circ g) = Tf \circ Tg$ *"Kettenregel"*
2. *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus zwischen $T\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, d.h.*

$$\begin{tikzcd} T\mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, equal] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

3. *Sei $U \overset{\text{offen}}{\subseteq} M$. Dann gilt: $T(\mathrm{incl}) : TU \to TM|_U$ ist ein Isomorphismus.*

Ohne Beweis, siehe [**51**, S.122ff].

26. Teilvektorbündel

26.1 Definition (Teilvektorbündel)

Es seien $p : E \to M$, $q : F \to M$ zwei Vektorbündel, sodaß F_x Teilvektorraum von E_x ist $\forall\ x \in M$. Dann heißt $q : F \to M$ Teilvektorbündel von $p : E \to M$, falls zu E ein VB-Atlas $\{\psi_U\}$ existiert, der $F|_U$ auf $U \times \mathbb{R}^n$ abbildet, d.h. $\psi_U : U \times \mathbb{R}^k \cong E|_U = p^{-1}(U)$ und $\psi|(U \times \mathbb{R}^n) : U \times \mathbb{R}^n \cong F|_U$.

Das bedeutet, daß $\psi_U(x)$ den "konstanten" Teilraum $\mathbb{R}^n$ genau auf F_x dreht.

26.2 Proposition (Bild eines Vektorbündelmonomorphismuses). *Seien $q : F \to M$, $p : E \to M$ zwei VB, $f : F \to E$ ein VB-Monomorphismus (d.h. ein faserweise injektiver VB-Homomorphismus) über id_M, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r, "\mathrm{id}"] & M \end{tikzcd}$$

Dann gilt: $f(F)$ ist ein Teilvektorbündel von E und ist isomorph via f zu $F \to M$:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\cong", "f"'] \arrow[d, "q"'] & f(F) \arrow[d, "p|f(F)"] \\ M \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd}$$

Beweis. Da lokal beide VB trivial sind, nehmen wir o.B.d.A. an, daß $F = M \times \mathbb{R}^n$ und $E = M \times \mathbb{R}^k$ ist, sodaß

$$f : M \times \mathbb{R}^n \to M \times \mathbb{R}^k \text{ mit } f(x, v) = (x, f_x(v)).$$

Da $f_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ injektiv und linear ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß: $f_{x_0} = \mathrm{incl} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Sei pr eine Projektion $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ zu incl, dann ist $\mathrm{pr} \circ \mathrm{incl} = \mathrm{id} \in GL(n) \subseteq L(k, k)$ offen. Die Abbildung $x \mapsto \mathrm{pr} \circ f_x$ ist eine Abbildung von M nach $L(k, k)$, lokal um x_0 sind ihre Werte aber in $GL(n)$. O.B.d.A. sei M diese Umgebung von x_0. Es gilt:

$$\begin{tikzcd} M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-n} \arrow[r, "\psi"] & M \times \mathbb{R}^k = E \\ M \times \mathbb{R}^n \arrow[u, "\mathrm{incl}"] \arrow[r, "\psi|(M\times\mathbb{R}^n)"] & f(F) \arrow[u, "\mathrm{incl}"'] \\ M \times \mathbb{R}^n \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & M \times \mathbb{R}^n = F, \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

wobei $\psi : (x; v, w) \mapsto (x; f_x(v) + (0, w))$ dann eine VB-Karte mit Umkehrabbildung

$$\psi^{-1} : (x, z) \mapsto \Big(x, \Big((\mathrm{pr} \circ f_x)^{-1} \circ \mathrm{pr}\Big)(z), z - f_x\Big(\Big((\mathrm{pr} \circ f_x)^{-1} \circ \mathrm{pr}\Big)(z)\Big)\Big)$$

ist und $f(F)$ entspricht $M \times \mathbb{R}^n$. Es ist also f bezüglich dieser Karte die Inklusion $M \times \mathbb{R}^n \to M \times \mathbb{R}^n \times \{0\}^{k-n}$. □

26.3 Folgerung (Tangentialbündel einer Teilmannigfaltigkeit).
Sei $A \subseteq M$ eine reguläre Teilmannigfaltigkeit.

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "T\,\mathrm{incl}"] \arrow[d, "p_A"'] & TM|_A \arrow[d, "p_M"'] \\ A \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

Dann ist $TA \cong T\,\mathrm{incl}(TA)$ ein Teilbündel vom $TM|_A$. □

26.4 Folgerung (Tangentialbündel von Summen und Produkten).
Die folgenden Diagramme beschreiben Vektorbündel-Isomorphismen:

$$\begin{tikzcd} T(\prod M_i) \arrow[r, "T(\mathrm{pr}_i)_i"] \arrow[d, "\pi_{\prod M_i}"'] & \prod TM_i \arrow[d, "\prod \pi_{M_i}"'] \\ \prod M_i \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \prod M_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T(\bigsqcup M_i) \arrow[d, "\pi_{\bigsqcup M_i}"] & \bigsqcup TM_i \arrow[l, "\bigsqcup T\,\mathrm{incl}"'] \arrow[d, "\bigsqcup \pi_{M_i}"'] \\ \bigsqcup M_i & \bigsqcup M_i \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$ □

26.5 Lemma (Pull-back Bündel). *Sei $p : E \to M$ ein VB, $f : N \to M$ glatt. Dann existiert eine natürliche VB-Struktur auf dem* ZURÜCKGEZOGENEN VEKTORBÜNDEL *$f^*p : f^*E \to N$ mit $f^*p : E_{fx} \ni v \mapsto x$, wobei $f^*E := \bigsqcup_{x\in N} E_{fx}$ ist. Außerdem existiert ein VB-Homomorphismus $p^*f : f^*E \to E$ mit $p^*f : E_{fx} \ni v \mapsto v \in E$.*

Diese Zuordnung hat folgende universelle Eigenschaft: Für jedes andere VB $q : F \to N$ und VB-Homomorphismus $\bar{f} : F \to E$ über f existiert ein eindeutiger VB-Homomorphismus $f^+ : F \to f^*E$ über id_N, der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, dotted, "f^+"] \arrow[drr, bend left, "\bar{f}"] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\ & f^*E \arrow[r, "p^*f"'] \arrow[d, "f^*p"] & E \arrow[d, "p"] \\ & N \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

Beweis. Wir können f^*E folgendermaßen als Teilmenge von $N \times E$ aufgefassen:

$$f^*E \cong N \times_M E := \{(x, v) : f(x) = p(v)\} \subseteq N \times E.$$

Da $p : E \to M$ Submersion ist, folgt aus (21.23) (f und p sind transversal zueinander), daß $N \times_M E$ eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von $N \times E$ ist und $f^*(p) = \mathrm{pr}_1 |N \times_M E$, sowie $p^*f := \mathrm{pr}_2 |N \times_M E$ glatt sind. Die Regularität von $N \times_M E$ bewirkt dann die gewünschte universelle Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[dr, dotted, "!"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& N \times_M E \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & E \arrow[d, "p"'] \\
& N \arrow[r, "f"'] & M
\end{tikzcd}$$

Der gesuchte, eindeutig bestimmte VB-Homomorphismus f^+ ist also im Wesentlichen durch $f^+ = (q, \bar{f})$ gegeben.

Noch zu zeigen ist, daß: $N \times_M E \to N$ ein VB ist und $p^* f$ sowie f^+ VB-Homomorphismen für jeden VB-Homomorphismus $\bar{f}$ sind. Dazu brauchen wir die lokale Trivialität von $N \times_M E \to N$, die aber aus jener von $E \to M$ folgt, da Einschränken mit Zurückziehen vertauscht.

Für $U \subseteq M$ gilt:

$$\begin{aligned}
(f|_{f^{-1}(U)})^*(E|_U) &= \Big\{(x, v) : x \in f^{-1}(U),\ v \in E|_U,\ p(v) = f(x)\Big\} \\
&= \Big\{(x, v) : x \in f^{-1}(U),\ v \in E,\ p(v) = f(x)\Big\} \\
&= f^* E|_{f^{-1}(U)} \text{ weil } p(E|_U) \supseteq f(f^{-1}(U)),
\end{aligned}$$

und weil das Pull-back eines trivial Bündels trivial ist, also für trivialisierende Umgebungen U folgendes gilt:

$$f^*|_{f^{-1}(U)} \cong (f|_{f^{-1}(U)})^*(U \times \mathbb{R}^n) = f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^n$$

Das Zurückziehen von VB-Isomorphismen liefert VB-Isomorphismen. Da $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$ ist, folgt, daß $(f^* E)|f^{-1}(U) \cong f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^k$ ist. Die VB-Operationen ergeben sich aus der universellen Eigenschaft, ebenso auch die Faserlinearität von f^+ und $p^* f$. $\square$

26.6 Lemma (Einschränkung als Pull-back). *Ist $p : E \to M$ ein Vektorbündel und A eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von M, dann gilt $E|_A \cong \mathrm{incl}^* E$.*

Beweis. Klarerweise hat $p|_{p^{-1}(A)} : E|_A = p^{-1}(A) \to A$ die universelle Eigenschaft von Lemma (26.5), da $p^{-1}(A)$ reguläre Teilmannigfaltigkeit von E ist (p ist Submersion). Somit ist $E|_A$ zu $\mathrm{incl}^*(E)$ isomorph. $\square$

26.7 Lemma (Exakte Vektorbündelsequenzen splitten).
Sei $E_0 \xrightarrow{i} E_1 \xrightarrow{p} E_2$ eine kurze exakte Sequenz von VB über M. (d.h. i und p sind VB-Homomorphismen über id_M*, i faserweise injektiv, p faserweise surjektiv und faserweise gelte:* $\mathrm{Bild}(i_x) = \mathrm{Ker}(p_x)$*). Dann gilt: $E_1 \cong E_0 \oplus E_2$.*

Beweis. Konstruiere lokal einen Isomorphismus $\tilde{\psi}$ zwischen E^1 und $E^0 \oplus E^2$. Lokal ist $E^0|_U \cong U \times \mathbb{R}^n$ und $E^1|_U \cong U \times \mathbb{R}^m$, wie auch $E^2|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$ für geeignete n, m, $k \in \mathbb{N}$. (Wir können also ein inneres Produkt auf den Fasern von E^1 verwenden.) Da $i_x : E^0_x \to \mathrm{Bild}(i_x)$ ein Isomorphismus ist, ist $i_x^{-1}|_{\mathrm{Bild}\, i_x} : \mathrm{Bild}(i_x) \to E^0_x$ wohldefiniert und $E^1_x \cong \mathrm{Bild}(i_x) \oplus \mathrm{Bild}(i_x)^\perp$ ist ein Isomorphismus bezüglich eines inneren Produkts. Es ist $p_x : \mathrm{Bild}(i_x) \to E^2_x$, da p_x surjektiv und $\mathrm{Bild}(i_x) = \mathrm{Ker}(p_x)$ ist. Wir definieren: $\tilde{\psi}_x := i_x^{-1}|_{\mathrm{Bild}(i_x)} \oplus p_x$ mit $\mathrm{Bild}(i_x) \oplus \mathrm{Bild}(i_x)^\perp \to E^0_x \oplus E^2_x$, dadurch ist $\tilde{\psi}$ lokal

("über U") auf jeder Faser definiert. Sei nun $\{U\}$ eine Überdeckung von M mit trivialisierenden, offenen Mengen und $\{f_U\}$ eine zugehörige Partition der Eins. Ein globaler Isomorphismus von E^1 nach $E^0 \oplus E^2$ wird dann durch $\psi := \sum f_U \tilde{\psi}_U$ definiert.
□

26.8 Lemma (Tangentialbündel eines Vektorbündels). *Sei $p : E \to M$ ein VB. Dann existiert eine kurze exakte Sequenz von VB über E:*

$$p^*(E) \xrightarrow{i} TE \xrightarrow{Tp^+} p^*(TM).$$

Beweis. Durch folgendes Diagramm wird Tp^+ als VB-Homomorphismus definiert.

$$\begin{tikzcd}
TE \arrow[dr, dotted, "!"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& p^*(TM) \arrow[r] \arrow[d] & TM \arrow[d, "\pi_M"'] \\
& E \arrow[r, "p"'] & M
\end{tikzcd}$$

Die Konstruktion ist genau jene aus Lemma (26.5):
Die Surjektivität von Tp^+ überlegen wir uns anhand lokaler Trivialisierungen: Sei $V := E|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$ und

$$\begin{tikzcd}
TE|_V \arrow[r, "Tp^+"] \arrow[d, "\cong"'] & p^*(TM)|_V \arrow[d, "\cong"', "*"] \\
T(U \times \mathbb{R}^k) \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{pr}_1^*(TU)|_{\mathbb{R}^k x U} \arrow[d, "\cong"'] \\
TU \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \arrow[r] & TU \times \mathbb{R}^k \\
(\xi, v, w) \arrow[r, mapsto] & (\xi, v)
\end{tikzcd}$$

Die Isomorphie $(^*)$ kennen wir aus (26.5), dort hatten wir

$$p|_V^*(TU) \cong V \times_U TU = \{(x,y) | p(x) = \pi_M(y)\} = \mathrm{pr}_1^*(TU)|_{\mathbb{R}^k \times U}.$$

Der VB-Homomorphismus i ergibt sich folgendermaßen:

$$\begin{tikzcd}
TE \arrow[dr, dotted, "!"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& p^*E \cong E \oplus E \arrow[r] \arrow[d, "p"] & E \arrow[d] \\
& E \arrow[r, "p"'] & M
\end{tikzcd}$$

In der Trivialisierung $V = E|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$ stellt er sich als faserweise injektiv heraus:

$$\begin{tikzcd}
(E \oplus E)|_V \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1\oplus\varphi"'] & TE|_V = TV \arrow[d, "\cong"'] \\
V \oplus (U \times \mathbb{R}^k) \arrow[d, "\cong"'] & T(U \times \mathbb{R}^k) \arrow[d, "\cong"'] \\
U \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \arrow[r] & TU \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k
\end{tikzcd}$$

$$(x, v; w) \qquad \mapsto \qquad (0_x, v; w)$$

dabei ist φ durch $\varphi : (\xi_1, \xi_2) \to \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\xi_1 + t\xi_2)$ gegeben.
Faserweise gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Bild}(i_{xv}) &= \{(0_x, v; w) : w \in \mathbb{R}^k\} \\
&= \{(\xi_x, v, w) : (\xi_x, v) = 0_{xv} = (0_x, v)\} \\
&= \{(0_x, v, w) : w \in \mathbb{R}^k\} = \mathrm{Ker}((Tp^+)_{xv}) \qquad \square
\end{aligned}$$

27. Vektorfelder

27.1 Definition (Schnitte von Bündeln)

Unter einem Schnitt σ eines Vektorbündels (oder Faserbündels) $E \xrightarrow{p} M$ versteht man eine Abbildung $\sigma : M \to E$, welche $p \circ \sigma = \mathrm{id}_M$ erfüllt. Die Schnitte des Tangentialbündels $TM \to M$ heißen Vektorfelder (VF) auf der Mannigfaltigkeit M.
Den Raum der glatten Schnitte $\{\sigma \in C^\infty(M, E) : p \circ \sigma = \mathrm{id}\}$ bezeichnet man mit $\Gamma(E \xrightarrow{p})$ oder kurz mit $\Gamma(E)$, wenn die Fußpunktabbildung klar ist.

Die Menge aller glatten Vektorfelder auf M bezeichnen wir auch mit $\mathfrak{X}(M) := \Gamma(TM \xrightarrow{\pi})$.

Schnitte können addiert und mit reellwertigen Funktionen f auf M punktweise multipliziert werden. Somit ist $\Gamma(E \xrightarrow{p} M)$ ein Vektorraum und sogar ein Modul über $C^\infty(M,\mathbb{R})$, also ein "Vektorraum" über dem Ring $C^\infty(M,\mathbb{R})$ (anstatt über einem Körper), d.h. es gilt:

$$(f+g)\xi = f\xi + g\xi, \quad f(\xi+\eta) = f\xi + f\eta, \tag{8}$$

$$(f\cdot g)\xi = f(g\cdot\xi), \qquad 1\cdot\xi = \xi \tag{9}$$

Wir wollen mit Vektorfeldern oder allgemeiner mit Schnitten von Vektorbündeln konkret rechnen. Dazu benötigen wir lokale Darstellungen.

27.2 Lokale Beschreibung von Schnitten

Lokal ist ein Schnitt s durch eine Abbildung $\bar{s}$ der Basis M in die typische Faser $\mathbb{R}^k$ gegeben.

$$\begin{tikzcd} s(x) & \psi_U^{-1}(s(x)) \arrow[l] \arrow[r, equal] & (x,\bar{s}(x)) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} E|_U \arrow[dr, "p"'] & & U\times\mathbb{R}^k \arrow[ll, "\psi_U"'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Speziell für das Tangentialbündel erhalten wir: Dem Vektorfeld ξ entsprechen lokal Abbildungen $(\xi^i_\varphi)_{i=1}^m : M \to \mathbb{R}^m$, deren Gestalt von der Wahl der Karte φ abhängt:

$$\begin{tikzcd} TM|\operatorname{Bild}\varphi & & \operatorname{Bild}\varphi\times\mathbb{R}^m \arrow[ll, "T\varphi\circ(\varphi^{-1}\times\mathbb{R}^m)"', "\cong"] \\ & \operatorname{Bild}(\varphi) \arrow[ul, "\xi|_{\operatorname{Bild}\varphi}"] \arrow[ur, "(\mathrm{id},(\xi^i_\varphi)_{i=1}^m)"'] & \end{tikzcd}$$

Wir haben in (20.8) gesehen, daß falls $(u^1,\dots,u^m) = \varphi^{-1}$ lokale Koordinaten auf M sind, so ist $\left(\partial^\varphi_1|_p = \frac{\partial}{\partial u^1}|_p, \dots, \partial^\varphi_m|_p = \frac{\partial}{\partial u^m}|_p\right)$ eine Basis von T_pM für alle p im Definitionsbereich U der Karte φ und der Isomorphismus $T\varphi\circ(\varphi^{-1}\times\mathbb{R}^m)$ bildet die Standardbasis (x,e_i) auf $\frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_x$ ab. Jedes Vektorfeld ξ läßt sich also auf U als $\xi = \sum_{i=1}^m \xi^i_\varphi \partial^\varphi_i$ schreiben, wobei ∂^φ_i die Vektorfelder $p \mapsto \partial^\varphi_i|_p = \frac{\partial}{\partial u^i}|_p$ sind. Der Index φ der Komponenten ξ^i_φ von ξ bezüglich der Basis ∂^φ_i deutet die Abhängigkeit dieser Komponenten von der Basis an, die ja wiederum von φ abhängt. Zumeist werden wir diesen Index aber, wie allgemein üblich, weglassen. Wir können die Komponenten ξ^i berechnen, indem wir $\xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ auf die lokale Koordinatenfunktion u^j anwenden: $\xi(u^j) = \left(\sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right)(u^j) = \sum_i \xi^i \delta^j_i = \xi_j$. Also ist $\xi = \sum_i \xi(u^i)\frac{\partial}{\partial u^i}$.

27.3 Folgerung. *Ein Vektorfeld ξ ist genau dann glatt, wenn alle Komponenten ξ^i_φ glatt sind.*

Beweis. Dies folgt sofort daraus, daß die lokalen Schnitte $\frac{\partial}{\partial u^i}$ glatt sind, was wiederum aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
TM|U \arrow[d, "\pi|_U"'] & V \times \mathbb{R}^m \arrow[l, "T\varphi"'] \arrow[r, "\varphi\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & U \times \mathbb{R}^m \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] \\
U & V \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "\varphi"] & U
\end{tikzcd}$$

folgt, denn den Schnitt $\frac{\partial}{\partial u^i}$ ganz links entspricht rechts der konstante Schnitt $x \mapsto (x, e^i)$. □

27.4 Beispiele von Schnitten

1. Das Tangentialbündel von $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ als Teilbündel von $T\mathbb{R}^{n+1}|_{S^n} = S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ ist $TS^n = \{(x,v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, v\rangle = 0\}$. Insbesonders ist $TS^1 = \{(x,y,u,v) : x^2+y^2 = 1,\ xu+yv = 0\}$, also $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ mittels $(x,y,t) \mapsto (x, y$,-ty, tx). Somit ist das Tangentialbündel der S^1 trivial, und zwar ist es der Zylinder.
2. Die Projektion: Möbiusband $\to S^1$ ist auch ein VB, dessen Faser $(-1,1) \cong \mathbb{R}$ ist.
   Dieses VB ist jedoch nicht trivial, denn andernfalls hätte man eine globale Trivialisierung ψ:

   $$\begin{tikzcd}
   S^1 \times \mathbb{R} \arrow[r, "\psi", "\cong"'] \arrow[d] & \mathrm{M"ob}. \arrow[d] \\
   S^1 \arrow[r, equal] & S^1
   \end{tikzcd}
   \qquad
   \begin{tikzcd}
   S^1 \arrow[r, "\psi(.,1)"] \arrow[d] & \mathrm{M"ob}. \arrow[d] \\
   S^1 \arrow[r, equal] & S^1
   \end{tikzcd}$$

   mit $\psi(S^1, 1) \cap S^1 = \emptyset$. So eine Abbildung gibt es aber nicht.
3. Auch TS^2 ist ein Vektorbündel. Um die Frage, ob es auch trivial ist, beantworten zu können, nehmen wir an, es gäbe eine Trivialisierung $\psi : S^2 \times \mathbb{R}^2 \to TS^2$. Mit $\psi(., e_1)$ hätte man eine stetige Abbildung, die jedem $x \in S^2$ einen nichtverschwindenden Tangentialvektor zuordnet, so eine Abbildung existiert aber nicht (Igelsatz (50.11)).
4. Da die S^3 eine glatte Gruppenstruktur trägt, ist $TS^3 \cong S^3 \times \mathbb{R}^3$ wieder ein triviales Vektorbündel.

27.5 Definition (Linear unabhängige Vektorfelder)

Eine Familie von Vektorfeldern $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ auf M heißt ÜBERALL LINEAR UNABHÄNGIG, falls $\{\xi_i|_p : 1 \le i \le k\}$ linear unabhängig in T_pM ist für alle $p \in M$.

27.6 Bemerkung (Parallelisierbare Mannigfaltigkeiten)

Eine Mannigfaltigkeit M hat ein triviales Tangentialbündel genau dann, wenn sie $m = \dim M$ überall linear unabhängige Vektorfelder besitzt. Sie heißt dann PARALLELISIERBAR. Ist TM trivial, d.h.

$$\begin{array}{ccc} TM & \xleftarrow[\psi]{\cong} & M \times \mathbb{R}^m \\ {\scriptstyle \pi_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ M & = & M \end{array}$$

dann sind die $\xi_i : x \mapsto \psi(x, e_i)$ für $1 \leq i \leq m$ linear unabhängiges Vektorfelder. Umgekehrt definiert $\psi(x, (v^i)_{i=1}^m) := \sum_i v^i \xi_i(x)$ eine Trivialisierung von TM, falls $\{\xi_i\}_{i=1}^m$ linear unabhängig ist. So besitzt S^1 ein linear unabhängig Vektorfeld, da ihr Tangentialbündel trivial ist.

Der folgende Satz gibt Auskunft darüber, wieviele linear unabhängige Vektorfelder auf den höherdimensionalen Sphären existieren ("wie trivial also das Tangentialbündel ist").

27.7 Satz (Linear unabhängige Vektorfelder auf den Sphären).
Auf der S^n können genau m Vektorfelder linear unabhängig gewählt werden, wobei $n + 1 = 2^{4a+b} \cdot c$ mit $a \in \mathbb{N}_0$, $b \in \{0, 1, 2, 3\}$, ungeraden c und $m + 1 = 8 \cdot a + b$

Ohne Beweis, siehe [**30**] und [**?**, S.43-62]

Die Anzahl der linear unabhängigen Vektorfelder auf den Sphären hängt mit der Struktur gewisser Algebren zusammen:

27.8 Proposition. *Es sei $b : \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine bilineare Funktion, sodaß*

1. *Aus $b(v, x) = 0$ folgt $v = 0$ oder $x = 0$ (Nullteilerfreiheit),*
2. *$\exists\ v_0 \in \mathbb{R}^{k+1}$, sodaß $b(v_0, x) = x\ \forall\ x \in \mathbb{R}^{n+1}$ (Linkseinheit),*

dann existieren k linear unabhängige Vektorfelder auf der S^n.

Beweis. Sei $v \in \mathbb{R}^{k+1}$, dann ist die Abbildung $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x \mapsto b(v, x)$ linear. Mit den Abbildungen $\rho : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{o\} \to S^n$ (Radialprojektion) und $\mathrm{incl} : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ (kanonische Inklusion), kann ein glattes Vektorfeld $\xi_v : S^n \to TS^n$ wie folgt definiert werden: $\xi_v = T\rho \circ b(v, .) \circ \mathrm{incl}$. Sind $\{v_0, v_1, \dots v_k\}$ linear unabhängig im $\mathbb{R}^{k+1}$, dann sind $\{\xi_{v_1}, \dots \xi_{v_k}\}$ linear unabhängig: Sei

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \xi_{v_i}|_x = 0 \;\Rightarrow\; 0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i T_x\rho(b(v_i, x)) = T_x\rho\Big(\sum_{i=1}^k \lambda_i b(v_i, x)\Big)$$

Der Kern von $T_x\rho$ ist der von x erzeugte Teilraum im $\mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b(v_i, x) = -\lambda_0 x = -\lambda_0 b(v_0, x) \text{ für ein } \lambda_0 \in \mathbb{R} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b\Big(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i, x\Big) = 0; \text{ da } x \neq 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i = 0 \ \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall \ i$$

(weil die v_i linear unabhängig sind). □

27.9 Folgerungen.

1. *Die Sphären S^1, S^3 und S^7 sind parallelisierbar:*
   Als bilineare Funktionen $b : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, welche die Eigenschaften (i), (ii) von (27.8) erfüllen, können folgende $\mathbb{R}$-Algebra-Multiplikationen verwendet werden:

$$\begin{array}{lll} n=1 & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \\ n=3 & \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 & \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H} \\ n=7 & \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8 & \mathbb{R}^8 \cong \textit{Cayley-Zahlen (Oktaven)} \end{array}$$

2. *Wenn n ungerade ist, dann besitzt S^n ein nichtverschwindendes Vektorfeld.*
   Für $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, wobei $n+1 = 2k$ für $k \in \mathbb{N}$ ist, kann die Skalarmultiplikation mit komplexen Zahlen verwendet werden:

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}^{2k} \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k \\ (\lambda; \lambda^1, \dots, \lambda^k) \mapsto (\lambda \cdot \lambda^1, ., \lambda \cdot \lambda^k) \end{array}$$

3. *Wenn G eine Lie-Gruppe mit neutralem Element $e \in G$ ist, so ist $TG \cong G \times T_eG$. Der Isomorphismus ist durch*

$$\xi \mapsto (\pi(\xi), TL_{\pi(\xi)^{-1}} \cdot \xi) = (\pi(\xi), T\mu(0_{\pi(xs)^{-1}}, \xi))$$

   gegeben, für Details siehe (67.2).

28. Gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

28.1 Definition (Integralkurve)

Es sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, dann heißt $c : I \to M$ (Lösungs-kurve) INTEGRALKURVE des Vektorfeldes ξ durch $p :\Leftrightarrow$

$$c(0) = p, \quad c'(t) = \xi_{c(t)} \text{ für } t \in I.$$

Wir werden folgenden üblichen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen in Vektorräumen benutzen.

28.2 Satz über gewöhnliche Differentialgleichungen. *Sei E ein Euklidischer Vektorraum (oder bloß ein Banachraum) und $f : \mathbb{R} \times E \to E$ eine glatte Funktion. Dann existiert ein offenes Intervall I um 0 in $\mathbb{R}$ und eine offene Kugel U um 0 in E, so daß für alle $x \in U$ eine eindeutige Lösung $c_x : I \to E$ der gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$c_x'(t) = f(t, c_x(t)) \text{ mit } c_x(0) = x$$

existiert. Weiters ist $(t, x) \mapsto c_x(t)$ glatt als Abbildung $I \times U \to E$.

Ohne Beweis. Siehe z.B. [**31**, 10.8.1 und 10.8.2].

Damit können wir nun folgende globale Version auf Mannigfaltigkeiten beweisen.

28.3 Satz über gewöhnliche Differentialglg. auf Mannigfaltigkeiten.
Sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, dann gilt:

1. *Zu jedem $p \in M$ existiert eine eindeutige maximale Integralkurve c_p zu ξ durch p (d.h. jede andere Integralkurve ist eine Einschränkung von c_p), wo $c_p : (t_-^p, t_+^p) \to M$ glatt ist.*
2. *Ist $t_+^p < \infty$, dann gilt $\lim_{t \nearrow t_+^p} c(t) = \infty$, d.h. für jede kompakte Menge $K \subseteq M$ ist $c(t)$ nicht in K für t hinreichend nahe bei t_+^p.*
3. *Die Menge $U = \{(t, p); t_-^p < t < t_+^p\} \subseteq \mathbb{R} \times M$ ist eine offene Umgebung von $\{0\} \times M$. Die Abbildung $\mathrm{Fl}^\xi : U \to M$, definiert durch $\mathrm{Fl}^\xi(t, p) := c_p(t)$, ist dann C^∞ und heißt der* lokale Fluss *des Vektorfeldes. Falls $q := \mathrm{Fl}^\xi(s, p)$ existiert, so existiert $\mathrm{Fl}^\xi(t + s, p)$ genau dann wenn $\mathrm{Fl}^\xi(t, q)$ existiert, und die beiden stimmen überein. Diese Gleichung heißt auch* Einparametergruppen-Eigenschaft, *denn wenn Fl^ξ global definiert ist, dann ist $(\mathrm{Fl}^\xi)^\vee : \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$ ein Gruppen-Homomorphismus.*

Beweis. (1) lokale Existenz: O.B.d.A. sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ glatt. Wir suchen ein c mit $c'(t) = \xi_{c(t)}$ und $c(0) = x$. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung, deren Lösung eindeutig ist, weil ξ lokal Lipschitz ist. Sie ist C^∞, da ξ glatt ist.

Globale Existenz: Seien c_1, c_2 zwei Integralkurven. Die Menge $\{t \geq 0 : c_1(t) = c_2(t)\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Dom}\, c_1 \cap \mathrm{Dom}\, c_2$. Angenommen es ist $\mathrm{Dom}\, c_1 \cap \mathrm{Dom}\, c_2 \neq \mathbb{R}$, dann gibt es o.B.d.A. ein t_0 mit $t_0 := \inf\{t \in \mathrm{Dom}\, c_1 \cap \mathrm{Dom}\, c_2 : c_1(t) \neq c_2(t)\}$. Klarerweise ist $c_1(t_0) = c_2(t_0)$. Nun sind aber $c_1(t_0 + .)$ und $c_2(t_0 + .)$ Integralkurven durch $c_1(t_0) = c_2(t_0)$, diese stimmen lokal überein. Das ist ein Widerspruch zur Eigenschaft des Infimums. Somit gibt es eine Integralkurve c_p mit $\mathrm{Dom}\, c_p = \bigcup\{\mathrm{Dom}\, c : c \text{ ist Integralkurve durch } p\}$, welche offensichtlich maximal ist. Wir setzen $(t_-^p, t_+^p) := \mathrm{Dom}\, c_p$.

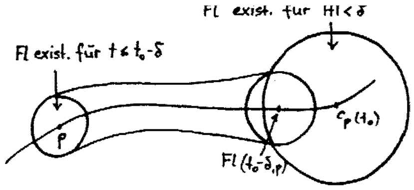
(3) Klarerweise ist $\{0\} \times M \subset U$ und $\mathrm{Fl}^\xi(0, p) = c_p(0) = p$. Es existiere $q := \mathrm{Fl}^\xi(s, p)$, d.h. $t_-^p < s < t_+^p$, da $r \mapsto \mathrm{Fl}^\xi(r, p)$ die maximale Integralkurve mit Anfangswert p ist und diese ist für $t_-^p < r < t_+^p$ definiert. Es ist $t \mapsto \mathrm{Fl}^\xi(t, \mathrm{Fl}^\xi(s, p))$ die maximale Integralkurve mit Anfangswert q. Sie ist für $t_-^q < t < t_+^q$ definiert. Für t mit $t_-^p < s + t < t_+^p$ ist $t \mapsto \mathrm{Fl}^\xi(t + s, p)$ eine Lösung mit Anfangswert $q = \mathrm{Fl}^\xi(s, p)$. Also gilt wegen der Maximalität und Eindeutigkeit von $t \mapsto \mathrm{Fl}^\xi(t, q)$ Gleichheit und $t_-^q \leq t_-^p - s < -s < t_+^p - s \leq t_+^q$. Insbesonders existiert also $\mathrm{Fl}^\xi(-s, q)$ und stimmt mit $\mathrm{Fl}^\xi(-s + s, p) = p$ überein. Also folgt aus Symmetriegründen, daß $t_-^p \leq t_-^q + s$ und

$t_+^q + s \leq t_-^p$. Zusammen ergibt daß $t_-^p - t_-^q = s = t_+^p - t_+^q$ und somit existiert $\mathrm{Fl}^\xi(t+s,p)$ genau dann wenn $\mathrm{Fl}^\xi(t,q)$ existiert und die beiden stimmen überein.

Wir zeigen jetzt, daß $U \subseteq \mathbb{R} \times M$ offen in der Produkttopologie ist: Für $p \in M$ existiert nach dem Satz über Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^m$ eine offene Umgebung von $(0,p) \in \mathbb{R} \times M$, auf welcher der Fluß Fl^ξ definiert und glatt ist. Für $p \in M$ sei

$$I := \{t' \in \left[0, t_+^p\right[: \mathrm{Fl}^\xi \text{ ist auf einer offenen Umgebung von } [0,t'] \times \{p\} \subseteq U \text{ definiert und glatt}\}.$$

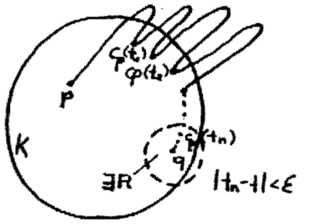
Wir zeigen nun indirekt, daß $I = [\,0, t_p^+\,[$ ist (analog geht man für t_-^p vor): Angenommen $I \subset \left[0, t_p^+\right[$. Sei $t_0 := \inf(\left[0, t_p^+\right[\setminus I)$. Es ist Fl^ξ auf einer Umgebung von $(0, \mathrm{Fl}^\xi(t_0,p))$ glatt. Wir wählen ein $\delta > 0$, sodaß $[0,\delta] \times \{\mathrm{Fl}^\xi(t_0-\delta,p)\}$ in dieser Umgebung enthalten ist. Es ist Fl^ξ nach Konstruktion von t_0 lokal um $[0,t_0-\delta]\times\{p\}$ glatt. Es ist $(s,q) \mapsto \mathrm{Fl}^\xi(s, \mathrm{Fl}^\xi(t_0-\delta,q)$ auf einer Umgebung von $[0,\delta] \times \{p\}$ glatt und wegen der Einparametergruppen-Eigenschaft ist $\mathrm{Fl}^\xi(s,\mathrm{Fl}^\xi(t_0-\delta,q)) = \mathrm{Fl}^\xi(s+t_0-\delta,q)$, also ist Fl^ξ lokal um $[t_0-\delta,t_0] \times \{p\}$ glatt. Insgesamt ist Fl^ξ auf einer Umgebung von $([0,t_0-\delta] \cup [t_0-\delta,t_0]) \times \{p\} = [0,t_0] \times \{p\}$ glatt, also bildet $t_0 \in I$ einen Widerspruch zur Annahme.



(2) Sei $K \subseteq M$ kompakt. Angenommen es existieren $(t_n) \to t_+^p < \infty$, sodaß $c_p(t_n) \in K$ für alle n. O.B.d.A. gelte $c_p(t_n) \to p' \in K$ (K ist kompakt). Der Fluß $\mathrm{Fl}^\xi(t,q)$ ist wohldefiniert für $|t| < \varepsilon$ und q nahe bei p'. Für n genügend groß seien $c(t_n)$ solche Werte für q, d.h. $\mathrm{Fl}^\xi(t, c_p(t_n))$ ist wohldefiniert für $|t| < \varepsilon$. Andererseits gilt:

$$\mathrm{Fl}^\xi(t, c_p(t_n)) = \mathrm{Fl}^\xi(t, \mathrm{Fl}^\xi(t_n,p)) = \mathrm{Fl}^\xi(t+t_n,p) = c_p(t+t_n).$$

Also ist $c_p(s)$ wohldefiniert für $0 \leq s < t_+^p$, aber auch für $s = t + t_n$ mit $|t| < \varepsilon$ und n beliebig, d.h. $t_n - \varepsilon < s < t_n + \varepsilon$. Sei $t_+^p - \varepsilon/2 < t_n$. Dann ist c_p sicher für $0 \leq s < t_+^p$ und $t_n - \varepsilon < t_+^p - \varepsilon < s < t_+^p + \varepsilon/2 < t_n + \varepsilon$ wohldefiniert, also insgesamt für $0 \leq s < t_+^p + \varepsilon/2$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß die Lösungskurven nur bis t_+^p definiert sind (Widerspruch zur Maximalität).



□

28.4 Beispiel (Exponentialabbildung)

Es sei $T \in L(n,n)$ und die Matrixmultiplikation von links $S \mapsto T \circ S$ definiere ein Vektorfeld auf $L(n,n)$. Gesucht ist die Lösungskurve $\Gamma : \mathbb{R} \to L(n,n)$, die $\Gamma'(t) = T \circ (\Gamma(t))$, als auch $\Gamma(0) = S \in L(n,n)$ erfüllt. Man definiert $\exp(T) := \sum (k!)^{-1} T^k$ und zeigt, daß die Reihe absolut konvergiert. Die Lösung obiger Differentialgleichung lautet dann $\Gamma(t) = \exp(tT) \circ S$, und der Fluß ist $Fl(t,S) = \exp(tT) \circ S$. Siehe Aufgabe (72.50).

28.5 Definition (Vollständige Vektorfelder)

Ein Vektorfeld ξ heißt VOLLSTÄNDIG, wenn Fl^ξ global definiert ist (d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$).

28.6 Bemerkungen

1. Aus Punkt 2 des vorigen Satzes folgt direkt: Ist M kompakt, so ist jedes Vektorfeld vollständig.
2. Falls M eine nichtkompakte Zusammenhangskomponente besitzt, dann existieren nichtvollständige Vektorfelder, z.B.: $M = \mathbb{R}$, $\xi(t) = 1 + t^2$, also $c'(t) = 1 + c(t)^2$. Zum Anfangswert $c(0) = 0$ ist dann die Lösung $c(t) = \tan(t)$ nur für $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ definiert.
3. Sei $M = \mathbb{R}^2$, $\xi(x,y) = y\frac{\partial}{\partial x}$ und $\eta(x,y) = (x^2/2)\frac{\partial}{\partial y}$. Wir behaupten, daß ξ und η vollständig sind:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Fl}^\xi(t;x,y) = (x + ty, y),\\ &\mathrm{Fl}^\eta(t;x,y) = (x, y + tx^2/2), \quad \text{denn}\\ &\frac{d}{dt}\mathrm{Fl}^\xi(t;x,y) = (y,0) = y \cdot \tfrac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \tfrac{\partial}{\partial y} = \xi(Fl(t;x,y)), \end{aligned}$$

   für η analog. Aber: $\xi + \eta$ ist nicht vollständig!
   Es ist $(\xi+\eta)|_{(x,y)} = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}$ und sei $c(t) = (x(t), y(t))$ eine Lösungskurve. Dann ist $x'(t) = y(t)$ und $y'(t) = x^2(t)/2$, d.h. $x''(t) = x^2(t)/2 \Rightarrow x'(t)^2 = x(t)^3/3 + C$. Löst man die Differentialgleichung zum Anfangswert $(y_0^2 - x_0^3)/3 = 0$, für $x_0 > 0$, so zeigt sich, daß $\mathrm{Fl}^{\xi+\eta}$ nicht global definiert ist.
4. Sei $\mathrm{Fl}^\xi_t(p) := \mathrm{Fl}^\xi(t,p)$. Weil die Lösungskurven in einer offenen Umgebung von p existieren, gilt für kleine t : $(\mathrm{Fl}^\xi_t)^{-1} = \mathrm{Fl}^\xi_{-t}$. Der Fluß Fl^ξ_t ist also ein lokaler Diffeomorphismus.

29. Lie-Klammer

In (20.6) haben wir gesehen, daß wir T_pM mit $\mathrm{Der}_p(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ identifizieren können. Und zwar war für lokale Koordinaten $(u^1,\dots,u^m)$ die Wirkung eines Tangentialvektors $v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_p \in T_pM$ auf $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} v(f) &= \Big(\sum_i v^i \tfrac{\partial}{\partial u^i}|_p\Big)(f) = \sum_i v^i \cdot \tfrac{\partial}{\partial u^i}|_p(f) \text{ und insbesonders}\\ v(u^j) &= \sum_i v^i \cdot \tfrac{\partial}{\partial u^i}|_p(u^j) = v^j, \text{ denn}\\ \tfrac{\partial}{\partial u^i}|_p(u^j) &= \partial_i(u^j \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) = \partial_i(\mathrm{pr}_j)(\varphi^{-1}(p)) = \delta_i^j. \end{aligned}$$

29.1 Satz (Vektorfelder als Derivationen). *Es gibt eine bilineare Abbildung*

$$\begin{aligned} &\mathfrak{X}(M) \times C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R}),\\ &\qquad (\xi, f) \mapsto \xi \cdot f = \xi(f)\,(: p \mapsto \xi_p(f) \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Beachte, daß $\xi \cdot f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ wohingegen $f \cdot \xi \in \mathfrak{X}(M)$. Diese bilineare Abbildung induziert einen $\mathbb{R}$-linearen Isomorphismus von $\mathfrak{X}(M)$ mit

$$\mathrm{Der}(C^\infty(M,\mathbb{R})) := \{\partial \in L(C^\infty(M,\mathbb{R})) : \partial(f\cdot g) = \partial(f)\cdot g + f \cdot \partial(g)\}.$$

Außerdem gilt: $(f\cdot\xi)\cdot g = f\cdot(\xi\cdot g)$, d.h. dieser Isomorphismus ist sogar $C^\infty(M,\mathbb{R})$-linear, wobei $\mathrm{Der}(C^\infty(M,\mathbb{R}))$ durch $(f\cdot\partial)(g) := f\cdot\partial(g)$ zu einem Modul über der kommutativen Algebra $C^\infty(M,\mathbb{R})$ gemacht wird.

Beweis. Wir definieren:

$$\xi(f)(x) = (\xi(f))(x) := \xi(x)(f) = (T_xf)(\xi(x)) = (\mathrm{pr}_2 \circ Tf \circ \xi)(x).$$

Also ist $\xi(f) = \mathrm{pr}_2 \circ Tf \circ \xi \in C^\infty(M,\mathbb{R})$.
Die Zuordnung $(\xi, f) \mapsto \xi(f)$ ist linear in ξ, da T_xf linear ist. Sie ist linear in f, da $\xi(x) \in \mathrm{Der}_x$, also linear ist.
Die induzierte Abbildung $f \mapsto \xi(f)$ ist eine Derivation, denn

$$\begin{aligned} \xi(fg)(x) &= \xi(x)(fg) = \xi(x)(f)\cdot g(x) + f(x)\cdot\xi(x)(g)\\ &= \xi(f)(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot\xi(g)(x)\\ &= \big(\xi(f)\cdot g)(x) + (f\cdot\xi(g)\big)(x)\\ &= \big(\xi(f)\,g + f\,\xi(g)\big)(x). \end{aligned}$$

Die induzierte Abbildung $\mathfrak{X}(M) \to \mathrm{Der}(C^\infty(M,\mathbb{R}))$ ist surjektiv:
Sei $\partial \in Der(C^\infty(M,\mathbb{R}))$ gegeben. Wir suchen ein Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, welches $\xi(x)(f) = \partial(f)(x)$ erfüllt. Also ist

$$\xi(x) = \mathrm{ev}_x \circ \partial \in \mathrm{Der}_x(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \cong T_xM.$$

Verbleibt zu zeigen, daß ξ glatt ist. Seien dazu $(u^1,\dots,u^m)$ lokale Koordinaten. Dann ist $\xi(x) = \sum_i \xi(x)^i \frac{\partial}{\partial u^i}|_x$, und die Komponenten $\xi(x)^i = (\mathrm{ev}_x \circ \partial)(u^i) = \partial(u^i)(x)$ sind glatt in x. Also ist $\xi \in \mathfrak{X}(M)$. Daß die beiden Abbildungen $\xi \leftrightarrow \partial$ invers zueinander sind, ist klar.

Schließlich können wir noch folgende Umformung durchführen:

$$\begin{aligned}(f\cdot\xi)(g)|_p &= (f\cdot\xi)_p\cdot g = (f_p\cdot\xi_p)\cdot g = f(p)\cdot(\xi_p\cdot g)\\ &= f(p)\cdot(\xi\cdot g)_p = (f\cdot\xi(g))|_p. \qquad\square\end{aligned}$$

29.2 Folgerung (Raum der Vektorfelder als Lie-Algebra).
Durch die Zuordnung:

$$\begin{gathered}\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M),\\ (\xi,\eta)\to[\xi,\eta]\\ [\xi,\eta]: f\mapsto\big(\xi(\eta(f))-\eta(\xi(f))\big),\end{gathered}$$

wird eine bilineare Abbildung definiert, die den Raum $\mathfrak{X}(M)$ zu einer Lie-Algebra *macht. D.h.:*

1. *Schiefsymmetrie:* $[\xi,\eta]+[\eta,\xi]=0$*;*
2. *"Jacobi-Identität":* $[\xi,[\eta,\chi]]+[\eta,[\chi,\xi]]+[\chi,[\xi,\eta]]=0$*;*
3. *Zusätzlich gilt:* $[f\xi,g\eta]=fg\cdot[\xi,\eta]+f\xi(g)\cdot\eta-g\eta(f)\cdot\xi$*.*

Beweis. Wir führen den Beweis für den Raum $\mathrm{Der}(A)$ der Derivationen einer allgemeinen assoziativen Algebra A. Dazu definieren wir für $\xi,\eta\in\mathrm{Der}(A)$ die Lie-Klammer von ξ mit η als $[\xi,\eta]:=\xi\circ\eta-\eta\circ\xi$.
Dann gilt $[\xi,\eta]\in\mathrm{Der}(A)$, denn klarerweise ist $[\xi,\eta]$ linear und es gilt:

$$\begin{aligned}(f\cdot g) &= \xi(\eta(f\cdot g))-\eta(\xi(f\cdot g))\\ &= \xi(f\cdot\eta(g))+\xi(\eta(f)\cdot g)-\eta(f\cdot\xi(g))-\eta(\xi(f)\cdot g)\\ &= f\cdot\xi(\eta(g))+\xi(f)\eta(g)+\eta(f)\xi(g)+\xi(\eta(f))\cdot g\\ &\qquad -f\cdot\eta(\xi(g))-\eta(f)\xi(g)-\xi(f)\eta(g)-\eta(\xi(f))\cdot g\\ &= f\cdot[\xi,\eta](g)+[\xi,\eta](f)\cdot g.\end{aligned}$$

Die Abbildung $(\xi,\eta)\mapsto[\xi,\eta]$ ist bilinear, denn die Komposition in $L(A,A)$ ist bilinear und die Subtraktion in $L(A,A)$ ist linear.
Sie ist schiefsymmetrisch, denn

$$[\xi,\eta]=\xi\circ\eta-\eta\circ\xi=-(\eta\circ\xi-\xi\circ\eta)=-[\eta,\xi]$$

und erfüllt die Jacobi-Gleichung, denn:

$$\begin{aligned}&[\xi,[\eta,\chi]]+[\eta,[\chi,\xi]]+[\chi,[\xi,\eta]]\\ &\quad=[\xi,\eta\circ\chi-\chi\circ\eta]+[\eta,\chi\circ\xi-\xi\circ\chi]+[\chi,\xi\circ\eta-\eta\circ\xi]\\ &\quad=\xi\circ(\eta\circ\chi-\chi\circ\eta)-(\eta\circ\chi-\chi\circ\eta)\circ\xi\\ &\qquad+\eta\circ(\chi\circ\xi-\xi\circ\chi)-(\chi\circ\xi-\xi\circ\chi)\circ\eta\\ &\qquad+\chi\circ(\xi\circ\eta-\eta\circ\xi)-(\xi\circ\eta-\eta\circ\xi)\circ\chi\\ &\quad=0\end{aligned}$$

Zuletzt zeigen wir noch Punkt (3). Dazu rechnen wir:

$$\begin{aligned}
\big([f\cdot\xi,\, g\cdot\eta]\big)(h) &= \Big((f\cdot\xi)\circ(g\cdot\eta) - (g\cdot\eta)\circ(f\cdot\xi)\Big)(h) = \\
&= (f\cdot\xi)\big((g\cdot\eta)(h)\big) - (g\cdot\eta)\big((f\cdot\xi)(h)\big) \\
&= (f\cdot\xi)\big(g\cdot\eta(h)\big) - (g\cdot\eta)\big(f\cdot\xi(h)\big) \\
&= f\cdot\xi(g)\cdot\eta(h) + f\cdot g\cdot\xi\big(\eta(h)\big) \\
&\qquad - g\cdot\eta(f)\cdot\xi(h) - g\cdot f\cdot\eta\big(\xi(h)\big) \\
&= \Big(f\cdot g\cdot[\xi,\eta] + f\cdot\xi(g)\cdot\eta - g\cdot\eta(f)\cdot\xi\Big)(h). \qquad \square
\end{aligned}$$

Bemerkung

Bezüglich der VB-Kartendarstellung sieht $[\xi,\eta]$ folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
&= \left[\sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \sum_k \eta^k \frac{\partial}{\partial u^k}\right] \overset{\text{Bilinearität}}{=\!=\!=} \\
&= \sum_{i,k}\left[\xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \eta^k \frac{\partial}{\partial u^k}\right] \\
&= \sum_{ik}\Big(\xi^i\eta^k\left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right] + \xi^i\Big(\frac{\partial}{\partial u^i}\cdot\eta^k\Big)\frac{\partial}{\partial u^k} - \eta^k\Big(\frac{\partial}{\partial u^k}\cdot\xi^i\Big)\frac{\partial}{\partial u^i}\Big) \\
&= \sum_k\sum_i\Big(\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i}\eta^k - \eta^i\frac{\partial}{\partial u^i}\xi^k\Big)\frac{\partial}{\partial u^k}, \quad \text{da } \left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Es ist der Koeffizient von $[\xi,\eta]$ bezüglich $\frac{\partial}{\partial u^k}$ gerade $[\xi,\eta]^k = \sum_i \Big(\xi^i \frac{\partial\eta^k}{\partial u^i} - \eta^i \frac{\partial\xi^k}{\partial u^i}\Big)$.

Man kann umgekehrt diese lokale Formel dazu verwenden, die Lieklammer zu definieren. Man muß dazu aber die Verträglichkeit mit Kartenwechsel nachrechnen. Dies geht wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\bar i,\bar j}\Big(\bar\xi^{\bar i}\frac{\partial\bar\eta^{\bar j}}{\partial\bar u^{\bar i}}-\bar\eta^{\bar i}\frac{\partial\bar\xi^{\bar j}}{\partial\bar u^{\bar i}}\Big)\ \frac{\partial}{\partial\bar u^{\bar j}}\\
&\quad=\sum_{\bar i,\bar j}\Big(\sum_i\xi^i\frac{\partial\bar u^{\bar i}}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial\bar u^{\bar i}}\Big(\sum_j\frac{\partial\bar u^{\bar j}}{\partial u^j}\eta^j\Big)-\sum_i\eta^i\frac{\partial\bar u^{\bar i}}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial\bar u^{\bar i}}\Big(\sum_j\frac{\partial\bar u^{\bar j}}{\partial u^j}\xi^j\Big)\Big)\ \frac{\partial}{\partial\bar u^{\bar j}}\\
&\quad=\sum_{\bar j}\Big(\sum_i\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i}\Big(\sum_j\frac{\partial\bar u^{\bar j}}{\partial u^j}\eta^j\Big)-\sum_i\eta^i\frac{\partial}{\partial u^i}\Big(\sum_j\frac{\partial\bar u^{\bar j}}{\partial u^j}\xi^j\Big)\Big)\ \frac{\partial}{\partial\bar u^{\bar j}}\\
&\quad=\sum_{\bar j}\Big(\sum_i\xi^i\sum_j\Big(\frac{\partial^2\bar u^{\bar j}}{\partial u^i\partial u^j}\eta^j+\frac{\partial\bar u^{\bar j}}{\partial u^j}\frac{\partial}{\partial u^i}\eta^j\Big)\\
&\qquad-\sum_i\eta^i\sum_j\Big(\frac{\partial^2\bar u^{\bar j}}{\partial u^i\partial u^j}\xi^j+\frac{\partial\bar u^{\bar j}}{\partial u^j}\frac{\partial}{\partial u^i}\xi^j\Big)\Big)\ \frac{\partial}{\partial\bar u^{\bar j}}\\
&\quad=\sum_{i,j}\Big(\xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial u^i}-\eta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial u^i}\Big)\ \frac{\partial}{\partial u^j}
\end{aligned}$$

Für offenes $M\subseteq\mathbb{R}^n$ gilt also: $[\xi,\eta]^k_x=\sum_i(\xi^i_x\partial_i\eta^k|_x-\eta^i_x\partial_i\xi^k|_x)=(\eta^k)'(x)(\xi_x)-(\xi^k)'(x)(\eta_x)$, d.h. $[\xi,\eta](x)=\eta'(x)\cdot\xi_x-\xi'(x)\cdot\eta_x$.

Beispiel

Es gilt: $[\xi,\eta]$ ist nicht vollständig, wo ξ und η wie in Punkt (3) der Bemerkung (28.6) sind:

$$[\xi,\eta]=y\tfrac{\partial}{\partial x}\circ\tfrac{x^2}{2}\tfrac{\partial}{\partial y}-\tfrac{x^2}{2}\tfrac{\partial}{\partial y}\circ y\tfrac{\partial}{\partial x}=yx\tfrac{\partial}{\partial y}-\tfrac{x^2}{2}\tfrac{\partial}{\partial x}$$

$$c(t)=\begin{pmatrix}c_1(t)\\c_2(t)\end{pmatrix}\text{ ist Lösungskurve }\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{d}{dt}c_1(t)=-c_1^2(t)/2\\[2mm]\dfrac{d}{dt}c_2(t)=c_1(t)\cdot c_2(t)\end{cases}$$

Es folgt: $c_1(t)=\frac{2}{(t+A)}$ und $c_2(t)=(t+A)^2\cdot B$. Aus der Anfangsbedingung $c(0)=(x,y)$ ergibt sich $A=\frac{2}{x}$ und $B=\frac{x^2y}{4}$. Somit ist

$$c_{(x,y)}(t)=\mathrm{Fl}^{[\xi,\eta]}(t;x,y)=\big(\tfrac{2x}{2+tx},(t+\tfrac{2}{x})^2\tfrac{x^2y}{4}\big).$$

Für $t=-\frac{2}{x}$ ist der Fluß nicht definiert, d.h. $[\xi,\eta]$ ist nicht vollständig.

29.3 Definition (Verwandtschaft von Vektorfeldern)

Es sei $f:M\to N$ glatt, $\xi\in\mathfrak{X}(M)$ und $\eta\in\mathfrak{X}(N)$. Das Vektorfeld ξ heißt f-verwandt mit η $:\Leftrightarrow Tf\circ\xi=\eta\circ f$

$$\begin{tikzcd}
TM \arrow[r, "Tf"] & TN & \\
M \arrow[u, "\xi"] \arrow[r, "f"] & N \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Es gilt dann, daß ξ genau dann f-verwandt mit η ist, wenn $\xi(g \circ f) = (\eta g) \circ f$ für alle glatten $g : N \to \mathbb{R}$.
($\Rightarrow$) $\xi(g \circ f)(p) = \xi_p(g \circ f) = (T_p f \cdot \xi_p)g = \eta_{f(p)} g = \eta(g)(f(p)) = (\eta(g) \circ f)(p)$
($\Leftarrow$) $(Tf \circ \xi)_p g = (Tf \cdot \xi_p)g = \xi_p(g \circ f) = \xi(g \circ f)(p) = (\eta g \circ f)(p) = \eta g(f(p)) = \eta_{f(p)}(g)$

29.4 Bemerkung (Push-forward von Vektorfeldern)

Für ein allgemeines f läßt sich zu einem gegebenen Vektorfeld kein f-verwandtes Vektorfeld finden. Ist jedoch f ein Diffeomorphismus, dann ist $Tf \circ \xi \circ f^{-1}$ ein Vektorfeld $f_*\xi$ auf N für jedes Vektorfeld ξ auf M.

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "Tf"] & TN \\ M \arrow[u, "\xi"] \arrow[r, "f"] & N \arrow[u, "f_*\xi"'] \end{tikzcd}$$

Es folgt für ξ aus der Konstruktion, daß es f-verwandt mit $f_*\xi$ ist. Umgekehrt hat man folgende Aussage:

29.5 Lemma (Pull-back von Vektorfeldern). *Es sei $f : M \to N$ eine Immersion, $\eta \in \mathfrak{X}(N)$ und $\eta_{fp} \in \operatorname{Bild}(T_p f)$ für alle $p \in M$, dann folgt daraus: $\exists\ !$ Vektorfeld $\xi (= f^*\eta)$, sodaß ξ f-verwandt mit η ist.*

Beweis. Da Tf injektiv ist, kann jedem η_{fp} in $\operatorname{Bild}(T_p f)$ ein eindeutig bestimmtes Element $\xi_p \in T_p M$ zugeordnet werden, es bleibt zu zeigen, $\xi : M \to TM$ ist C^∞. Da f eine Immersion ist, existieren Karten φ und ψ um p bzw. f_p, sodaß $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi = \operatorname{incl}_{\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n}$. Sei $\xi = \sum \xi^i_\varphi \partial^\varphi_i$. Es genügt zu zeigen, daß $\xi^i_\varphi : M \to \mathbb{R}$ glatt sind. Da

$$\begin{aligned}(\xi^i_\varphi)_p &= \xi_p(\operatorname{pr}_i \circ \varphi^{-1}) = \xi_p(\operatorname{pr}_i \circ \psi^{-1} \circ f) = (Tf \circ \xi_p)(\operatorname{pr}_i \circ \psi^{-1}) \\ &= \eta_{f(p)}(\operatorname{pr}_i \circ \psi^{-1}) = (\eta^i_\psi)_{f(p)} = (\eta^i_\psi \circ f)_p \text{ in } p \text{ glatt ist,}\end{aligned}$$

folgt, daß ξ_p lokal um p glatt ist. Die f-Verwandtschaft folgt unmittelbar aus der Konstruktion von ξ. □

29.6 Bemerkung

Wir haben gezeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen Vektorfelder durch geeignete glatte Abbildungen transportiert werden können. Dabei bezeichne $f^*\eta = Tf^{-1} \circ \eta \circ f$ (siehe Lemma (29.5)):

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "Tf"] & TN \\ M \arrow[u, "\xi"] \arrow[r, "f"] & N \arrow[u, "f_*\xi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TM \arrow[r, "Tf"] & TN \\ M \arrow[u, "f^*\eta"] \arrow[r, "f"] & N \arrow[u, "\eta"'] \end{tikzcd}$$

Wobei das linke Diagramm existiert, falls f ein Diffeomorphismus ist und das rechte, falls f eine Immersion ist und η Werte im Bild von Tf hat. Es gilt dann:

$$f_*(f^*\eta) = Tf \circ (f^*\eta) \circ f^{-1} = Tf \circ Tf^{-1} \circ \eta \circ f \circ f^{-1} = \eta$$

sowie $f^*(f_*\xi) = \xi$, wobei f, ξ und η die oben genannten Voraussetzungen erfüllen. Insgesamt haben wir gezeigt: $f^* = (f_*)^{-1} : \mathfrak{X}(N) \to \mathcal{X}(M)$ und $f_* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$.

29.7 Proposition. *Die Vektorfelder ξ_i seien f-verwandt mit η_i für $i = 1, 2$. Dann gilt:*

1. *$\xi_1 + \xi_2$ ist f-verwandt mit $\eta_1 + \eta_2$.*
2. *$[\xi_1, \xi_2]$ ist f-verwandt mit $[\eta_1, \eta_2]$.*
3. *$(g \circ f) \cdot \xi$ ist f-verwandt mit $g \cdot \eta$, wobei $g : N \to \mathbb{R}$ glatt ist.*

Beweis.
(1) folgt aus der Linearität von $T_x f$.
(2) folgt, da

$$\begin{aligned}
[\xi_1, \xi_2](g \circ f) &= \xi_1(\xi_2(g \circ f)) - \xi_2(\xi_1(g \circ f)) \\
&= \xi_1((\eta_2 g) \circ f) - \xi_2((\eta_1 g) \circ f) \\
&= (\eta_1(\eta_2 g)) \circ f - (\eta_2(\eta_1 g)) \circ f = ([\eta_1, \eta_2]g) \circ f.
\end{aligned}$$

(3) folgt, wegen

$$\begin{aligned}
(Tf \circ ((g \circ f) \cdot \xi))(p) &= Tf(g(f(p)) \cdot \xi_p) = g(f(p)) \cdot (T_p f)\xi_p \\
&= g(f(p)) \cdot \eta_{f(p)} = ((g \cdot \eta) \circ f)(p). \qquad \square
\end{aligned}$$

29.8 Lemma. *Seien ξ und η zwei Vektorfelder, dann ist ξ f-verwandt mit $\eta \Leftrightarrow$ $f \circ \mathrm{Fl}^\xi = \mathrm{Fl}^\eta \circ (\mathrm{id} \times f)$ lokal um $\{0\} \times M$.*

Beweis.
($\Leftarrow$) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}|_{t=0} f(\mathrm{Fl}^\xi(t,p)) = Tf(\mathrm{Fl}^\xi(.,p)'(0)) = Tf(\xi_p) \text{ und} \\
&\tfrac{d}{dt}|_{t=0} \mathrm{Fl}^\eta(t, f(p)) = \eta(\mathrm{Fl}^\eta(0, f(p))) = \eta(f(p)).
\end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Die Kurve $\mathrm{Fl}^\eta(., f(p))$ ist eine Integralkurve zu η mit Startwert $f(p)$. Es ist $f(\mathrm{Fl}^\xi(t,p))|_{t=0} = f(p)$ und durch Differenzieren folgt:

$$(f(\mathrm{Fl}^\xi(.,p)))'(t) = Tf(\mathrm{Fl}^\xi(.,p))'(t) = (Tf \cdot \xi)|_{\mathrm{Fl}^\xi(t,p)} = \eta|_{f(\mathrm{Fl}^\xi(t,p))}.$$

Die Gleichheit der beiden Ausdrücke folgt nun aus der Eindeutigkeit der Integralkurven. $\square$

29.9 Definition (Lie-Ableitung)

1. Für $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ist die LIE-ABLEITUNG $\mathcal{L}_\xi$ in Richtung ξ auf Funktionen $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ definiert durch
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi : C^\infty(M, \mathbb{R}) &\to C^\infty(M, \mathbb{R}) \\
f &\mapsto \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(f \circ \mathrm{Fl}^\xi)(t, .).
\end{aligned}$$
2. Es seien $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$, dann definiert $\mathcal{L}_\xi(\eta)$ wieder ein Vektorfeld durch folgende Zuordnung:
$$\mathcal{L}_\xi(\eta) = \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(\mathrm{Fl}_t^\xi)^*\eta = \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(T\,\mathrm{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \mathrm{Fl}_t^\xi).$$

Dabei beachte man, daß $T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-t}\circ\eta\circ\mathrm{Fl}^\xi_t : M\to TM$ für alle t lokal ein Schnitt ist, und somit $t\mapsto (T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-t}\circ\eta\circ\mathrm{Fl}^\xi_t)(x)$ eine lokal definierte Kurve im Vektorraum T_xM für jedes x ist ($t\mapsto (T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-t}\circ\eta\circ\mathrm{Fl}^\xi_t)$ keine $\mathbb{R}\to\mathfrak{X}(M)$), und somit die Ableitung $\frac{d}{dt}|_{t=0}(T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-t}\circ\eta\circ\mathrm{Fl}^\xi_t)(x)$ ebenfalls in T_xM liegt.

Der folgende Satz zeigt, daß wir die Lie-Ableitung von Funktionen und Vektorfeldern schon kennen.

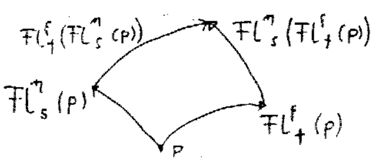
29.10 Satz (Beschreibungen der Lie-Ableitung).

1. *Sei* $\xi\in\mathfrak{X}(M)$ *und* $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$*, dann gilt:*
$$(\mathcal{L}_\xi f)_p = (f\circ\mathrm{Fl}^\xi(.,p))'(0) = (\xi f)_p.$$
2. *Seien* $\xi,\eta\in\mathfrak{X}(M)$*, dann gilt:*
$$[\xi,\eta]_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-t}\circ\eta\circ\mathrm{Fl}^\xi)(t,p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\mathrm{Fl}^\xi_t)^*\eta|_p = \mathcal{L}_\xi(\eta)_p.$$

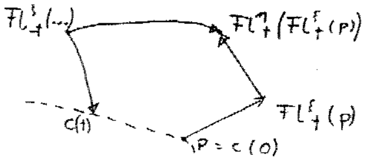
Beweis. (1) Da $\xi_p=[c_p]$, wobei bei $c_p=\mathrm{Fl}^\xi(.,p)$, also $c_p(0)=p$ und $c_p'(0)=\xi_p$ ist, gilt $(f\circ\mathrm{Fl}^\xi(.,p))'(0)=(f\circ c_p)'(0)=\xi_p(f)=(\xi f)_p$.
(2) Sei $\alpha:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ durch
$$(t,s)\mapsto(\eta|_{\mathrm{Fl}^\xi(t,p)})(f\circ\mathrm{Fl}^\xi(s,.)) = T\,\mathrm{Fl}^\xi(s,\_)(\eta_{\mathrm{Fl}^\xi(t,p)})(f) = (T\,\mathrm{Fl}^\xi_s\circ\eta\circ\mathrm{Fl}^\xi_t)_p(f)$$
lokal definiert. Dann ist
$$\begin{aligned}
&\alpha(t,0) = (\eta|_{\mathrm{Fl}^\xi(t,p)})f\\
&\alpha(0,s) = \eta_p(f\circ\mathrm{Fl}^\xi(s,.))\\
\Rightarrow\quad &\partial_1\alpha|_{(0,0)} = \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(\eta|_{\mathrm{Fl}^\xi(t,p)})f = \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(\eta f)(\mathrm{Fl}^\xi(t,p)) = \xi_p(\eta(f))\\
&\partial_2\alpha|_{(0,0)} = \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\eta_p(f\circ\mathrm{Fl}^\xi(t,.)) = \eta_p\tfrac{d}{dt}|_{t=0}(f\circ\mathrm{Fl}^\xi(t,.)) = \eta_p(\xi f),
\end{aligned}$$
da η_p linear ist. Es gilt also
$$\begin{aligned}
\text{einerseits: } \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\alpha(t,-t) &= \partial_1\alpha(0,0)-\partial_2\alpha(0,0)\\
&= \xi_p(\eta f)-\eta_p(\xi f) = [\xi,\eta]_p f\\
\text{andererseits: } \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\alpha(t,-t) &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(\eta|_{\mathrm{Fl}^\xi(t,p)})(f\circ\mathrm{Fl}^\xi(-t,.))\\
&= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-t}\circ\eta\circ\mathrm{Fl}^\xi_t)_p f.
\end{aligned}$$
□

29.11 Satz. *Die Lie-Klammer ist eine Obstruktion gegen Kommutativität der Flüsse. Genauer heißt das:*

1. *Es ist* $[\xi,\eta]=0\Leftrightarrow\mathrm{Fl}^\xi_t\circ\mathrm{Fl}^\eta_s=\mathrm{Fl}^\eta_s\circ\mathrm{Fl}^\xi_t$ *(Diese Abbildungen sind lokal für kleine* t *und* s *definiert).*



2. *Sei $c : \mathbb{R} \to M$ mit $c(t) := (\mathrm{Fl}^\eta_{-t} \circ \mathrm{Fl}^\xi_{-t} \circ \mathrm{Fl}^\eta_t \circ \mathrm{Fl}^\xi_t)_p$ lokal definiert. Dann gilt: $c(0) = p$, $c'(0) = 0$, $c''(0) \in T_pM$ ist wohldefiniert und $c''(0) = 2[\xi, \eta]_p$.*



Beweis. (1) ($\Leftarrow$) Es gilt

$$\mathrm{Fl}^\xi(t, \mathrm{Fl}^\eta(s,p)) = \mathrm{Fl}^\xi_t \mathrm{Fl}^\eta_s(p) = \mathrm{Fl}^\eta_s \mathrm{Fl}^\xi_t(p) = \mathrm{Fl}^\eta_0(s, \mathrm{Fl}^\xi_t(p)),$$

$$\begin{aligned}
&\text{d.h. } \mathrm{Fl}^\xi_t \circ \mathrm{Fl}^\eta = \mathrm{Fl}^\eta(1 \times \mathrm{Fl}^\xi_t)\\
&\overset{(29.8)}{\Longrightarrow} \quad \eta \text{ ist } \mathrm{Fl}^\xi_t\text{-verwandt mit } \eta, \text{ also } T\,\mathrm{Fl}^\xi_t \circ \eta = \eta \circ \mathrm{Fl}^\xi_t\,.\\
&\Rightarrow \quad \eta = T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-t} \circ \eta \circ \mathrm{Fl}^\xi_t\,, \text{ da } (\mathrm{Fl}^\xi_t)^{-1} = \mathrm{Fl}^\xi_{-t} \text{ ein lokaler Diffeom.}\\
&\Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-t} \circ \eta \circ \mathrm{Fl}^\xi_t \overset{(29.10)}{=\!=\!=} [\xi, \eta].
\end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Aus $[\xi, \eta] = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}(T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-t} \circ \eta \circ \mathrm{Fl}^\xi_t)(p) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-t} \circ T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-s} \circ \eta \circ \mathrm{Fl}^\xi_s \circ \mathrm{Fl}^\xi_t)(p)\\
&= (T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-t} \circ \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-s} \circ \eta \circ \mathrm{Fl}^\xi_s) \circ \mathrm{Fl}^\xi_t)(p)\\
&= (T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-t} \circ [\xi, \eta] \circ \mathrm{Fl}^\xi_t)(p) = 0
\end{aligned}$$

Also ist $\eta = T\,\mathrm{Fl}^\xi_0 \circ \eta \circ \mathrm{Fl}^\xi_0 = T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-t} \circ \eta \circ \mathrm{Fl}^\xi_t$ konstant in t, d.h. $\eta \circ \mathrm{Fl}^\xi_t = T\,\mathrm{Fl}^\xi_t \circ \eta$ Und somit ist η ist Fl^ξ_t-verwandt mit η. Nach (29.8) ist schließlich $\mathrm{Fl}^\eta_s \circ \mathrm{Fl}^\xi_t = \mathrm{Fl}^\xi_t \circ \mathrm{Fl}^\eta_s$.
(2) Es sei $c : \mathbb{R} \to M$ lokal definiert und C^∞ und $c' : \mathbb{R} \to TM$ der kanonische Lift von c. Die Kurve $c'' : \mathbb{R} \to T(TM)$ kann ebenfalls als Lift aufgefaßt werden.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, equal] \arrow[d, "c"'] & \mathbb{R} \arrow[r, equal] \arrow[d, "c'"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "c''"] \\
M & TM \arrow[l, "\pi_M"] & T(TM) \arrow[l, "\pi_{TM}"]
\end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{aligned} c &= \pi_M \circ c' \\ c' &= \pi_{TM} \circ c'' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad c = \pi_M \circ \pi_{TM} \circ c''$$

Falls $c'(0) = 0$, läßt sich $c''(0)$ als Derivation auffassen: $f \mapsto c''(0)f := (f \circ c)''(0)$ ist linear und

$$\begin{aligned}
c''(0)(fg) &= ((fg) \circ c)''(0) = ((f \circ c)(g \circ c))''(0)\\
&= (f \circ c)''(0)(g \circ c)(0) + 2(f \circ c)'(0)(g \circ c)'(0) + (f \circ c)(0)(g \circ c)''(0)\\
&= (c''(0)f)g(c(0)) + f(c(0))(c''(0)g).
\end{aligned}$$

Also ist $c''(0)$ eine Derivation über $c(0) = p$, d.h. $c''(0) \in T_pM$.

$$\begin{aligned}
\text{Es sei } \alpha_0(t,s) &:= (\mathrm{Fl}^\eta_t \circ \mathrm{Fl}^\xi_s)(p) \\
\alpha_1(t,s) &:= (\mathrm{Fl}^\xi_{-t} \circ \mathrm{Fl}^\eta_s \circ \mathrm{Fl}^\xi_s)(p) \\
\alpha_2(t,s) &:= (\mathrm{Fl}^\eta_{-t} \circ \mathrm{Fl}^\xi_{-s} \circ \mathrm{Fl}^\eta_s \circ \mathrm{Fl}^\xi_s)(p).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Dann gilt: } c(t) &= \alpha_2(t,t) \\
\alpha_2(0,s) &= \alpha_1(s,s) \\
\alpha_1(0,s) &= \alpha_0(s,s).
\end{aligned}$$

Sei $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\partial_1(f \circ \alpha_0) &= (\eta f) \circ \alpha_0 \\
\partial_1(f \circ \alpha_1) &= -(\xi f) \circ \alpha_1 \\
\partial_1(f \circ \alpha_2) &= -(\eta f) \circ \alpha_2 \\
\partial_2(f \circ \alpha_0)(0,s) &= (\xi f)(\alpha_0(0,s)) \\
\partial_2(f \circ \alpha_1)(0,s) &= \partial_1(f \circ \alpha_0)(s,s) + \partial_2(f \circ \alpha_0)(s,s) \\
\partial_2(f \circ \alpha_2)(0,s) &= \partial_1(f \circ \alpha_1)(s,s) + \partial_2(f \circ \alpha_1)(s,s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow c'(0)f &= (f \circ c)'(0) = \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(f \circ \alpha_2)(t,t) \\
&= \partial_1(f \circ \alpha_2)(0,0) + \partial_2(f \circ \alpha_2)(0,0) \\
&= -(\eta f)_p + \partial_1(f \circ \alpha_1)(0,0) + \partial_2(f \circ \alpha_1)(0,0) \\
&= -(\eta f)_p - (\xi f)_p + \partial_1(f \circ \alpha_0)(0,0) + \partial_2(f \circ \alpha_0)(0,0) = 0 \\
c''(0)f &= (f \circ c)''(0) = (\tfrac{d}{dt})^2|_{t=0}(f \circ \alpha_2)(t,t) \\
&= \partial_1^2(f \circ \alpha_2)(0,0) + 2\partial_2\partial_1(f \circ \alpha_2)(0,0) + \partial_2^2(f \circ \alpha_2)(0,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_1^2(f \circ \alpha_2)(0,0) &= \partial_1(-(\eta f) \circ \alpha_2)(0,0) \\
&= (-\eta(-\eta f))\alpha_2(0,0) = (\eta(\eta f))_p \\
\partial_2\partial_1(f \circ \alpha_2)(0,0) &= \partial_2((-\eta f) \circ \alpha_2)(0,0) \\
&= \partial_1((-\eta f) \circ \alpha_1)(0,0) + \partial_2((-\eta f) \circ \alpha_1)(0,0) \\
&= (\xi\eta f)_p + \partial_1(-\eta f \circ \alpha_0)(0,0) + \partial_2(-\eta f \circ \alpha_0)(0,0) \\
&= (\xi\eta f)_p - (\eta\eta f)_p - (\xi\eta f)_p = -(\eta\eta f)_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2^2(f\circ\alpha_2)(0,0) &= \partial_1^2(f\circ\alpha_1)(0,0)+2\partial_1\partial_2(f\circ\alpha_1)(0,0)\\
&\qquad\qquad + \partial_2^2(f\circ\alpha_1)(0,0)\\
\partial_1^2(f\circ\alpha_1)(0,0) &= (\xi\xi f)_p\\
\partial_2\partial_1(f\circ\alpha_1)(0,0) &= \partial_2((-\xi f)\circ\alpha_1)(0,0)\\
&= \partial_1(-\xi f\circ\alpha_0)(0,0)+\partial_2(-\xi f\circ\alpha_0)(0,0)\\
&= -(\eta\xi f)_p-(\xi\xi f)_p\\
\partial_2^2(f\circ\alpha_1)(0,0) &= \partial_1^2(f\circ\alpha_0)(0,0)+2\partial_1\partial_2(f\circ\alpha_0)(0,0)+\partial_2^2(f\circ\alpha_0)(0,0)\\
&= (\eta\eta f)_p+2(\xi\eta f)_p+(\xi\xi f)_p
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
c''(0)f &= \eta\eta f-2\eta\eta f+\xi\xi f-2\eta\xi f-2\xi\xi f+\eta\eta f+2\xi\eta f+\xi\xi f\\
&= 2(\xi\eta f-\eta\xi f)=2[\xi,\eta]f \qquad \square
\end{aligned}$$

29.12 Satz (Kommutierende Flüsse kommen von Karten).
Es seien $\{\xi_i\}_{i=1}^k$ linear unabhängige Vektorfelder auf M, und $[\xi_i,\xi_j]=0\ \forall\ i,j$. Dann existiert eine Karte φ, sodaß lokal gilt: $\xi_i=\partial_i^\varphi$ für $i=1\dots k$.

Beweis. O.B.d.A. sei $M\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $p=0$ und $\xi_i(0)=e_i$ für $i=1,\dots k$. Es sei

$$\begin{aligned}
\varphi(t_1,\dots,t_n) &:= \mathrm{Fl}^{\xi_1}\Big(t_1,\mathrm{Fl}^{\xi_2}(t_2,\dots\mathrm{Fl}^{\xi_k}(t_k;0,\dots0,t_{k+1},\dots t_n)\dots)\Big)\\
&= \Big(\mathrm{Fl}^{\xi_1}_{t_1}\circ\dots\circ\mathrm{Fl}^{\xi_k}_{t_k}\Big)(0,\dots,0,t_{k+1},\dots t_n).
\end{aligned}$$

Es gilt $\varphi(0)=p$ und φ ist ein lokaler Diffeomorphismus, da die partiellen Ableitungen für $i\le k$ folgende Gestalt haben:

$$\begin{aligned}
\partial_i\varphi(t_1,\dots,t_n) &= \tfrac{\partial}{\partial t_i}\Big(\mathrm{Fl}^{\xi_1}_{t_1}\circ\dots\circ\mathrm{Fl}^{\xi_i}_{t_i}\circ\dots\circ\mathrm{Fl}^{\xi_k}_{t_k}\Big)(0,\dots,0,t_{k+1},\dots t_n)\\
&= \tfrac{\partial}{\partial t_i}\Big(\mathrm{Fl}^{\xi_i}_{t_i}\circ\mathrm{Fl}^{\xi_1}_{t_1}\dots\circ\widehat{\mathrm{Fl}^{\xi_i}_{t_i}}\circ\dots\circ\mathrm{Fl}^{\xi_k}_{t_k}\Big)(0,\dots,0,t_{k+1},\dots t_n)\\
&= \xi_i\Big(\Big(\mathrm{Fl}^{\xi_i}_{t_i}\circ\mathrm{Fl}^{\xi_1}_{t_1}\dots\circ\widehat{\mathrm{Fl}^{\xi_i}_{t_i}}\circ\dots\circ\mathrm{Fl}^{\xi_k}_{t_k}\Big)(0,\dots,0,t_{k+1},\dots t_n)\Big)\\
&= \xi_i\Big(\Big(\mathrm{Fl}^{\xi_1}_{t_1}\dots\circ\mathrm{Fl}^{\xi_k}_{t_k}\Big)(0,\dots,0,t_{k+1},\dots t_n)\Big)\\
&= \xi_i\Big(\varphi(t_1,\dots,t_n)\Big),
\end{aligned}$$

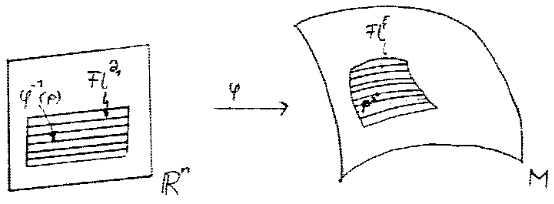
dabei bedeutet $\widehat{\dots}$, daß der entsprechende Term ausgelassen wird. Also ist $\xi_i=\partial_i^\varphi$ für $i\le k$. Für $i>k$ und $t_1=\dots=t_k=0$ gilt nach Voraussetzung:

$$\partial_i|_{t_i=0}\varphi(0,\dots,0,t_i,0,\dots,0)=(\tfrac{\partial}{\partial t_i})(0,\dots0,t_i,0,\dots0)=e_i.$$

Somit ist $\varphi'(0)=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $\partial_i^\varphi(q)=\partial_i(\varphi)(\varphi^{-1}q)=\xi_i(q)$ für $i\le k$. $\square$

29.13 Bemerkungen

1. Es gilt auch die Umkehrung: Ist φ eine Karte, dann verschwinden die Lie-Klammern der Basisvektorfelder ∂_i^φ, also kommutieren ihre Flüsse paarweise.
2. Es sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ und $\xi_p \neq 0$. Dann existiert nach (29.12) für $k = 1$ eine Karte φ mit $\xi = \partial_1^\varphi$ und ∂_1 ist φ-verwandt mit ∂_1^φ ($T\varphi \circ \partial_1 = \partial_1 \varphi = \partial_1^\varphi \circ \varphi$). Also ist $\varphi(\mathrm{Fl}^\xi(t,x)) = \mathrm{Fl}^\xi(t, \varphi(x))$ und somit ist $\mathrm{Fl}^\xi(t,p) = \varphi(\varphi^{-1}(p) + te_1)$.



3. Es ist $\xi_p = 0$ und $\mathrm{Fl}^\xi(t,p) = p$, d.h. p ist ein Fixpunkt des lokalen Flusses. O.B.d.A. ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ mit $\xi(0) = 0$. Dann ist $\xi'(0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linear, und die Eigenwerte von $\xi'(0)$ bestimmen generisch das lokale Verhalten des Flusses. (Siehe Bücher über dynamische Systeme.)

30. Integralmannigfaltigkeiten

30.1 Bemerkung

Wir haben in (28.6) gesehen, daß Integralkurven von Vektorfeldern nicht immer global definiert sind. Anschaulich gesprochen sind sie nicht für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, weil sie bereits in endlicher Zeit nach "unendlich" entweichen. Es sind also die Lösungskurven "zu schnell", d.h. die Geschwindigkeitsvektoren zu groß. Wir können aber den Fluß global machen, indem wir seine Geschwindigkeit verkleinern.

Abstrakter:
i) An Stelle von Vektorfeldern betrachten wir eindimensionale Teilräume $E_p \subseteq T_pM\ \forall\ p \in M$, also Teilvektorbündel.
ii) An Stelle von Lösungskurven betrachten wir Integralmannigfaltigkeiten, das sind 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeiten N von M, für die $T_pN = E_p$ gilt. Wir können diese Begriffe auch im mehrdimensionalen Fall formulieren:

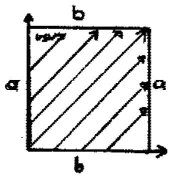
30.2 Definition (Integralmannigfaltigkeit)

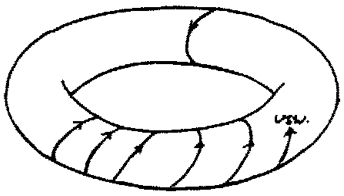
Es sei E ein Teilvektorbündel von π: TM $\to M$ (in der (älteren) Literatur auch als DISTRIBUTION bezeichnet). Dann versteht man unter einer INTEGRALMANNIGFALTIGKEIT N zu E eine zusammenhängende Mannigfaltigkeitsstruktur auf einer Teilmenge $N \subseteq M$, sodaß incl : $N \to M$ eine Immersion ist und $T\,\mathrm{incl} : T_pN \to E_p$ für alle $p \in N$ eine Bijektion ist.

30.3 Beispiele

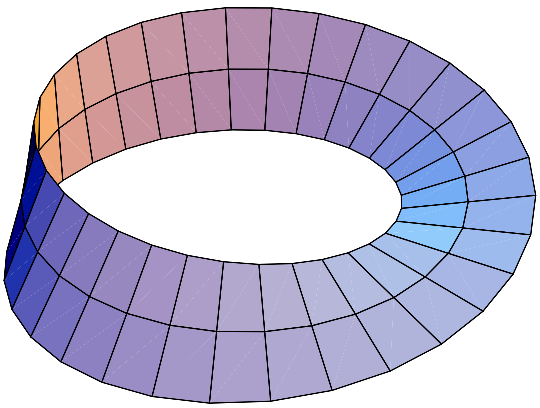
1) Für eindimensionale Teilvektorbündel, die ja lokal von einem Vektorfeld aufgespannt werden, existieren immer Integralkurven zu diesem Vektorfeld, und damit auch Integralmannigfaltigkeiten des Bündels.

Z.B.: Hat das Vektorfeld irrationalen Anstieg, dann liegt die Integralmannigfaltigkeit N dicht im Torus.

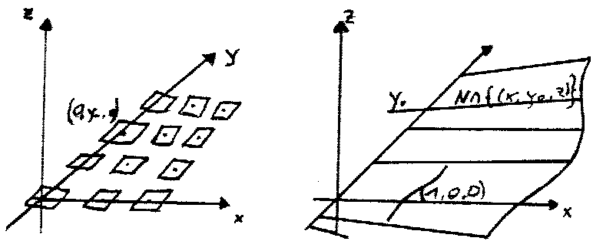




2) Man bemerke allerdings, daß das Teilvektorbündel E im allgemeinen nicht global durch ein VF aufgespannt wird. Ein Beispiel ist das Möbiusband, wo E alle Vektoren sind, die von Kurven in der Faser herrühren.



3) Im mehrdimensionalen Fall gilt im allgemeinen nicht, daß jedes Teilvektorbündel eine Integralmannigfaltigkeit erzeugt. Betrachte das folgende Beispiel: $M = \mathbb{R}^3$ mit $E_{xyz} = \langle\{\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y}\}\rangle \subseteq T_{(x,y,z)}\mathbb{R}^3$.



Sei N eine Integralmannigfaltigkeit durch $(0,0,0)$. Für ein fixes y_0 betrachte man den Schnitt $N \cap \{(x, y_0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$. Wegen $T_0 N = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ist dieser Schnitt lokal eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit mit Tangentialraum $\langle(1, 0, y_0)\rangle$ im Punkt (x, y_0, z), also die Gerade durch $(0, y_0, 0)$, gegeben durch $\{(x, y_0, xy_0) : x \in \mathbb{R}\}$. Somit ist N lokal durch $\{(x, y, x\,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ gegeben. Betrachtet man aber den Tangentialraum in $(1, 0, 0)$, so enthält dieser Vektoren, deren 3. Komponente $\neq 0$ ist: $T_{(x,y,xy)}N = \langle(1, 0, y),\ (0, 1, x)\rangle$. Dies stimmt aber mit $E_{(x,y,z)}$ nur dort überein, wo $x = 0$. Eine Integralmannigfaltigkeit durch 0 existiert also nicht.

30.4 Bemerkung

Angenommen E ist ein Teilbündel von TM, das durch jeden Punkt eine Integralmannigfaltigkeit besitzt. Sei $p \in M$ und N die Integralmannigfaltigkeit durch p und seien ξ, η Vektorfelder auf M mit $\xi_x, \eta_x \in E_x$ für alle x. Wegen Lemma (29.5) existieren Vektorfelder ξ_1, η_1 auf N, sodaß ξ_1, η_1 bezüglich incl verwandt sind mit ξ, η. Dann ist $[\xi_1, \eta_1]$ ein Vektorfeld auf N und $[\xi_1, \eta_1]$ ist incl-verwandt mit $[\xi, \eta]$. Wir erhalten $[\xi, \eta]_p = T\,\mathrm{incl}\,[\xi_1, \eta_1]_p \in E_p$.

30.5 Definition (Integrable Teilbündel)

Ein Teilvektorbündel E von TM heißt INTEGRABEL :$\Leftrightarrow$ für je zwei glatte Vektorfelder ξ, η auf M mit $\xi_p, \eta_p \in E_p\ \forall\ p$ folgt: $[\xi, \eta]_p \in E_p\,\forall\ p$.

Übung: Man zeige, daß das Teilbündel von (30.3) nicht integrabel ist.

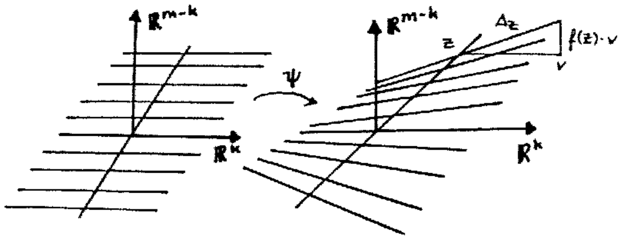
30.6 Lokales Integrabilitätstheorem von Frobenius.

Es sei E ein Teilvektorbündel von π: $TM \to M$. Dann ist E genau dann integrabel, wenn zu jedem p eine Integralmannigfaltigkeit durch p existiert (genauer: es existiert eine Karte φ, sodaß $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ eine Integralmannigfaltigkeit mit $\varphi(0) = p$ ist).

Beweis. ($\Leftarrow$) Bereits oben gezeigt.

($\Rightarrow$) O.B.d.A. sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\psi : M \times \mathbb{R}^m \to M \times \mathbb{R}^m$ sei eine VB-Karte, die E trivialisiert, d.h. $\psi(z, .) : \mathbb{R}^k \times \{0\} \to E_z$ ist ein Isomorphismus. Sei o.B.d.A. $\psi(0, .) = \mathrm{id}$ und $E_0 = \mathbb{R}^k$ (wobei $\mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^m$).

Dann folgt $\mathrm{pr}_k \circ \varphi(0) \circ \mathrm{incl}_k = \mathrm{id} \in GL(k)$. Für kleine z gilt dann: $\mathrm{pr}_k \circ \varphi_z \circ \mathrm{incl}_k \in GL(k)$.



Wir wollen nun jeden der Teilräume E_z als Graph einer linearen Abbildung $f_z : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m-k}$ darstellen. Diese ist gegeben durch:

$$f : M \to L(k, m-k) \text{ mit}$$
$$f : z \mapsto \mathrm{pr}_{m-k} \circ \psi_z \circ (\mathrm{pr}_k \circ \psi_z \circ \mathrm{incl}_k)^{-1}$$
$$\text{Es ist } E_z = \mathrm{Graph}\, f_z = \{(v, f(z)v), v \in \mathbb{R}^k\}.$$

Was sagt nun in diesem Zusammenhang die Integrabilität aus?
Es gilt für $\xi \in \mathfrak{X}(M)$: $\xi_p \in E_p \Leftrightarrow \xi_p \in \mathrm{Graph}\ f(p) \Leftrightarrow \xi_p = (\xi_1|_p, \xi_2|_p)$, mit $f(p)(\xi_1|_p) = (\xi_2|_p)$. Seien ξ_p, $\eta_p \in E_p$, $\xi, \eta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{R}^k$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&= \eta'(p)\big(\xi(p)\big) - \xi'(p)\big(\eta(p)\big)\\
&= \Big(\eta_1'(p)\big(\xi(p)\big) - \xi_1'(p)\big(\eta(p)\big), \eta_2'(p)\big(\xi(p)\big) - \xi_2'(p)\big(\eta(p)\big)\Big)\\
&= \Big(\eta_1'(p)\big(\xi(p)\big) - \xi_1'(p)\big(\eta(p)\big), f'(p)\big(\xi(p)\big) \cdot \eta_1(p)\\
&\qquad + f(p)\eta_1'(p)\big(\xi(p)\big) - f'(p)\big(\eta(p)\big) \cdot \xi_1(p) - f(p)\xi_1'(p)\eta(p)\Big)\\
&= \big([\xi,\eta]_1(p), f(p)([\xi,\eta]_1(p))\big), \text{ weil } [\xi,\eta]_p \in E_p.
\end{aligned}$$

Daraus folgt für $u_1 := \xi_1(p)$ und $u_2 := \eta_1(p)$ mit $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^k$:

$$f'(p)(u_1, f(p)u_1)u_2 = f'(p)(u_2, f(p)u_2)u_1.$$

Wir wollen ein $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ finden, sodaß $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$ eine Integralmannigfaltigkeit ist. D.h. $(\partial_1\varphi)(z) : \mathbb{R}^k \to E_{\varphi(z)}$ soll ein Isomorphismus sein. O.B.d.A. (wie man zeigen kann) schränken wir das Aussehen von φ durch folgende Bedingung noch weiter ein:

$$\varphi(0, y) = (0, y), \quad (\partial_1\varphi)(z) \cdot v = (v, f(\varphi(z))v).$$

Ist $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z))$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\partial_1\varphi(z) \cdot v = (\partial_1\varphi_1(z) \cdot v, \partial_1\varphi_2(z) \cdot v) = (v, f(\varphi(z)) \cdot v), \text{ d.h. } \varphi_1(z) = \mathrm{pr}_1(z)\\
\Rightarrow\quad &\varphi(x, y) = (x, g_y(x)), \text{ wobei } g_y(0) = y,\ g_y'(x) = f(x, g_y(x)).
\end{aligned}$$

Es folgt nun alles aus dem folgenden Satz. □

30.7 Satz von Frobenius für totale Differentialgleichungen).
Es sei $f : \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \to L(k, n)$ eine lokale C^∞-Abbildung. Dann gilt: Es existiert genau dann eine lokale C^∞-Abbildung $g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto g_y(x)$ mit $g_y'(x)v = f(x, g_y(x))v$ und $g_y(0) = y$ wenn $f'(z)(v_1, f(z)v_1)v_2$ symmetrisch in v_1, v_2 ist.

Bemerkung

Sei $\{e_1,\dots,e\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^m$, $f_i(z)=f(z)e_i$, dann gilt: $f(z)v=\sum_{i=1}^k f_i(z)v^i$, und $\partial_i g_y(x)=f_i(x,g_y(x))$ mit $1\le i\le k$ ist ein System von partiellen Differentialgleichungen. Wir werden den Beweis von (30.7) in basisfreier Darstellung führen. (Einen Beweis in Koordinatenschreibweise findet man z.B. in [**51**, Vol.I, S.254].)

Beweis von (30.7).

($\Rightarrow$) Es sei g die Lösung obiger Differentialgleichung, dann gilt:

$$\begin{aligned}
g_y''(x)(v_1,v_2) &= (g_y'(_)(v_1))'(x)(v_2)=(f(_,g(_,y))(v_1))'(x)(v_2)\\
&=\partial_1(f(x,g_y(x))\cdot v_1)(v_2)+\partial_2(f(x,g_y(x))\cdot(g_y'(x)\cdot v_1)(v_2)\\
&=f'(z)\big(v_1,f(x,g_y(x))\cdot v_1\big)(v_2)\\
&=f'(z)(v_1,f(z)\,v_1)v_2,\quad \text{wobei } z=(x,g_y(x)).
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist symmetrisch in v_1 und v_2, weil $g_y''(x)$ es ist (partielle Ableitungen vertauschen bei C^∞-Funktionen).

($\Leftarrow$) Wir führen die partielle Differentialgleichung auf eine Gewöhnliche zurück. Nehmen wir dazu vorerst an, daß g existiert und setzen wir $\bar g(t,v):=g(x_0+tv)$ für fixes x_0. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\bar g(t,v)&=g'(x_0+tv)\cdot v=f(x_0+tv,g(x_0+tv))\cdot v=f(x_0+tv,\bar g(t,v))\cdot v\\
\bar g(0,v)&=g(x_0)=y_0
\end{aligned}$$

Andererseits hat diese gewöhnliche Differentialgleichung lokal (d.h. für $|v|\le\varepsilon$, $|t|\le\varepsilon$ mit einem gewissen $\varepsilon>0$) eine eindeutig bestimmte Lösung $\bar g$. Es gilt $\bar g(t,sv)=\bar g(st,v)$, denn

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\bar g(t,sv)&=f(x_0+tsv,\bar g(t,sv))(sv)=s\cdot f(x_0+(ts)v,\bar g(t,sv))(v)\\
\frac{\partial}{\partial t}\bar g(st,v)&=s\cdot f(x_0+(st)v,\bar g(st,v))(v).
\end{aligned}$$

Somit setzen wir $g(x):=\bar g(\varepsilon,\frac{x-x_0}{\varepsilon})$ und müssen $g'(x)(w)$ und dafür insbesonders $\partial_2\bar g$ berechnen. Die Idee dabei ist, daß

$$\begin{aligned}
\partial_2\bar g(t,v)(w)&=\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\bar g(t,v+sw)=\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}g(x_0+t(v+sw))\\
&=g'(x_0+tv)(tw)=f(x_0+tv,g(x_0+tv))(tw)\\
&=f(x_0+tv,\bar g(t,v))(tw)
\end{aligned}$$

gelten sollte. Also definieren wir $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ durch $k(t):=\partial_2\bar g(t,v)(w)-f(x_0+tv,\bar g(t,v))(tw)$. Dann ist $k(0)=\partial_2\bar g(0,v)(w)-f(x_0+0v,\bar g(0,v))(0w)=0$ und

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}k(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big[\partial_2\bar g(t,v)(w)-f(x_0+tv,\bar g(t,v))(tw)\Big]\\
&= \partial_2\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\bar g(t,v)}_{f(x_0+tv,\bar g(t,v))\cdot v}(w)-\Big[\partial_1 f\cdot v\cdot tw+\partial_2 f\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\bar g}_{f\cdot v}\cdot tw+f\cdot w\Big]\\
&= \partial_1 f\cdot tw\cdot v+\partial_2 f\cdot(\partial_2\bar g\cdot w)\cdot v-\partial_1 f\cdot v\cdot tw-\partial_2 f\cdot(f\cdot v)\cdot tw\\
&= \partial_2 f\cdot(\partial_2\bar g\cdot w-f\cdot tw)\cdot v\\
&= \partial_2 f\cdot k(t)\cdot v.
\end{aligned}$$

Da letzteres eine lineare Differentialgleichung mit nicht konstanten Koeffizienten ist und $k(0)=0$ erfüllt, ist $k=0$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
g'(x)(w) &= \partial_2\bar g(\overbrace{\varepsilon}^{t},\overbrace{\tfrac{x-x_0}{\varepsilon}}^{v})(\tfrac{1}{\varepsilon}w)\\
&= f\Big(\underbrace{x_0+tv}_{x},\bar g(\varepsilon,\tfrac{x-x_0}{\varepsilon})\Big)(w)\\
&= f(x,g(x))(w). \quad\Box
\end{aligned}$$

30.8 Spezialfälle

Wo $f:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to L(m,n)$ nur von einem Faktor abhängt:

1. Sei $f:\mathbb{R}^m\to L(m,n)$. Es gilt $f'(x)\cdot v_1\cdot v_2=f'(x)\cdot v_2\cdot v_1\Leftrightarrow$ es existiert ein $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ mit $g(0)=0$ und $g'(x)v=f(x)v$, d.h. $g'=f$.
2. Für $f:\mathbb{R}^n\to L(m,n)$ gilt: $f'(y)(f(y)v_1)v_2=f'(y)(f(y)v_2)v_1\Leftrightarrow$ es existiert ein $g:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ mit $g_y(0)=y$ und $g_y'(x)=f(g_y(x))$.

30.9 Anwendungen in der Funktionentheorie

Eine Funktion $f:\mathbb{C}\supseteq U\to\mathbb{C}$ heißt HOLOMORPH, wenn

$$f'(z):=\lim\tfrac{f(z+\lambda)-f(z)}{\lambda}\text{ für }\lambda\to 0,\ \lambda\in\mathbb{C}\text{ existiert.}$$

Das ist genau dann der Fall, wenn $f:\mathbb{R}^2\supseteq U\to\mathbb{R}^2$ glatt und die reelle Ableitung $f'(z):\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ komplexlinear ist.

Da die reelle Ableitung $f'(z)$ immer $\mathbb{R}$-linear ist, genügt es die Homogenität $\forall\,\lambda\in\mathbb{C}:f'(z)(\lambda v)=\lambda f'(z)(v)$ für $\lambda=i:=\sqrt{-1}$ nachzurechnen, d.h.

$$\text{für }[f'(z)]=\begin{pmatrix}\partial_1 f^1 & \partial_2 f^1\\ \partial_1 f^2 & \partial_2 f^2\end{pmatrix}=:\begin{pmatrix}f_1^1 & f_2^1\\ f_1^2 & f_2^2\end{pmatrix}$$

$$\text{gilt }\begin{pmatrix}f_1^1 & f_2^1\\ f_1^2 & f_2^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1^2 & -f_1^1\\ f_2^2 & -f_1^2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-f_1^2 & -f_2^2\\ f_1^1 & f_2^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}f_1^1 & f_2^1\\ f_1^2 & f_2^2\end{pmatrix}.$$

Das sind genau die CAUCHY-RIEMANNSCHEN-DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

$$f_1^2 = -f_2^1, \quad f_1^1 = f_2^2,$$

oder wenn wir $z =: x + iy$ und $f(z) =: u(z) + iv(z)$ setzen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

30.10 Folgerung (Stammfunktion holomorpher Funktionen).
Es sei $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ holomorph, d.h. $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ glatt und $f'(z)$ $\mathbb{C}$-linear. Dann existiert eine holomorphe Abbildung $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ mit $g(0) = 0$ und $g'(z) = f(g(z))$.

Beweis. Übersetzt bedeutet obige Aussage, daß $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2n}$ glatt, $g'(z)$ komplex-linear und $g'(z) \cdot v = f(g(z)) \cdot v$ ist, wobei "$\cdot$" die Skalarmultiplikation in $\mathbb{C}$ ist.
Zur Integrabilität:

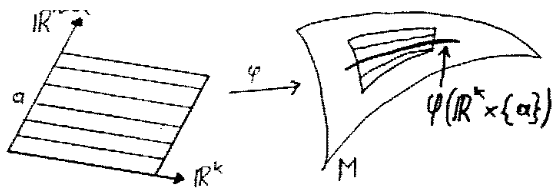
$$\Big(f'(z)(f(z)v_1)\Big)v_2 = f'(z)(f(z) \cdot v_1) \cdot v_2 = f'(z)\Big(f(z)\Big) \cdot v_1 \cdot v_2.$$

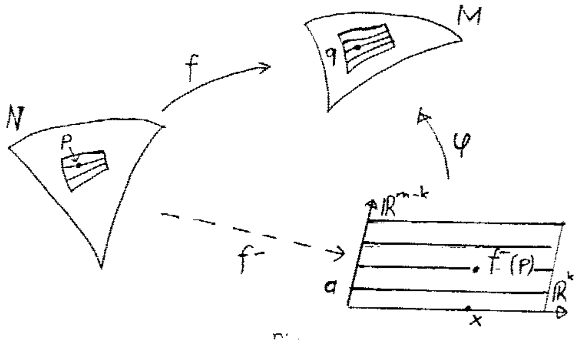
Dies folgt aus der $\mathbb{C}$-Linearität von $f'(z)$ und aus der Kommutativität von "$\cdot$" in $\mathbb{C}$. □

30.11 Integrabilitätstheorem von Frobenius, globale Version.
Es sei E ein integrables Teilbündel von TM, dann gilt

1. *Es existiert eine Mannigfaltigkeitsstruktur M_E auf M, sodaß die Inklusion* $\mathrm{incl} : M_E \to M$ *eine Immersion ist und* $T\,\mathrm{incl}(TM_E) = E$ *gilt, d.h.* $I\,\mathrm{incl} : TM_E \to E \subseteq TM$ *ist bijektiv*
2. *Sei $f : N \to M$ glatt und $Tf(TN) \subseteq E$. Dann ist $f : N \to M_E$ glatt, d.h. M_E ist feiner als M.*
3. *Jede Zusammenhangskomponente (diese heißen* MAXIMALE INTEGRALMANNIGFALTIGKEITEN*) ist eine initiale Teilmannigfaltigkeit.*
4. *Ist N eine zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit, dann ist N eine offene Teilmannigfaltigkeit einer Zusammenhangskomponente von M_E.*

Beweis. Nach Voraussetzung existieren trivialisierende Karten φ, sodaß $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$ eine Integralmannigfaltigkeit ist.





Sei $f : N \to M$ glatt, $\mathrm{Bild}(Tf) \subseteq E$, $f(p) = q$ und φ eine E trivialisierende Karte um q. Es liegt f lokal in einer "Schicht" $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$, denn:
Wir definieren $\bar{f} := \varphi^{-1} \circ f$ dann ist

$$\left.\begin{cases} \mathrm{Bild}(T_p \bar{f}) \subseteq \mathbb{R}^k \times \{a\} \\ \bar{f}(p) \in \mathbb{R}^k \times \{a\} \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{Bild}\, \bar{f} \subseteq \mathbb{R}^k \times \{a\}.$$

(1) Auf M ist $\big\{\varphi|(\mathbb{R}^k \times \{a\}),\ \varphi \text{ trivialisiert } E\big\}$ ein Atlas. Es ist zu zeigen, daß der Kartenwechsel auf offenen Mengen definiert ist:
Betrachte φ_1, φ_2; a_1, a_2 und $p \in \varphi_1(\mathbb{R}^k \times \{a_1\}) \cap \varphi_2(\mathbb{R}^k \times \{a_2\})$. Da $\varphi_1|_{(\mathbb{R}^k \times \{a_1\})} : \mathbb{R}^k \times \{a\} \to M$ eine Integralmannigfaltigkeit ist, liegt $\mathrm{Bild}(\varphi_1|_{(\mathbb{R}^k \times \{a_1\})})$ lokal in $\varphi_2(\mathbb{R}^k \times \{a_2\})$. Es ist also

$$\Big(\varphi_2|_{(\mathbb{R}^k \times \{a_2\})}\Big)^{-1} \circ \Big(\varphi_1|_{(\mathbb{R}^k \times \{a_1\})}\Big)$$

lokal wohldefiniert und wir bezeichnen die zugehörige Mannigfaltigkeit mit M_E. Es ist noch zu zeigen, daß $M_E \to M$ eine Immersion ist: Aber $TM_E = E$, weil $T(\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})) = E|_{\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})}$ ist.
(2) Sei $f : N \to M$ glatt und $\mathrm{Bild}(Tf) \subseteq E$. Dann liegt f lokal in einer Schicht und somit ist $\Big(\varphi|_{(\mathbb{R}^k \times \{a\})}\Big)^{-1} \circ f$ lokal wohldefiniert und glatt.
(3) M_E ist parakompakt: o.B.d.A. sei M zusammenhängend, C sei eine Zusammenhangskomponente von M_E. Es ist z.z., daß C durch abzählbar viele Kartenumgebungen überdeckt wird.
Seien φ_i abzählbar viele E trivialisierende Karten, die M überdecken; $p_0 \in C$ fix und $p \in C$ beliebig: Es existiert also eine Kurve c in C, die p_0 und p verbindet. Somit

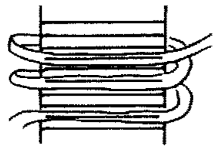
existieren endlichviele Karten $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ und $a_1, \ldots, a_n$, sodaß:

$$p_0 \in \varphi_1(\mathbb{R}^k \times \{a_1\}), \quad p \in \varphi_n(\mathbb{R}^k \times \{a_n\}) \text{ und}$$
$$\varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \varphi_{i+1}(\mathbb{R}^k \times \{a_{i+1}\}) \neq \emptyset.$$

Zu vorgegebenen φ_i, φ_{i+1}, a_i gibt es höchstens abzählbar viele a_{i+1}, sodaß

$$\varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \varphi_{i+1}(\mathbb{R}^k \times \{a_{i+1}\}) \neq \emptyset.$$

Andernfalls gäbe es eine Überdeckung von $\varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \operatorname{Bild} \varphi_{i+1}$ durch überabzählbar viele disjunkte offene Mengen, welches ein Widerspruch zur Separabilität wäre. Also gibt es nur abzählbar viele endliche Folgen von Karten, die der Bedingung $\varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \varphi_{i+1}(\mathbb{R}^k \times \{a_{i+1}\}) \neq \emptyset$ genügen. Jedes $p \in C$ wird durch eine geeignete Folge erreicht. Also wird C durch $\{\varphi_n(\mathbb{R}^k \times \{a_n\}), n = 1, 2, \ldots\}$ überdeckt (geeignete Durchnumerierung).



Die Zusammenhangskomponente C ist eine initiale Teilmannigfaltigkeit: Sei $f : N \to C \subseteq M$ glatt. Lokal liegt f in $\operatorname{Bild} \varphi$, außerdem liegt f in C. Da C aber höchstens abzählbar viele Schichten trifft, liegt f lokal in einer Schicht (verschiedene Schichten hängen nicht zusammen). Somit ist $f : N \to M_E$ glatt.

(4) Sei $N \to M$ zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit, dann ist $\operatorname{incl} : N \to M_E$ glatt, denn $\operatorname{incl} : N \to M$ ist eine injektive Immersion, $\operatorname{incl} : N \to \operatorname{incl}(N) \subseteq M_E$ ist surjektiv und Submersion, also ein lokaler Diffeomorphismus. Somit ist $N \cong \operatorname{incl}(N) \subseteq M_E$ offen. □

30.12 Proposition (Urbilder von Punkten).
Es sei $f : M \to N$ glatt, sodaß $T_x f$ konstanten Rang r hat. Dann ist $\operatorname{Ker}(Tf) := \bigsqcup_{x \in M} \operatorname{Ker}(T_x f)$ *ein integrables Teilvektorbündel und $f^{-1}(q)$ ist eine Integralmannigfaltigkeit zu* $\operatorname{Ker}(Tf)$.

Beweis. Nach dem Rangsatz (21.2) existieren Karten φ und ψ, sodaß f bezüglich dieser Karten die kanonische Projektion ist. Bezüglich dieser Karten ist $\operatorname{Ker}(T_x f) \cong \{0\} \times \mathbb{R}^{m-r}$. Die Integralmannigfaltigkeiten sind lokal durch $\{x\} \times \mathbb{R}^{m-r}$ gegeben. Da $f^{-1}(q)$ lokal $\{x\} \times \mathbb{R}^{m-r}$ ist für ein gewisses x, ist $f^{-1}(q)$ eine Integralmannigfaltigkeit. □

30.13 Definition (Reguläres Teilbündel)

Man nennt ein integrables Teilvektorbündel genau dann REGULÄR, wenn trivialisierende Karten existieren, die jede maximale Integralmannigfaltigkeit höchstens einmal treffen. Diese heißen reguläre Karte.

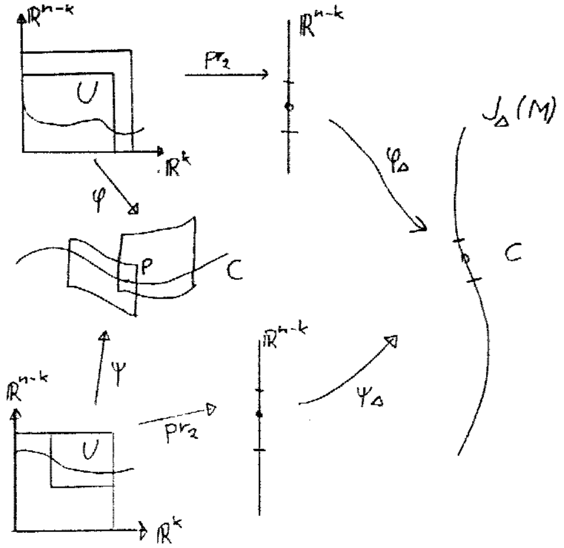
30.14 Satz (Raum der Integralmannigfaltigkeiten). *Es sei E ein reguläres integrables Teilvektorbündel. Dann existiert am Raum aller maximalen Integralmannigfaltigkeiten $M_E(M)$ eine Mannigfaltigkeitsstruktur, sodaß $\pi : M \to M_E(M)$ mit*

$p \mapsto$ (max. Integralmannigfaltigkeit durch p) eine Submersion ist. Die maximale Integralmannigfaltigkeit C ist $\pi^{-1}(C) = \{p \in M : p \in C\}$ und $\operatorname{Ker}(T\pi) = E$.

Beweis. Es sei $\varphi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to M$ eine reguläre Karte für M. Man definiert dann eine Karte φ_E für $M_E(M)$ wie folgt:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] & M_E(M) \\ \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r] & \mathbb{R}^{n-k} \arrow[u, "\varphi_E"'] \end{tikzcd}$$

Hier ist $\varphi_E : \mathbb{R}^{n-k} \to M_E(M)$ wohldefiniert und injektiv, d.h. φ_E ist bijektiv auf das Bild. Es bleibt z.z., daß der Kartenwechsel glatt ist. Seien φ und ψ reguläre Karten. Wir betrachten zuerst den Spezialfall, wo $\operatorname{Bild}\varphi \cap \operatorname{Bild}\psi \cap C$ nicht leer ist.



Es gilt, daß $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E|_{\mathrm{pr}_2 U} = \mathrm{pr}_2 \circ \psi^{-1} \circ \varphi \circ \mathrm{incl}(\mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n)|_U$ lokal um $\mathrm{pr}_2(\psi^{-1}(p))$ ein Diffeomorphismus ist.

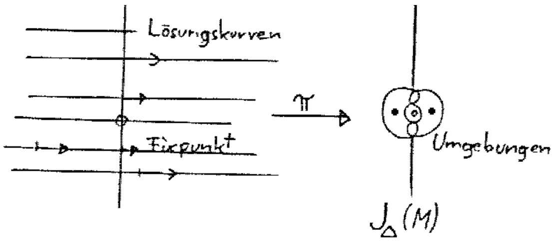
Nun zum allgemeinen Kartenwechsel $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E$: Sei $\{\varphi\}$ eine Familie regulärer Karten, die C treffen; man definiert eine Äquivalenzrelation:

$$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \psi_E^{-1} \circ \varphi_E \text{ ist Diffeomorphismus offener Umgebungen von } \varphi_E^{-1}(C).$$

(Man zeige, daß dies wirklich transitiv ist.) Seien A, B Äquivalenzklassen, dann gilt: $R(A) := \bigcup_{\varphi \in A} \operatorname{Bild}\varphi \cap C$ ist offen in C. Da $R(A) \cap R(B)$ nicht leer ist, gilt $A = B$. Denn wenn $\varphi \in A$ und $\psi \in B$ ist mit $p \in \operatorname{Bild}\varphi \cap \operatorname{Bild}\psi \cap C$, dann ist $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E$ ein Diffeomorphismus nach dem zuvor gezeigten um $\mathrm{pr}_2(\psi^{-1}(p)) = \varphi_E^{-1}(C)$, d.h. $A \sim B$. Die Vereinigung $\bigcup R(A)$ ist eine disjunkte Überdeckung von C mit offenen Mengen. Daraus und weil C zusammenhängend ist, folgt, es gibt genau eine Äquivalenzklasse A. Somit ist $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E$ für je zwei Karten φ und ψ mit $C \in \operatorname{Bild}\varphi_E \cap \operatorname{Bild}\psi_E$ lokal um $\varphi_E^{-1}(C)$ glatt und $M_E(M)$ ist eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Die Behauptung $\operatorname{Ker}(T\pi) = E$ folgt aus dem Rangsatz (21.2) □

30.15 Gegenbeispiel

Nicht jede $M_E(M)$ ist Hausdorff.
Zum Beispiel: $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\xi_{(x,y)} = (x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial x}$.



V. Kotangentialbündel

In diesen Kapitel besprechen wir das duale Konzept zu Tangentialbündel und Vektorfeldern, nämlich das Kotangentialbündel und die 1-Formen. In einen Abschnitt führen wir dann Riemann-Mannigfaltigkeiten ein, die nicht nur einen expliziten Isomorphismus zwischen Tangential- und Kotangentialraum erlauben sondern auch bestens geeignet sind um Geometrie zu treibe. So können wir Längen und Winkel von Kurven messen. In Kapitel (7) werden wir dies dann genauer ausführen. Hier besprechen wir ein wenig die konformen Abbildungen insbesonders im Falle Riemannscher Flächen.

31. Konstruktion und 1-Formen

31.1 Motivation

Für Kurvenintegrale ist der Begriff der 1-Form wichtig, da dies längs Kurven integrierbare Objekte sind (siehe (3.10)). Wir wollen diesen Begriff nun auf Mannigfaltigkeiten ausdehnen. Wir erinnern uns daran, daß eine 1-Form auf einer offenen Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Abbildung $\omega : M \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ ist. Das Kurvenintegral von ω längs einer Kurve $c : \mathbb{R} \to M$ ist dann als gewöhnliches Riemannintegral von $t \mapsto \omega(c(t))(c'(t))$ definiert. Auf einer allgemeinen Mannigfaltigkeit M ist $c'(t) \in T_{c(t)}M$ und somit muß $\omega(x) \in L(T_xM, \mathbb{R}) = T_xM^*$ sein.

31.2 Definition (1-Formen)

Unter einer 1-Form auf einer Mannigfaltigkeit M verstehen wir eine Abbildung ω, die jedem Punkt $x \in M$ ein lineares Funktional $\omega(x) \in (T_xM)^*$ zuordnet.

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann erhalten wir eine 1-Form, das totale Differential df von f, durch $df(x)(v) := v(f) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in T_xM \cong \mathrm{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$.

Wir wollen nun 1-Formen in lokalen Koordinaten beschreiben. Dazu benötigen wir Koordinaten in $(T_xM)^*$. Ist E ein m-dimensionaler Vektorraum und $(g_i)_{i=1}^m$ eine Basis in E, so erhält man eine Basis $(g^i)_{i=1}^m$ von E^*, die sogenannte duale Basis indem man die Funktionale g^i auf der Basis $(g_j)_{j=1}^m$ durch $g^i(g_j) := \delta^i_j$ festlegt, wobei δ^i_j das Kronecker-Deltasymbol ist, d.h. $\delta^i_i := 1$ und $\delta^i_j := 0$ für $i \neq j$.

Seien nun $(u^1, \dots, u^m)$ lokale Koordinaten auf M. Dann ist $(\frac{\partial}{\partial u^i})_{i=1}^m$ eine Basis von T_xM. Berechnen wir nun das totale Differential du^i der i-ten Koordinatenfunktionen u^i, so erhalten wir:

$$du^i\big(\tfrac{\partial}{\partial u^j}\big) = \tfrac{\partial}{\partial u^j}(u^i) \circ \varphi^{-1} = \partial_j(u^i \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = \partial_j(\mathrm{pr}_i) = \delta^i_j.$$

Also ist $du^i(\xi) = \xi^i$ und damit $(du^i)_{i=1}^m$ gerade die duale Basis zur Basis $(\frac{\partial}{\partial u^i})_{i=1}^m$ von $T_x M$. Für das totale Differential df einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ erhalten wir

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial u^i} \cdot du^i,$$

denn $df(x)(\xi_x) = \xi_x(f) = \Big(\sum_i \xi_x^i \frac{\partial}{\partial u^i}\Big)(f) = \sum_i du^i(\xi_x)\,\frac{\partial f}{\partial u^i} = \Big(\sum_i \frac{\partial f}{\partial u^i} \cdot du^i\Big)(\xi_x)$.

31.3 Transformationsverhalten von Vektoren

(Vgl. mit (1.1) und (20.9)) Sei im Folgenden E ein Euklidischer Vektorraum, $\mathcal{G} := (g_i)_{i=1}^m$ eine Basis in E und x^i die Komponenten (Koordinaten) eines Punktes x in E bezüglich $\{g_i\}$, also $x = \sum_{i=1}^m x^i g_i$. Sei $\bar{\mathcal{G}} := (\bar{g}_j)_j$ eine weitere Basis und $\bar{x}^j$ die Koordinaten von x bezüglich $\{\bar{g}_j\}$. Und sei A jener Isomorphismus von E, welcher g_i auf $\bar{g}_i$ abbildet. Stellt man die Vektoren $\bar{g}_j$ bezüglich der Basis $\{g_i\}$ dar, d.h. $\bar{g}_j = \sum_{i=1}^m a_j^i g_i$, so ist $(a_j^i)_{i,j}$ die Matrixdarstellung von A bezüglich der Basis $\{g_i\}$ für $\mathrm{Dom}(A) = E$ und für $\mathrm{Bild}(A) = E$, aber ebenso bezüglich der Basis $\{\bar{g}_j\}$ für $\mathrm{Dom}(A) = E$ und für $\mathrm{Bild}(A) = E$. Dabei zählt der obere Index i die Zeile und der untere die Spalte der Matrix. Dies sieht man wie folgt:

$$A(x) = A\Big(\sum_i x^i g_i\Big) = \sum_i x^i A(g_i) = \sum_i x^i \bar{g}_i = \sum_i x^i \sum_j a_i^j g_j = \sum_j \Big(\sum_i a_i^j x^i\Big) g_j$$

also ist die Komponentendarstellung $[A(x)]_\mathcal{G}$ von $A(x)$ bezüglich der Basis $\mathcal{G} = (g_i)_i$ gerade

$$[A(x)]_\mathcal{G} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_m^m \end{pmatrix} [x]_\mathcal{G}, \quad \text{d.h.} \quad [A]_{\mathcal{G},\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_m^m \end{pmatrix}.$$

Weiters ist

$$A(x) = A\left(\sum_i \bar{x}^i \bar{g}_i\right) = A\left(\sum_i \bar{x}^i \sum_j a_i^j g_j\right) = \sum_j \left(\sum_i a_i^j \bar{x}^i\right) \bar{g}_j = \sum_j x^j\, \bar{g}_j,$$

also

$$[x]_\mathcal{G} = [A(x)]_{\bar{\mathcal{G}}} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_m^m \end{pmatrix} [x]_{\bar{\mathcal{G}}}, \quad \text{d.h.}$$

$$[A]_{\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}} = \mathrm{id} \quad \text{und} \quad [A]_{\bar{\mathcal{G}},\bar{\mathcal{G}}} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_m^m \end{pmatrix}.$$

Wie transformieren sich nun die Komponenten?

$$\sum_i x^i g_i = x = \sum_j \bar{x}^j \bar{g}_j = \sum_{i,j} \bar{x}^j a_j^i g_i \quad \Rightarrow \quad x^i = \sum_j a_j^i \bar{x}^j, \text{ d.h. } [x]_\mathcal{G} = [A] \cdot [x]_{\bar{G}}$$

Umgekehrt ist $A^{-1} : E \to E$ gegeben durch $A^{-1} : \bar g_j \mapsto g_j$. Es ist $g_i = \sum b_i^j \bar g_j$, wobei $(b_i^j)_{ji}$ die Matrixdarstellung von A^{-1} bezüglich $\{\bar g_j\}$ ist.

$$\sum_j \bar x^j \bar g_j = x = \sum_i x^i g_i = \sum_{i,j} b_i^j x^i \bar g_j \quad \Rightarrow \quad \bar x^j = \sum_i b_i^j x^i, \text{ d.h. } [x]_{\bar{\mathcal{G}}} = [A^{-1}] \cdot [x]_G$$

und es gilt: $\sum_{i=1}^m b_i^j a_k^i = \delta_k^j$. Die Matrix $(b_i^j)_{j,i}$ ist also invers zu $(a_j^i)_{i,j}$.

Es bezeichne E^* den zu E dualen Raum, $\{g^i\}$ die duale Basis zu $\{g_i\}$, es gilt also: $g^i(g_j) = \delta_j^i$. Dann kann jeder Vektor $x^* \in E^*$ in der Form $x^* = \sum_{i=1}^m x_i g^i$ geschrieben werden, mit $x_i = x^*(g_i)$.

Wie transformieren jetzt diese dualen Vektoren?

Ist $A : E \to E$ wie oben, so ist auch die transponierte(= adjungierte) Abbildung $A^t = A^*$ ein Isomorphismus, der, aufgefaßt als $A^* : E^* \to E^*$, die duale Basis $\bar g^j$ auf g^j abbildet, denn

$$A^* \bar g^j \left(\sum x^i g_i\right) = \bar g^j \left(A \sum x^i g_i\right) = \bar g^j \left(\sum x^i A g_i\right) = \bar g^j \left(\sum x^i \bar g_i\right) = x^j,$$

also gilt $A^* \bar g^j = g^j$ bzw. $g^j = \sum_{i=1}^m a_i^j \bar g^i$, und analog $\bar g^i = \sum b_j^i g^j$, d.h. $[A^*]_{\mathcal{G}^*, \mathcal{G}^*} = ([A]_{G,\mathcal{G}})^t$.

Daraus folgt das Transformationsverhalten für die Koordinaten:

$$\sum_j x_j g^j = x^* = \sum_i \bar x_i \bar g^i = \sum_{i,j} \bar x_i b_j^i g^j \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x_j = \sum_i b_j^i \bar x_i \ ; \quad \bar x_i = \sum_j a_i^j x_j.$$

Vergleicht man nun die Transformationsformeln, so zeigt sich, daß die Komponenten der dualen Vektoren wie die Basisvektoren des Grundraumes transformieren:

$$x_i = \sum b_i^j \bar x_j, \quad g_i = \sum b_i^j \bar g_j \ ; \quad \bar x_j = \sum a_j^i x_i, \quad \bar g_j = \sum a_j^i g_i.$$

Dagegen transformieren die Komponenten eines Vektors wie die Vektoren der dualen Basis:

$$x^i = \sum a_j^i \bar x^j, \quad g^i = \sum a_j^i \bar g^j \ ; \quad \bar x^j = \sum b_i^j x^i, \quad \bar g^i = \sum b_i^j g^j.$$

Dieser Sachverhalt erklärt auch die Verwendung von "oberen" und "unteren" Indizes: Die Komponentenvektoren dualer Vektoren transformieren wie die Basis im Grundraum (sie transformieren kovariant), die duale Basis und die Komponentenvektoren im Grundraum transformieren kontravariant.

Vergleiche das aber mit folgender

31.4 Definition (Funktor)

Unter einem Funktor $\mathcal{F}$ auf einer Kategorie versteht man eine Zuordnung, die jedem Raum M einen anderen Raum $\mathcal{F}(M)$ zuordnet und jedem Morphismus $f : M \to N$ einen entsprechenden Morphismus $\mathcal{F}(f)$ zwischen $\mathcal{F}(M)$ und $\mathcal{F}(N)$ zuordnet, sodaß $\mathcal{F}(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(M)}$ und $\mathcal{F}$ von der Zusammensetzung je zweier Morphismen die Zusammensetzung der zugeordneten Morphismen ist.

Man nennt einen Funktor $\mathcal{F}$ kovariant, falls $\mathcal{F}(f)$ in die gleiche Richtung läuft wie f, d.h. für $f : M \to N$ ist $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$. Er heißt kontravariant, falls $\mathcal{F}(f)$

in die entgegensetzte Richtung läuft, d.h. für $f : M \to N$ ist $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(N) \to \mathcal{F}(M)$. Z.B. ist der Dualraum-Funktor $(f : E \to F) \mapsto (f^* : F^* \to E^*)$ kontravariant.

31.5 Transformationsverhalten von 1-Formen

Es sei $\varphi^{-1} = (u^1, \dots, u^m)$ bzw. $\psi^{-1} = (v^1, \dots, v^m)$ eine Karte einer Mannigfaltigkeit M und $\partial_i^\varphi = \frac{\partial}{\partial u^i}$ bzw. $\partial_j^\psi = \frac{\partial}{\partial v^j}$ seien die (lokalen) Basisvektorfelder des Tangentialbündels. Diese hängen nach (20.9) wie folgt zusammen:

$$\partial_j^\psi|_x = \sum_{i=1}^m \partial_j^\psi|_x(\varphi^{-1})^i \partial_i^\varphi|_x \text{ oder kürzer } \frac{\partial}{\partial v^j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u^i}{\partial v^j}\frac{\partial}{\partial u^i}$$
$$\partial_j^\varphi|_x = \sum_{i=1}^m \partial_j^\varphi|_x(\psi^{-1})^i \partial_i^\psi|_x \text{ oder kürzer } \frac{\partial}{\partial u^j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial v^i}{\partial u^j}\frac{\partial}{\partial v^i}$$

Sei $a_j^i := \frac{\partial u^i}{\partial v^j}$ bzw. $b_i^j := \frac{\partial v^j}{\partial u^i}$ und das Vektorfeld ξ habe die Darstellungen $\xi = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial v^j}$, dann gilt auch

$$\xi = \sum_j \eta^j \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial v^j}\frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_i \left(\sum_j \eta^j \left(\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\right)\right)\frac{\partial}{\partial u^i}$$
$$\Rightarrow \quad \xi^i = \sum_j \frac{\partial u^i}{\partial v^j}\eta^j = \sum_j a_j^i \eta^j$$

und analog $\eta^j = \sum_j b_j^i \xi^j$.
Für Kotangentialvektoren erhalten wir die folgenden Transformationsformeln:

$$du^i = \sum_j \frac{\partial u^i}{\partial v^j} dv^j = \sum_j a_j^i dv^j$$
$$dv^j = \sum_i \frac{\partial v^j}{\partial u^i} du^i = \sum_i b_i^j du^i.$$

Das Transformationsverhalten in TM respektive T^*M ist also ganz analog wie bei E und E^*. Die Komponenten der Kotangentialvektoren, transformieren kovariant, daher heißen Schnitte im Kotangentialbündel (d.h. 1-Formen) auch KOVARIANTE VEKTORFELDER.

31.6 Konstruktion des dualen Bündels

Um über Glattheit von 1-Formen sprechen zu können, müssen wir nun die disjunkte Vereinigung $T^*M := (TM)^* := \bigsqcup_{x\in M}(T_xM)^*$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit, oder besser noch einem Vektorbündel machen. Noch allgemeiner wollen wir für ein allgemeines Vektorbündel $E \xrightarrow{p}$ die disjunkte Vereinigung $E^* := \bigsqcup_{x\in M}(E_x)^*$ wieder zu einem solchen machen. Seien dazu Trivialisierungen $\varphi : U \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\cong} E|_U$ von E über offenen Mengen $U \subset M$ gegeben. Wir brauchen eine Trivialisierung

$$\varphi^* : \bigsqcup_{x\in U} (\mathbb{R}^k)^* = U \times (\mathbb{R}^k)^* \xrightarrow{\cong} E^*|_U = \bigsqcup_{x\in U}(E_x)^*$$

Faserweise können wir φ^* als $(\varphi^*)_x := ((\varphi_x)^*)^{-1} : (\mathbb{R}^k)^* \to (E_x)^*$ definieren, wobei $(\varphi_x)^*$ die adjungierte Abbildung zu $\varphi_x : \mathbb{R}^k \to E_x$ bezeichnet.

Sei $\psi : U \cap V \to GL(\mathbb{R}^k)$ die Transitionsfunktion für zwei Vektorbündelkarten von E. Die zu den Trivialisierungen φ^* gehörenden Transitionsfunktionen ψ^* sind dann durch

$$\psi^*(x) = (\psi(x)^*)^{-1} \in GL((\mathbb{R}^k)^*) \cong GL(\mathbb{R}^k)$$

gegeben, wobei $\psi(x)^*$ die adjungierte Abbildung zum linearen Isomorphismus $\psi(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ bezeichnet. Da $A \mapsto A^*$ linear ist von $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l) \to L((\mathbb{R}^l)^*, (\mathbb{R}^k)^*)$, die Inversion $A \mapsto A^{-1}$ von $GL(\mathbb{R}^k) \to GL(\mathbb{R}^k)$ glatt ist und $\psi : U \cap V \to GL(\mathbb{R}^k)$ als Transitionsfunktion des Vektorbündels E ebenfalls glatt ist, gilt gleiches auch für die Zusammensetzung

$$\psi^* : U \cap V \xrightarrow{\psi} GL(\mathbb{R}^k) \xrightarrow{(.)^*} GL((\mathbb{R}^k)^*) \xrightarrow{\text{inv}} GL((\mathbb{R}^k)^*)$$

Also bilden die ψ^* einen Kozykel von Transitionsfunktionen für ein glattes Vektorbündel $E^* \to M$ und die φ^* sind die zugehörigen Vektorbündelkarten. Diese Vektorbündel $E^* \to M$ heißt das duale Vektorbündel zu $E \to M$.

Im Spezialfall, wo $E \to M$ gerade das Tangentialbündel $TM \to M$ ist, heißt $T^*M := (TM)^* \to M$ Kotangentialbündel von M.

Der Raum $\Gamma(T^*M \to M)$ der glatten Schnitte des Kotangentialbündels wird auch mit $\Omega^1(M)$ bezeichnet.

31.7 Glatte 1-Formen

Wie erkennt man, ob eine 1-Form ω wirklich glatt ist? Nun, das ist lokal um einen Punkt $x \in M$ genau dann der Fall, wenn ihre Darstellung bezüglich einer Trivialisierung $TM^*|_U \cong U \times \mathbb{R}^m$ mit $x \in U \subset M$ glatt ist. Nach (31.6) werden die Trivialisierungen von $(TM)^*$ durch Dualisieren aus jenen von TM gewonnen. Zu einer Karte $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \to \varphi(U) \subseteq M$ mit zugehörigen lokalen Koordinaten $(u^1, \ldots, u^m) = \varphi^{-1}$, war die entsprechende lokale Trivialisierung von $TM \to M$ in (25.4) durch

$$TM \supseteq T(\varphi(U)) \xleftarrow{T\varphi} TU \cong U \times \mathbb{R}^m \xleftarrow{\varphi^{-1} \times \mathbb{R}^m} \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$$

gegeben. Wobei der standard-Basis (e_i) in $\{x\} \times \mathbb{R}^m$ die Basis $(\frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_x) \in T_xM$ der Richtungsableitungen entspricht. Die duale Abbildung zu $T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi : \mathbb{R}^m \to T_xM$ bildet somit die duale Basis (du^i) von $(T_xM)^*$ auf die duale Basis (e^i) von $(\mathbb{R}^m)^* \cong \mathbb{R}^m$. Die lokale Trivialisierung von T^*M bildet somit e^i auf du^i ab, und eine 1-Form ω genau dann glatt, wenn alle ihre lokalen Koordinaten ω_i – gegeben durch $\omega = \sum_i \omega_i\, du^i$ – glatt sind.

31.8 Lemma (Schnitte des dualen Bündels). *Sei $p : E \to M$ ein Vektorbündel, dann gibt es folgende Beschreibungen für die glatten Schnitte des dualen Bündels $E^* := \bigsqcup_x (E_x)^* \to M$:*

$$\begin{aligned}\Gamma(E^* \to M) &= \{\sigma \in C^\infty(M, E^*) : \forall\, x : \sigma(x) \in E_x^*\} \\ &\cong \{s \in C^\infty(E, \mathbb{R}) : \forall\, x : s|_{E_x} \in L(E_x, \mathbb{R})\} \\ &\cong \textit{ dem Raum der Vektorbündelhomomorphismen} \\ &\quad \textit{von } E \textit{ nach } M \times \mathbb{R} \textit{ über } \mathrm{id}_M.\end{aligned}$$

Beweis. Wir müssen nur zeigen, daß die Schnitte $\sigma \in \Gamma(E^* \to M)$ genau den faserweise linearen glatten Abbildungen $s : E \to \mathbb{R}$ entsprechen.

Definiert man $\sigma \mapsto s$ durch $s|_{E_x} := \sigma(x)$, so ist klar, daß sich diese Abbildungen in eindeutiger Weise entsprechen. Verbleibt zu zeigen, daß σ genau dann glatt ist, wenn s es ist. Dies ist eine lokale Eigenschaft. Lokal ist σ durch ein $\bar{\sigma} : U \to (\mathbb{R}^k)^* = L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ und s durch ein $\bar{s} : U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gegeben. Sei σ (und also auch $\bar{\sigma}$) glatt, dann ist $(x, v) \mapsto \bar{s}(x, v) = \operatorname{eval}(\bar{\sigma}(x), v) = \operatorname{eval} \circ (\bar{\sigma} \times \operatorname{id}_{\mathbb{R}^k})(x, v)$ ebenfalls glatt. Umgekehrt: Ist s glatt, so auch $\bar{s}$ und damit auch $\operatorname{eval}_v \circ \bar{\sigma} = \bar{s}(., v)$. Somit ist aber $\bar{\sigma} : U \to L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ glatt, und damit auch σ selbst. $\square$

31.9 Bemerkung

Wir wollen nun wie für glatte Vektorfelder auch für glatte 1-Formen eine algebraische Beschreibung. Wir können eine 1-Form ω auf ein Vektorfeld ξ punktweise anwenden, da $\omega_x \in (T_xM)^* = L(T_xM, \mathbb{R})$ und $\xi_x \in T_xM$, und erhalten eine Funktion $\omega(\xi) : M \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \omega_x(\xi_x)$. In lokalen Koordinaten sieht das wie folgt aus:

$$\omega = \sum_i \omega_i du^i \;; \quad \xi = \sum_i \xi^i \tfrac{\partial}{\partial u^i}$$

$$\omega(\xi) = \left(\sum_i \omega_i du^i\right)\left(\sum_j \xi^j \tfrac{\partial}{\partial u^j}\right) = \sum_{i,j} \omega_i \xi^j du^i(\tfrac{\partial}{\partial u^j}) = \sum_i \omega_i \xi^i.$$

Also ist die resultierende Funktion $\omega(\xi)$ glatt, falls ω und ξ glatt sind. Und klarerweise ist die Zuordnung $(\omega, \xi) \mapsto \omega(\xi)$ bilinear als Abbildung von $\Omega^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$.

31.10 Lemma (Raum der 1-Formen als $C^\infty(M, \mathbb{R})$-lineare Abbildungen). *Die bilineare Abbildung $\Omega^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$ induziert einen $C^\infty(M, \mathbb{R})$-linearen Isomorphismus*

$$\Omega^1(M) \cong \operatorname{Hom}_{C^\infty(M,\mathbb{R})}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M, \mathbb{R})),$$

wobei der rechte Raum aus allen $C^\infty(M, \mathbb{R})$-linearen Abbildungen von $\mathfrak{X}(M)$ nach $C^\infty(M, \mathbb{R})$ besteht.

Beweis. Klarerweise induziert obige bilineare Abbildung eine lineare Abbildung von $\Omega^1(M)$ in den Raum $L(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M, \mathbb{R}))$ der linearen Abbildungen.

Jedes $\omega \in \Omega^1(M)$ wirkt aber auch $C^\infty(M, \mathbb{R})$-linear auf $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, denn

$$\omega(f \cdot \xi)|_x = \omega_x((f \cdot \xi)_x) = \omega_x(f(x) \cdot \xi_x) = f(x) \cdot \omega_x(\xi_x) = (f \cdot \omega(\xi))_x$$

Sei umgekehrt ein $\omega \in \operatorname{Hom}_{C^\infty(M,\mathbb{R})}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M, \mathbb{R}))$ gegeben.

Dann wirkt ω lokal, d.h. $\xi = 0$ auf $U \subset M$ impliziert $\omega(\xi) = 0$ auf U: Zu $p \in U$ wählen wir ein $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $f(p) = 1$ und $\operatorname{Trg}(f) \subset U$. Dann ist $f \cdot \xi = 0$ und somit

$$0 = \omega(0) = \omega(f \cdot \xi) = f \cdot \omega(\xi) \quad \Rightarrow \quad 0 = \underbrace{f(p)}_{=1} \cdot \omega(\xi)(p) = \omega(\xi)(p).$$

Es wirkt ω sogar punktal, d.h. $\xi(p) = 0$ impliziert $\omega(\xi)(p) = 0$, denn

$$\omega(\xi)(p) = \omega\Big(\sum_i \xi^i \tfrac{\partial}{\partial u^i}\Big)(p) = \sum_i \underbrace{\xi^i(p)}_{=0} \cdot \omega(\tfrac{\partial}{\partial u^i})(p) = 0.$$

Folglich können wir eine 1-Form ω durch $\omega(x)(\xi_x) := \omega(\xi)(x)$ definieren, wobei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ so gewählt ist, daß $\xi(x) = \xi_x$ ist. Die 1-Form ω ist dann glatt, denn lokal gilt:

$$\omega = \sum_i \omega_i \, du^i \text{ mit } \omega_i = \omega(\tfrac{\partial}{\partial u^i}).$$

Daß diese beiden Zuordnungen invers zueinander sind, ist offensichtlich. □

31.11 Lemma (Pull-back von Schnitten dualer Bündel). *Seien $p : E \to M, q : F \to N$ Vektorbündel und f ein Vektorbündelhomomorphismus.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & F \arrow[d, "q"] \\ M \arrow[r, "f_0"] & N \end{tikzcd}$$

Dann ist $f^* : \Gamma(F^* \to N) \to \Gamma(E^* \to M)$ durch die Formel $f^*(s)_p \cdot v_p := s_{f_0(p)} \cdot f(v_p)$ für $s \in \Gamma(F^* \to N)$, $p \in M$, $v_p \in E_p$ wohldefiniert.

Beweis. Z.z. ist nur, daß $f^*(s)$ glatt ist. Via lokaler Trivialisierungen reduziert man das Problem auf triviale Bündel. Betrachten wir also die Bündel $p : U \times \mathbb{R}^k \to U$, $q : V \times \mathbb{R}^i \to V$, und die Abbildung $s : V \to (\mathbb{R}^i)^*$, $f_0 : U \to V$, $f : U \to L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^i)$. Dann gilt:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "f^*(s)"] \arrow[dr, "(s \circ f_0, f)"'] & & (\mathbb{R}^k)^* \\ & (\mathbb{R}^i)^* \times L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^i) \arrow[ur, leftarrow, "\text{komp}"'] & \end{tikzcd}$$

Denn

$$f^*(s)_p \cdot v_p := s_{f_0(p)} \cdot f(v_p) = (s \circ f_0)(p) \cdot f_p(v_p) = \operatorname{komp}((s \circ f_0)(p), f_p) \cdot v_p$$

Also ist $f^*(s)$, als Zusammensetzung zweier C^∞-Funktionen, selbst glatt. □

31.12 Pull-back von 1-Formen in lokalen Koordinaten

Sei $f : M \to N$ glatt, $(u^1, \dots, u^i)$ lokale Koordinaten um $p \in M$, $(v^1, \dots, v^j)$ lokale Koordinaten um $q := f(p) \in N$, und $\omega \in \Omega^1(N)$. Wir wollen $f^*\omega \in \Omega^1(M)$ in den lokalen Koordinaten bestimmen. Für Tangentialvektoren $\xi \in T_pM$ ist $(f^*\omega)(p)$ nach (31.11) definiert durch

$$(f^*\omega)_p(\xi) := \omega_{f(p)}(T_pf \cdot \xi).$$

Es sei $\omega = \sum_j \omega_j \, dv^j$ die Koordinatendarstellung von ω um q und $f^*\omega = \sum_i \eta_i \, du^i$ jene von $f^*\omega$ um p. Setzen wir nun $\xi := \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_p$ so erhalten wir:

$$(f^*\omega)_p(\xi) = \Big(\sum_k \eta_k \, du^k\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_p\Big) \overset{(31.9)}{=\!=} \eta_i$$

$$\omega_{f(p)}(T_pf\cdot\xi) \overset{(20.9)}{=\!=} \Big(\sum_j \omega_j \, dv^j\Big)_{f(p)} \Big(\sum_l \frac{\partial f^l}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial v^l}\Big|_q\Big) \overset{(31.9)}{=\!=} \sum_j \omega_j \circ f \, \frac{\partial f^j}{\partial u^i}$$

Also gilt

$$f^*\Big(\sum_j \omega_j \, dv^j\Big) = \sum_i \Big(\sum_j \omega_j \circ f \, \frac{\partial f^j}{\partial u^i}\Big) \, du^i.$$

Man beachte, daß das Kurvenintegral aus (3.10) einer 1-Form $\omega \in \Omega^1(U)$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ längs einer Kurve $c : I \to U$ gerade durch

$$\int_c \omega = \int_c \sum_i \omega_i(x) \, dx^i = \int_0^1 \sum_i \omega_i(c(t)) \, \frac{dc^i}{dt} \, dt = \int_0^1 c^*(\omega)$$

gegeben ist. Für eine abstrakte Mannigfaltigkeit M können wir genauso das Kurvenintegral $\int_c \omega$ einer 1-Form $\omega \in \Omega^1(M)$ längs einer Kurve $c : I \to M$ durch

$$\int_c \omega := \int_0^1 c^*(\omega)$$

definieren. Wir werden diese Definition im Abschnitt (47) weiter verallgemeinern.

32. Riemann-Mannigfaltigkeiten

32.1 Bemerkung zur Dualität

Für $M = U \subset \mathbb{R}^m$ können wir das Tangentialbündel und das Kotangentialbündel identifizieren, denn $TM = M \times \mathbb{R}^m$ und $T^*M = M \times (\mathbb{R}^m)^*$. Es sind also sowohl die Vektorfelder als auch die 1-Formen auf M mit Abbildungen $M \to \mathbb{R}^m$ ident. Im allgemeinen gibt es aber keinen solchen kanonischen Isomorphismus zwischen T_xM und $(T_xM)^*$. Wir wollen nun Mannigfaltigkeiten beschreiben, für welche es einen solchen dennoch gibt. Inwiefern ist denn ein endlich dimensionaler Vektorraum E und sein Dualraum E^* isomorph? Da sie die gleiche Dimension haben sind sie isomorph. Aber um einen solchen Isomorphismus angeben zu können, verwendet man üblicherweise eine Basis von E und als Bildvektoren die duale Basis von E^*. Wählt man eine andere Basis, so ändert sich auch der Isomorphismus. So können wir auf einer Mannigfaltigkeit nicht vorgehen, denn in T_xM haben wir keine ausgezeichnete Basis zur Verfügung.

Eine zweite Möglichkeit so einen Isomorphismus zu erhalten ist die Verwendung eines inneren Produkts $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf E. Dann induziert diese bilineare Form eine lineare Abbildung $\sharp : E \to L(E,\mathbb{R}) = E^*$ durch $v \mapsto \langle v,\cdot\rangle$. Diese ist injektiv, denn: $\forall\, w \; \langle v,w\rangle = 0 \;\Rightarrow\; v = 0$. Aus Dimensionsgründen ist sie somit ein Isomorphismus.

Wie sieht $\sharp$ in Koordinaten aus? Sei (e_i) eine Orthonormalbasis von E und (e^i) die dazugehörende duale Basis. Dann ist $\sharp(e_i)(e_j) := \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j} = e^i(e_j)$, also bildet $\sharp$ die Basis (e_i) auf die duale Basis e^i ab.

Falls (g_i) eine beliebige Basis von E ist und (g^i) die dazugehörende duale Basis von E^*, so gilt:

$$\begin{aligned}
&\sharp(g_i)(g_j) = \langle g_i, g_j\rangle =: g_{i,j} = g_{i,j}\, g^j(g_i)\\
\Rightarrow\quad &\sharp(g_i) = \sum_j g_{i,j} g^j \text{ und}\\
&\sharp(v) = \sharp\left(\sum_i v^i g_i\right) = \sum_i v^i \sum_j g_{i,j} g^j = \sum_j \left(\sum_i g_{i,j} v^i\right) g^j
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit v^i die Koordinaten des Vektors $v \in E$ bezüglich der Basis (g_i) und mit v_j die Koordinaten des dazugehörenden dualen Vektors $\sharp(v) \in E^*$ bezüglich der dualen Basis (g^i), so gilt also:

$$v_j = \sum_i g_{i,j} v^i.$$

Sei nun $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Dann ist T_xM ein Teilraum vom $\mathbb{R}^n$ und erbt somit das übliche innere Produkt von $\mathbb{R}^n$. Also ist $(T_xM)^*$ isomorph zu T_xM vermöge dem Isomorphismus $\sharp : T_xM \to (T_xM)^*$. Wir erhalten also auch eine faserlineare Bijektion der Bündel $TM \to M$ und $T^*M \to M$. In Koordinaten ist sie durch

$$\tfrac{\partial}{\partial u^i} \mapsto \sum_j g_{i,j} du^j$$

gegeben, wobei $g_{i,j} := \langle g_i, g_j\rangle$ mit $g_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$ und $g^i = du^i$. Da die g_i glatte Funktionen von $M \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ sind, sind alle Koeffizienten $g_{i,j} : M \supseteq U \to \mathbb{R}$ glatt, und somit die Bündel TM und T^*M isomorph.

Es entsprechen sich also auch die glatten Schnitte eindeutig, d.h. $\mathfrak{X}(M) \cong \Omega^1(M)$. Das Vektorfeld, welches einer exakten 1-Form df entspricht, heißt GRADIENTENFELD $\operatorname{Grad}(f)$ von f.

Nun wollen wir das auf allgemeine Mannigfaltigkeiten M übertragen. Dazu benötigen wir für alle $x \in M$ ein inneres Produkt g_x im Tangentialraum T_xM. Daß dieses vernünftig von x abhängt, gewährleisten wir folgendermaßen.

32.2 Definition (Riemann-Mannigfaltigkeit)

Eine RIEMANN-METRIK auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine Funktion g die jedem Punkt $x \in M$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform $g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ zuordnet, sodaß für beliebige Vektorfelder $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ die Abbildung $x \mapsto g_x(\xi_x, \eta_x)$ von M nach $\mathbb{R}$ glatt ist.

Eine RIEMANN-MANNIGFALTIGKEIT ist eine Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer ausgezeichneten Riemann-Metrik g.

Ersetzt man die Bedingung der positiven Definitheit, durch die des nicht-Degeneriertseins, d.h. $v \mapsto \langle v, \cdot\rangle$ und $v \mapsto \langle \cdot, v\rangle$ ist injektiv als Abbildungen $\mathbb{R}^m \to (\mathbb{R}^m)^*$, so erhält man eine PSEUDO-RIEMANN-METRIK und als zugehörige Mannigfaltigkeiten PSEUDO-RIEMANN-MANNIGFALTIGKEITEN.

32.3 Definition (Länge und Distanz)

Sei (M, g) eine Riemann-Mannigfaltigkeit, dann können wir die LÄNGE VON TANGENTIALVEKTOREN $\xi_x \in T_x M$ als $\sqrt{g_x(\xi_x, \xi_x)}$ definieren.
Falls $c : [0, 1] \to M$ eine glatte Kurve in M ist, so sei die LÄNGE c definiert durch

$$L(c) := \int_0^1 \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))}\, dt.$$

Wir haben auch eine Metrik $d : M \times M \to \mathbb{R}^+$ im Sinne der Topologie:

$$d(p, q) := \inf\{L(c) : c \in C^\infty(\mathbb{R}, M);\ c(0) = p,\ c(1) = q\}.$$

Wir zeigen nun, daß diese Metrik die Topologie erzeugt:
Dazu zeigen wir zuerst, daß d stetig ist. Für jedes glatte $f : M \to N$ gilt $f(\{x : d_{f^*g}(x, x_0) < r\}) \subseteq \{y : d_g(y, f(x_0)) < r\}$ da $L_{f^*g}(f \circ c) = L_g(c)$. Verwenden wir insbesonders Karten $u : \mathbb{R}^m \supseteq U \to u(U) \subseteq M$ für f und verwenden, daß in der Kartendarstellung g lokale Ungleichungen der Form $M_1 \cdot |v|^2 \le (u^*g)_x(v, v) \le M_2 \cdot |v|^2$ mit $M_1, M_2 > 0$ erfüllt, so erhalten wir die Stetigkeit von d.
Umgekehrt sei $u(U)$ eine Kartenumgebung zentriert bei y_0 und V eine relativ kompakte offene Umgebung von 0 mit $\bar{V} \subseteq U$. Da d stetig ist gilt $r := d(u(\bar{V}), M \setminus u(U)) > 0$, und somit ist $\{y : d_g(y, y_0) < \varepsilon\} = u(\{x : d_{u^*g}(x, 0) < \varepsilon\})$ für alle $\varepsilon < \frac{r}{2}$. Weiters finden wir wegen

$$L_{u^*g}(c) = \int_0^1 \sqrt{(u^*g)_{c(t)}(c'(t), c'(t))}\, dt \le M_2 \int_0^1 |c'(t)|\, dt = M_2\, L(c)$$

ein $0 < \varepsilon < \frac{r}{2}$ mit $\{x : d_{u^*g}(x, 0) \le M_2|x| < \varepsilon\} \subseteq V$. Also ist $\{y : d_g(y, y_0) < \varepsilon\} = u(\{x : d_{u^*g}(x, 0) < \varepsilon\}) \subseteq u(\bar{V}) \subseteq u(U)$.
Interessant ist es, die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten tatsächlich zu finden. Dies ist ein Variationsproblem, welches wir in Paragraph (57) angehen werden.

33. Isometrische und konforme Diffeomorphismen

33.1 Definition (Isometrie)

Seien (M, g) und (N, h) zwei Riemann-Mannigfaltigkeiten und $f : M \mapsto N$ glatt, dann heißt f genau dann ISOMETRIE, wenn

$$T_x f : (T_x M, g_x) \to (T_{f(x)}N, h_{f(x)})$$

für alle x eine lineare Isometrie (siehe (1.2)) ist.

Bemerkung

Falls f eine Isometrie ist und $c : \mathbb{R} \to M$ glatt ist, so gilt:

$$\begin{aligned} L_a^b(f \circ c) &= \int_a^b \sqrt{h((f \circ c)'(t), (f \circ c)'(t))}dt \\ &= \int_a^b \sqrt{g(c'(t), c'(t))}dt = L_a^b(c) \end{aligned}$$

Wir erhalten für die Distanz $d(f(x), f(y))$:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \inf\{L_0^1(c) : c \text{ verbindet } f(x) \text{ mit } f(y)\} \\ &\leq \inf\{L_0^1(f \circ c) : c \text{ verbindet } x \text{ mit } y\}, \end{aligned}$$

d.h. die Isometrie kann die Distanz nicht vergrößern. Falls f ein Diffeomorphismus und eine Isometrie ist, so gilt: $d(x, y) = d(f(x), f(y))$.

Falls die Menge der Fixpunkte einer Isometrie als glatte Kurve c parametrisiert werden kann, so ist diese Kurve lokal die kürzeste Verbindung je zweier ihrer Punkte: Wir werden in (58.4) sehen, daß lokal die kürzesten Verbindungen existieren und eindeutig sind. Da aber das isometrische Bild einer solchen Kurve gleiche Länge hat, muß es in der Fixpunktmenge enthalten sein.

33.2 Satz von Nash. *Jede abstrakte und zusammenhängende Riemann-Mannigfaltigkeit (M, g) läßt sich isometrisch in einen $\mathbb{R}^n$, für $n = (2m+1)(6m+14)$ einbetten.*

Ohne Beweis, siehe [**36**].

33.3 Satz (Existenz von Riemann-Metriken).
Jede parakompakte glatte Mannigfaltigkeit besitzt (viele) vollständige Riemann-Metriken, d.h. Riemann-Metriken, deren zugehörige Metriken d auf M vollständig sind.

Beweis. Wir brauchen M nur in einen $\mathbb{R}^n$ einzubetten und dann die von der Standardmetrik induzierte Metrik zu nehmen, um eine Riemann-Metrik auf M zu erhalten.

Oder wir verwenden, daß wir mittels Karten lokal Riemann-Metriken finden können, die wir mit Hilfe einer Partition der Eins zu einer globalen Riemann-Metrik verkleben dürfen, da "eine Riemann-Metrik zu sein" eine konvexe Bedingung ist. Die Existenz vollständiger Riemann-Metriken werden wir in (62.12) zeigen. □

33.4 Satz (Lie-Gruppe der Isometrien). *Sei (M, g) eine zusammenhängende m-dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit, dann ist*

$$\operatorname{Isom}(M) := \{f \in \operatorname{Diff}(M) : f \textit{ ist Isometrie}\}$$

eine Lie-Gruppe (zu einer Lie-Gruppe machbar) der Dimension höchstens $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Die Gruppe $\operatorname{Isom}(M)$ ist also im Unterschied zur Gruppe $\operatorname{Diff}(M)$ aller Diffeomorphismen endlichdimensional.

Ohne Beweis. Siehe [**71**, 2.1.2].

Da man mittels eines inneren Produktes Winkel zwischen Vektoren durch

$$\cos\sphericalangle(x, y) := \frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}}$$

definieren kann, können wir auf jeder Riemann-Mannigfaltigkeit (M, g) Winkel α zwischen Tangentialvektoren und somit zwischen Kurven c_1 und c_2 in ihren Schnittpunkten auf folgende Weise messen:

$$\cos\alpha := \frac{g(c_1'(0), c_2'(0))}{\sqrt{g(c_1'(0), c_1'(0))}\sqrt{g(c_2'(0), c_2'(0))}}.$$

33.5 Definition (Konforme Abbildungen)

Eine glatte Abbildung $f : (M, g) \to (N, h)$ heißt WINKELERHALTEND (KONFORM), falls $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ für alle $x \in M$ winkelerhaltend ist.

33.6 Satz (Lie-Gruppe der konformen Diffeomorphismen). *Die Gruppe der konformen Isomorphismen einer m-dimensionalen parakompakten zusammenhängenden Riemann-Mannigfaltigkeit bilden eine Lie-Gruppe der Dimension höchstens* $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Ohne Beweis. Siehe [**71**, 4.6.1].

33.7 Lemma (Lineare konforme Abbildungen). *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, dann sind äquivalent:*

1. *f ist winkelerhaltend,*
2. *$\exists\, \lambda > 0 : \langle f(x), f(y)\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$;*
3. *$\exists\, \mu > 0$: μf ist Isometrie.*

Beweis. $(2 \Leftrightarrow 3)$ ist offensichtlich mit $\lambda\,\mu^2 = 1$.

$(1 \Leftarrow 2)$ Sei α der von den Vektoren x und y aufgespannte Winkel und α' der von den Vektoren $f(x)$ und $f(y)$ aufgespannte Winkel. Dann gilt:

$$\cos\alpha' = \frac{\langle f(x), f(y)\rangle}{|f(x)| \cdot |f(y)|} = \frac{\lambda\langle x, y\rangle}{\sqrt{\lambda}|x|\sqrt{\lambda}|y|} = \cos\alpha.$$

Also ist $\alpha = \alpha'$, und f winkelerhaltend.

$(1 \Rightarrow 2)$ Wir definieren $\lambda(v) \geq 0$ implizit durch $\langle f(v), f(v)\rangle =: \lambda(v)\langle v, v\rangle$.

Seien v, w orthonormale Vektoren, dann ist $(v + w) \perp (v - w)$. Da f konform ist, gilt:

$$0 = \langle f(v + w), f(v - w)\rangle = \langle f(v), f(v)\rangle - \langle f(w), f(w)\rangle = \lambda(v) - \lambda(w).$$

Also ist λ konstant auf einer Orthonormalbasis $(e_1,\dots,e_n)$ von $\mathbb{R}^n$. Wir setzen $\lambda := \lambda(e_1) = \dots = \lambda(e_n)$. Für jeden beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

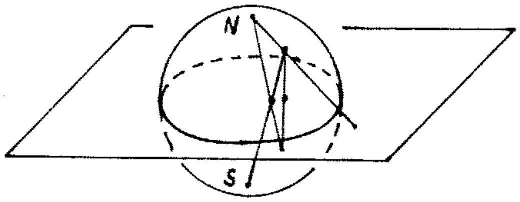
$$\begin{aligned}
&v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \\
\Rightarrow\quad &\lambda(v)\sum (v^i)^2 = \lambda(v)\Big\langle \sum v^i e_i, \sum v^i e_i\Big\rangle = \\
&= \Big\langle f\Big(\sum_i v^i e_i\Big), f\Big(\sum_j v^j e_j\Big)\Big\rangle \\
&= \sum_{i,j} v^i v^j \underbrace{\langle f(e_i), f(e_j)\rangle}_{\lambda\delta_{i,j}} = \lambda \sum_i (v^i)^2 \\
\Rightarrow\quad &\lambda(v) = \lambda \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Die Behauptung des Lemmas folgt nun aus:

$$\begin{aligned}
2\langle v, w\rangle &= \langle v+w, v+w\rangle - \langle v,v\rangle - \langle w,w\rangle \\
2\langle f(v), f(w)\rangle &= \langle f(v)+f(w), f(v)+f(w)\rangle - \langle f(v), f(v)\rangle - \langle f(w), f(w)\rangle \\
&= \lambda\langle v+w, v+w\rangle - \lambda\langle v,v\rangle - \lambda\langle w,w\rangle \\
&= 2\lambda\langle v,w\rangle. \qquad \square
\end{aligned}$$

33.8 Beispiele konformer Abbildungen

(1) Stereographische Projektion $S^n \to \mathbb{R}^n$ (siehe Aufgabe (72.40)).
(2) Spiegelung $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$ an der Einheitssphäre.



Die Abbildung f ist konform, da $f'(z)(v) = \frac{v\langle z,z\rangle - 2z\langle z,v\rangle}{\langle z,z\rangle^2}$ und somit

$$\begin{aligned}
\langle f'(z)(v), f'(z)(w)\rangle &= \Big\langle \frac{v\langle z,z\rangle - 2z\langle z,v\rangle}{\langle z,z\rangle^2}, \frac{w\langle z,z\rangle - 2z\langle z,w\rangle}{\langle z,z\rangle^2}\Big\rangle = \\
&= \frac{1}{\langle z,z\rangle^4}\Big(\langle v,w\rangle\,\langle z,z\rangle^2 - 4\langle z,z\rangle\langle z,v\rangle\langle z,w\rangle + 4\langle z,z\rangle\langle z,v\rangle\langle z,w\rangle\Big) = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle z,z\rangle^2}.
\end{aligned}$$

In Analogie zur Definition von holomorph in (30.9) heißt eine Funktion f antiholomorph, falls $f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^2$ glatt ist und $f'(z)$ konjugiert komplex-linear ist, d.h. $f'(z)(iv) = -if'(z)(v)$ für alle v, z.

33.9 Satz (Konforme Abbildungen der Ebene). *Sei $f : \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}$ ein Diffeomorphismus, dann gilt:*

f ist konform $\Leftrightarrow$ f ist holomorph oder antiholomorph. Dabei heißt f antiholomorph, wenn $\bar f$ holomorph ist.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
f = (f^1, f^2) \text{ ist konform} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow f'(z) \text{ ist konform} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \partial_1 f, \partial_2 f\rangle = 0 \\ \langle \partial_1 f, \partial_1 f\rangle = \langle \partial_2 f, \partial_2 f\rangle \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} f_1^1 f_2^1 + f_1^2 f_2^2 = 0 \\ (f_1^1)^2 + (f_1^2)^2 = (f_2^1)^2 + (f_2^2)^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} AB^* + BA^* = 0 \text{ wo } A := f_1^1 - f_2^2 \text{ und } B := f_2^1 + f_1^2 \\ AA^* - BB^* = 0 \text{ wo } A^* := f_1^1 + f_2^2 \text{ und } B^* := f_2^1 - f_1^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} A = B = 0 \text{ falls } (A^*)^2 + (B^*)^2 \neq 0 \\ \text{oder } (A^*)^2 + (B^*)^2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ ist holomorph} \\ \text{oder } A^* = B^* = 0, \text{ d.h. } f \text{ ist antiholomorph}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Kürzer kann man das auch so sehen: $f'(z)$ ist wegen (33.7) genau dann konform, wenn es ein Vielfaches einer Isometrie ist, also Multiplikation mit einer komplexen Zahl und eventuell noch mit der Spiegelung $z \mapsto \bar z$ zusammengesetzt. □

33.10 Proposition. *Es sei f eine glatte (nicht notwendig reguläre) Abbildung und U offen und zusammenhängend. Wir nennen sie in Verallgemeinerung zu (33.7)* KONFORM, *falls $T_z f$ für jedes z (reelles) Vielfaches einer Isometrie ist. Dann gilt:*

1. *$f : \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}$ ist konform $\Leftrightarrow$ f oder $\bar f$ ist holomorph.*
2. *$f : S^2 \to \mathbb{C}$ ist konform $\Leftrightarrow$ f ist konstant.*
3. *$f : \mathbb{C} \supseteq U \to S^2$ ist konform $\Leftrightarrow$ bezüglich stereographischer Parametrisierung $\mathbb{C} \subseteq S^2$ ist f oder $\bar f$ meromorph, d.h. ist holomorph bis auf Pole.*
4. *$f : S^2 \to S^2$ ist konform $\Leftrightarrow$ bezüglich stereographischer Parametrisierung $\mathbb{C} \subseteq S^2$ ist f oder $\bar f$ rational, d.h. Quotient zweier Polynome.*
5. *$f : S^2 \to S^2$ ist konformer Diffeomorphismus $\Leftrightarrow$ bezüglich stereographischer Parametrisierung $\mathbb{C} \subseteq S^2$ ist f oder $\bar f$ eine Möbiustransformation, d.h. ist Quotient der Form $z \mapsto (a\,z + b)/(c\,z + d)$.*

Beweis. Die Implikationen ($\Leftarrow$) sind leicht zu verifizieren. In (5) geht das wie folgt. Es sei $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ eine Möbiustransformation. Dann ist $f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ ein konformer Diffeomorphismus, mit Inverser $w \mapsto \frac{dw-b}{-cw+a}$, denn

$$f(z) = w \Leftrightarrow az + b = (cz + d)w \Leftrightarrow z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Falls $c \neq 0$ so erweitern wir diesen nun durch $f(-d/c) := \infty$ und $f(\infty) := a/c$ zu einer Bijektion $S^2 \to S^2$. Diese Erweiterung ist holomorph bei $-d/c$, denn $z \mapsto 1/f(z) =$

$(cz+d)(az+b)$, ist holomorph nahe $z=-d/c$, da $a(-d/c)+b=-(ad-bc)/c$ und

$$z\mapsto f(1/z)=(a/z+b)/(c/z+d)=(bz+a)/(dz+c),$$

ist holomorph nahe 0, da $d\,0+c=c\neq 0$.
Falls $c=0$, so erweitern wir f durch $f(\infty):=\infty$. Dann ist die Erweiterung holomorph bei ∞, da

$$1/f(1/z)=(c/z+d)/(a/z+b)=(dz+c)/(bz+a)$$

und $a\neq 0$ wegen $ad=ad-bc\neq 0$. Also definiert jede Möbiustransformation f einen konformen Diffeomorphismus $S^2\to S^2$.

Für die umgekehrte Richtungen ($\Rightarrow$) gehen wir wie folgt vor:

(1) Jede Isometrie $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ist eine Drehung (eventuell mit einer Spiegelung zusammengesetzt. Also ist $f'(z)$ oder $\overline{f'(z)}=\overline{f}'(z)$ Multiplikation mit einer komplexen Zahl und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x}=\pm\frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}=\mp\frac{\partial v}{\partial x}$ sind für $f=:u+i\,v$ erfüllt. Daraus erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\pm\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\pm\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=0,$$

d.h. $u=\mathfrak{Re}f$ ist harmonisch. Wir suchen ein w, s.d. $u+i\,w$ holomorph ist, d.h. die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt. Es soll also $dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$ gelten, was wegen der Integrabilitätsbedingung

$$d\Big(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\Big)=-\Big(\frac{\partial^u}{\partial x^2}+\frac{\partial^u}{\partial y^2}\Big)dx\wedge dy=0$$

durch den Ansatz

$$w(z):=\int_{z_0}^{z}\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy$$

erreichbar ist. Also ist $u+iw$ holomorph und somit sind die Stellen, wo $f'(z)=0$ ist isoliert, d.h. $f=u+i\,v=u\pm i\,w$ mit konstanter Wahl von $\pm$. Also ist f oder $\bar f$ holomorph.

(2) Es sei $f:S^2\to\mathbb{C}$ konform. Dann ist auch die Zusammensetzung $\mathbb{C}\to S^2\to\mathbb{C}$ mit der stereographischen Parametrisierung konform, also holomorph oder antiholomorph nach (1). Da $f(S^2)$ kompakt ist, ist diese Zusammensetzung beschränkt, und nach dem Satz von Liouville (siehe [**15**, S.116]) konstant.

(3) Es sei $f:\mathbb{C}\supseteq U\to S^2$ konform und $z_0\in U$. Falls $f(z_0)\in\mathbb{C}\subseteq S^2$ liegt, dann ist $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ lokal konform und nach (1) also (anti) holomorph. Andernfalls ist $f(z_0)=\infty$ und somit $z\mapsto\frac{1}{z}f(z)$ holomorph und folglich lokal beschränkt und lokal $\neq 0$. Also hat f eine isolierte Singularität in z_0 und kommt lokal um z_0 den Wert 0 nicht nahe und hat folglich nach dem Satz von Casorati-Weierstrass (siehe [**15**, S. 166]) in z_0 keine wesentliche Singularität, sondern einen Pol. Also ist f oder $\bar f$ meromorph.

(4) Nach (3) ist $f|_{\mathbb{C}}:\mathbb{C}\subset S^2\to S^2$ (oder $\bar f$) meromorph und hat nur endlich viele Pole z_j, da diese auf S^2 isoliert sind. Dort ist die Laurent-Entwicklung $f(z)=\sum_{k=-n_j}^{\infty}(z-z_j)^k f_k^j$ für ein $n_j\in\mathbb{N}$. Also ist $z\mapsto f(z)-\sum_{k=1}^{n_j}(z-z_j)^{-k}f_{-k}^j$ holomorph um z_j. Falls auch ∞ ein Pol ist, dann ist die Laurent-Entwicklung $f(\frac{1}{z})=\sum_{k=-n_\infty}^{\infty}z^k f_k^\infty$,

also $f(z) - \sum_{k=1}^{n_\infty} z^k f_{-k}^\infty$ holomorph bei ∞. lokal um z_j holomorph ist. Also ist

$$z \mapsto f(z) - \sum_j \sum_{k=1}^{n_j} (z - z_j)^{-k} f_{-k}^j - \sum_{k=1}^{n_\infty} z^k f_{-k}^\infty$$

holomorph $S^2 \to \mathbb{C}$ und nach (2) konstant, d.h. f ist rational.

(5) Nach (4) ist $f = \frac{p}{q}$ für relativ prime Polynome p und q. Falls der Grad von p oder von q größer als 1 ist, dann hat $h(z) := p(z) - c\,q(z)$ für geeignete $c := f(z)$ Grad größer als 1. Da f injektiv ist, darf nur eine Lösung $z = z_0$ von $h(z) = 0$ existieren, d.h. $h(z) = k(z - z_0)^n$ für ein $n \geq 2$ und $k \neq 0$. Dann ist $p(z_0) = c\,q(z_0)$ und $p'(z_0) = c\,q'(z_0)$ und somit $f'(z_0) = \frac{q\,p' - p\,q'}{q^2}(z_0) = 0$, ein Widerspruch dazu, daß f ein Diffeomorphismus ist. $\square$

34. Riemann-Flächen

34.1 Definition (Riemann-Fläche)

Eine Riemann-Fläche ist eine 2-dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit.

34.2 Satz von Korn-Lichtenstein. *Auf jeder Riemann-Fläche existieren konforme lokale Koordinaten (auch* isothermale Koordinaten *genannt).*

Ohne Beweis. Siehe [**76**] oder [**51**, Vol.II, Addendum 2]

34.3 Definition (Komplexe Mannigfaltigkeit)

Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem Atlas, dessen Kartenwechsel komplex differenzierbar (holomorph) sind.

Eine orientierte Mannigfaltigkeit ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem Atlas, dessen Kartenwechsel orientierungserhaltend sind. Für ein detailierteres Studium von Orientierbarkeit siehe Abschnitt (46).

34.4 Folgerung. *Jede orientierte Riemann-Fläche ist eine komplexe Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Man wähle einen Atlas, dessen Kartenwechsel konform und orientierungserhaltend, also holomorph, sind. $\square$

34.5 Beispiele konformer Diffeomorphismen

(1) Die S^2 hat als Atlas die stereographische Projektion vom Nord- und Südpol. Der Kartenwechsel ist die Inversion am Einheitskreis, ist also konform aber vertauscht die Orientierungen. Wir ändern die Orientierung einer Karte und erhalten so einen holomorphen Atlas. Dies nennt man auch die Riemann'sche Zahlenkugel. Wir betrachten nun die Automorphismengruppe der S^2. Das ist die Menge aller biholomorphen Abbildungen $f : S^2 \to S^2$, wobei die biholomorphen Abbildungen,

genau die konformen, orientierungserhaltenden Diffeomorphismus sind. Nach (33.9) gilt bezüglich der stereographischen Projektion von $S^2 \to \mathbb{C}$ folgende Beschreibung:

$$\mathrm{Aut}(S^2) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : ad - bc = 1 \right\}.$$

Diese Gruppe der Möbiustransformationen kann man auch mit folgender Matrizengruppe bis auf eine Multiplikation mit ± 1 identifizieren:

$$\mathrm{SL}_{\mathbb{C}}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1 \right\}.$$

Die Gruppe $\mathrm{Aut}(S^2)$ ist also isomorph zu $\mathrm{SL}_{\mathbb{C}}(2)/\mathbb{Z}_2$, wobei die Untergruppe $\mathbb{Z}_2$ gegeben ist durch $\mathbb{Z}_2 := \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$. Dies ist eine Lie-Gruppe.

Die Gruppe der Möbiustransformationen wird von $z \mapsto az$, $z \mapsto z + b$ und $z \mapsto 1/z$ erzeugt.
Offensichtlich sind die angegebenen Funktionen Möbiustransformationen. Sei umgekehrt eine Möbiustransformation $f : z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ mit $ad - bc \neq 0$ gegeben. Falls $c = 0$ und damit $d \neq 0$ so ist f die Zusammensetzung $z \mapsto \frac{a}{d} z \mapsto \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$. Ist $c \neq 0$ und damit $f(\infty) = a/c \in \mathbb{C}$, so ist die Zusammensetzung $z \mapsto f(z) \mapsto f(z) - f(\infty) \mapsto \frac{1}{f(z)-f(\infty)}$ ein konformer Diffeomorphismus von $\mathbb{C}$ (mit $\infty \mapsto \infty$), also nach dem ersten Teil eine Zusammensetzung einer Drehstreckung und einer Translation.

(2) Die Automorphismengruppe von $\mathbb{C}$ besteht aus jenen Möbiustransformationen von $\mathrm{Aut}(S^2)$, welche $\mathbb{C} \subset S^2$ oder – äquivalent – den Nordpol $\hat{=} \infty \in \mathbb{C}$ invariant lassen: In der Tat sei f so ein Diffeomorphismus, dann ist $f_\infty : z \mapsto 1/f(1/z)$ holomorph auf der punktierten Ebene. Da f ein Diffeomorphismus ist, ist f_∞ durch $f_\infty(0) = 0$ stetig ergänzbar, also ist ∞ eine hebbare Singularität und f durch $f(\infty) := \infty$ zu einen holomorphen Diffeomorphismus $S^2 \to S^2$ erweiterbar. Wegen

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} \xrightarrow{z\to\infty} ac.$$

bildet die Möbiustransformation $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ den Punkt ∞ auf a/c ab, und somit ist ∞ genau dann invariant, wenn $c = 0$ und $a \neq 0$ ist. Die Möbiustransformation hat dann die Gestalt

$$\frac{az+b}{d} = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}.$$

Also gilt:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{az + b : a \neq 0\ a, b \in \mathbb{C}\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \neq 0\ a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Man nennt dies auch die “$az+b$-Gruppe”, siehe (14.2). Sie ist komplex 2-dimensional.

(3) Für die offene Einheitsscheibe $\mathbb{D}$ besteht die Automorphismengruppe aus jenen Möbiustransformationen von S^2, die $\mathbb{D}$ invariant lassen, , d.h.

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ \frac{az+b}{\bar{b}z + \bar{a}} : a\bar{a} - b\bar{b} = 1 \right\} \cong SU(2,1)/\mathbb{Z}_2.$$

Es ist leicht zu sehen, daß jede solche Möbiustransformation $\mathbb{D}$ invariant läßt. Für die Umkehrung benötigen wir dafür das

Schwarz'sche Lemma. *Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann ist $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für alle z. Genauer gesagt, es tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:*

1. *$|f'(0)| < 1$ und $|f(z)| < |z|$ für $z \neq 0$;*
2. *$f(z) = e^{i\theta} z$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$ und alle z.*

Es sei f ein Automorphismus von $\mathbb{D}$ mit $f(0) = c$. Die Abbildung $z \mapsto \frac{z-c}{1-\bar{c}\, z}$ ist eine Möbiustransformation der angebenen Gestalt und setzt man f mit ihr zusammen so wird 0 invariant gelassen. O.B.d.A. ist also $f(0) = 0$. Nach dem Schwarzschen Lemma ist $|f'(0)| \leq 1$ und da f ein Diffeomorphismus ist, ist $f'(0) \neq 0$ und gleiches gilt für die Inverse f^{-1}. Wegen $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ ist also $(f^{-1})'(0) \circ f'(0) = 1$ und somit $|f'(0)| = 1$, d.h. $f(z) = e^{i\theta} z$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$ nach dem Schwarzschen Lemma. Dies ist ebenfalls eine Möbiustransformation der gesuchten Gestalt.

Es ist $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ eine 3-dimensionale Gruppe. Sei dazu $a = a_1 + ia_2$ und $b = b_1 + ib_2$. Dann ist ${a_1}^2 + {a_2}^2 - {b_1}^2 - {b_2}^2 = 1$ und durch die Beziehungen

$$r_{1,1} = a_1 + b_1 \qquad r_{1,2} = a_2 + b_2 \tag{10}$$

$$r_{2,1} = -a_2 - b_2 \qquad r_{2,2} = a_1 - b_1 \tag{11}$$

wird ein Element $\left(\begin{smallmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ r_{2,1} & r_{2,2} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_2$ definiert. Somit erhalten wir einen Isomorphismus $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \cong \mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_2$, siehe Aufgabe (72.62).

34.6 Die Hyperbolische Scheibe

Wir definieren eine neue Riemann-Metrik auf $\mathbb{D}$ durch

$$g_z(v, w) := \frac{1}{(1 - |z|^2)^2} \langle v, w \rangle.$$

Dies ist eine konform äquivalente Metrik, d.h. $\mathrm{id} : (\mathbb{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to (\mathbb{D}, g)$ ist ein konformer Diffeomorphismus. Es ist also

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}, g) = \mathrm{Aut}(\mathbb{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle).$$

Für $f(z) := \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$, d.h. $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, ergibt sich

$$g_z(v, v) = \frac{1}{(1 - |z|^2)^2} \langle v, v \rangle = \frac{|f'(z)(v)|^2}{(1 - |f(z)|^2)^2} = g_{f(z)}(f'(z)v, f'(z)v),$$

denn es gilt

$$(1 - |z|^2)|f'(z)v| = (1 - |f(z)|^2)|v|.$$

Es ist demnach $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}, g) = \mathrm{Isom}(\mathbb{D}, g)$, man nennt diese Riemann-Fläche $(\mathbb{D}, g)$ die HYPERBOLISCHE SCHEIBE. Für sie ist jeder winkelerhaltende Diffeomorphismus also längenerhalten.

35. Riemann'scher Abbildungssatz

35.1 Riemann'scher Abbildungssatz. *Jede 2-dimensionale, komplexe, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist biholomorph zu $\mathbb{D}, \mathbb{C}$ oder S^2*

Dies ist eine Verallgemeinerung von (5.3).

Ohne Beweis. siehe [**2**, S.158].

Die in (24.31) konstruierte universelle Überlagerung $\tilde{M}$ einer komplexen Mannigfaltigkeit M ist selbst eine komplexe Mannigfaltigkeit und die Überlagerungsabbildung ist lokal eine biholomorphe Abbildung. Das ist offensichtlich, denn die Kartenwechselabbildungen des kanonische Atlasses von $\tilde{M}$ sind Einschränkungen jener von M.

Wegen (35.1) ist die universelle Überlagerung einer 2-dimensionalen, komplexen Mannigfaltigkeit S^2, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{D}$.

35.2 Die universelle Überlagerung der punktierten Ebene

Die Abbildung p von $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ nach $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $(r, \varphi) \stackrel{p}{\mapsto} re^{i\varphi}$ ist eine Überlagerung. Da $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist, ist p zugleich eine universelle Überlagerung. Wir wollen nun auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ eine Riemann-Metrik finden, sodaß die Fußpunktabbildung eine Isometrie wird.

$$\begin{aligned} p'(r,\varphi)(s,\psi) &= \tfrac{\partial p}{\partial r} s + \tfrac{\partial p}{\partial \varphi}\psi = e^{i\varphi}s + rie^{i\varphi}\psi \\ |(s,\psi)|_{(r,\varphi)} &:= |p'(r,\varphi)(s,\psi)|^2 = s^2 + r^2\psi^2. \end{aligned}$$

Dies liefert die gewünschte Riemann-Metrik auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Behauptung. Die Abbildung $h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$(r,\varphi) \mapsto \ln(r) + i\varphi = (\ln(r), \varphi)$$

ist ein konformer Diffeomorphismus: Daß h ein Diffeomorphismus ist, ist klar. Bleibt noch zu zeigen, daß h auch konform ist. Es ist

$$\begin{aligned} h'(r,\varphi)(s,\psi) &= (\tfrac{1}{r}s, \psi) \\ |h'(r,\varphi)(s,\psi)|^2 &= \tfrac{s^2}{r^2} + \psi^2 = \tfrac{1}{r^2}(s^2 + r^2\psi^2) = \tfrac{1}{r^2}|(s,\psi)|^2_{(r,\varphi)}. \end{aligned}$$

Also ist h konform, und damit ist $p \circ h^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die universelle Überlagerung

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z = x + iy \mapsto (e^x, y) \mapsto e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z.$$

36. Uniformisierungssatz

Wir wollen nun Riemannsche Flächen X mittels ihrer universellen Überlagerungen $\tilde{X}$ beschreiben. Dazu werden wir (24.18) verwenden: $X \cong \tilde{X}/G$, wobei G die Gruppe der Decktransformationen der universellen Überlagerung $\tilde{X} \to X$ ist.

36.1 Die Decktransformationen von $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Wir wollen die Decktransformationen der universelle Überlagerung h von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $h : z \mapsto e^z$ bestimmen. Wir wissen bereits, daß

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) &= \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \text{ ist biholomorph}\} \\ &= \text{Gruppe der Möbiustransformationen } z \mapsto az + b \text{ mit } a \neq 0. \end{aligned}$$

Nun definieren wir für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z_1 \sim z_2 :\Leftrightarrow e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{x_1} e^{iy_1} = e^{x_2} e^{iy_2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \wedge (y_1 - y_2 \in 2\pi\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Für ein $g \in \{h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) : h(z) \sim z\}$ können wir auch $az+b$ schreiben. Sei $az+b \sim z$ für alle z. Wenn $z = 0$ ist, dann folgt $b \sim 0$ und somit $b \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Sei $az + b \sim z$ für alle z. Dann folgt aus $z = 1$, daß $a \sim 1$ ist, d.h. der Realteil von a ist gleich 1 und der Imaginärteil von a ist Element von $2i\pi\mathbb{Z}$. Wenn $z = i$ ist, schließen wir äquivalent, daß $ai = -\mathfrak{Im}(a) + i\mathfrak{Re}(a) \sim i$ ist, d.h. $\mathfrak{Im}(a) = 0 \Rightarrow a = 1$. Somit haben wir also die Gruppe G der Decktransformationen zu obiger universeller Überlagerung gefunden:

$$G = \{z + 2i\pi k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

36.2 Uniformisierungssatz. *Sei M eine 2-dimensionale, zusammenhängende, orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit. Dann ist M konform-isomorph zu $\tilde{M}/G$, wobei $\tilde{M} \in \{S^2, \mathbb{C}, \mathbb{D}\}$ und G eine Gruppe von Möbiustransformationen in $\mathrm{Aut}(\tilde{M})$ ist. Umgekehrt, ist G eine Gruppe von Möbiustransformationen auf $M_1 \in \{S^2, \mathbb{C}, \mathbb{D}\}$, welche* DISKONTINUIERLICH *wirkt, d.h. $g \neq \mathrm{id} \Rightarrow \forall\, x\ \exists\, U(x) : U(x) \cap g(U(x)) = \emptyset$, dann ist*

1. *M_1/G eine Mannigfaltigkeit,*
2. *die Quotientenabbildung $M_1 \to M_1/G$ eine Überlagerung,*
3. *$G = \{$Gruppe der Decktransformationen der Überlagerung$\}$.*

Beweis. Das entscheidende Hilfsmittel ist der Riemannschen Abbildungssatzes (35.1). Also ist die nach (24.31) existierende universelle Überlagerung $\tilde{M}$ einer der drei Räume S^2, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ und nach (24.18) ist M isomorph zu $\tilde{M}/G$, wobei G die Gruppe der Decktransformationen ist, also eine Gruppe von Möbius-Transformationen die nach (24.18) diskontinuierlich auf $\tilde{M}$ wirkt. Umgekehrt liefert jede solche Gruppe G eine Überlagerung $\tilde{M} \to \tilde{M}/G =: M$ nach (24.19). □

36.3 Die Automorphismengruppe einer Riemann-Fläche

Wie können wir nun $\mathrm{Aut}(M)$ bestimmen? Dazu verwenden wir Ideen, die wir bereits in (24.15) und (24.16) verwendet haben. Falls $f \in \mathrm{Aut}(M)$, dann gibt es ein $\tilde{f} \in \mathrm{Aut}(\tilde{M})$, sodaß folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{M} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & \tilde{M} \arrow[d, "p"'] \\ \tilde{M}/G \arrow[r, equal] & M \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

Welche $\tilde{f} \in \mathrm{Aut}(\tilde{M})$ stammen aber von einem $f \in \mathrm{Aut}(M)$? Dies sind genau jene, bei denen man aus $x_1 \sim x_2$ auf $\tilde{f}(x_1) \sim \tilde{f}(x_2)$ schließen kann. Sei nun $p \circ \tilde{f} = f \circ p$, dann folgt für alle $g \in G$:

$$\begin{aligned} &p \circ \tilde{f} \circ g = f \circ p \circ g = f \circ p = p \circ \tilde{f} \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow p \circ \tilde{f} \circ g \circ \tilde{f}^{-1} = p \Rightarrow \tilde{f} \circ g \circ \tilde{f}^{-1} \in G. \end{aligned}$$

Analog folgern wir für $\tilde f^{-1}$, daß $\tilde f^{-1}\circ g\circ \tilde f\in G$. Wir definieren den NORMALISATOR von G:

$$\mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\tilde M)}(G) := \{\tilde f\in \mathrm{Aut}(\tilde M): \tilde f G\tilde f^{-1}\subseteq G \text{ und } \tilde f^{-1}G\tilde f\subseteq G\}$$

Sei $\tilde f\in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\tilde M)}(G)$, dann ist zu zeigen, daß $\tilde x_1\sim\tilde x_2\Rightarrow \tilde f(\tilde x_1)\sim\tilde f(\tilde x_2)$. Die Bedingung bedeutet aber: es existiert ein $g\in G$ mit $g(\tilde x_1)=\tilde x_2$. Wir definieren $\bar g:=\tilde f\circ g\circ\tilde f^{-1}$. Dieses $\bar g$ ist aber gewiß Element von G, da ja $\tilde f\in \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\tilde M)}(G)$. Also gilt:

$$\tilde f(\tilde x_2)=\tilde f(g(\tilde x_1))=\bar g(\tilde f(\tilde x_1))\Rightarrow \tilde f(\tilde x_2)\sim\tilde f(\tilde x_1),$$

d.h. $\tilde f$ faktorisiert über eine Abbildung $f:M\to M$ und $\tilde f^{-1}$ faktorisiert über die Abbildung $f^{-1}:M\to M$. Somit ist

$$\mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(M)}(G)=\{\tilde f\in\mathrm{Aut}(\tilde M):\tilde f \text{ sitzt über einem } f\in\mathrm{Aut}(M)\}.$$

Wann liefern zwei $\tilde f_1,\tilde f_2\in N(G)$ die gleiche Abbildung $f\in\mathrm{Aut}(M)$?

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow p\circ\tilde f_1=f\circ p=p\circ\tilde f_2\Leftrightarrow p\circ\tilde f_1\circ\tilde f_2^{-1}=p\\&\Leftrightarrow g:=\tilde f_1\circ\tilde f_2^{-1}\in G\Leftrightarrow \exists\, g\in G:\tilde f_1=g\circ\tilde f_2.\end{aligned}$$

Es folgt also folgendes (siehe auch (24.14)-(24.16))

36.4 Lemma (Automorphismengruppe via universelle Überlagerung).
Sei M eine Riemann-Fläche, $\tilde M\to M$ die universelle Überlagerung und G die Gruppe der Decktransformationen, dann gilt:

$$\mathrm{Aut}\,M=\mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\tilde M)}(G)/G. \qquad\square$$

36.5 Beispiel

Wir betrachten $M=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ und $\tilde M=\mathbb{C}\xrightarrow{p=\exp}\mathbb{C}\setminus\{0\}$, mit

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(\tilde M)&=\{az+b:a\neq 0 \text{ und } a,b\in\mathbb{C}\}, \text{ nach (34.5)}\\ \text{und } G&=\{z+2ki\pi:k\in\mathbb{Z}\}, \text{ nach (36.1).}\end{aligned}$$

Die Gruppe der Decktransformationen wird durch $t:z\mapsto z+2\pi i$ erzeugt. Wir wollen den Normalisator von G berechnen.
Sei $\mathrm{Norm}(G)\ni\tilde f:z\mapsto az+b=w$ mit der Inversen $\tilde f^{-1}:w\mapsto\frac{w-b}{a}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}(\tilde f\circ t\circ\tilde f^{-1})(z)&=a(\tfrac{z-b}{a}+2\pi i)+b=z+2\pi i a\Rightarrow\\&\Rightarrow a\in\mathbb{Z}\\(\tilde f^{-1}\circ t\circ\tilde f)(z)&=\frac{(az+b+2\pi i)-b}{a}=z+t\frac{2\pi i}{a}\Rightarrow\\&\Rightarrow \tfrac{1}{a}\in\mathbb{Z}\\&\Rightarrow a\in\{1,-1\}\Rightarrow \mathrm{Norm}(G)=\{\pm z+b:b\in\mathbb{C}\}\\ \mathrm{Aut}(\mathbb{C}\setminus\{0\})&=\{e^z\mapsto e^{\pm z+b}:b\in\mathbb{C}\}= \qquad \text{mit } e^b=c\\&=\{e^z\mapsto e^{\pm z}\cdot c:c\neq 0\}\\&=\{w\mapsto w^{\pm 1}\cdot c:c\neq 0\}\end{aligned}$$

VI. Differentialformen

In diesem Kapitel werden wir 1-Formen, wie wir sie in vorhergehenden Kapitel behandelt haben, zu Differentialformen höheren Grades (kurz: n-Formen) verallgemeinern. Nach einem der Motivation dienenden Abschnitt stellen wir die nötige multilineare Algebra zusammen, und verkleben die damit aus den Tangential- und Kotangential-Räumen konstruierten Tensorräume zu Tensorbündel. Als Schnitte der Bündel alternierender Tensoren erhalten wir die Differentialformen. Wir behandeln die wichtigsten Operationen auf ihnen: Die äußere Ableitung, die Lieableitung und den Einsetzungshomomorphismus. Insbesonders schauen wir uns das für Riemann-Mannigfaltigkeiten genauer an. Als Anwendung reißen wir die De Rham Kohomologie an.

37. Motivation

37.1 Die Riemann-Metrik als Tensorfeld

In (32.2) hatte wir die Riemann-Metrik als eine Abbildung definiert, die jedem $x \in M$ eine Bilinearform $g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ zuordnet, und zwar so, daß $x \mapsto g_x(\xi_x, \eta_x)$, $M \to \mathbb{R}$ glatt ist für je zwei glatte Vektorfelder $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$. Schreiben wir die beiden Vektorfelder mittels lokaler Koordinaten $(u^1, \dots, u^m)$ als $\xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ und $\eta = \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, so erhalten wir

$$g_x(\xi_x, \eta_x) = \sum_{i,j} \xi_x^i \eta_x^j \; g_x\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \sum_{i,j} du^i(\xi)\; du^j(\eta)\; g_{i,j}(x),$$

wobei wir $g_{i,j}(x) := g_x\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)$ gesetzt haben. Die Abbildung $(\xi_x, \eta_x) \mapsto du^i(\xi) \cdot du^j(\eta)$ ist eine bilineare Abbildung $T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$, die wir mit $du^i \otimes du^j$ bezeichnen. Also gilt lokal

$$g = \sum_{i,j} g_{i,j}\; du^i \otimes du^j$$

37.2 Hessische Form

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit lokalem Extremum bei x, dann ist $T_xf : T_xM \to T_{f(x)} = \mathbb{R}$ die Nullabbildung. Um umgekehrt schließen zu können benötigen wir die 2.Ableitung: Sei M eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ oder eine Teilmannigfaltigkeit und

f eine Erweiterung auf eine offene Umgebung.

$$\begin{aligned}
TM &\xrightarrow{Tf} \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \\
Tf(x,v) &= (f(x), f'(x)(v)) \\
T^2M = T(TM) &\xrightarrow{T^2 f} {}^2\,\mathbb{R} = \mathbb{R}^4 \\
T^2 f(x,v;y,w) &= \Big(f(x), f'(x)(v), f'(x)(y), f''(x)(v,y) + f'(x)(w)\Big)
\end{aligned}$$

Im $\mathbb{R}^n$ ist $\mathrm{pr}_4(T^2f(x,v;y,0)) = f''(x)(v,y)$, falls $(x,v;y,0)$ im 2.Tangentialraum der Mannigfaltigkeit liegt.

37.3 Beispiel

$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$:

$$\begin{aligned}
TS^1 &= \{(x,v) \in (\mathbb{R}^2)^2 : |x| = 1, \langle x, v\rangle = 0\} \\
T^2S^1 &= \{(x,v;y,w) \in (\mathbb{R}^2)^4 : |x| = 1, \langle x, v\rangle = \langle x, y\rangle = 0, \\
&\qquad\qquad \langle y, v\rangle + \langle x, w\rangle = 0\}
\end{aligned}$$

Da $v \perp x$ und $y \perp x$ ist, ist $(x,v;y,0) \notin T^2S^1$, d.h. auf einer allgemeine Mannigfaltigkeit läßt sich $f''(x) : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ nicht sinnvoll definieren.

Falls $T_xf = 0$, so ist dies doch möglich. Sei $\xi_x, \eta_x \in T_xM$, dann definieren wir $f''(x)(\xi_x,\eta_x) := \eta_x(\xi(f))$, wobei ξ ein Vektorfeld mit $\xi(x) = \xi_x$ sei. Schreiben wir ξ_x und η_x in lokalen Koordinaten, d.h. $\xi_x = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ bzw. $\eta_x = \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, so ergibt sich:

$$\xi(f) = \sum_i \xi^i \frac{\partial f}{\partial u^i}$$

$$\begin{aligned}
\eta_x(\xi(f)) &= \left(\sum_j \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j}\right)\left(\sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right)(f) \\
&= \sum_j \eta^j \sum_i \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right)(f) \\
&= \sum_j \eta^j \sum_i \frac{\partial \xi^i}{\partial u^j}\frac{\partial f}{\partial u^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial u^j}\frac{\partial}{\partial u^i} f \\
&= \sum_{i,j} \xi^i \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i}, \quad \text{da } \frac{\partial f}{\partial u^i} = 0.
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, daß obige Definition von der Fortsetzung unabhängig ist und in lokalen Koordinaten die übliche 2. Ableitung liefert, falls $f'(x) = 0$.

Es ist also $f''(x) : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f''(x)(\xi,\eta) &= \sum_{i,j} \xi^i \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} \\ &= \sum_{i,j} du^i(\xi) du^j(\eta) \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} \\ &= \left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i}\, du^i \otimes du^j \right)(\xi,\eta). \end{aligned}$$

Demnach ist $f''(x) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} du^i \otimes du^j$. Wie transformiert sich dieser Ausdruck beim Wechsel von Koordinaten u^i zu neuen Koordinaten v^j? Wir haben $dv^i = \sum_j \frac{\partial v^i}{\partial u^j}\, du^j$ und $\frac{\partial}{\partial u^j} = \sum_k \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial v^k}$. Also ist $\frac{\partial}{\partial u^j}(f) = \sum_k \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial v^k}$ und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j}(f) &= \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}(f) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sum_k \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial v^k} \right) \\ &= \sum_l \frac{\partial v^l}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial}{\partial v^l}\left(\sum_k \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial v^k} \right) \\ &= \sum_{l,k} \frac{\partial v^l}{\partial u^i} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial v^l}\left(\frac{\partial v^k}{\partial u^j} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial v^k} + \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^l \partial v^k} \right). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}\, du^i \otimes du^j = \sum_{l,k} \frac{\partial^2 f}{\partial v^l \partial v^k}\, dv^l \otimes dv^k + \sum_{i,j} \left(\sum_k \frac{\partial^2 v^k}{\partial u^i \partial u^j} \right) \frac{\partial f}{\partial v^k}\, du^i \otimes du^j,$$

und der zweite Summand verschwindet in x, da $\frac{\partial f}{\partial v^k}|x = 0$.

37.4 Exakte 1-Formen

Für eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, wobei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ offen sei, ist $f' : M \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ glatt. Natürlich interessiert man sich dafür, wann die Umkehrung gilt, also wann zu einer 1-Form $\omega : M \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ existiert, sodaß $\omega = f'$, ein solches ω nennt man exakte 1-Form. Der Satz von Frobenius liefert eine Bedingung:
Lokal existiert so ein f genau dann wenn $d\omega(x)(v_1, v_2) = 0\,\forall\ v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$, wobei $2d\omega(x)(v_1, v_2) := \omega'(x)(v_1) \cdot v_2 - \omega'(x)(v_2) \cdot v_1$. Das so definierte $d\omega : M \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ ist für festes $x \in M$ alternierend (= schiefsymmetrisch) und bilinear. Kürzer schreibt man $d\omega : M \to L^2_{Alt}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ und sagt: $d\omega$ ist eine 2-Form.
Allgemein bezeichnet man eine Abbildung $\omega : M \to L^k_{Alt}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ als k-Form, $L^k_{Alt}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ ist der Raum der alternierenden k-linearen Funktionale. Ist $M = \mathbb{R}^m$, so genügt $d\omega = 0$ um ein global gegebenes f mit $\omega = f'$ zu finden. Ist $M \subseteq \mathbb{R}^m$, so genügt es i.a. nicht. Dazu ein Beispiel:

37.5 Beispiel

Wir betrachten die 1-Form
$$\omega(x,y)(v,w) := \frac{-yv+xw}{x^2+y^2} \quad \text{also} \quad \omega(x,y) := -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$
auf $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ aus (3.10). Wegen $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{-y}{x^2+y^2}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2})$ ist $d\omega = 0$. Angenommen, es gibt ein f mit $\omega = f'$, so muß gelten:
$$f'(x,y) = (\partial_1 f(x,y), \partial_2 f(x,y)) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$
Ist $(x_0,y_0) \in S^1$ ein Punkt, in dem f eingeschränkt auf S^1 ein Minimum annimmt, so gilt
$$\begin{aligned} 0 = f'(x_0,y_0)(-y_0,x_0) &= -y_0 \cdot \frac{1}{x_0^2+y_0^2}(-y_0) + x_0 \cdot \frac{1}{x_0^2+y_0^2}(x_0) \\ &= 1, \text{ das ist ein Widerspruch.} \end{aligned}$$
Für die eben betrachtete Form gilt also: $d\omega = 0$, aber es gibt keine Stammfunktion zu ω. Diese Diskrepanz zwischen Formen ω mit $d\omega = 0$ und solchen der Gestalt $\omega = f' = df$ kann verwendet werden, um etwas über die topologischen Eigenschaften von M auszusagen. (In unserem Beispiel war M nicht einfach zusammenhängend.). Wie sieht das nun für beliebige Mannigfaltigkeiten M aus?

Sei allgemeiner $\omega : x \mapsto \omega(x)$ eine 1-Form, dann müßte $d\omega$ eine, auf M gegebene Abbildung $d\omega : x \mapsto d\omega(x)$ mit Werten $d\omega(x) : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ sein, die bilinear und alternierend sind (solche $d\omega$ heißen 2-FORM). Also ist $(d\omega)_x \in L^2_{Alt}(T_xM, \mathbb{R})$. Analog werden wir k-Formen definieren. Dazu wollen wir jetzt die grundlegenden Tatsachen aus der multilinearen Algebra zusammenfassen.

38. Multilineare Algebra, Tensoren

38.1 Definition

Wir stellen zuerst die (multi)linear Theorie zusammen, für ein vertiefendes Studium vgl. etwa [**85**] und [**51**, Vol.I, Cap.7]. Im folgenden bezeichnen E, F, etc. endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $L^k(E_1,\dots,E_k;F)$ den RAUM DER k-LINEAREN ABBILDUNGEN $E_1 \times \ldots \times E_k \to F$. Dieser ist ein Vektorraum der endlicher Dimension $\dim(E_1) \cdot \dots \cdot \dim(E_k) \cdot \dim(F)$.

Die Abbildung $T : E_1 \times \ldots \times E_k \to \mathbb{R}$ sei k-linear und $S : E_{k+1} \times \ldots \times E_{k+i} \to \mathbb{R}$ sei i-linear.

Das TENSORPRODUKT von T mit S ist wie folgt definiert:
$$\begin{aligned} &T \otimes S : E_1 \times \ldots \times E_{k+i} \to \mathbb{R} \quad (k+i)\text{-linear} \\ &(T \otimes S)(v_1,\dots,v_{k+i}) := T(v_1,\dots,v_k)\, S(v_{k+1},\dots,v_{k+i}) \end{aligned}$$
Völlig analog kann man auch das Tensorprodukt $T_1 \otimes \dots \otimes T_k$ mehrerer multilinearer Funktionale T_i definieren.

38.2 Das Tensorprodukt von Vektorräumen. *Für endlichdimensionale Vektorräume $E_1,\dots,E_k$ ist das Tensorprodukt durch $E_1 \otimes \dots \otimes E_k := L^k(E_1^*,\dots,E_k^*;\mathbb{R})$*

definiert. Gemeinsam mit der Abbildung

$$\otimes : E_1 \times \ldots \times E_k \to E_1 \otimes \cdots \otimes E_k,$$
$$\otimes : (x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_k, \ \textit{wobei}$$
$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)(y_1^*, \ldots, y_k^*) := y_1^*(x_1) \cdot \cdots \cdot y_k^*(x_k),$$

löst es folgendes universelles Problem:

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times \ldots \times E_k \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[dr, "k\text{-linear}"'] & & E_1 \otimes \cdots \otimes E_k \arrow[dl, dotted, "\text{linear}"] \\
& F &
\end{tikzcd}$$

Ist $\{e_i^j : 1 \le i \le \dim E_j\}$ eine Basis von E_j, dann ist eine Basis von $E_1 \otimes \cdots \otimes E_k$ gegeben durch:

$$\{e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^k : 1 \le i_1 \le \dim E_1, \ldots, 1 \le i_k \le \dim E_k\}.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die Aussage über die Basis. Die Menge $\{e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^k : i_1, \ldots, i_k\}$ ist linear unabhängig, denn aus $\sum_{i_1,\ldots,i_k} \mu^{i_1,\ldots,i_k}\, e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^k = 0$ folgt durch Anwenden auf $(e_1^{j_1}, \ldots, e_k^{j_k})$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= \Big(\sum_{i_1,\ldots,i_k} \mu^{i_1,\ldots,i_k}\, e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^k\Big)(e_1^{j_1}, \ldots, e_k^{j_k}) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_k} \mu^{i_1,\ldots,i_k}\, \Big(e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^k\Big)(e_1^{j_1}, \ldots, e_k^{j_k}) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_k} \mu^{i_1,\ldots,i_k}\, \underbrace{e_1^{j_1}(e_{i_1}^1)}_{\delta_{i_1}^{j_1}} \cdot \cdots \cdot \underbrace{e_k^{j_k}(e_{i_k}^k)}_{\delta_{i_k}^{j_k}} = \mu^{j_1,\ldots,j_k}
\end{aligned}$$

Dies ist auch ein Erzeugendensystem für $E_1 \otimes \cdots \otimes E_k := L(E_1^*, \ldots, E_k^*; \mathbb{R})$, denn jedes k-lineare $\mu : E_1^* \times \ldots \times E_k^* \to \mathbb{R}$ läßt sich auf $(x^1, \ldots, x^k) \in E_1^* \times \ldots \times E_k^*$ wie folgt beschreiben

$$\begin{aligned}
\mu(x^1, \ldots, x^k) &= \mu(\sum_{i_1} x_{i_1}^1 e_1^{i_1}, \ldots, \sum_{i_k} x_{i_k}^k e_k^{i_k}) \\
&= \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} x_{i_1}^1 \ldots x_{i_k}^k \cdot \mu(e_1^{i_1}, \ldots, e_k^{i_k}) \\
&= \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} e_{i_1}^1(x^1) \ldots e_{i_k}^k(x^k) \cdot \mu(e_1^{i_1}, \ldots, e_k^{i_k}) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_k} \mu^{i_1,\ldots,i_k}\, (e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^k)(x^1, \ldots, x^k)
\end{aligned}$$

wobei $\mu^{i_1,\ldots,i_k} := \mu(e_1^{i_1}, \ldots, e_k^{i_k}) \in \mathbb{R}$.

Folglich läßt sich jede multilineare Abbildung $\mu : E_1 \times \ldots \times E_k \to F$ auf eine eindeutige Weise zu einer lineare Abbildung $\tilde{\mu} : E_1 \otimes \cdots \otimes E_k \to F$ durch

$$\tilde{\mu}(e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^k) := \mu(e_{i_1}^1, \ldots, e_{i_k}^k)$$

fortsetzen, sodaß das angegebene Dreieck kommutiert. □

38.3 Bemerkungen

1. Wir erhalten folgende Identitäten:

$$\begin{aligned}
(\dots(E_1\otimes E_2)\otimes\dots\otimes E_k) &\cong L((E_1\otimes\dots\otimes E_{k-1})^*, E_k^*;\mathbb{R})\\
&\cong L(E_1^*,\dots,E_{k-1}^*, L(E_k^*,\mathbb{R}))\\
&\cong L(E_1^*,\dots,E_{k-1}^*, E_k^*;\mathbb{R})\\
&\cong (E_1\otimes\dots\otimes E_k)\\
E_1\otimes E_2 &\cong L(E_1^*,E_2^*;\mathbb{R})\cong L(E_2^*,E_1^*;\mathbb{R})\cong E_2\otimes E_1\\
E_1\otimes\mathbb{R} &\cong L(E_1^*,\mathbb{R}^*;\mathbb{R})\cong L(E_1^*,\mathbb{R}^{**})\cong E_1^{**}\cong E_1\\
(E_1\otimes\dots\otimes E_k)^* &\cong L^k(E_1,\dots,E_k;\mathbb{R})\cong L^k(E_1^{**},\dots,E_k^{**};\mathbb{R})\cong\\
&\cong (E_1^*\otimes\dots\otimes E_k^*)\\
L(E,F) &\cong L(E,F^{**}) = L(E,L(F^*,\mathbb{R}))\cong L^2(E,F^*;\mathbb{R})\cong\\
&\cong L^2(E^{**},F^*;\mathbb{R}) = E^*\otimes F.
\end{aligned}$$

2. Zu linearen Abbildungen $T_i : E_i \to F_i$ existiert eine durch folgendes Diagramm eindeutig bestimmte lineare Abbildung $T_1\otimes\dots\otimes T_k : E_1\otimes\dots\otimes E_k\to F_1\otimes\dots\otimes F_k$:

$$\begin{tikzcd}
E_1\times\ldots\times E_k \arrow[r, "\otimes", "k\text{-linear}"'] \arrow[d, "T_1\times\ldots\times T_k"', "\text{linear}"] & E_1\otimes\dots\otimes E_k \arrow[d, "\text{linear}"', "T_1\otimes\dots\otimes T_k"] \\
F_1\times\ldots\times F_k \arrow[r, "\otimes", "k\text{-linear}"'] & F_1\otimes\dots\otimes F_k.
\end{tikzcd}$$

   In der Tat ist $T_1\otimes\dots\otimes T_k$ auf der Basis $(e^1_{i_1}\otimes\dots\otimes e^k_{i_k})$ wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}
(T_1\otimes\dots\otimes T_k)(e^1_{i_1}\otimes\dots\otimes e^k_{i_k}) &= T_1(e^1_{i_1})\cdot\dots\cdot T_k(e^k_{i_k})\\
&= \sum_{j_1}(T_1)^{j_1}_{i_1} f^1_{j_1}\cdot\dots\cdot\sum_{j_k}(T_k)^{j_k}_{i_k} f^k_{j_k}\\
&= \sum_{j_1,\dots,j_k}(T_1)^{j_1}_{i_1}\cdot\dots\cdot(T_k)^{j_k}_{i_k}\; f^1_{j_1}\otimes\dots\otimes f^k_{j_k}
\end{aligned}$$

3. Zwischen den verschiedensten eben definierten Tensorprodukten besteht der folgende Zusammenhang: Sind $T_i : E_i\to\mathbb{R}$ linear, so ist das in (2) definierte Tensorprodukt $T_1\otimes\dots\otimes T_k : E_1\otimes\dots\otimes E_k\to\mathbb{R}\otimes\dots\otimes\mathbb{R}$ zusammengesetzt mit dem natürlichen Isomorphismus $\mathbb{R}\otimes\dots\otimes\mathbb{R}\cong\mathbb{R}$ genau das in (38) definierte Tensorprodukt $T_1\otimes\dots\otimes T_k : E_1\otimes\dots\otimes E_k\to\mathbb{R}$.
4. $\bigotimes E := \bigoplus_{m=0}^\infty(\bigotimes_{i=0}^m E)$ ist eine graduierte, assoziative Algebra mit 1 und heißt die Tensoralgebra über E mit $1\in\mathbb{R}=\bigotimes^o E$. Dabei heißt eine Algebra graduiert, falls $A=\bigoplus_{k\in\mathbb{N}}A_k$ und die Multiplikation $A^k\times A^l$ in A^{k+l} abbildet. Die Elemente $\omega\in A_k$ heißen homogen vom Grad k. Dabei setzt man $\bigotimes^0 E := \mathbb{R}$, denn von $\prod_{i\in\emptyset}E_i^* = \{0\}$ und jedes $f:\{0\}\to\mathbb{R}$ ist 0-linear.
5. Die Tensoralgebra hat folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder linearen Abbildung $f : E\to A$, wo A eine assoziative Algebra mit 1 ist, existiert ein eindeutiger Algebrahomomorphismus $\tilde f : \bigotimes E\to A$, welcher auf $\bigotimes^1 E = E$ mit f übereinstimmt.

38.4 Definition

Mit $L^k_{Alt}(E,F)$ bezeichnen wir den durch die alternierenden k-linearen Abbildungen gebildeten Teilraum von $L(\underbrace{E,\dots,E}_{k \text{ mal}};F) =: L^k(E,F)$.

Eine Projektion alt : $L^k(E,F) \to L^k_{Alt}(E,F)$, genannt Alternator ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\operatorname{alt}(T)(v_1,\dots,v_k) &:= \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}\operatorname{sign}(\pi)\,T(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})\\
\operatorname{alt}(T) &= \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}\operatorname{sign}(\pi)\,T\circ\pi^*.
\end{aligned}$$

Für alternierende multilineare Funktionale T und S definiert man das Äussere oder "Hack"-Produkt (englisch: wedge-product) durch:

$$\begin{aligned}
&(T\wedge S)(v_1,\dots,v_{k+i}) := \frac{(k+i)!}{k!\,i!}\operatorname{alt}(T\otimes S)(v_1,\dots,v_{k+i}) =\\
&= \frac{1}{k!\,i!}\sum_\pi \operatorname{sgn}\pi\cdot T(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})\cdot S(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+i)})\\
&= \frac{1}{k!\,i!}\sum_{\pi_1,\pi_2}\sum_{\sigma\text{ stkw.}\nearrow}\operatorname{sgn}\sigma\,\operatorname{sgn}\pi_1\,\operatorname{sgn}\pi_2\,T(v_{\sigma(\pi_1(1))},\dots,v_{\sigma(\pi_1(k))})\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot S(v_{\sigma(\pi_2(k+1))},\dots,v_{\sigma(\pi(k+i))})\\
&= \sum_{\sigma(1)<\dots<\sigma(k)}(-1)^{\sum_{j\le k}(\sigma(j)-j)}\cdot T(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot S(v_1,\dots,\widehat{v_{\sigma(1)}},\dots,\widehat{v_{\sigma(k)}},\dots,v_{k+i}).
\end{aligned}$$

In dieser Rechnung haben wir die Permutation π von $\{1,\dots,k+i\}$ in eindeutiger Weise als $\sigma\circ(\pi_1\times\pi_2)$ geschrieben, wobei π_1 eine beliebige Permutation von $\{1,\dots,k\}$, sowie π_2 eine solche von $\{k+1,\dots,k+i\}$ ist und σ auf $\{1,\dots,k\}$ und $\{k+1,\dots,k+i\}$ streng monoton wachsend ist. Es sind also π_1 und π_2 gerade die Inversen jene Permutationen, die Elemente der Mengen $\{\pi(1),\dots,\pi(k)\}$ und $\{\pi(k+1),\dots,\pi(k+i)\}$ in die natürliche Reihenfolge $\sigma(1)<\dots<\sigma(k)$ und $\sigma(k+1)<\dots<\sigma(k+i)$ bringen.

Falls T, S und R linear sind, dann ist

$$(T\wedge S)(w,v) = T(w)\,S(v) - T(v)\,S(w) = \det\begin{pmatrix}T(w) & S(w)\\ T(v) & S(v)\end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned}
2((T\wedge S)\wedge R)(w,v,u) = \\
&= (T\wedge S)(w,v)\,R(u) - (T\wedge S)(v,w)\,R(u)\\
&+ (T\wedge S)(v,u)\,R(w) - (T\wedge S)(w,u)\,R(v)\\
&+ (T\wedge S)(u,w)\,R(v) - (T\wedge S)(u,v)\,R(w)\\
&= (T(w)\,S(v) - T(v)\,S(w))\,R(u) - (T(v)\,S(w) - T(w)\,S(v))\,R(u)\\
&+ (T(v)\,S(u) - T(u)\,S(v))\,R(w) - (T(w)\,S(u) - T(u)\,S(w))\,R(v)\\
&+ (T(u)\,S(w) - T(w)\,S(u))\,R(v) - (T(u)\,S(v) - T(v)\,S(u))\,R(w)\\
&= 2\,T(w)\,S(v)\,R(u) + 2\,T(v)\,S(u)\,R(w) + 2\,T(u)\,S(w)\,R(v)\\
&- 2\,T(v)\,S(w)\,R(u) - 2\,T(w)\,S(u)\,R(v) - 2\,T(u)\,S(v)\,R(w)\\
&= 2\ \det\begin{pmatrix} T(w) & S(w) & R(w)\\ T(v) & S(v) & R(v)\\ T(u) & S(u) & R(u)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und folglich verschwinden auch im 3-fachen Produkt von 1-Formen alle Faktoren. Dies ist der Grund für die Wahl des Faktors $\frac{(k+i)!}{k!i!}$ bzw. $\frac{1}{k!i!}$, siehe auch (1) in (38.6). Analog zu obiger Formel für $T\wedge S$ können wir auch direkt ein Hackprodukt mehrerer multilinearer alternierender Funktionale definieren. Beachte noch, daß

$$S\wedge T = (-1)^{ki} T\wedge S,$$

denn

$$\begin{aligned}
&(S\wedge T)(v_1,\dots,v_{k+i}) =\\
&= \frac{1}{k!i!}\sum_\pi \operatorname{sgn}(\pi)\cdot T(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})\cdot S(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+i)})\\
&= \frac{1}{k!i!}\sum_{\pi'} \operatorname{sgn}(\pi'\circ\sigma)\cdot S(v_{\pi'(1)},\dots,v_{\pi'(i)})\cdot T(v_{\pi'(i+1)},\dots,v_{\pi'(i+k)})\\
&= (T\wedge S)(v_1,\dots,v_{k+i}) =
\end{aligned}$$

wobei $\pi = \pi'\circ\sigma$ und σ jene Permutation ist, welche den Block $(1,\dots,i)$ mit $(i+1,\dots,i+k)$ vertauscht und Vorzeichen $(-1)^{ij}$ hat.

38.5 Lemma (Das äußere Produkt eines Vektorraums). *Es sei das k-fache äußere Produkt der Vektorräume E definiert durch* $\bigwedge^k E := L^k_{Alt}(E^*,\mathbb{R})$ *und* $E\times\ldots\times E\to\bigwedge^k E\subseteq\bigotimes^k E = L^k(E^*,\mathbb{R})$ *sei die folgende alternierende, k-lineare Abbildung:*

$$\begin{aligned}
\wedge : (v_1,\dots,v_k) &\mapsto v_1\wedge\cdots\wedge v_k \quad \textit{mit}\\
(v_1\wedge\cdots\wedge v_k)(w^1,\dots,w^k) &:= \sum_\pi \operatorname{sgn}(\pi)\; w^{\pi(1)}(v_1)\cdot\dots\cdot w^{\pi(k)}(v_k)\\
&= k!\,\operatorname{alt}(v_1\otimes\cdots\otimes v_k)(w^1,\dots,w^k).
\end{aligned}$$

Das äußere Produkt löst folgendes universelles Problem:

$$\begin{tikzcd} E\times\ldots\times E \arrow[rr, "\wedge"] \arrow[dr, "k\text{-linear und alternierend}"'] & & \bigwedge^k E \arrow[dl, dotted, "\text{linear}"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

Ist $\{e_i\}_{i=1}^m$ *eine Basis von* E *(also* $m=\dim E$*), dann ist* $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}: 1\le i_1<\cdots<i_k\le m\}$ *eine Basis von* $\bigwedge^k E$ *(also ist* $\dim\bigwedge^k E=\binom{m}{k}$*). Ist* $k=\dim E$*, so erzeugt* $e_1\wedge\cdots\wedge e_k$ *ganz* $\bigwedge^k E$ *und*

$$(e_1\wedge\cdots\wedge e_k)(w^1,\ldots,w^k)=\sum_\pi \operatorname{sgn}\pi\; w_1^{\pi(1)}\cdot\ldots\cdot w_k^{\pi(k)}=\det(w^1,\ldots,w^k).$$

Beweis. Es ist $\wedge: E\times\ldots\times E\to\bigwedge^k E$ durch $E\times\ldots\times E\xrightarrow{\otimes}\bigotimes^k E\xrightarrow{k!\,\mathrm{alt}}\bigwedge^k E$ gegeben, folglich bildet $(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k})_{i_1<\cdots<i_k}$ ein Erzeugendensystem von $\bigwedge^k E=L^k_{Alt}(E;\mathbb{R})$.
Es ist auch linear unabhängig, denn für aus $\sum_{i_1<\cdots<i_k}\mu^{i_1,\ldots,i_k}\,e^1_{i_1}\wedge\cdots\wedge e^k_{i_k}=0$ folgt durch Anwenden auf $(e_1^{j_1},\ldots,e_k^{j_k})$ mit $j_1<\cdots<j_k$ die Gleichung

$$\begin{aligned}0&=\Big(\sum_{i_1<\cdots<i_k}\mu^{i_1,\ldots,i_k}\;e^1_{i_1}\wedge\cdots\wedge e^k_{i_k}\Big)(e_1^{j_1},\ldots,e_k^{j_k})\\&=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\mu^{i_1,\ldots,i_k}\;\big(e^1_{i_1}\wedge\cdots\wedge e^k_{i_k}\big)(e_1^{j_1},\ldots,e_k^{j_k})\\&=\mu^{j_1,\ldots,j_k}\end{aligned}$$

Folglich läßt sich jede alternierende multilineare Abbildung $\mu: E\times\ldots\times E\to F$ auf eine eindeutige Weise zu einer lineare Abbildung $\tilde\mu:\bigwedge^k E\to F$ durch

$$\tilde\mu(e^1_{i_1}\wedge\cdots\wedge e^k_{i_k}):=\mu(e^1_{i_1},\ldots,e^k_{i_k})$$

fortsetzen, sodaß das angegebene Dreieck kommutiert. □

38.6 Bemerkungen

1. Es gelten die folgenden Identitäten:

$$L^k_{Alt}(E,F)\cong L(\bigwedge^k E,F);\quad (\bigwedge^k E)^*\cong L^k_{Alt}(E,\mathbb{R})\cong L^k_{Alt}(E^{**},\mathbb{R})\cong\bigwedge^k E^*;$$

2. Zu jeder linearen Abbildung $T: E\to F$ existiert eine durch folgendes Diagramm eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\bigwedge^k T:\bigwedge^k E\to\bigwedge^k F$:

$$\begin{tikzcd} E\times\ldots\times E \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "T\times\ldots\times T"'] & \bigwedge^k E \arrow[d, dotted, "\bigwedge^k T"'] \\ F\times\ldots\times F \arrow[r, "\wedge"] & \bigwedge^k F \end{tikzcd}$$

Damit wird $\bigwedge^k$ zu einen Funktor. In der Tat ist $\bigwedge^k T$ auf der Basis $(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})$ wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}\bigwedge^k T(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) &= T(e_{i_1}) \cdot \dots \cdot T(e_{i_k}) \\ &= \sum_{j_1} T_{i_1}^{j_1} f_{j_1} \cdot \dots \cdot \sum_{j_k} T_{i_k}^{j_k} f_{j_k} \\ &= \sum_{j_1,\dots,j_k} T_{i_1}^{j_1} \cdot \dots \cdot T_{i_k}^{j_k}\, f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_k} \\ &= \sum_{j_1<\dots<j_k} \sum_{\pi} T_{i_1}^{j_{\pi(1)}} \cdot \dots \cdot T_{i_k}^{j_{\pi(k)}}\, f_{j_{\pi(1)}} \wedge \cdots \wedge f_{j_{\pi(k)}} \\ &= \sum_{j_1<\dots<j_k} \det(T_{i_s}^{j_r})_{r,s}\, f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_k}.\end{aligned}$$

3. Der Raum $\bigwedge E := \bigoplus_{i=0}^m \bigwedge^i E$ ist eine graduiert-kommutative assoziative Algebra mit $1 \in \bigwedge^0 E := \mathbb{R}$, die sogenannte Äussere Algebra über E. Dabei heißt eine graduierte Algebra $A = \bigoplus_k A_k (k \in N_0)$ kommutativ, falls: $a \in A_k$, $b \in A_i \Rightarrow a \cdot b = (-1)^{ki} b \cdot a$. Es ist $\dim(\bigwedge E) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} = 2^m$.

39. Vektorbündel-Konstruktionen

39.1 Definition (Tensorfelder und Differentialformen)

Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Als Vektorraum E verwenden wir nun den Tangentialraum T_xM von M bei x. Dann ist $E^* = (T_xM)^*$, und wir bilden das Tensorprodukt

$$\underbrace{T_xM \otimes \cdots \otimes T_xM}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(T_xM)^* \otimes \cdots \otimes (T_xM)^*}_{q\text{-mal}} = L^{p+q}(T_x^*M, \dots, T_xM; \mathbb{R}).$$

Die Elemente dieses Vektorraums bezeichnet man als p-fach kontravariante, q-fach kovariante Vektoren oder Tensoren. Eine Basis von T_xM ist gegeben durch $(\frac{\partial}{\partial u^i})_{i=1}^m$, wobei $(u^1, \dots, u^m)$ lokale Koordinaten um x von M sind. Die duale Basis von $(T_xM)^*$ haben wir mit $(du^i)_{i=1}^m$ bezeichnet. Nach (38.3) erhalten wir als Basis des Tensorprodukts:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_p}} \otimes du^{j_1} \otimes \cdots \otimes du^{j_q}\right)_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q=1,\dots,m}$$

Analog bilden wir $\Lambda^k(T_xM)^* \cong L^k_{alt}(T_xM, \mathbb{R})$. Die Elemente diese äußeren Produktes nennt man k-Formen und eine Basis bildet

$$(du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_k})_{i_1<\dots<i_k}.$$

Lassen wir nun noch den Punkt $x \in M$ variieren, so können wir die Abbildungen

$$\omega : M \ni x \mapsto \omega(x) \in \underbrace{T_xM \otimes \cdots \otimes T_xM}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(T_xM)^* \otimes \cdots \otimes (T_xM)^*}_{q\text{-mal}}$$

betrachten. Diese heißen p-fach kontravariante und q-fach kovariante Tensorfelder.

Eine Abbildung

$$\omega : M \ni x \mapsto \omega(x) \in \Lambda^k(T_xM)^*$$

heißt DIFFERENTIALFORM VOM GRAD k.

Um von der Glattheit eines Tensorfelds (oder einer Differentialform) sprechen zu können sollten wir die Familie der Vektorräume

$$\Big(\underbrace{T_xM \otimes \cdots \otimes T_xM}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(T_xM)^* \otimes \cdots \otimes (T_xM)^*}_{q\text{-mal}}\Big)_{x\in M}$$

zu einer Mannigfaltigkeit oder besser gleich zu einem Vektorbündel über M machen.

Wir gehen dabei wie beim Tangentialbündel und den daraus konstruierten Kotangentialbündel vor:

39.2 Direkte Summe von Vektorbündel

Seien $E \xrightarrow{p}$ und $F \xrightarrow{q}$ zwei Vektorbündel über M sowie φ^E eine Trivialisierung von E über $U \subset M$ und φ^F eine solche von F über dem o.B.d.A. gleichen U. Mit $\psi^E : U \cap V \to GL(\mathbb{R}^k)$ und $\psi^F : U \cap V \to GL(\mathbb{R}^l)$ bezeichnen wir die Transitionsfunktionen zu je zwei solcher Vektorbündelkarten über U und V. Wir wollen nun die disjunkte Vereinigung $E \oplus F := \bigsqcup_{x\in M}(E_x \oplus F_x)$ zu einem Vektorbündel machen. Als Vektorbündelkarten verwenden wir faserweise

$$\varphi_x^{E\oplus F} := \varphi_x^E \oplus \varphi_x^F : \mathbb{R}^{k+l} \cong \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l \to E_x \oplus F_x.$$

Die Transitionsfunktionen $\psi^{E\oplus F} : U \cap V \to GL(\mathbb{R}^{k+l})$ sind dann durch

$$\psi^{E\oplus F}(x) := \psi^E(x) \oplus \psi^F(x) \in GL(\mathbb{R}^k) \times GL(\mathbb{R}^l)$$

gegeben. Als Matrix ist $\psi^{E\oplus F}(x)$ gerade $\begin{pmatrix}\psi^E(x) & 0\\ 0 & \psi^F(x)\end{pmatrix}$. Also hat $\psi^{E\oplus F}$ wirklich Werte in $Gl(\mathbb{R}^{k+l})$ und ist glatt. Somit ist $E \oplus F \to M$ ein Vektorbündel, die sogenannte WHITNEY-SUMME von E und F.

39.3 Tensorprodukt von Vektorbündel

Analog zur direkten Summe machen wir nun die disjunkte Vereinigung $E \otimes F := \bigsqcup_{x\in M}(E_x \otimes F_x)$ zu einem Vektorbündel, dem sogenannten TENSORPRODUKT von E und F. Als Vektorbündelkarten verwenden wir faserweise

$$\varphi_x^{E\otimes F} := \varphi_x^E \otimes \varphi_x^F : \mathbb{R}^{kl} \cong \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l \to E_x \otimes F_x.$$

Die Transitionsfunktionen $\psi^{E\otimes F} : U \cap V \to GL(\mathbb{R}^{kl})$ sind dann durch

$$\psi^{E\otimes F}(x) := \psi^E(x) \otimes \psi^F(x) \in GL(\mathbb{R}^{kl}) \subset L(\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l)$$

gegeben. Als Matrix ist $\psi^{E\otimes F}(x)$ gerade $(a_i^r b_j^s)_{(i,j),(r,s)}$, wobei (a_i^r) die Matrix von $\psi^E(x)$ und (b_j^s) die Matrix von $\psi^F(x)$ sei. Ist nämlich $(e_i)_{i=1}^k$ und $(f_j)_{j=1}^l$ die Standardbasen im $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^l$ und (a_i^r) sowie (b_j^s) die Matrixdarstellungen von $A \in L(\mathbb{R}^k)$

und $B \in L(\mathbb{R}^l)$, so ist $A \otimes B : \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l$ gegeben durch $(A \otimes B)(v \otimes w) = A(v) \otimes B(w)$. Auf die Standardbasis $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ angewandt erhalten wir also:

$$A(e_i) \otimes B(f_j) = \left(\sum_r a_i^r e_r\right) \otimes \left(\sum_s b_j^s f_s\right) = \sum_{r,s} a_i^r b_j^s \, e_r \otimes f_s.$$

Also hat $\psi^{E\otimes F}$ wirklich Werte in $GL(\mathbb{R}^{kl})$ und ist glatt.

39.4 Äußeres Produkt eines Vektorbündels

Schließlich machen wir die disjunkte Vereinigung $\Lambda^p E := \bigsqcup_{x\in M} \bigwedge^p E_x$ zu einem Vektorbündel, dem sogenannten p-FACHEN ÄUSSEREN PRODUKT von E. Als Vektorbündelkarten verwenden wir faserweise

$$\varphi_x^{\Lambda^p E} := \Lambda^p(\varphi_x^E) : \mathbb{R}^{\binom{k}{p}} \cong \Lambda^p \mathbb{R}^k \to \Lambda^p E_x.$$

Die Transitionsfunktionen $\psi^{\Lambda^p E} : U \cap V \to GL(\mathbb{R}^{\binom{k}{p}})$ sind dann durch

$$\psi^{\Lambda^p E}(x) := \Lambda^p(\psi^E(x)) \in GL(\mathbb{R}^{\binom{k}{p}}) \subset L(\Lambda^p\mathbb{R}^k, \Lambda^p\mathbb{R}^k)$$

gegeben. Wie zuvor zeigt man wieder, daß die Transitionsfunktionen wirklich Werte in $GL(\mathbb{R}^{\binom{k}{p}})$ haben und glatt sind.

Allgemeiner hat man folgende Konstruktion:

39.5 Theorem (Funktorielle Vektorbündel Konstruktionen).
Es sei $\mathcal{F}$ eine Zuordnung, die jeder Familie von $(k+i)$ endlichdimensionalen Vektorräumen einen endlichdimensionalen Vektorraum zuweist und die FUNKTORIELL *ist.*

Funktoriell bedeutet, daß jedem $(k+i)$-Tupel linearer Abbildungen
$T_j : F_j \to E_j$ für $j \le k$ "kontravariant in den vorderen Variablen"
$T_j : E_j \to F_j$ für $k < j$ "kovariant in den hinteren Variablen"
eine lineare Abbildung

$$\mathcal{F}(T_1, \dots, T_{k+i}) : \mathcal{F}(E_1, \dots, E_{k+i}) \to \mathcal{F}(F_1, \dots, F_{k+i})$$

zugeordnet wird, die mit Komposition und Identität verträglich ist und glatt von $T_1, \dots, T_{k+i}$ abhängt.

Dann ist für $(k+i)$ Vektorbündel $p_j : E_j \to M$ eine natürliche Vektorbündel-Struktur auf $\mathcal{F}(E_1, \dots, E_{k+i}) := \bigsqcup_x \mathcal{F}(E_1|_x, \dots, E_{k+i}|_x)$ gegeben.

Ein Beispiel eines solchen Funktors ist die direkte Summe $\oplus$; der auf Vektorbündel angewandt die Whitney-Summe liefert.

Ein weiters ist der Dualraum-Funktor, der auf das Tangentenbündel $\pi : TM \to M$ angewandt das Kotangentialbündel $T^*M = \bigsqcup_x (T_xM)^* \to M$ liefert.

Andere Beispiele sind das Tensorprodukt und das äußere Produkt sowie Kombinationen von ihnen, wie $\bigwedge^k T^*M = L^k_{Alt}(TM, \mathbb{R}) = (\bigwedge^k TM)^*$.

Beweis. Die Vektorbündelkarten $\mathcal{F}(\psi_1,\dots,\psi_{k+i})$ werden aus jenen für E_i durch folgende Formel gewonnen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\psi_1,\dots,&\psi_{k+i})|_x = \\
&= \mathcal{F}\Big((\psi_1)_x^{-1},\dots,(\psi_k)_x^{-1},(\psi_{k+1})_x,\dots,(\psi_{k+i})_x\Big) \\
&= \mathcal{F}(\psi_1,\dots,\psi_{k+i})|_x : \mathcal{F}(\mathbb{R}^{N_1},\dots,\mathbb{R}^{N_{k+i}}) \to \mathcal{F}(E_1|_x,\dots,E_{k+i}|_x)
\end{aligned}$$

Die Transitionsfunktionen werden durch folgende Abbildungsfolge festgelegt:

$$\begin{aligned}
(\psi_1|_x,\dots,\psi_{k+i}|_x) &: U\cap V \to GL(\mathbb{R}^{N_1})\times\ldots\times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) \\
(\mathrm{inv},\dots;\mathrm{id},\dots) &: GL(\mathbb{R}^{N_1})\times\ldots\times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) \to \\
&\to GL(\mathbb{R}^{N_1})\times\ldots\times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) \\
&: GL(\mathbb{R}^{N_1})\times\ldots\times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) \to \\
&\to GL\Big(\mathcal{F}\big(\mathbb{R}^{N_1},\dots,R^{N_{k+i}}\big)\Big) \qquad \square
\end{aligned}$$

40. Differentialformen

40.1 Definition (glatte Tensorfelder und Differentialformen)

Der VEKTORRAUM DER GLATTEN p-FACH KONTRAVARIANT UND q-FACH KOVARIANTEN TENSORFELDER oder kurz p-q-TENSORFELDER, d.h. der glatten Schnitte des Vektorbündels

$$\underbrace{TM\otimes\cdots\otimes TM}_{p\text{-mal}}\otimes\underbrace{(TM)^*\otimes\cdots\otimes(TM)^*}_{q\text{-mal}}$$

wird auch mit $\mathcal{T}_p^q(M)$ bezeichnet.
Lokal läßt sich jedes Tensorfeld Φ als

$$\Phi = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_p\\ j_1,\dots,j_q}} \Phi^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial u^{i_p}}\otimes du^{j_1}\otimes\cdots\otimes du^{j_q}$$

schreiben. Und wir wissen, daß Φ genau dann glatt, wenn alle Komponenten $\Phi^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}$ glatte reell-wertige Funktionen sind. Insbesondere sind die 0-0-Tensorfelder gerade die reell-wertigen Funktionen, die 1-0-Tensorfelder die Vektorfelder und die 0-1-Tensorfelder die 1-Formen.

Der VEKTORRAUM DER GLATTEN DIFFERENTIALFORMEN VOM GRAD p, d.h. glatten Schnitte des Vektorbündels $\Lambda^p(TM)^*$ wird mit $\Omega^p(M)$ bezeichnet. Diesen Raum können wir auch anders beschreiben:

$$\begin{aligned}
\Omega^p(M) &:= \Gamma(\bigwedge^p(TM)^*\to M) \\
&\cong \Gamma((\bigwedge^p TM)^*\to M) \\
&\cong \{\omega : \bigwedge^p TM\to\mathbb{R} : \omega_x\in L(\bigwedge^p T_xM,\mathbb{R})\,\forall\, x\} \\
&\cong \{\omega : \oplus^p TM\to\mathbb{R} : \omega_x\in L^p_{Alt}(T_xM,\mathbb{R})\,\forall\, x\}
\end{aligned}$$

Der Raum $\Omega^0(M)$ der 0-Formen stimmt mit $C^\infty(M,\mathbb{R})$ überein. Jede Differentialform ω vom Grad k läßt sich lokal als

$$\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} \omega_{i_1,\dots,i_k}\, du^{i_1}\wedge\dots\wedge du^{i_k}$$

schreiben. Wieder gilt, daß ω glatt ist, wenn alle seine Koordinatenfunktionen $\omega_{i_1,\dots,i_k}$ glatt sind.
Für die Koeffizienten $\omega_{i_1,\dots,i_k}$ ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
&(du^{i_1}\wedge\dots\wedge du^{i_k})\left(\frac{\partial}{\partial u^{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial u^{j_k}}\right) = \\
&\quad = \sum_\pi \operatorname{sgn}\pi\, du^{i_1}\left(\frac{\partial}{\partial u^{j_{\pi(1)}}}\right)\cdot\dots\cdot du^{i_k}\left(\frac{\partial}{\partial u^{j_{\pi(k)}}}\right) \\
&\quad = \begin{cases} \operatorname{sgn}\pi & \text{falls eine Permutation } \pi \text{ existiert mit } i_t = j_{\pi(t)}\ \forall\, t \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}
\end{aligned}$$

folgende Formel für $j_1<\dots<j_k$:

$$\begin{aligned}
&\omega\left(\tfrac{\partial}{\partial u^{j_1}},\dots,\tfrac{\partial}{\partial u^{j_k}}\right) = \\
&\quad = \Big(\sum_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1\dots i_k}\cdot du^{i_1}\wedge\dots\wedge du^{i_k}\Big)\left(\tfrac{\partial}{\partial u^{j_1}},\dots,\tfrac{\partial}{\partial u^{j_k}}\right) = \omega_{j_1\dots j_k}.
\end{aligned}$$

40.2 Bemerkung

Wegen

$$\begin{aligned}
&\underbrace{T_xM\otimes\dots\otimes T_xM}_{p\text{-mal}}\otimes\underbrace{(T_xM)^*\otimes\dots\otimes(T_xM)^*}_{q\text{-mal}}\cong \\
&\qquad\qquad \cong L\big(\underbrace{(T_xM)^*,\dots,(T_xM)^*}_{p\text{-mal}},\underbrace{T_xM,\dots,T_xM}_{q\text{-mal}},\mathbb{R}\big)
\end{aligned}$$

können wir ein p-q-Tensorfeld

$$\Phi = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_p\\ j_1,\dots,j_q}} \Phi^{i_1,\dots,i_p}_{j_1\dots,j_q}\,\tfrac{\partial}{\partial u^{i_1}}\otimes\dots\otimes\tfrac{\partial}{\partial u^{i_p}}\otimes du^{j_1}\otimes\dots\otimes du^{j_q}$$

punktweise auf q Tangentialvektoren $\xi_1,\dots,\xi_q\in T_xM$ und p Kotangentialvektoren $\omega^1,\dots,\omega^p$ anwenden:

$$
\begin{aligned}
&\Phi(\omega^1,\dots,\omega^p,\xi_1,\dots,\xi_q)=\\
&=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_p\\ j_1,\dots,j_q}}\Phi^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\otimes\dots\otimes du^{j_q}\left(\sum_{r_1}\omega^1_{r_1}du^{r_1},\dots,\sum_{s_q}\xi^{s_q}_q\frac{\partial}{\partial u^{s_q}}\right)\\
&=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_p\\ j_1,\dots,j_q\\ r_1,\dots,r_p\\ s_1,\dots,s_q}}\Phi^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}\cdot\omega^1_{r_1}\delta^{r_1}_{i_1}\cdot\dots\cdot\xi^{s_q}_q\delta^{j_q}_{s_q}\\
&=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_p\\ j_1,\dots,j_q}}\Phi^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}\cdot\omega^1_{i_1}\cdot\dots\cdot\omega^p_{i_p}\cdot\xi^{j_1}_1\cdot\dots\cdot\xi^{j_q}_q.
\end{aligned}
$$

Satz (Tensorfelder als $C^\infty(M,\mathbb{R})$-multilineare Abbildungen).
Obige Abbildung liefert einen linearen Isomorphismus des Raums $\mathcal{T}^q_p$ der glatten p-q-Tensorfelder mit dem Raum $L^k_{C^\infty(m,\mathbb{R})}(\Omega^1(M),\dots,\mathfrak{X}(M);C^\infty(M,\mathbb{R}))$ der $C^\infty(M,\mathbb{R})$-multilinearen Abbildungen.

Beweis. Offensichtlich wirkt jedes Tensorfeld Φ auf 1-Formen $\omega^1,\dots,\omega^p\in\Omega^1(M)$ und auf Vektorfelder $\xi_1,\dots,\xi_q\in\mathfrak{X}(M)$ als $C^\infty(M,\mathbb{R})$-lineare Abbildung, durch

$$\Phi(\omega^1,\dots,\omega^p,\xi_1,\dots,\xi_q)(x):=\Phi_x(\omega^1(x),\dots,\omega^p(x),\xi_1(x),\dots,\xi_q(x))$$

und wegen der obigen lokalen Formel

$$\Phi(\omega^1,\dots,\omega^p,\xi_1,\dots,\xi_q)=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_p\\ j_1,\dots,j_q}}\Phi^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}\cdot\omega^1_{i_1}\cdot\dots\cdot\omega^p_{i_p}\cdot\xi^{j_1}_1\cdot\dots\cdot\xi^{j_q}_q$$

liegt $\Phi(\omega^1,\dots,\omega^p,\xi_1,\dots,\xi_q)\in C^\infty(M,\mathbb{R})$.
Umgekehrt sei $\Phi:\Omega^1(M)\times\ldots\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M,\mathbb{R})$ eine $C^\infty(M,\mathbb{R})$-multilineare Abbildung. Falls eines der Vektorfelder oder 1-Formen σ lokal um $x\in M$ verschwindet, so auch $\Phi(\omega^1,\dots,\omega^p,\xi_1,\dots,\xi_q)$, denn sei $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ so gewählt, daß $f=1$ auf dem Träger jenes Schnittes σ und $f(x)=0$ gilt. Dann ist $f\cdot\sigma=\sigma$ und wegen der $C^\infty(M,\mathbb{R})$-Linearität ist $\Phi(\omega^1,\dots,\omega^p,\xi_1,\dots,\xi_q)(x)=f(x)\cdot\Phi(\omega^1,\dots,\omega^p,\xi_1,\dots,\xi_q)(x)=0$.
Folglich erhalten wir die lokale Formel

$$\Phi(\omega^1,\dots,\omega^p,\xi_1,\dots,\xi_q)=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_p\\ j_1,\dots,j_q}}\Phi^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}\cdot\omega^1_{i_1}\cdot\dots\cdot\omega^p_{i_p}\cdot\xi^{j_1}_1\cdot\dots\cdot\xi^{j_q}_q,$$

deren rechte Seite an der Stelle x nur von Wert der 1-Formen und Vektorfelder an dieser Stelle abhängt. Also definiert $\Phi_x(\omega_1,\dots,\xi^p):=\Phi(\omega^1,\dots,\omega^p,\xi_1,\dots,\xi_q)(x)$ ein glattes Tensorfeld, das gesuchte inverse Bild zu Φ. □

40.3 Satz (Differentialformen als $C^\infty(M,\mathbb{R})$-multilineare Abbildungen).
Es existiert ein linearer Isomorphismus von $\Omega^k(M)$ mit $\Big\{\omega:\mathfrak{X}(M)\times\ldots\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M,\mathbb{R}):\omega$ ist k-linear alternierend und $C^\infty(M,\mathbb{R})$-homogen$\Big\}$.

Beweis. ($\Rightarrow$) Offensichtlich ist $\omega(\xi_1,\dots,\xi_k)|_p = \omega_p(\xi_1|_p,\dots,\xi_k|_p)$ k-linear und alternierend.

Die Abbildung ω ist aber auch $C^\infty(M,\mathbb{R})$-homogen:

$$\begin{aligned}\omega(f\,\xi_1,\dots,\xi_k)|_p &= \omega_p(f_p\,\xi_1|_p,\dots,\xi_k|_p) = f(p)\,\omega_p(\xi_1|_p,\dots,\xi_k|_p)\\ &= f\cdot\omega(\xi_1,\dots,\xi_k)|_p\end{aligned}$$

Weiters ist $M \xrightarrow{(\xi_1,\dots,\xi_k)} TM\oplus\dots\oplus TM \xrightarrow{\omega} \mathbb{R}$ glatt, also $\omega(\xi_1,\dots,\xi_k)\in C^\infty(M,\mathbb{R})$.

($\Leftarrow$) Sei $\omega : \mathfrak{X}(M)\times\ldots\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M,\mathbb{R})$ mit obigen Eigenschaften. Es ist z.z., daß $\omega(\xi_1,\dots,\xi_k)|_p$ nur von $\xi_1|_p,\dots,\xi_k|_p$ abhängt, denn dann können wir definieren: $\omega_p(\xi_1|_p,\dots,\xi_k|_p) := \omega(\xi_1,\dots,\xi_k)|_p$.

Sei $\xi_1 = 0$ lokal um p, sei $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ mit $f(p)=0$ und $f=1$ dort wo $\xi_1\neq 0$. Dann gilt $f\cdot\xi_1=\xi_1$ und somit wie zuvor

$$\omega(\xi_1,\dots,\xi_k)|_p = \omega(f\xi_1,\dots,\xi_k)|_p = f(p)\omega(\xi_1,\dots,\xi_k)|_p = 0.$$

Sei weiters $\xi_1 = \sum_{i=1}^m \xi_1^i(\frac{\partial}{\partial x^i})$ lokal. Dann gilt

$$\omega(\xi_1,\dots,\xi_k) = \omega\Big(\sum_i \xi_1^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big),\dots,\xi_k\Big) = \sum_i \xi_1^i\,\omega\Big(\frac{\partial}{\partial x^i},\dots,\xi_k\Big)$$

und da $\xi_1|_p = 0$ gilt $\xi_1^i|_p = 0\ \forall\, i$ und somit $\omega(\xi_1,\dots,\xi_k)|_p = 0$.

Sei $\omega = \sum \omega_I dx^I$ eine lokale Darstellung von ω, dabei ist $I=\{i_1<\dots<i_k\}$, $dx^I = dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$. Es ist $\omega_I(p) = \omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{i_k}})|_p$ glatt bei p, also ist $\omega\in\Omega^k(M)$. $\square$

41. Differentialformen auf Riemann MF

41.1 Tensorfelder auf Riemann-Mannigfaltigkeiten

Allgemein wissen wir, daß $\Omega^0(M) = C^\infty(M,\mathbb{R})$ ist. Sei E ein endlich dimensionaler Vektorraum mit innerem Produkt. Wir haben dann nach (32.1) einen Isomorphismus $\sharp : E \xrightarrow{\cong} E^*$ definiert durch $\sharp : v\mapsto\langle v,\cdot\rangle$. Sein Inverses bezeichnen wir mit $\flat := \sharp^{-1}$. Sei (e_i) eine Orthonormalbasis von E und (e^i) die duale Basis von E^*, dann ist:

$$\sharp : x = \sum_i x^i e_i \in E \mapsto \sum_i x^i e^i \in E^*.$$

Sei (M,g) eine Riemann-Mannigfaltigkeit mit dem zugehörigen Tangentialraum $\sharp : T_xM \cong (T_xM)^*$. Eine Basis im Tangentialraum ist gegeben durch $\frac{\partial}{\partial u^i}$, diese wird nach (32.1) abgebildet auf $\sharp(\frac{\partial}{\partial u^i}) = \sum_j g_{j,i}\,du^j$. Und allgemeiner wird $\xi\in T_xM$ wie folgt abgebildet:

$$\sharp : \xi = \sum_i \xi^i\frac{\partial}{\partial u^i}\in T_xM \mapsto \omega = \sum_i \omega_i du^i \in (T_xM)^*.$$

wobei $\xi^i = \sum_j g^{i,j}\omega_j$, $\omega_i = \sum_j g_{i,j}\xi^j$ und $g_{i,j} = \langle\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\rangle$ sind, und $(g^{i,j}) = (g_{i,j})^{-1}$ ist. Es folgt, daß auf kanonische Weise $TM\cong T^*M$ ist, und somit der Raum der Vektorfelder $\mathfrak{X}(M)$ kanonisch isomorph zum Raum der 1-Formen $\Omega^1(M)$ ist.

Allgemeiner gilt:

$$\mathcal{T}_p^q(M) \cong \mathcal{T}_{p+q}^0(M) \cong \mathcal{T}_0^{p+q}(M)$$

41.2 Volumsform

Sei E ein endlich dimensionaler, orientierter Vektorraum mit innerem Produkt. Falls $(e_1,\dots,e_m)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von E ist, so definieren wir $\det \in L^m_{Alt}(E;\mathbb{R})$ durch $\det(e_1,\dots,e_m) = 1$. Um zu zeigen, daß diese Definition nicht von der gewählten Basis abhängt wählen wir beliebige Vektoren $g_i \in E$ und betrachten die Abbildung $A : E \to E$, welche e_j auf $g_j := \sum_i a^i_j e_i$ abbildet. Dann ist

$$\begin{aligned}
\det(g_1,\dots,g_m) &= \det\left(\sum_{j_1} a^{j_1}_1 e_{j_1},\dots,\sum_{j_m} a^{j_m}_m e_{j_m}\right)\\
&= \sum_{j_1,\dots,j_m} a^{j_1}_1\cdot\ldots\cdot a^{j_m}_m \underbrace{\det(e_{j_1},\dots,e_{j_m})}_{\substack{=0 \text{ falls } j_1,\dots,j_m \text{ keine}\\ \text{Permutation von } 1,\dots,m}}\\
&= \sum_{j \text{ Permutation}} a^{j(1)}_1\cdot\ldots\cdot a^{j(m)}_m \operatorname{sgn}(j) \underbrace{\det(e_1,\dots,e_m)}_{=1}\\
&= \det(a^j_i)_{i,j}.
\end{aligned}$$

Falls also $(g_i)_i$ insbesonders eine andere positiv orientierte Orthonormalbasis ist, so ist $[A] \in SO(n)$, also $1 = \det[A] = \det(g_1,\dots,g_m)$.
Da wir diese Konstruktion auf den Tangentialraum einer orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit anwenden wollen (dort aber nicht eine orthonormal-Basis) sondern nur eine (positiv orientierte) Basis $(\frac{\partial}{\partial u^j})_j$ gegeben haben, benötigen wir auch für so eine Basis (g_j) eine Formel für die Determinante: Dazu betrachten wir wieder die inneren Produkte

$$g_{i,j} := \langle g_i, g_j\rangle = \left\langle \sum_k a^k_i e_k, \sum_l a^l_j e_l \right\rangle = \sum_{k,l} a^k_i a^l_j \underbrace{\langle e_k, e_l\rangle}_{\delta_{k,l}} = \sum_k a^k_i a^k_j$$

und erhalten $(g_{i,j})_{i,j} = [A\cdot A^t]$ und weiters

$$\det(g_{i,j})_{i,j} = \det([A]\cdot[A]^t) = (\det[A])^2$$

und schließlich (wegen $\det[A] > 0$)

$$\det(g_1,\dots,g_m) = \det[A] = \sqrt{\det(g_{i,j})_{i,j}} =: \sqrt{G}.$$

Für jede orientierte (siehe (34.3)) Riemann-Mannigfaltigkeit (M,g) ist $\det \in L^m_{\text{alt}}(T_xM,\mathbb{R})$ und wir definieren die Volumsform $\operatorname{vol}_M \in \Omega^m(M)$ der Mannigfaltigkeit durch

$$\operatorname{vol}_M(x) := \det \in L^m_{\text{alt}}(T_xM;\mathbb{R}).$$

Diese Volumsform wollen wir mittels lokaler Koordinaten $(u^1,\dots,u^m)$ berechnen. Es bilden die $g_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$ eine Basis in T_xM, von der wir annehmen dürfen, daß sie positiv orientiert ist, wenn wir ein Orientierungs-erhaltende Karte $\varphi = (u^1,\dots,u^m)^{-1}$ verwenden. Es ist $\operatorname{vol} = \operatorname{vol}_{1,\dots,m} \cdot du^1\wedge\ldots\wedge du^m$ mit

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(\tfrac{\partial}{\partial u^1},\dots,\tfrac{\partial}{\partial u^m}) &= \left(\operatorname{vol}_{1,\dots,m}\cdot du^1\wedge\ldots\wedge du^m\right)(\tfrac{\partial}{\partial u^1},\dots,\tfrac{\partial}{\partial u^m})\\
&= \operatorname{vol}_{1,\dots,m}\cdot\sum_\pi \underbrace{du^1(\tfrac{\partial}{\partial u^{\pi(1)}})}_{\delta_{\pi(1),1}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{du^m(\tfrac{\partial}{\partial u^{\pi(m)}})}_{\delta_{\pi(m),m}} = \operatorname{vol}_{1,\dots,m},
\end{aligned}$$

da π die Identität sein muß, siehe auch (40.1). Wegen obiger Rechnung ist

$$\operatorname{vol}(\tfrac{\partial}{\partial u^1},\dots,\tfrac{\partial}{\partial u^m}) = \det(g_1,\dots,g_m) = \sqrt{G}$$
$$\text{mit } G := \det(g_{i,j})_{i,j} \text{ und } g_{i,j} := \langle g_i, g_j\rangle = g(\tfrac{\partial}{\partial u^i},\tfrac{\partial}{\partial u^j}).$$

Wir erhalten für orientierbare Riemann-Mannigfaltigkeiten folgenden Isomorphismus:

$$C^\infty(M,\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \Omega^m(M), \quad f \mapsto f\cdot \operatorname{vol}_M .$$

41.3 Skalare Produkt auf $\Omega(M)$

Dazu betrachten wir zuerst einen orientierten, m-dimensionalen Vektorraum E. Seien die (e_i) eine positiv-orientierte Orthonormalbasis von E. Wir definieren ein skalares Produkt auf E^* indem wir fordern, daß die duale Basis (e^i) ebenfalls eine Orthonormalbasis sei. Auf $\bigotimes^k E$ definieren wir ein skalares Produkt indem wir fordern, daß die Basis $(e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_k})$ eine Orthonormalbasis sei und analog auf $\bigwedge^k E$ durch die Orthonormalbasis $(e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k})$. Diese Definition ist von der Basis unabhängig, denn das skalare Produkt auf E^* ist durch folgende Formel gegeben:

$$\langle x^*, y^*\rangle_{E^*} := \langle \flat x^*, \flat y^*\rangle_E, \text{ da } \langle e^i, e^i\rangle_{E^*} = \langle e_i, e_j\rangle_E = \delta_{i,j}.$$

Auf $\bigotimes^k E$ ist das skalare Produkt analog gegeben durch:

$$\langle x_1\otimes\ldots\otimes x_k, y_1\otimes\ldots\otimes y_k\rangle_{\otimes^k E} := \langle x_1,y_1\rangle_E\cdot\ldots\cdot\langle x_k,y_k\rangle_E$$

Auf $\bigwedge^k E$ ist das skalare Produkt analog gegeben durch:

$$\begin{aligned}\langle x_1\wedge\ldots\wedge x_k, y_1\wedge\ldots\wedge y_k\rangle_{\bigwedge^k E} &:= \det\Big((\langle x_i,y_j\rangle_E)_{i,j}\Big)\\ &= \frac{1}{k!}\langle x_1\wedge\cdots\wedge x_k, y_1\wedge\cdots\wedge y_k\rangle_{\otimes^k E}.\end{aligned}$$

Achtung: Die Spur des skalaren Produkts von $\bigotimes^k E$ auf den Teilraum $\bigwedge^k E$ hat noch einen Faktor $k!$, denn $x_1\wedge\cdots\wedge x_k = k!\ \operatorname{alt}(x_1\otimes\cdots\otimes x_k) = \sum_\sigma \operatorname{sign}(\sigma)\, x_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(k)}$ und somit ist

$$\begin{aligned}&\langle x_1\wedge\cdots\wedge x_k, x_1\wedge\cdots\wedge x_k\rangle_{\otimes^k E} =\\ &\quad= \sum_{\sigma,\pi}\operatorname{sign}(\sigma)\ \operatorname{sign}(\pi)\ \langle x_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge x_{\sigma(k)}, x_{\pi(1)}\wedge\cdots\wedge x_{\pi(k)}\rangle_{\otimes^k E}\\ &\quad= \sum_{\sigma,\pi}\operatorname{sign}(\sigma)\ \operatorname{sign}(\pi)\ \langle x_{\sigma(1)}, x_{\pi(1)}\rangle\ldots\langle x_{\sigma(k)}, x_{\pi(k)}\rangle\\ &\quad= \sum_{\sigma,\pi\circ\sigma^{-1}}\operatorname{sign}(\sigma)\ \operatorname{sign}(\pi\circ\sigma^{-1})\ \langle x_{\sigma(1)}, x_{\pi(\sigma(1))}\rangle\ldots\langle x_{\sigma(k)}, x_{\pi(\sigma(k))}\rangle\\ &\quad= k!\sum_\pi \operatorname{sign}(\pi)\langle x_1, x_{\pi(1)}\rangle\ldots\langle x_k, x_{\pi(k)}\rangle.\end{aligned}$$

41.4 Definition (Hodge-Sternoperator)

Sei E ein orientierter m-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann hat $\bigwedge^k E$ Dimension $\binom{m}{k}$. Und somit ist $\bigwedge^k E \cong \bigwedge^{m-k} E$. Wir wollen nun einen Isomorphismus

$* : \bigwedge^k E \to \bigwedge^{m-k} E$ angeben, der nicht von der Wahl einer Basis abhängt. Dieser heißt Hodge-Sternoperator und ist durch folgende implizite Gleichung gegeben:

$$\eta \wedge (*\omega) = \langle \eta, \omega \rangle \cdot \det \text{ für } \eta, \omega \in \bigwedge^k E.$$

Um zu zeigen, daß dadurch wirklich ein linearer Operator eindeutig bestimmt ist wählen wir eine positiv orientierte Orthonormalbasis $(e^1, ..., e^m)$ in E.

Eine Basis von $\bigwedge^k E$ ist dann durch die Elemente $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ mit $i_1 < \dots < e_m$ und eine solche von $\bigwedge^{m-k} E$ dann durch die Elemente

$$e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^{i_1}} \wedge \dots \wedge \widehat{e^{i_k}} \wedge \dots \wedge e^m$$

gegeben. Wir wollen die Koeffizienten $\alpha_{j_1,\dots,j_m}$ des Bildes von $\omega = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ unter dem Sternoperator bestimmen:

$$*\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_m} \alpha_{j_1,\dots,j_m} \, e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^{j_1}} \wedge \dots \wedge \widehat{e^{j_k}} \wedge \dots \wedge e^m.$$

Dazu verwenden wir die implizite Gleichung mit

$$\eta := e^{l_1} \wedge \dots e^{l_k} \text{ für } l_1 < \dots < l_k$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
&\alpha_{l_1,\dots,l_m} \, e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_k} \wedge e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^{l_1}} \wedge \dots \wedge \widehat{e^{l_k}} \wedge \dots \wedge e^m = \\
&= \eta \wedge (*\omega) = \langle \eta, \omega \rangle \det \\
&= \underbrace{\langle e^{l_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e^{l_k}}, e^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e^{i_k}} \rangle}_{\delta^{(l_1,\dots,l_k),(i_1,\dots,i_k)}} \, e^1 \wedge \dots \wedge e^m.
\end{aligned}$$

Um das Hackprodukt auf der linken Seite auch in die natürliche Reihenfolge zu bekommen müssen wir zuerst e^{l_k} mit $e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^{j_1}} \wedge \dots \wedge \widehat{e^{j_k}}$ vertauschen und erhalten ein Vorzeichen $(-1)^{j_k - k}$, danach $e^{l_{k-1}}$ mit $e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^{j_1}} \wedge \dots \wedge \widehat{e^{j_{k-1}}}$ und erhalten ein Vorzeichen $(-1)^{j_{k-1}-k-1}$ u.s.w. und schließlich e^{l_1} mit $e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^{j_1}}$ mit $(-1)^{j_1 - 1}$ als resultierenden Vorzeichen. Also verschwinden alle $\alpha_{l_1,\dots,l_m}$ bis auf

$$\alpha_{i_1,\dots,i_m} = (-1)^{i_k - k} \cdot \dots \cdot (-1)^{i_1 - 1} = (-1)^{(\sum_{j=1}^k i_j) - k(k+1)/2}.$$

Wir wollen nun zeigen, daß $*$ bis auf ein Vorzeichen zu sich selbst invers ist. Sei $\omega = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \in \bigwedge^k E$ gegeben. Dann ist

$$*\omega = (-1)^{(\sum_{j=1}^k i_j) - k(k+1)/2} \, e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^{i_1}} \wedge \dots \wedge \widehat{e^{i_k}} \wedge \dots \wedge e^m$$

und

$$**\,\omega = (-1)^{1 + \dots + \widehat{i_1} + \dots + \widehat{i_k} + \dots + m - (m-k)(m-k+1)/2} \, (-1)^{i_1 + \dots + i_k - k(k+1)/2} \, e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$$

Die Berechnung des Vorzeichen ergibt: $(-1)^{k(m-k)}$, d.h. $* \circ * = (-1)^{k(m-k)} : \bigwedge^k E \to \bigwedge^{n-k} E \to \bigwedge^k E$. Dieses Vorzeichen its genau dann -1, wenn m gerade und k ungerade ist.

Der Hodge-Stern Operator ist eine Isometrie, wie man entweder durch die Wirkung auf einer orthonormal-Basis sofort sieht, oder wie aus

$$\langle *\alpha, *\beta \rangle \cdot \mathrm{vol}_M = *\alpha \wedge **\,\beta = (-1)^{k(m-k)} \; *\alpha \wedge \beta = \beta \wedge *\alpha = \langle \beta, \alpha \rangle \; \mathrm{vol}_M$$

folgt. Umgekehrt hätten wir auch die Isometrie-Eigenschaft von $*$ verwenden können um mit dieser Rechnung $* \circ * = (-1)^{k(m-k)}$ zu zeigen.
Für eine orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit (M, g) der Dimension m definieren wir den Hodge-Sternoperator $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{m-k}(M)$ durch $(*\omega)(x) := *(\omega(x))$.

41.5 Spezialfälle

($k = 0$)

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(M) \arrow[rr, "*", "\cong"'] \arrow[dr, equal] & & \Omega^m(M) \\
& C^\infty(M,\mathbb{R}) \arrow[ur, "\cong", "(_)\cdot \mathrm{vol}_M"'] &
\end{tikzcd}$$

Sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, dann ist $g \wedge *f = \langle g, f\rangle_{C^\infty(M,\mathbb{R})} \cdot \mathrm{vol}_M$. Wählen wir $g := 1$, so gilt:

$$*f = 1 \wedge *f = f \cdot \mathrm{vol}_M \quad \text{für } * : C^\infty(M, \mathbb{R}) = \Omega^1(M) \to \Omega^m(M)$$

und wegen $* \circ * = \mathrm{id}$, ist

$$*(f \cdot \mathrm{vol}_M) = f \text{ für } * : \Omega^m(M) \to \Omega^1(M) = C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

($k = 1$)

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1(M) \arrow[rr, "*", "\cong"'] & & \Omega^{m-1}(M) \\
& \mathfrak{X}(M) \arrow[ul, "\cong"', "\sharp"] \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Sei $\xi = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \omega = \sum \omega_i du^i \in \Omega^1(M)$, wobei $\omega_i = \sum_j g_{i,j}\xi^i$ und $\mathrm{vol}_M = \sqrt{G}\, du^1 \wedge \cdots \wedge du^m$, dann gilt für

$$*\omega = \sum_{i=1}^m \overbrace{\eta_{1,\dots,\hat{\imath},\dots,m}}^{\eta_i :=} du^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{du^i} \wedge \ldots \wedge du^m$$

$$\begin{aligned}
\eta_i (-1)^{i-1} du^1 \wedge \ldots \wedge du^m &= \eta_i\, du^i \wedge du^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{du^i} \wedge \ldots \wedge du^m \\
&= du^i \wedge (*\omega) = \Big\langle du^i, \sum \omega_j du^j \Big\rangle \cdot \mathrm{vol}_M \\
&= \sum_j \omega_j \underbrace{\langle du^i, du^j\rangle_{\Omega^1(M)}}_{g^{i,j}} \cdot \mathrm{vol}_M \\
&= \sum_j \omega_j\, g^{i,j} \sqrt{G}\, du^1 \wedge \cdots \wedge du^m,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{da } \langle du^i, du^j\rangle = \langle \flat(du^i), \flat(du^j)\rangle &= \left\langle \sum_k g^{i,k} \frac{\partial}{\partial u^k}, \sum_l g^{j,l} \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle \\
&= \sum_{k,l} g^{i,k} g^{j,l} \underbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle}_{g_{k,l}} = \sum_{k,l} g^{i,k} \delta^j_k = g^{i,j},
\end{aligned}$$

wobei $(g^{i,k})$ die inverse Matrix zu $(g_{i,k})$ ist. Mit dieser Behauptung folgt:

$$\begin{aligned}
\eta_i &= \sum_j (-1)^{i-1}\omega_j\, g^{i,j}\sqrt{G} \quad \text{und somit} \\
*\omega &= \sum_i \eta_i\, du^1\wedge\ldots\wedge\widehat{du^i}\wedge\ldots\wedge du^m \\
&= \sum_i (-1)^{i-1}\sqrt{G}\underbrace{\sum_j g^{i,j}\,\omega_j}_{\xi^i}\; du^1\wedge\ldots\wedge\widehat{du^i}\wedge\ldots\wedge du^m \\
&= \sqrt{G}\sum_i (-1)^{i-1}\xi^i\, du^1\,\wedge\ldots\wedge\widehat{du^i}\wedge\ldots\wedge du^m.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
*\circ\sharp : \mathfrak{X}(M)\ni \sum \xi^i\frac{\partial}{\partial u^i} &\mapsto \\
&\mapsto \sqrt{G}\sum_i (-1)^{i-1}\xi^i\, du^1\,\wedge\ldots\wedge\widehat{du^i}\wedge\ldots\wedge du^m \in \Omega^{m-1}(M).
\end{aligned}$$

42. Graduierte Derivationen

42.1 Lemma (Algebra der Differentialformen).
Es ist $\Omega(M) := \bigoplus_k \Omega^k(M)$ eine graduiert kommutative Algebra bezüglich dem punktweisen Hackprodukt (siehe auch (38.4))

$$\begin{aligned}
(\alpha\wedge\beta)_x(\xi_1,\ldots,\xi_{k+i}) &= \\
&= \frac{(k+i)!}{k!i!}\sum_\pi \operatorname{sgn}\pi\cdot\alpha_x(\xi_{\pi(1)},\ldots,\xi_{\pi(k)})\cdot\beta_x(\xi_{\pi(k+1)},\ldots,\xi_{\pi(k+i)}),
\end{aligned}$$

für $\alpha\in\Omega^k(M)$, $\beta\in\Omega^i(M)$ und $\xi_i\in T_xM$. Sie ist als Algebra durch $\{f, df : f\in C^\infty(M,\mathbb{R})\}$ erzeugt.

Beweis. Da die Fasern $\bigwedge T_x^*M = \bigoplus_k \bigwedge^k T_x^*M$ graduiert kommutative Algebren sind, ist auch $\Omega(M) = \Gamma(\bigwedge T^*M)$ eine graduiert kommutative Algebra. Lokal wird $\Omega(M)$ durch $\{f, df : f\in C^\infty(M,\mathbb{R})\}$ erzeugt, denn $\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k}\omega_{i_1,\ldots,i_k}du^{i_1}\wedge\ldots\wedge du^{i_k}$. Um das auch global zu erhalten, benötigen wir einen endlichen Atlas von M. Für Lindelöf-Mannigfaltigkeiten existiert ein solcher nach (19.11). Wir wählen nun eine Partition der Eins $\{f_1,\ldots,f_N\}$, welche dem zugehörigen Vektorbündel-Atlas von T^*M untergeordnet ist. Dann ist $\omega = \sum_i f_i\omega$ und $f_i\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} f_i\omega_{i_1,\ldots,i_k}du^{i_1}\wedge\ldots\wedge du^{i_k}$, wobei die u^i globale glatte Funktionen auf M sind, sodaß $(u^1,\ldots,u^m)$ lokale Koordinaten auf $\mathrm{Trg}(f_i)$ sind. □

42.2 Zurückziehen von Formen

Sei $f : M\to N$ glatt, dann haben wir die Tangentialabbildung $T_pf : T_pM\to T_{f(p)}N$, sowie deren transponierte $(T_pf)^t : T^*_{f(p)}N\to T^*_pM$. Falls nun p nicht durch $f(p)$ determiniert ist, d.h. f nicht injektiv ist, oder zu gewissen $q\in N$ kein p mit $f(p)=q$

existiert, d.h. f nicht surjektiv ist, läßt sich keine Abbildung $T^*f : T^*N \to T^*M$ aus den $(T_pf)^t$ zusammensetzen. Es läßt sich aber nach (31.11) dennoch ganz allgemein aus

$$\begin{tikzcd} \bigwedge^k TM \arrow[r, "\bigwedge^k Tf"] \arrow[d] & \bigwedge^k TN \arrow[d] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

eine Abbildung

$$f^* := (\bigwedge^k Tf)^* : \Omega^k(N) := \Gamma((\bigwedge^k TN)^* \to N) \to \Gamma((\bigwedge^k TM)^* \to M) =: \Omega^k(M)$$

definieren. Dabei heißt $f^*(\omega)$ die mit f zurückgezogene Form zu ω.

$$(f^*\omega)_p(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k) := \omega_{f(p)}(\bigwedge^k Tf(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k))$$

oder unter Verwendung des Isomorphismuses $(\bigwedge^k T_xM)^* \cong L^k_{Alt}(T_xM; \mathbb{R})$ auch als

$$(f^*\omega)_p(\xi_1, \ldots, \xi_k) := \omega_{f(p)}(T_pf \cdot \xi_1|_p, \ldots, T_pf \cdot \xi_k|_p).$$

Insbesonders ist

$$\begin{aligned} f^*(dg)_p(\xi_p) &= (dg)_{f(p)}(T_pf \cdot \xi_p) \\ &= \mathrm{pr}_2 \cdot T_{f(p)}g \cdot T_pf \cdot \xi_p \\ &= \mathrm{pr}_2 \cdot T_p(g \circ f) \cdot \xi_p \\ &= d(g \circ f)_p \cdot \xi_p \end{aligned}$$

Das so definierte $f^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$ ist ein Algebrahomomorphismus, wie man leicht nachrechnet. Mittels des Ismomorphismuses $(\bigwedge^k TM)^* \cong \bigwedge^k (T^*M)$ kann man f^* für $\omega_k \in \Omega^1(M)$ auch durch $f^*(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k) := f^*(\omega_1) \wedge \cdots \wedge f^*(\omega_k)$ definieren, wobei $f^*(\omega_k)$ das in (31.12) definierte Zurückziehen von Formen ist. Weiters gilt:

$$\begin{aligned} f^*(g) &= g \circ f \text{ und} \\ f^*(dg) &= d(g \circ f) \text{ für } g \in C^\infty(N, \mathbb{R}) \\ (f_1 \circ f_2)^* &= {f_2}^* \circ {f_1}^* \text{ für zusammensetzbare Abbildungen } f_1 \text{ und } f_2 \end{aligned}$$

Seien $(u^i)_{i=1}^m$ lokale Koordinaten auf M und $(v^j)_{j=1}^n$ lokale Koordinaten auf N. Dann läßt sich $\omega \in \Omega^k(N)$ lokal als

$$\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} \omega_{j_1, \ldots, j_k} dv^{j_1} \wedge \ldots \wedge dv^{j_k}$$

schreiben. Die zurückgezogene Form muß eine lokale Darstellung der Form

$$f^*(\omega) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \eta_{i_1, \ldots, i_k} du^{i_1} \wedge \ldots \wedge du^{i_k}$$

besitzen. Wir berechnen nun die lokalen Koeffizienten $\eta_{i_1,\dots,i_k}$ von $f^*(\omega)$:

$$\begin{aligned}
\eta_{i_1,\dots,i_k}(x) &= f^*(\omega)_x\left(\tfrac{\partial}{\partial u^{i_1}},\dots,\tfrac{\partial}{\partial u^{i_k}}\right)\\
&= \omega_{f(x)}\Big(\bigwedge^k T_x f\big(\tfrac{\partial}{\partial u^{i_1}},\dots,\tfrac{\partial}{\partial u^{i_k}}\big)\Big)\\
&= \omega_{f(x)}\Big(\sum_{j_1<\dots<j_k}\det\Big(\frac{\partial(v^{j_s}\circ f)}{\partial u^{i_t}}\Big)_{t,s}\tfrac{\partial}{\partial v^{j_1}},\dots,\tfrac{\partial}{\partial v^{j_k}}\Big)\\
&= \sum_{j_1<\dots<j_k}\det\Big(\frac{\partial(v^{j_s}\circ f)}{\partial u^{i_t}}\Big)_{t,s}\omega_{f(x)}\Big(\tfrac{\partial}{\partial v^{j_1}},\dots,\tfrac{\partial}{\partial v^{j_k}}\Big)\\
&= \sum_{j_1<\dots<j_k}\det\Big(\frac{\partial(v^{j_s}\circ f)}{\partial u^{i_t}}\Big)_{t,s}\omega_{j_1,\dots,j_k}(f(x)).
\end{aligned}$$

Wir können dies auch durch die Multiplikativität von f^* wie folgt erhalten:

$$\begin{aligned}
f^*(dv^{j_1}\wedge\dots\wedge dv^{j_k}) &= d(v^{j^1}\circ f)\wedge\dots\wedge d(v^{j_k}\circ f)\\
&= \Big(\sum_{i_1}\frac{\partial(v^{j_1}\circ f)}{\partial u^{i_1}}\,du^{i_1}\Big)\wedge\dots\wedge\Big(\sum_{i_k}\frac{\partial(v^{j_k}\circ f)}{\partial u^{i_k}}\,du^{i_k}\Big)\\
&= \sum_{i_1<\dots<i_k}\det\Big(\frac{\partial(v^{j_s}\circ f)}{\partial u^{i_t}}\Big)_{t,s}\cdot du^{i_1}\wedge\dots\wedge du^{i_k}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$f^*(\omega) = \sum_{\substack{i_1<\dots<i_k\\ i_1,\dots,i_k=1\dots m}}\ \sum_{\substack{j_1<\dots<j_k\\ j_1,\dots,j_k=1\dots n}} \omega_{(j_1,\dots,j_k)}\rho^{j_1,\dots,j_k}_{i_1,\dots,i_k}\,du^{i_1}\wedge\dots\wedge du^{i_k}$$

$$\text{Wobei}\qquad \rho^{j_1,\dots,j_k}_{i_1,\dots,i_k} := \det\left(\frac{\partial(v^{j_1},\dots,v^{j_k})}{\partial(u^{i_1},\dots,u^{i_k})}\right) = \det\begin{pmatrix}\frac{\partial v^{j_1}}{\partial u^{i_1}} & \dots & \frac{\partial v^{j_1}}{\partial u^{i_k}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial v^{j_k}}{\partial u^{i_1}} & \dots & \frac{\partial v^{j_k}}{\partial u^{i_k}}\end{pmatrix}$$

$$\text{mit}\qquad \frac{\partial v^j}{\partial u^i} := \frac{\partial}{\partial u^i}(v^j\circ f),$$

In (29.1) haben wir die kommutative Algebra $A := C^\infty(M,\mathbb{R})$ betrachtet. Den Raum $\operatorname{Der}(A)$ ihrer Derivationen konnten wir mit dem Raum $\mathfrak{X}(M)$ der Vektorfelder auf M identifizieren. Wir haben auf $\operatorname{Der}(A)$ die Struktur einer Lie-Algebra gefunden. Wir wollen ähnliche Ideen nun auf die graduiert kommutative Algebra $A = \Omega(M)$ der Differentialformen auf M anwenden.

42.3 Definition (graduierte Derivation)

Eine Abbildung $D : \Omega(M) \to \Omega(M)$ heißt graduierte Derivation vom Grad d, falls D linear ist, für alle k den Summanden $\Omega^k(M)$ in $\Omega^{d+k}(M)$ abbildet und falls für alle $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\eta \in \Omega(M)$ die Produktregel $D(\omega\wedge\eta) = D(\omega)\wedge\eta + (-1)^{d\,k}\omega\wedge D\eta$ gilt.

Mit $\operatorname{Der}_d(\Omega(M))$ bezeichnen wir den Vektorraum aller graduierten Derivationen von $\Omega(M)$ vom Grad d, und mit $\operatorname{Der}(\Omega(M))$ bezeichnen wir die direkte Summe $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \operatorname{Der}_d(\Omega(M))$.

Allgemeiner heißt für eine glatte Abbildung $g : N \to M$ eine Abbildung $D : \Omega(M) \to \Omega(N)$ graduierte Derivation über g^*, falls D linear ist, für alle k den Summanden $\Omega^k(M)$ in $\Omega^{d+k}(N)$ abbildet und falls die Produktregel $D(\omega \wedge \eta) = D(\omega) \wedge g^*(\eta) + (-1)^{d\,k} g^*(\omega) \wedge D\eta$ für alle $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\eta \in \Omega(M)$ gilt.

42.4 Lemma (Eindeutigkeit graduierter Derivationen).
Es sei $g : N \to M$ C^∞. Jede graduierte Derivation $D : \Omega(M) \to \Omega(N)$ über dem Algebra-Homomorphismus $g^* : \Omega(M) \to \Omega(N)$ ist eindeutig durch die Werte $D(f)$ und $D(df)$ für alle $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ festgelegt.

Beweis. Da f und df die Algebra $\Omega(M)$ erzeugen folgt dies sofort aus (42.1). Wollen wir aber die dort verwendete Dimensionstheorie nicht hineinstecken so können wir dies auch wie folgt zeigen:

Hätten wir zwei solche Derivationen, so betrachten wir die Differenz D. Wir müssen zeigen: $\forall\, f : D(f) = 0,\ D(df) = 0 \Rightarrow D = 0$.

Wir behaupten zuerst, daß die Derivation D ein lokaler Operator ist. Sei nämlich $\omega \in \Omega(M)$ lokal um $g(x)$ gleich 0. Dann wählen wir ein $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ mit $f(g(x)) = 1$ und $f\,\omega = 0$, und erhalten

$$0 = D(0) = D(f\,\omega) = \underbrace{D(f)}_{=0} \wedge g^*(\omega) + g^*(f) \cdot D(\omega)$$

Und an der Stelle $x \in N$ gilt $0 = \underbrace{f(g(x))}_{=1} \wedge D(\omega)(x) = D(\omega(x))$. Da D ein lokaler und linearer Operator ist, dürfen wir ihn durch eine lokale Darstellung durchtauschen:

$$D(\omega) = D\left(\sum_{i_1<\dots<i_p} \omega_{i_1,\dots,i_p} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p}\right)$$

$$= \sum_{i_1<\dots<i_p} \Bigg(\underbrace{D(\omega_{i_1,\dots,i_p})}_{=0} \wedge g^*(du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p})$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} g^*(\omega_{i_1,\dots,i_p})\, g^*(du^{i_1}) \wedge \dots \wedge \underbrace{D(du^{i_k})}_{=0} \wedge \dots \wedge du^{i_p}\Bigg) = 0. \qquad \square$$

42.5 Bemerkung. Es folgt aus (42.4), daß $\operatorname{Der}_d(\Omega(M)) = \{0\}$ für $d < -1$. Denn $D(\Omega^k(M)) \subseteq \Omega^k + d(M) = \{0\}$ für $k + d < 0$ und insbesonders für $k \in \{0,1\}$ und $d < -1$.

Wir wollen als nächstes $\operatorname{Der}_{-1}(\Omega(M))$ bestimmen. Sei also $D : \Omega(M) \to \Omega(M)$ eine graduierte Derivation vom Grad $d = -1$. Dann ist $D(C^\infty(M,\mathbb{R})) = \{0\}$ und die lineare Abbildung $D \circ d : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \Omega^1(M) \to \Omega^0(M) = C^\infty(M,\mathbb{R})$ erfüllt $(D \circ d)(f \cdot g) = D(g \cdot df + f \cdot dg) = D(g) \wedge df + (-1)^{0\cdot d} g \cdot D(df) + D(f) \wedge dg + (-1)^{0\cdot d} f \cdot D(dg) = (D \circ d)f \cdot g + f \cdot (D \circ d)g$, wegen $D(g) = 0 = D(f)$. Also ist $D \circ d$ auf $C^\infty(M,\mathbb{R})$ eine Derivation und somit durch ein Vektorfeld ξ gegeben, d.h. $D(f) = 0$

und $D(df) = \xi(f) = df(\xi)$ für alle $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Wir werden in (42.6) zeigen, daß wir durch $(i_\xi\omega)(\xi_1,\dots,\xi_k) := \omega(\xi,\xi_1,\dots,\xi_k)$ zu jeden Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ eine graduierte Derivation $i_x s$ vom Grad $d = -1$ definieren können.

Nun zu $\mathrm{Der}_0(\Omega(M))$. Sei also $D : \Omega(M) \to \Omega(M)$ eine graduierte Derivation vom Grad $d = 0$. Dann wirkt D auf $\Omega^0(M) = C^\infty(M,\mathbb{R})$ derivativ, ist also durch ein Vektorfeld ξ gegeben, d.h.

$$D(f) = \xi(f) = \mathcal{L}_\xi(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\mathrm{Fl}^\xi_t)^* f \text{ (siehe (29.10)).}$$

Der letzte Ausdruck $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\mathrm{Fl}^\xi_t)^*\omega$ macht aber auch für $\omega \in \Omega(M)$ einen Sinn und wir werden in (42.6) zeigen, daß dadurch für jedes Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ eine Derivation $\mathcal{L}_\xi$ vom Grad $d = 0$ auf $\Omega(M)$ definiert wird. Man kann zeigen, daß dies alle Derivationen vom Grad 0 sind, die zusätzlich $D(df) = d(Df)$ erfüllen. Um eine globale Formel für $\mathcal{L}_\xi$ zu erhalten, differenzieren wir die Funktion $\omega(\xi_1,\dots,\xi_k)$ (für $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\xi_i \in \mathfrak{X}(M)$) in Richtung von ξ an der Stelle $x \in M$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
(\xi\cdot\omega(\xi_1,\dots,\xi_k))_x &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} (\omega(\xi_1,\dots,\xi_k)\circ \mathrm{Fl}^\xi_t)_x\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \omega_{\mathrm{Fl}^\xi_t(x)}(\xi_1,\dots,\xi_k)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \omega_{\mathrm{Fl}^\xi_t(x)}(T\,\mathrm{Fl}^\xi_t \cdot T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-t}\cdot\xi_1,\dots,T\,\mathrm{Fl}^\xi_t\cdot T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-t}\cdot\xi_k)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \Big(((\mathrm{Fl}^\xi_t)^*\omega)_x\big(T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-t}\cdot\xi_1|_{\mathrm{Fl}^\xi_t(x)},\dots,T\,\mathrm{Fl}^\xi_{-t}\cdot\xi_k|_{\mathrm{Fl}^\xi_t(x)}\big)\Big)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \Big(((\mathrm{Fl}^\xi_t)^*\omega)_x\big((\mathrm{Fl}^\xi_t)^*(\xi_1)(x),\dots,(\mathrm{Fl}^\xi_t)^*(\xi_k)(x)\big)\Big)\\
&= \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} ((\mathrm{Fl}^\xi_t)^*\omega)_x\Big)\ (\xi_1(x),\dots,\xi_k(x))\\
&\qquad + \sum_{j=1}^k \omega_x\Big(\xi_1(x),\dots,\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\Big((\mathrm{Fl}^\xi_t)^*(\xi_i)(x)\Big),\dots,\xi_k(x)\Big)\\
&= (\mathcal{L}_\xi\omega)_x\ (\xi_1(x),\dots,\xi_k(x))\\
&\qquad + \sum_{j=1}^k \omega_x\Big(\xi_1(x),\dots,[\xi,\xi_i](x),\dots,\xi_k(x)\Big),
\end{aligned}$$

und somit

$$\mathcal{L}_\xi\omega(\xi_1,\dots,\xi_k) = \xi\cdot\omega(\xi_1,\dots,\xi_k) - \sum_{i=1}^k \omega\Big(\xi_1,\dots,\xi_{i-1},[\xi,\xi_i],\xi_{i+1},\dots,\xi_k\Big).$$

Insbesonders ist

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_\xi df)(\eta) &= \xi(df(\eta)) - df([\xi,\eta]) = \xi(\eta\cdot f) - [\xi,\eta](f) = \eta(\xi\cdot f)\\
&= d(\xi\cdot f)(\eta)
\end{aligned}$$

Schließlich wollen wir noch eine ausgezeichnete Derivation vom Grad $d = 1$ angeben. Nach (37.4) hoffen wir ja durch die Abweichung der Ableitung einer $1 - Form$ (oder allgemeiner einer k-Form) davon symmetrisch zu sein, zu erkennen ob die Form selbst Ableitung einer Funktion (bzw. $k-1$-Form) ist. Betrachten wir dazu zuerst den

Fall, wo $M = U$ offen in einen Vektorraum E ist. Dann ist eine k-Form auf U eine Abbildung

$$\omega : U \to L^k_{Alt}(E;\mathbb{R})$$

und ihre Ableitung ist

$$\omega' : U \to L(E, L^k_{Alt}(E;\mathbb{R})).$$

Setzen wir diese mit dem Alternator von

$$L(E, L^k_{Alt}(E;\mathbb{R})) \subseteq L(E, L^k(E;\mathbb{R})) \cong L^{k+1}(E,\mathbb{R}) \xrightarrow{alt} L^{k+1}_{Alt}(E,\mathbb{R})$$

zusammen, so erhalten wir die Abweichung dw davon, daß $\omega'(x)$ symmetrisch ist für alle $x \in U$. Es ist also

$$\begin{aligned} d\omega(x)(\xi_0,\dots,\xi_k) &= \frac{1}{(k+1)!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\,\omega'(x)(\xi_{\sigma(0)})(\xi_{\sigma(1)},\dots,\xi_{\sigma(k)}) \\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^k (-1)^i \omega'(x)(\xi_i)(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k). \end{aligned}$$

Um nun eine globale Formel für d auf beliebige Mannigfaltigkeiten M zuerhalten ersetzen wir die Vektoren $\xi_i \in E$ durch Vektorfelder $\xi_i \in \mathfrak{X}(M)$ und Differenzieren $\omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k)$ an der Stelle $x \in M$ in Richtung $\xi_i(x)$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \Big(\omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k)\Big)'(x)(\xi_i(x)) &= \omega'(x)(\xi_i(x))(\xi_0(x),\dots,\widehat{\xi_i(x)},\dots,\xi_k(x)) \\ &\quad + \sum_{j<i} \omega(x)(\dots,\xi_j'(x)\cdot\xi_i(x),\dots,\widehat{\xi_i(x)},\dots) \\ &\quad + \sum_{j>i} \omega(x)(\dots,\widehat{\xi_i(x)},\dots,\xi_j'(x)\cdot\xi_i(x),\dots) \end{aligned}$$

Und Einsetzen in obige Formel liefert

$$\begin{aligned} (k+1)d\omega(x)(\xi_0,\dots,\xi_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \omega'(x)(\xi_i(x))(\xi_0(x),\dots,\widehat{\xi_i(x)},\dots,\xi_k(x)) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i(\xi_i\cdot\omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k))(x) \\ &\quad - \sum_{j<i}(-1)^{i+j}\omega(x)(\xi_j'(x)\cdot\xi_i(x),\xi_0(x),\dots,\widehat{\xi_j(x)},\dots,\widehat{\xi_i(x)},\dots) \\ &\quad - \sum_{j>i}(-1)^{i+j-1}\omega(x)(\xi_j'(x)\cdot\xi_i(x),\xi_0(x),\dots,\widehat{\xi_i(x)},\dots,\widehat{\xi_j(x)},\dots) \\ &= \Big(\sum_{i=0}^k (-1)^i \xi_i\cdot\omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k) \\ &\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([\xi_i,\xi_j],\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi(k))\Big)(x). \end{aligned}$$

Wegen des lästigen Faktors $(k+1)$ ersetzen wir dw besser durch $(k+1)\,d\omega$.

42.6 Lemma (Lie-Algebra der graduierten Derivationen).
Der Raum $\mathrm{Der}(\Omega(M))$ *ist eine graduierte Lie-Algebra bezüglich der punktweisen Vektoroperationen und dem graduierten Kommutator als Lie-Klammer:*

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - (-1)^{d_1\, d_2} D_2 \circ D_1 \text{ für } D_i \in \mathrm{Der}_{d_i}(\Omega(M))$$

Im Detail bedeutet das:

1. *Die Klammer* $[\cdot,\cdot] : \mathrm{Der}_{d_1}(\Omega(M)) \times \mathrm{Der}_{d_2}(\Omega(M)) \to \mathrm{Der}_{d_1+d_2}(\Omega(M))$ *ist bilinear für alle* d_1, d_2.
2. *Sie ist* GRADUIERT ANTIKOMMUTATIV: $[D_1, D_2] + (-1)^{d_1\, d_2}[D_2, D_1] = 0$.
3. $[D_0, \cdot]$ *ist eine graduierte Derivation bezüglich* $[\cdot,\cdot]$, *d.h. es gilt die* GRADUIERTE JACOBI-IDENTITÄT

$$[D_0, [D_1, D_2]] = [[D_0, D_1], D_2] + (-1)^{d_0 d_1}[D_1, [D_0, D_2]],$$

oder äquivalent und zyklisch symmetrisch

$$(-1)^{d_0 d_2}[D_0, [D_1, D_2]] + (-1)^{d_1 d_0}[D_1, [D_2, D_0]] + (-1)^{d_2 d_1}[D_2, [D_0, D_1]] = 0.$$

Beweis. Wir führen den Beweis abstrakt für eine beliebige graduiert-kommutative Algebra A anstelle von $\Omega(M)$.
Behauptung: $[D_1, D_2] \in \mathrm{Der}_{d_1+d_2}(A)$ für $D_i \in \mathrm{Der}_{d_i}(A)$ für $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2](X \cdot Y) &= \Big(D_1 \circ D_2 - (-1)^{d_1 d_2} D_2 \circ D_1\Big)(X \cdot Y)\\
&= D_1\Big(D_2 X \cdot Y + (-1)^{x d_2} X \cdot D_2 Y\Big)\\
&\quad - (-1)^{d_1 d_2} D_2\Big(D_1 X \cdot Y + (-1)^{x d_1} X \cdot D_1 Y\Big)\\
&= D_1 D_2 X \cdot Y + (-1)^{d_1(d_2+x)} D_2 X \cdot D_1 Y\\
&\quad + (-1)^{x d_2} D_1 X \cdot D_2 Y + (-1)^{x d_2 + x d_1} X \cdot D_1 D_2 Y\\
&\quad - (-1)^{d_1 d_2} D_2 D_1 X \cdot Y - (-1)^{d_1 d_2 + (d_1+x) d_2} D_1 X \cdot D_2 Y\\
&\quad - (-1)^{d_1 d_2 + x d_1} D_2 X \cdot D_1 Y - (-1)^{d_1 d_2 + d_1 x + d_2 x} X \cdot D_2 D_1 Y\\
&= [D_1, D_2] X \cdot Y + (-1)^{x(d_1+d_2)} X \cdot [D_1, D_2] Y.
\end{aligned}$$

Klarerweise ist $[\, ,\,]$ bilinear und graduiert antikommutativ. Verbleibt die graduierte Jacobi-Identität zu zeigen:

$$[D_0,[D_1, D_2]] - [[D_0, D_1], D_2] - (-1)^{d_0 d_1}[D_1, [D_0, D_2]] =$$

$$\begin{aligned}
&= [D_0, D_1 D_2 - (-1)^{d_1 d_2} D_2 D_1] - [D_0 D_1 - (-1)^{d_0 d_1} D_1 D_0, D_2]\\
&\quad - (-1)^{d_0 d_1}[D_1, D_0 D_2 - (-1)^{d_0 d_2} D_2 D_0]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= +D_0D_1D_2 - (-1)^{d_1d_2}D_0D_2D_1\\
&\quad - (-1)^{(d_1+d_2)d_0}D_1D_2D_0 + (-1)^{d_1d_2+d_0(d_1+d_2)}D_2D_1D_0\\
&\quad - D_0D_1D_2 + (-1)^{d_0d_1}D_1D_0D_2\\
&\quad + (-1)^{(d_0+d_1)d_2}D_2D_0D_1 - (-1)^{d_0d_1+(d_0+d_1)d_2}D_2D_1D_0\\
&\quad - (-1)^{d_0d_1}D_1D_0D_2 + (-1)^{d_0d_1+d_0d_2}D_1D_2D_0\\
&\quad + (-1)^{d_0d_1+(d_0+d_2)d_1}D_0D_2D_1 - (-1)^{d_0(d_1+d_2)+(d_0+d_2)d_1}D_2D_0D_1\\
&= 0. \qquad \square
\end{aligned}
$$

42.7 Theorem (Die wichtigsten graduierten Derivationen). *Sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$.*

- (i_ξ). *Durch $i_\xi(f) := 0$, $i_\xi(df) := \xi \cdot f$ ist eine graduierte Derivation i_ξ vom Grad -1, der* Einsetzoperator*;*
- ($\mathcal{L}_\xi$). *durch $\mathcal{L}_\xi(f) := \xi \cdot f$, $\mathcal{L}_\xi(df) := d(\xi \cdot f)$ ist eine graduierte Derivation $\mathcal{L}_\xi$ vom Grad 0, die* Lie-Ableitung*;*
- (d). *und durch $d(f) := df$, $d(df) := 0$ ist eine graduierte Derivation d vom Grad $+1$, die* Äussere Ableitung*, festgelegt.*

Globale Formeln für diese graduierten Derivationen sind mit $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\xi_i \in \mathfrak{X}(M)$ gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
(\iota_{\xi_0}\omega)(\xi_1,\dots,\xi_{k-1}) &:= \omega(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{k-1})\\
(\mathcal{L}_{\xi_0}\omega)(\xi_1,\dots,\xi_k) &:= \xi_0 \cdot \omega(\xi_1,\dots,\xi_k) - \sum_{i=1}^k \omega\Big(\xi_1,\dots,\xi_{i-1},[\xi_0,\xi_i],\xi_{i+1},\dots,\xi_k\Big)\\
(d\omega)(\xi_0,\dots,\xi_k) &:= \sum_{i=0}^k (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k)\\
&\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega\Big([\xi_i,\xi_j],\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_k\Big).
\end{aligned}
$$

Die graduierten Kommutatoren sind durch folgende Tabelle gegeben:

$[D_1,D_2]$	i_η	$\mathcal{L}_\eta$	d
i_ξ	0	$-\iota_{[\xi,\eta]}$	$-\mathcal{L}_\xi$
$\mathcal{L}_\xi$	$\iota_{[\xi,\eta]}$	$\mathcal{L}_{[\xi,\eta]}$	0
d	$\mathcal{L}_\eta$	0	0

Falls $\eta \in \mathfrak{X}(N)$ verwandt mit $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ bezüglich einem glatten $g : M \to N$ ist, d.h. $Tg \circ \xi = \eta \circ g$ erfüllt ist, so gilt:

$$
g^* \circ i_\eta = i_\xi \circ g^*, \quad g^* \circ \mathcal{L}_\eta = \mathcal{L}_\xi \circ g^*, \quad g^* \circ d = d \circ g^*
$$

Weiters gilt: $\iota_{f\xi}\omega = f\, i_\xi\omega$, $\mathcal{L}_{f\xi}\omega = f\,\mathcal{L}_\xi\omega + df \wedge i_\xi\omega$ und $(\mathcal{L}_\xi\omega)(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\mathrm{Fl}^\xi_t)^*\omega|_x$

Beweis. Wir führen den Beweis in 14 Schritten:

Behauptung. $i_\xi\omega \in \Omega^{k-1}(M)$:
Offensichtlich ist $i_\xi\omega$ alternierend und $k+1$-linear und es gilt

$$\begin{aligned} i_\xi\omega(f\xi_1,\dots,\xi_{k-1}) &= \omega(\xi,f\xi_1,\dots,\xi_{k-1}) = f\,\omega(\xi,\xi_1,\dots,\xi_{k-1}) \\ &= f\,i_\xi\omega(\xi_1,\dots,\xi_{k-1}). \end{aligned}$$

Behauptung. $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$:
Offensichtlich ist $d\omega$ ist $(k+1)$-linear und alternierend. Die $C^\infty(M,\mathbb{R})$-Homogenität ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} d\omega(f\xi_0,\dots,\xi_k) &= (f\xi_0)\cdot\omega(\xi_1,\dots,\xi_k) \\ &\quad + \sum_{i>0}(-1)^i\xi_i\cdot f\omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k) \\ &\quad + \sum_{j>i=0}(-1)^j\omega([f\xi_0,\xi_j],\widehat{\xi_0},\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_k) \\ &\quad + \sum_{j>i>0}(-1)^{i+j}\omega([\xi_i,\xi_j],f\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_k) \\ &= (f\xi_0)\omega(\xi_1,\dots,\xi_k) \\ &\quad + \sum_{i>0}(-1)^i\xi_i(f)\,\omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k) \\ &\quad + \sum_{i>0}(-1)^i f\,(\xi_i\cdot\omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k)) \\ &\quad + \sum_{j>i=0}(-1)^j\omega(f[\xi_0,\xi_j]-\xi_j(f)\xi_0,\widehat{\xi_0},\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_k) \\ &\quad + f\sum_{j>i>0}(-1)^{i+j}\omega([\xi_i,\xi_j],\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_k) \\ &= f\,d\omega(\xi_0,\dots,\xi_k) \\ &\quad + \sum_{i>0}(-1)^i\xi_i(f)\,\omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k) \\ &\quad - \sum_{j>i=0}(-1)^j\xi_j(f)\,\omega(\xi_0,\widehat{\xi_0},\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_k) \\ &= f\,d\omega(\xi_0,\dots,\xi_k). \end{aligned}$$

Behauptung. $i_\xi \in \mathrm{Der}_{-1}(\Omega(M))$. Sei dazu $\alpha \in \Omega^{k+1}$ und $\beta \in \Omega^l$, dann ist:

$$\begin{aligned}
&\iota_{\xi_0}(\alpha\wedge\beta)(\xi_1,\dots,\xi_{k+l}) =\\
&\quad = (\alpha\wedge\beta)(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{k+l})\\
&\quad = \frac{1}{(k+1)!\,l!}\sum_\pi \operatorname{sgn}(\pi)\ \alpha(\xi_{\pi(0)},\dots,\xi_{\pi(k)})\ \beta(\xi_{\pi(k+1)},\dots,\xi_{\pi(k+l)})\\
&\quad = \sum_{\pi\text{ stkw.}\nearrow} \operatorname{sgn}(\pi)\ \alpha(\xi_{\pi(0)},\dots,\xi_{\pi(k)})\ \beta(\xi_{\pi(k+1)},\dots,\xi_{\pi(k+l)})\\
&\quad = \sum_{\pi(0)=0} \operatorname{sgn}(\pi)\ \alpha(\xi_{\pi(0)},\dots,\xi_{\pi(k)})\ \beta(\xi_{\pi(k+1)},\dots,\xi_{\pi(k+l)})\\
&\qquad + \sum_{\pi(k+1)=0} \operatorname{sgn}(\pi)\ \alpha(\xi_{\pi(0)},\dots,\xi_{\pi(k)})\ \beta(\xi_{\pi(k+1)},\dots,\xi_{\pi(k+l)})\\
&\quad = \Big((\iota_{\xi_0}\alpha)\wedge\beta\Big)(\xi_1,\dots,\xi_{k+l})\\
&\qquad + \sum_{\pi'\text{ stkw.}\nearrow} (-1)^{k+1}\operatorname{sgn}(\pi')\ \alpha(\xi_{\pi'(1)},\dots,\xi_{\pi'(k+1)})\ \beta(\xi_0,\xi_{\pi'(k+2)},\dots,\xi_{\pi'(k+l)})\\
&\quad = \Big((\iota_{\xi_0}\alpha)\wedge\beta + (-1)^{k+1}\alpha\wedge(\iota_{\xi_0}\beta)\Big)(\xi_1,\dots,\xi_{k+l}).
\end{aligned}$$

Dabei ist $\pi' := \pi\circ(k+1,k,\dots,1,0)$ jene Permutation, die 0 auf 0 abbildet, auf $i+1\le k+1$ mit $\pi(i)$ übereinstimmt, und auf $i>k+1$ mit π ident ist.

Behauptung. $d(f\omega) = df\wedge\omega + f\cdot d\omega$

$$\begin{aligned}
&d(f\omega)(\xi_0,\dots,\xi_k) =\\
&\quad = \sum_i (-1)^i \xi_i\cdot(f\omega)(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots\xi_k)\\
&\qquad + \sum_{j>i}(-1)^{i+j} f\omega([\xi_i,\xi_j],\xi_1,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_k)\\
&\quad = \sum_i (-1)^i \xi_i(f)\ \omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k)\\
&\qquad + \sum_i (-1)^i f\,\xi_i\cdot\omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k)\\
&\qquad + \sum_{j>i}(-1)^{i+j} f\omega([\xi_i,\xi_j],\xi_1,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_k)\\
&\quad = \sum_i (-1)^i df(\xi_i)\ \omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k) + f\,d\omega(\xi_0,\dots,\xi_k)\\
&\quad = (df\wedge\omega + f\wedge d\omega)(\xi_0,\dots,\xi_k).
\end{aligned}$$

Behauptung. d ist ein lokaler Operator
Sei dazu $\omega|_U = 0$ und $x\in U$. Dann existiert ein $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ mit $\operatorname{Trg} f\subseteq U$, $f(x)=1$ und $df(x)=0$. Folglich ist $f\omega = 0$ und damit $0 = d(f\omega)(x) = df(x)\wedge\omega(x) + f(x)\cdot d\omega(x) = d\omega(x)$.

Behauptung. $d(du^I) = 0$, wobei $du^I := du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_{k-1}}$ für $I := (i_1, \dots i_{k-1})$.

$$\begin{aligned} d(du^I)(\tfrac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial u^{j_k}}) &= \\ &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^i (\tfrac{\partial}{\partial u^{j_i}}) du^I \Big(\tfrac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \widehat{\tfrac{\partial}{\partial u^{j_i}}}, \dots \tfrac{\partial}{\partial u^{j_k}} \Big) \\ &\quad + \sum_{l>i} (-1)^{i+l} du^I \Big([\tfrac{\partial}{\partial u^{j_i}}, \tfrac{\partial}{\partial u^{j_l}}], \dots, \widehat{\tfrac{\partial}{\partial u^{j_i}}}, \dots \widehat{\tfrac{\partial}{\partial u^{j_l}}}, \dots \Big) \\ &= 0, \quad \text{da } [\tfrac{\partial}{\partial u^i}, \tfrac{\partial}{\partial u^l}] = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad d(\sum_I \omega_I du^I) = \sum_I d\omega_I \wedge du^I + \omega_I \wedge ddu^I = \sum_{i,I} (\tfrac{\partial \omega_I}{\partial u^i}) du^i \wedge du^I$$

Behauptung. $d \in \mathrm{Der}_{+1}(\Omega(M))$, i.e. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|I|} \alpha \wedge d\beta$. mit $\alpha = \sum_I \alpha_I \, du^I$ und $\beta = \sum_J \beta_J \, du^J$).

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= \sum_{I,J} d(\alpha_I \beta_J \, du^I \wedge du^J) \\ &= \sum_{I,J,i} \tfrac{\partial(\alpha_I \beta_J)}{\partial u^i} \, du^i \wedge du^I \wedge du^J + \sum_{I,J} \alpha_I \beta_J \, d(du^I \wedge du^J) \\ &= \sum_{I,i} \tfrac{\partial \alpha_I}{\partial u^i} \, du^i \wedge du^I \wedge \sum_J \beta_J \, du^J \\ &\qquad + (-1)^k \sum \alpha_I \, du^I \wedge \sum_{J,i} \tfrac{\partial \beta_J}{\partial u^i} \, du^i \wedge du^J \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|I|+1} \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

Behauptung. d und i_ξ erfüllen die "Anfangsbedingungen".
Das folgt sofort durch Einsetzen in die globalen Formeln, z.B.:

$$df(\xi_0) = \sum_{i=0}^{0} \xi_0 \cdot f(\widehat{\xi_0}) + \sum_{\emptyset} = \xi_0(f).$$

Behauptung. Es gelten die Formeln für die Kommutatoren von Einsetzoperatoren beziehungsweise für d.
Wegen (42.4) genügt es die "Anfangswerte" zu überprüfen, z.B.:

$$\begin{aligned} [i_\xi, i_\eta] &= 0, \text{ da Derivation vom Grad -2} \\ [d,d](f) &= (d \circ d - (-1)^{-1} d \circ d)(f) = 2d(df) = 0 \\ [d,d](df) &= 2(d \circ d)(df) = 2d(d(df)) = 2d(0) = 0 \end{aligned}$$

Behauptung. Der Kommutator $[d, i_\xi]$ ist durch die globale Formel von $\mathcal{L}_\xi$ gegeben, also ist $\mathcal{L}_\xi \in \mathrm{Der}_0(\Omega(M))$.

$$
\begin{aligned}
&([d,\iota_{\xi_0}]\omega)(\xi_1,\dots,\xi_k) = \\
&\quad = d(\iota_{\xi_0}\omega)(\xi_1,\dots,\xi_k) + \iota_{\xi_0}(d\omega)(\xi_1,\dots,\xi_k) \\
&\quad = \sum_i (-1)^{i-1}\xi_i\cdot\iota_{\xi_0}\omega(\xi_1,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k) \\
&\qquad + \sum_{0<i<j}(-1)^{i-1+j-1}\iota_{\xi_0}\omega([\xi_i,\xi_j],\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_k) \\
&\qquad + d\omega(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_k) \\
&\quad = -\sum_{i>0}(-1)^i\xi_i\cdot\omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k) \\
&\qquad + \sum_{0<i<j}(-1)^{i+j}\omega(\xi_0,[\xi_i,\xi_j],\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_k) \\
&\qquad + \sum_{i\ge 0}(-1)^i\xi_i\cdot\omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\xi_k) \\
&\qquad + \sum_{0\le i<j}(-1)^{i+j}\omega([\xi_i,\xi_j],\xi_0,\dots,\widehat{\xi_i},\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_k) \\
&\quad = \xi_0\cdot\omega(\xi_1,\dots,\xi_k) + \sum_{j>0}(-1)^j\omega([\xi_0,\xi_j],\xi_1,\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_k) \\
&\quad = \xi_0\cdot\omega(\xi_1,\dots,\xi_k) - \sum_{j>0}\omega(\xi_1,\dots,[\xi_0,\xi_j],\dots,\xi_k) \\
&\quad = (\mathcal{L}_{\xi_0}\omega)(\xi_1,\dots,\xi_k).
\end{aligned}
$$

Behauptung. Es gilt die “Anfangsbedingung” für $\mathcal{L}_\xi$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi &= d\circ i_\xi - (-1)^{(-1)(+1)}i_\xi\circ d \quad\Rightarrow \\
\mathcal{L}_\xi(f) &= d(i_\xi f) + i_\xi(df) = 0 + \xi\cdot f \\
\mathcal{L}_\xi(df) &= d(i_\xi df) + i_\xi(d^2 f) = d(\xi\cdot f) + 0.
\end{aligned}
$$

Behauptung. Es gelten die Formeln für Kommutatoren mit $\mathcal{L}_\xi$.
Wieder brauchen wir nur die Anfangswerte zu überprüfen (oder wir verwenden die

Jacobi-Identität):

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}_\xi, i_\eta](f) &= 0 = \iota_{[\xi,\eta]}(f), \text{ da der Grad } -1 \text{ ist}\\
[\mathcal{L}_\xi, i_\eta](df) &= \mathcal{L}_\xi(\eta\cdot f) - i_\eta(d(\xi\cdot f))\\
&= \xi\cdot(\eta\cdot f) - \eta\cdot(\xi\cdot f) = [\xi,\eta](f) = \iota_{[\xi,\eta]}(df)\\
[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta](f) &= \xi\cdot\eta\cdot f - \eta\cdot\xi\cdot f = [\xi,\eta](f) = \mathcal{L}_{[\xi,\eta]}(f)\\
[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta](df) &= \mathcal{L}_\xi(d(\eta\cdot f)) - \mathcal{L}_\eta(d(\xi\cdot f))\\
&= d(\xi\cdot\eta\cdot f - \eta\cdot\xi\cdot f) = d([\xi,\eta]\cdot f) = \mathcal{L}_{[\xi,\eta]}(df)\\
[d, \mathcal{L}_\xi](f) &= d(\xi\cdot f) - \mathcal{L}_\xi(df) = 0\\
[d, \mathcal{L}_\xi](df) &= d(d(\xi\cdot f)) - \mathcal{L}_\xi(ddf) = 0.
\end{aligned}$$

Behauptung. Es gelten die Vertauschbarkeitsrelationen mit g^*.

$$\begin{aligned}
(g^*\circ\iota_\eta)(df) &= g^*(df(\eta)) = g^*(\eta(f)) = \eta(f)\circ g\\
&= \xi(f\circ g) = d(f\circ g)(\xi) = i_\xi(g^*(df)) = (i_\xi\circ g^*)(df)
\end{aligned}$$

oder direkt

$$\begin{aligned}
(g^*\circ i_\eta)\omega_p(\xi_1,\dots,\xi_k) &= g^*(i_\eta\omega)(\xi_1,\dots,\xi_k)\\
&= (i_\eta\omega)|_{g(p)}(T_pg\cdot\xi_1|_p,\dots,T_pg\cdot\xi_k|_p)\\
&= \omega|_{g(p)}(\eta|_{g(p)}, T_pg\cdot\xi_1|_p,\dots,T_pg\cdot\xi_k|_p)\\
&= \omega|_{g(p)}(T_pg\cdot\xi|_p, T_pg\cdot\xi_1|_p,\dots,T_pg\cdot\xi_k|_p)\\
&= (g^*\omega)_p(\xi|_p,\xi_1|_p,\dots,\xi_k|_p)\\
&= (i_\xi(g^*\omega))(\xi_1,\dots,\xi_k))_p)\\
&= (i_\xi\circ g^*)\omega_p(\xi_1,\dots,\xi_k);
\end{aligned}$$

Für d haben wir das folgende bereits in (42.2) gezeigt:

$$\begin{aligned}
(g^*\circ d)(f)(\xi|_p) &= g^*(df)(\xi|_p) = df|_{g(p)}(Tg\cdot\xi|_p)\\
&= d(f\circ g)(\xi|_p) = d(g^*(f))(\xi|_p) = (d\circ g^*)(f)(\xi|_p)\\
(g^*\circ d)(df) &= g^*(ddf) = g^*(0) = 0 = d^2(g^*f)\\
&= d((d\circ g^*)(f)) = d((g^*\circ d)(f)) = (d\circ g^*)(df);
\end{aligned}$$

Für $\mathcal{L}$ folgt es nun durch Anwenden der Kommutatorformel:

$$\begin{aligned}
g^*\circ\mathcal{L}_\eta &= g^*(d\circ i_\eta + i_\eta\circ d)\\
&= g^*\circ d\circ i_\eta + g^*\circ i_\eta\circ d\\
&= d\circ g^*\circ i_\eta + g^*\circ i_\eta\circ d\\
&= d\circ i_\xi\circ g^* + i_\xi\circ g^*\circ d\\
&= (d\circ i_\xi + i_\xi\circ d)\circ g^*\\
&= \mathcal{L}_\xi\circ g^*.
\end{aligned}$$

Behauptung. Es gelten die Homogenitätsformeln für $\iota_{f\xi}$ und $\mathcal{L}_{f\xi}$.

$$\begin{aligned}\iota_{f\xi}\omega(\xi_1,\dots,\xi_{k-1}) &= \omega(f\xi,\xi_1,\dots,\xi_{k-1}) = f\cdot\omega(\xi,\xi_1,\dots,\xi_{k-1})\\ &= f\cdot i_\xi\omega(\xi_1,\dots,\xi_{k-1})\\ \mathcal{L}_{f\xi}\omega &= [d,\iota_{f\xi}]\omega = d(\iota_{f\xi}\omega)+\iota_{f\xi}(d\omega)\\ &= d(f\cdot i_\xi\omega)+f\cdot i_\xi(d\omega)\\ &= df\wedge i_\xi\omega + f\cdot d(i_\xi\omega)+f\cdot i_\xi(d\omega)\\ &= df\wedge i_\xi\omega + f\cdot\mathcal{L}_\xi\omega.\end{aligned}$$

Behauptung. $\mathcal{L}_\xi$ ist die Lie-Ableitung aus (29.9).
Beide Seiten definieren eine Derivation vom Grad 0, also genügt es auf Funktionen und exakten 1-Formen auszutesten:

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}|_{t=0}(\mathrm{Fl}_t^\xi)^*f &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}f(\mathrm{Fl}_t^\xi) = \xi f = \mathcal{L}_\xi f,\\ \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(Fl_t^\xi)^*(df_p)(\eta_p) &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}df(T\,\mathrm{Fl}_t^\xi\,\eta_p)|(\mathrm{Fl}_t^\xi(p))\\ &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(T\,\mathrm{Fl}_t^\xi\,\eta_p)f = \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\eta_p(f\circ\mathrm{Fl}_t^\xi)\\ &= \eta_p\tfrac{d}{dt}|_{t=0}(f\circ\mathrm{Fl}_t^\xi) = \eta_p(\xi f)\\ &= \mathcal{L}_\xi(df)(\eta).\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis von (42.7). □

42.8 Die Frölicher-Nijenhuis und Nijenhuis-Richardson Klammer

Wir wollen nun allgemeine graduierte Derivationen genauer beschreiben. Dazu nennen wir eine graduierte Derivation $D\in\mathrm{Der}_k\,\Omega(M)$ algebraisch, wenn sie auf den 0-Formen $\Omega^0(M)=C^\infty(M,\mathbb{R})$ verschwindet. Für so eine Derivation gilt

$$D(f\,\omega) = D(f)\wedge\omega + (-1)^{0\cdot k}f\,D(\omega) = f\,D(\omega).$$

Folglich ist D tensoriell, d.h. $D(\omega)_x$ hängt nur von ω_x ab. Nach (42.4) ist D eindeutig durch $D|_{\Omega^1(M)}:\Omega^1(M)\to\Omega^{k+1}(M)$ bestimmt, und das ist eine faserweise lineare Abbildung in

$$\begin{aligned}L(T_x^*M,\bigwedge^{k+1}T_x^*M)&\cong T_xM\otimes\bigwedge^{k+1}T_x^*M\cong T_xM\otimes(\bigwedge^{k+1}T_xM)^*\cong\\ &\cong L(\bigwedge^{k+1}T_xM,T_xM)\cong L^{k+1}_{\mathrm{alt}}(T_xM;T_xM)\end{aligned}$$

welche glatt von $x\in M$ abhängt. Sei umgekehrt $K\in\Omega^{k+1}(M;TM)$ so eine vektorwertige $k+1$-Form. Dann können wir eine algebraische Derivation $D:=i_K\in\mathrm{Der}_k\,\Omega(M)$ durch folgende Formel definieren:

$$\begin{aligned}&(i_K\omega)(X_1,\dots,X_{k+l}):=\\ &=\frac{1}{(k+1)!(l-1)!}\sum_\sigma \mathrm{sign}(\sigma)\,\omega(K(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k+1)}),X_{\sigma(k+2)},\dots,X_{\sigma(k+l)}),\end{aligned}$$

wobei $\omega\in\Omega^l(M)$ und $X_1,\dots,X_{k+l}\in\mathfrak{X}(M)$. Die Abbildung $i:\Omega^{*+1}(M,TM)\to\mathrm{Der}_*(\Omega(M))$ definiert einen Isomorphismus auf eine Teil-Liealgebra, und macht somit

$\Omega^{*+1}(M, TM)$ selbst zu einer graduierten Liealgebra (deren Klammer auch Nijenhuis-Richardson Klammer heißt).

Beweis. Da $\bigwedge T_x^*M$ nach (38.6) die freie graduiert kommutative Algebra über dem Vektorraum T_x^*M ist, können wir $K \in \Omega^{k+1}(M;TM) \cong \Gamma(L(T^*M, \bigwedge^k T^*M)) \subseteq \Gamma(L(T^*M, \bigwedge T^*M) = L_{C^\infty(M,\mathbb{R})}(\Omega^1(M), \Omega(M))$ zu einer eindeutig bestimmten Derivation $D : \Omega(M) \to \Omega(M)$ ausdehnen.

Die angegeben Formel ergibt sich durch Anwendung auf Hackprodukte von 1-Formen. Und offensichtlich ist der graduierte Kommutator zweier algebraischer graduierter Derivationen selbst algebraisch, und somit gelten auch die übrigen Aussagen. □

Wir definieren für $K \in \Omega^k(M;TM)$ eine graduierte Derivation $\mathcal{L}_K := [i_K, d]$. Die Abbildung $\mathcal{L} : \Omega(M;TM) \to \mathrm{Der}(\Omega(M))$ ist injektiv, da $\mathcal{L}_K f = [i_K, d]f = i_K(df) \pm d(i_K f) = df \circ K$ für $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Proposition. *Jedes $D \in \mathrm{Der}_k(\Omega(M))$ hat eine eindeutige Darstellung $D = i_L + \mathcal{L}_K$ mit $L \in \Omega^{k+1}(M;TM)$ und $K \in \Omega^k(M;TM)$. Das Bild von $\mathcal{L}$ ist die Teil-Liealgebra aller D mit $[D, d] = 0$. Die Abbildung $\mathcal{L}$ induziert somit eine graduierte Liealgebra Struktur (die Frölicher-Nijenhuis Klammer) auf $\Omega^*(M;TM)$.*

Beweis. Für Vektorfelder $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ beschreibt $f \mapsto D(f)(X_1, \dots, X_k)$ eine Derivation $C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$. Folglich gibt es ein eindeutiges Vektorfeld $K(X_1, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}(M)$ mit $D(f)(X_1, \dots, X_k) = K(X_1, \dots, X_k)(f)$. Es ist $K \in \Omega^k(M;TM)$. Die definierende Gleichung für K ist $D(f) = df \circ K = i_K df = \mathcal{L}_K f$ für $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Also ist $D - \mathcal{L}_K$ algebraisch, d.h. $D = \mathcal{L}_K + i_L$ für ein eindeutiges $L \in \Omega^{k+1}(M;TM)$. Wir haben

$$0 = [i_K, 0] = [i_K, [d, d]] = [[i_K, d], d] + (-1)^{k-1}[d, [i_K, d]] = 2[\mathcal{L}_K, d]$$

Schließlich ist $df \circ [X, Y] = \mathcal{L}([X, Y])f = [\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)]f$. □

43. Divergenz, Rotation und Laplace

43.1 Differentialformen am $\mathbb{R}^3$

Für offenes $M \subseteq \mathbb{R}^m$ wissen wir, daß $\mathfrak{X}(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$ ist vermöge der Abbildung $\sum f^i(\frac{\partial}{\partial x^i}) \leftarrow\!\shortmid (f^i)_{i=1}^m$, wobei x^i die Standardkoordinaten sind. Ebenso ist $\Omega^m(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R})$ vermöge $* : f \cdot \mathrm{vol}_M \leftarrow\!\shortmid f$, mit $\mathrm{vol}_M = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$. Schließlich sieht der Isomorphismus $* \circ \sharp : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M) \to \Omega^{m-1}(M)$ nach (41.5) wie folgt aus: $*\sharp\xi = \sqrt{G}\sum_i(-1)^{i-1}\xi^i\, du^i \wedge \dots \wedge \widehat{du^i} \wedge \dots \wedge d^m$. Für $m = 3$ liefert das

$$\begin{aligned} *\sharp\xi &= \xi^1\, du^2 \wedge du^3 - \xi^2\, du^1 \wedge du^3 + \xi^3\, du^1 \wedge du^2 \\ &= \xi^1\, du^2 \wedge du^3 + \xi^2\, du^3 \wedge du^1 + \xi^3\, du^1 \wedge du^2 \end{aligned}$$

Zusammenfassend haben also folgende Isomorphismen:

1. $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$
2. $\Omega^1(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ via der Basis dx^1, dx^2, dx^3
3. $\Omega^2(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ via der Basis $dx^2 \wedge dx^3$, $dx^3 \wedge dx^1$, $dx^1 \wedge dx^2$
4. $\Omega^3(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R})$ via der Basis $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

Wie sieht nun d bezüglich dieser Basen aus?

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(M,\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathrm{Grad}"] \arrow[d, equal] & C^\infty(M,\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, "\cong"'] & C^\infty(M,\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\cong"'] & C^\infty(M,\mathbb{R}) \arrow[d, "\cong"'] \\
\Omega^0(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^2(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^3(M)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[d] & (f_1,f_2,f_3) \arrow[d] & (f_1,f_2,f_3) \arrow[d] & f \arrow[d] \\
f & \sum_i f_i dx^i & \begin{array}{c} f_1\, dx^2\wedge dx^3 \\ +f_2\, dx^3\wedge dx^1 \\ +f_3\, dx^1\wedge dx^2 \end{array} & f\, dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3
\end{tikzcd}$$

Der Operator d ist somit durch folgende Formeln gegeben:

$$d:\Omega^0(M)\ni f\mapsto df=\sum \tfrac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$$

$$\begin{aligned}
d:\Omega^1(M)\ni \sum f_i dx^i \mapsto \sum_i df_i\wedge dx^i &= \sum_{i,j} \tfrac{\partial f_i}{\partial x^j}\, dx^j\wedge dx^i \\
&= \big(\tfrac{\partial f_3}{\partial x^2}-\tfrac{\partial f_2}{\partial x^3}\big)\, dx^2\wedge dx^3 + \big(\tfrac{\partial f_1}{\partial x^3}-\tfrac{\partial f_3}{\partial x^1}\big)\, dx^3\wedge dx^1 \\
&\quad + \big(\tfrac{\partial f_2}{\partial x^1}-\tfrac{\partial f_1}{\partial x^2}\big)\, dx^1\wedge dx^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d:\Omega^2(M)\ni f_1\, dx^2\wedge dx^3 + f_2\, dx^3\wedge dx^1 + f_3\, dx^1\wedge dx^2 &\mapsto \\
\mapsto \Big(\sum \tfrac{\partial f_i}{\partial x^i}\Big)\, dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3
\end{aligned}$$

also stimmt er bis auf natürliche Isomorphismen überein

$$\begin{aligned}
\mathrm{Grad}\, f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\frac{\partial f}{\partial x^2},\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)\\
\mathrm{rot}(f_1,f_2,f_3) &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^2}-\frac{\partial f_2}{\partial x^3},\frac{\partial f_1}{\partial x^3}-\frac{\partial f_3}{\partial x^1},\frac{\partial f_2}{\partial x^1}-\frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right)\\
\mathrm{div}(f_1,f_2,f_3) &= \frac{\partial f_1}{\partial x^1}+\frac{\partial f_2}{\partial x^2}+\frac{\partial f_3}{\partial x^3}.
\end{aligned}$$

Es folgen direkt aus $d^2=0$ die bekannten Sätze aus der Vektoranalysis:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{Grad}\, f=0,\qquad \mathrm{div}\,\mathrm{rot}(f_i)=0$$

und ebenso folgt direkt aus dem Lemma von Poincaré (siehe (6) in (44.5)):

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}(f_i) = 0 \Rightarrow \exists\, f, \text{ sodaß lokal } \operatorname{Grad} f = (f_i) \text{ gilt.}\\
&\operatorname{div}(f_i) = 0 \Rightarrow \exists\, (g_i), \text{ sodaß lokal } \operatorname{rot}(g_i) = (f_i) \text{ gilt.}
\end{aligned}$$

43.2 Divergenz

Für eine orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit M erhalten wir nach (41.5) mittels dem $\sharp$ und dem Hodge-Sternoperator $*$ einen Isomorphismus $\mathfrak{X} \xrightarrow[\cong]{\sharp} \Omega^1 \xrightarrow[\cong]{*} \Omega^{m-1}$. Dieser stimmt mit der Abbildung $\xi \mapsto i_\xi \operatorname{vol}_M \in \Omega^{m-1}$ überein, denn dazu müssen wir $\omega \wedge i_\xi \operatorname{vol}_M = \langle \omega, \sharp\xi\rangle \operatorname{vol}_M$ beweisen, was wegen

$$\begin{aligned}
0 = i_\xi(0) = i_\xi(\omega \wedge \operatorname{vol}_M) = i_\xi\omega \cdot \operatorname{vol}_M + (-1)^1 \omega \wedge i_\xi \operatorname{vol}_M\\
\text{und } \langle \omega, \sharp\xi\rangle = \langle \flat\omega, \xi\rangle = \omega(\xi) = \iota_\xi(\omega)
\end{aligned}$$

gilt. Lokal kann man das auch wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
i_\xi \operatorname{vol}_M &= \iota_{\left(\sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial u^j}\right)}\left(\sqrt{G}\, du^1 \wedge \cdots \wedge du^m\right)\\
&= \sum_j \xi^j \sqrt{G}\, \iota_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \left(du^1 \wedge \cdots \wedge du^m\right)\\
&= \sum_j \xi^j \sqrt{G} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} du^1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{du^k(\tfrac{\partial}{\partial u^j})}_{\delta^k_j} \wedge \cdots \wedge du^m\\
&= \sqrt{G}\, \sum_j (-1)^{j-1} \xi^j du^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{du^j} \wedge \ldots \wedge du^m\\
&= *\omega, \qquad \text{wobei } \mathfrak{X}(M) \ni \xi \stackrel{\wedge}{=} \omega \in \Omega^1(M).
\end{aligned}$$

Die DIVERGENZ $\operatorname{DIV} \xi$ eines Vektorfelds ξ wird dann durch

$$\operatorname{div} \xi := *\Big(d\big(i_\xi \operatorname{vol}_M\big)\Big) = (* \circ d \circ * \circ \sharp)(\xi)$$

definiert. Also gilt:

$$\operatorname{div} \xi \cdot \operatorname{vol}_M = d(i_\xi \operatorname{vol}_M) = (d \circ i_\xi + i_\xi \circ d) \operatorname{vol}_M = \mathcal{L}_\xi \operatorname{vol}_M,$$

d.h. $\operatorname{div} \xi$ mißt die infinitesimale Änderung $\mathcal{L}_\xi \operatorname{vol}_M = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} (\mathrm{Fl}^\xi_t)^*(\operatorname{vol}_M)$ des infinitesimalen Volumens vol_M unter dem Fluß Fl^ξ des Vektorfelds ξ. Um auf eine explizite

Formel der Divergenz zu kommen, rechnen wir lokal:

$$
\begin{aligned}
\xi = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \mapsto &\\
&\mapsto i_\xi \operatorname{vol}_M = \sqrt{G} \sum_i (-1)^{i-1} \xi^i \, du^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{du^i} \wedge \ldots \wedge du^m \overset{\mathrm{d}}{\mapsto}\\
&\overset{\mathrm{d}}{\mapsto} \sum_i (-1)^{i-1} d(\sqrt{G}\xi^i) \wedge du^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{du^i} \wedge \ldots \wedge du^m + 0\\
&\quad = \sum_i (-1)^{i-1} \sum_{k=1}^m \frac{\partial(\sqrt{G}\xi^i)}{\partial u^k} \, du^k \wedge du^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{du^i} \wedge \ldots \wedge du^m\\
&\quad = \sum_i (-1)^{i-1} \frac{\partial(\sqrt{G}\xi^i)}{\partial u^i} (-1)^{i-1} du^1 \wedge \ldots \wedge du^m\\
&\quad = \left(\sum_i \frac{\partial(\sqrt{G}\xi^i)}{\partial u^i} \right) du^1 \wedge \ldots \wedge du^m \overset{*}{\mapsto}\\
&\overset{*}{\mapsto} \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_i \frac{\partial(\sqrt{G}\xi^i)}{\partial u^i}
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir:

$$
\operatorname{div} \xi = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_i \frac{\partial(\sqrt{G}\xi^i)}{\partial u^i}.
$$

43.3 Laplace-Operator

Wir betrachten nun den Laplaceoperator allgemein auf Riemann-Mannigfaltigkeiten. Die Abbildung d^* definiert durch:

$$
\begin{tikzcd}
\Omega^p \arrow[r, dotted, "(-1)^p\, d^*"] \arrow[d, "*"', "\cong"] & \Omega^{p-1} \arrow[d, "\cong"', "*"] \\
\Omega^{m-p} \arrow[r, "d"'] & \Omega^{m-p+1}
\end{tikzcd}
\quad \text{oder} \quad
\begin{tikzcd}
\Omega^p \arrow[r, dotted, "d^*"] \arrow[d, "*"', "\cong"] & \Omega^{p-1} \\
\Omega^{m-p} \arrow[r, "(-1)^{pm+m+1}\, d"'] & \Omega^{m-p+1} \arrow[u, "\cong", "*"']
\end{tikzcd}
$$

heißt Kodifferentialoperator. Man sollte beachten, daß sie keine graduierte Derivation ist. Das Vorzeichen ist so gewählt, daß d^* formal adjungiert zu d wird, wie wir in (49.1) zeigen werden. Um die Gleichwertigkeit der beiden Diagramme zu zeigen rechnet man wie folgt:

$$
\begin{aligned}
* \circ (-1)^p d^* = d \circ * \Leftrightarrow &\\
&\Leftrightarrow * \circ (-1)^{pm+m+1} d \circ * = * \circ (-1)^{pm+m+1} * \circ (-1)^p d^* =\\
&\qquad = (-1)^{(pm+m+1)+p+(p-1)(m-p+1)} d^* = d^*.
\end{aligned}
$$

Die Abbildung $\Delta := dd^* + d^*d : \Omega^p \to \Omega^p$ heißt Laplace-Beltrami-Operator. Sei M eine Mannigfaltigkeit offen im $\mathbb{R}^3$, dann ist:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "*"'] & \Omega^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "*"'] & \Omega^2 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "*"'] & \Omega^3 \arrow[d, "*"'] \\
\Omega^3 \arrow[r, "-d^*"'] \arrow[d, equal] & \Omega^2 \arrow[r, "d^*"'] \arrow[d, equal] & \Omega^1 \arrow[r, "-d^*"'] \arrow[d, equal] & \Omega^0 \arrow[d, equal] \\
C^\infty \arrow[r, "\mathrm{Grad}"'] & \mathfrak{X} \arrow[r, "\mathrm{rot}"'] & \mathfrak{X} \arrow[r, "\mathrm{div}"'] & C^\infty
\end{tikzcd}$$

Allgemein gilt für Funktionen $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ die Formel $\Delta f = -\operatorname{div} \operatorname{Grad} f$, denn

$$\begin{aligned}
\Delta f &= d^* df + 0 = (-1)^{1m+m+1} * d * df \\
&= - * d * \sharp \operatorname{Grad} f \overset{(43.2)}{=\!=} - * d i_{gradf} \operatorname{vol}_M \overset{(43.2)}{=\!=} - \operatorname{div}(\operatorname{Grad} f).
\end{aligned}$$

Der hier definierte Laplace-Operator hat ein "unorthodoxes" Vorzeichen, welches dazu dient, ihn positiv zu machen, siehe (49.1).

43.4 Satz von Frobenius, 2. Version.
Es sei E ein Teilvektorbündel von $TM \to M$. Dann gilt: E ist integrabel $\Leftrightarrow d(\Omega_E(M)) \subseteq \Omega_E(M)$, wobei $\Omega_E(M) = \{\omega \in \Omega(M) : \omega(\xi_1, \ldots, \xi_k) = 0$, falls im $\xi_i \subseteq E\}$

Beweis. ($\Rightarrow$) Wir müssen zeigen, daß $d\omega \in \Omega_E(M)$ für $\omega \in \Omega_E(M)$ ist:

$$\begin{aligned}
d\omega(\xi_0, \ldots, \xi_k) = \sum_{i=0}^{k} &(-1)^i \xi_i \omega(\xi_0, \ldots, \widehat{\xi_i}, \ldots, \xi_k) + \\
&+ \sum_{j>i} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \ldots, \widehat{\xi_i}, \ldots, \widehat{\xi_j}, \ldots, \xi_k) = 0,
\end{aligned}$$

da E integrabel, also $\operatorname{Bild} \xi_i \subseteq E$ folgt, daß $[\xi_i, \xi_j] \subseteq E$ ist.
($\Leftarrow$) Seien $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ mit $\operatorname{Bild} \xi$, $\operatorname{Bild} \eta \subseteq E$. Zu zeigen ist: $\operatorname{Bild}[\xi, \eta] \subseteq E$. Angenommen $[\xi, \eta]_p \notin E_p \subseteq T_pM$. Sei $\omega_p \in (T_pM)^*$ so gewählt, daß $\omega(E_p) = 0$ und $\omega_p([\xi, \eta]) = 0$. Lokal ist $E = M \times E_p$, dort ist ω lokal definiert. Durch Multiplikation von ω mit einer C^∞-Funktion, deren Träger ganz im Definitionsbereich von ω liegt, wird ω zu einer global definierten 1-Form.

$$\begin{aligned}
d\omega \in \Omega^2_E(M) \ \Rightarrow\ 0 = d\omega(\xi, \eta) = \xi\omega(\eta) - \eta\omega(\xi) - \omega([\xi, \eta]) = 0 - \omega([\xi, \eta]) \ \Rightarrow \\
\Rightarrow\ \omega([\xi, \eta]) = 0, \text{ ein Widerspruch} \qquad \square
\end{aligned}$$

44. Kohomologie

44.1 Definition der Kohomologie

Es sei $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$ die äußere Ableitung.

1. $Z^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) : d\omega = 0\}$, der Raum der geschlossenen Differentialformen (oder auch Kozykeln);

2. $B^k(M) := \{d\omega : \omega \in \Omega^{k-1}(M)\}$, der Raum der exakten Differentialformen (oder auch Koränder);
3. $H^k(M) := Z^k(M)/B^k(M)$, die k-te De-Rham Kohomologie von M;
4. $H(N) := \bigoplus_k H^k(N)$, die De-Rham Kohomologie von M;
5. $b_k(M) := \dim H^k(M)$, die k-te Bettizahl;
6. $f_M(t) := \sum_k b_k t^k$, das Poincaré-Polynom; wohldefiniert, falls alle b_k endlich sind;
7. $\chi(M) := f_M(-1) = \sum(-1)^k b_k$, die Euler-Charakteristik von M.

44.2 Definition (Kohomologie-Funktor)

Sei $g : M \to N$ glatt und $g^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$ so gilt $g^*(d\omega) = d(g^*\omega)$, somit $g^* : Z^k(N) \to Z^k(M)$ und $g^* : B^k(N) \to B^k(M)$. Daher ist die Definition folgender linearen Abbildung sinnvoll:

$$g^* : H(N) \to H(M),\ g^* : [\omega] \mapsto [g^*\omega].$$

44.3 Satz (Kohomologie-Axiome). *Die Kohomologie hat folgende Eigenschaften:*

1. *$H^0(Pkt) = \mathbb{R}$, $H^k(Pkt) = 0$ für $k \neq 0$ (*Dimensionsaxiom*)*
2. *$f, g : M \to N$ glatt, $f \sim g \Rightarrow f^* = g^*$ (*Homotopieaxiom*)*
3. *sei $M = \coprod_\alpha M_\alpha \Rightarrow H^k(M) = \prod_\alpha H^k(M_\alpha)$ (disjunkte Vereinigung)*
4. *sei $M = U \cup V$, wo $U, V \subseteq M$ offen, dann existieren Abbildungen δ_k, die die folgende lange Sequenz exakt machen:*

$$\ldots \to H^k(M) \xrightarrow{(i_U^*, i_V^*)} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{(j_U^* - j_V^*)} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta_k}$$
$$\xrightarrow{\delta_k} H^{k+1}(M) \to H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \to H^{k+1}(U \cap V) \to \ldots$$

mit den Inklusionen $i_U : U \hookrightarrow U \cup V$, $i_V : V \hookrightarrow U \cup V$, $j_U : U \cap V \hookrightarrow U$ und $j_V : U \cap V \hookrightarrow V$. Diese Sequenz heißt Mayer-Vietoris Sequenz *und δ^k heißt* Einhängungsoperator.

Ein Folge linearer Abbildungen $\cdots \xrightarrow{f_k} E_k \xrightarrow{f_{k+1}} \cdots$ heißt exakt, falls $\operatorname{Bild} f_k = \operatorname{Ker} f_{k+1}$ für alle k ist.

Beweis.

(1) Klar, da $\Omega^k(\mathrm{Pkt}) = \{0\}$ for $k \neq 0$ und $\Omega^0(\mathrm{Pkt}) = C^\infty(\mathrm{Pkt}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(2) Sei $H \in C^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$ die Homotopie zu f, g. Es ist also $H(0, x) = f(x)$ und $H(1, x) = g(x)$. Für $\omega \in \Omega^k(N)$ ist $H^*\omega \in \Omega^k(M \times \mathbb{R})$. Sei $j_t : M \to M \times \mathbb{R}$ definiert durch $j_t(x) := (x, t)$. Dann ist $H \circ j_0 = f$ und $H \circ j_1 = g$ und somit

$$g^* - f^* = (H \circ j_1)^* - (H \circ j_0)^* = (j_1^* - j_0^*) \circ H^*.$$

Für $\varphi \in \Omega^k(M \times \mathbb{R})$ ist $j_t^*\varphi \in \Omega^k(M)$ und $t \mapsto j_t^*\varphi$ ist eine Kurve in $\Omega^k(M)$ und somit

$$(j_1^* - j_0^*)\varphi = \int_0^1 \frac{d}{dt} j_t^*\varphi dt = \int_0^1 j_t^* \mathcal{L}_\xi \varphi dt,$$

wobei $\xi := \frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{R})$ das Einheitsvektorfeld in $\mathbb{R}$-Richtung bezeichnet. Somit definieren wir Faserintegration I_0^1 durch

$$I_0^1 : \Omega^k(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^k(M),\ I_0^1(\varphi) := \int_0^1 j_t^* \varphi dt.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
j_{t_1+t_2} &= \mathrm{Fl}^\xi_{t_2} \circ j_{t_1} \text{ für } t_1, t_2 \in \mathbb{R} \;\Rightarrow \\
\Rightarrow\; \frac{d}{dt_1} j_{t_1}^* \varphi &= \frac{d}{dt_2}|_{t_2=0} (j_{t_1+t_2})^* \varphi = \frac{d}{dt_2}|_{t_2=0} (\mathrm{Fl}^\xi_{t_2} \circ j_{t_1})^* \varphi \\
&= \frac{d}{dt_2}|_{t_2=0} \Big(j_{t_1}^* \circ (\mathrm{Fl}^\xi_{t_2})^* \Big) \varphi = j_{t_1}^* \frac{d}{dt_2}|_0 (\mathrm{Fl}^\xi_{t_2})^* \varphi = j_{t_1}^* \mathcal{L}_\xi \varphi; \\
(d \circ I_0^1)(\varphi) &= d\Big(\int_0^1 j_t^* \varphi dt\Big) = \int_0^1 (d j_t^* \varphi) dt = \int_0^1 j_t^* d\varphi dt \\
&= I_0^1 d\varphi = (I_0^1 \circ d)(\varphi); \\
(j_1^* - j_0^*)\varphi &== \int_0^1 j_t^* \mathcal{L}_\xi \varphi dt = I_0^1 \mathcal{L}_\xi \varphi = I_0^1 (d \circ i_\xi + i_\xi \circ d)\varphi.
\end{aligned}$$

Wir definieren nun den Homotopie-Operator $G : \Omega^k(N) \to \Omega^{k-1}(M)$ mit $G := I_0^1 \circ i_\xi \circ H^*$, d.h.:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^k(N) \arrow[r, dotted, "G"] \arrow[d, "H^*"'] & \Omega^{k-1}(M) \\
\Omega^k(M \times \mathbb{R}) \arrow[r, "i_\xi"] & \Omega^{k-1}(M \times \mathbb{R}) \arrow[u, "I_0^1"']
\end{tikzcd}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
g^* - f^* &= (j_1^* - j_0^*) \circ H^* \\
&= I_0^1 \circ (d \circ \iota_\xi + \iota_\xi \circ d) \circ H^* \\
&= (d \circ I_0^1 \circ i_\xi + I_0^1 \circ i_\xi \circ d) \circ H^* \\
&= d \circ (I_0^1 \circ i_\xi \circ H^*) + (I_0^1 \circ i_\xi \circ H^*) \circ d = G \circ d + d \circ G.
\end{aligned}$$

und somit ist $g^*\omega - f^*\omega = Gd\omega + dG\omega = dG\omega$ exakt, falls $d\omega = 0$. Also ist $g^* - f^* = 0 : H(N) \to H(M)$.

(3) Klar, da $\Omega^k(\coprod_\alpha M_\alpha) = \prod_\alpha \Omega^k(M_\alpha)$.

(4) Wir zeigen zuerst, daß

$$0 \to \Omega^k(U \cup V) \xrightarrow{(i_U^*, i_V^*)} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} \Omega^k(U \cap V) \to 0$$

exakt ist.

Die Abbildung $f := (i_U^*, i_V^*)$ ist klarerweise injektiv mit $\mathrm{Bild}(i_U^*, i_V^*) = \mathrm{Ker}(j_U^* - j_V^*)$. Die Abbildung $g := (j_U^* - j_V^*)$ ist surjektiv: Sei dazu $\{h_U, h_V\}$ eine Zerlegung der Eins zur Überdeckung $\{U, V\}$ und $\varphi \in \Omega(U \cap V)$. Mit $\varphi_U := (h_U \varphi)|_U \in \Omega(U)$ und $\varphi_V := (-h_V \varphi)|_V \in \Omega(V)$ gilt:

$$(j_U^* - j_V^*)(\varphi_U, \varphi_V) = \varphi_U - \varphi_V = (h_U + h_V)\varphi = \varphi.$$

Also ist die Sequenz exakt.

Um daraus die lange exakte Sequenz in der Kohomologie zu erhalten können wir das nachfolgende allgemeine Resultat verwenden. □

44.4 Theorem. *Es sei* $0 \to C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \to 0$ *eine kurze exakte Folge von Ketten-Abbildungen, d.h.* C, C' *und* C'' *sind Kettenkomplexe (i.e.* $\mathbb{Z}$*-graduierte Vektorräume mit Randoperatoren* ∂ *vom Grad 1, welche* $\partial^2 = 0$ *erfüllen) und die verbindenden linearen Abbildungen* f *und* g *sind vom Grad 0 und vertauschen mit den Randoperatoren.*
Dann erhalten wie eine lange exakte Folge in Homologie:

$$\dots \xrightarrow{H_{q+1}(g)} H_{q+1}(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_q(C') \xrightarrow{H_q(f)} H_q(C) \xrightarrow{H_q(g)} H_q(C'') \xrightarrow{\partial_*} \dots$$

Beweis. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_q \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"'] & C_q \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\partial"'] & C''_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{q-1} \arrow[r, "f"] & C_{q-1} \arrow[r, "g"] & C''_{q-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Es sei $\partial_*[z''] := [(f^{-1} \circ \partial \circ g^{-1})(z'')]$ für $z'' \in C''$ mit $\partial z'' = 0$.
Wir zuerst zeigen, daß es möglich ist Elemente in den entsprechenden inversen Bildern zu wählen und dann zeigen wir, daß die resultierende Klasse nicht von irgendeiner der Wahlen abhängt.
Sei dazu $z''_q \in C''_q$ ein Zykel, d.h. $\partial z''_q = 0$. Da g surjektiv ist finden wir ein $x_q \in C_q$ mit $gx_q = z''_q$. Da $g\partial x_q = \partial g x_q = \partial z''_q = 0$, finden wir ein $x'_{q-1} \in C'_{q-1}$ mit $fx'_{q-1} = \partial x_q$. Und daher ist $x'_{q-1} \in f^{-1}\partial g^{-1} z''_q$. Weiters ist $f\partial x'_{q-1} = \partial f x'_{q-1} = \partial\partial x_q = 0$. Da f injektiv ist erhalten wir $\partial x'_{q-1} = 0$ und daher können wir die Klasse $\partial z''_q := [x'_{q-1}]$ bilden.

$$\begin{tikzcd}
 & x_q \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\partial"'] & z''_q \arrow[d, "\partial"'] \\
x'_{q-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"'] & x_{q-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \\
\partial x'_{q-1} \arrow[r, "f"] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Nun die Unabhängigkeit von allen Wahlen. Sei dazu $[z''_q] = [\bar z''_q]$, d.h. $\exists\, x''_{q+1} : \partial x''_{q+1} = z''_q - \bar z''_q$. Wähle $x_q, \bar x_q \in C_q$ wie zuvor, so daß $gx_q = x''_q$ und $g\bar x_q = \bar x''_q$. Ebenso wie zuvor wählen wir $x'_{q-1}, \bar x'_{q-1} \in C'_{q-1}$ mit $fx'_{q-1} = \partial x_q$ und $f\bar x'_{q-1} = \partial \bar x_q$. Wir haben zu zeigen, daß $[x'_{q-1}] = [\bar x'_{q-1}]$. Dazu wählen wir $x_{q+1} \in C_{q+1}$ mit $gx_{q+1} = x''_{q+1}$. Dann ist $g\partial x_{q+1} = \partial g x_{q+1} = \partial x''_{q+1} = z''_q - \bar z''_q = g(x_q - \bar x_q)$ und daher existiert ein $x'_q \in C_q$ mit $fx'_q = \partial x_{q+1} - x_q + \bar x_q$. Weiters ist $f\partial x'_q = \partial f x'_q = \partial(\partial x_{q+1} - x_q + \bar x_q) = 0 - \partial x_q + \partial \bar x_q = -f(x'_{q-1} - \bar x'_{q-1})$. Da f injektiv ist, haben wir $x'_{q-1} = \bar x'_{q-1} + \partial x'_q$, d.h. $[x'_{q-1}] = [\bar x'_{q-1}]$.
Exaktheit bei $H_q(C')$:
$(\subseteq)$ $f_*\partial_*[z''] = [ff^{-1}\partial g^{-1} z''] = [\partial g^{-1} z''] = 0$.

($\supseteq$) Es sei $\partial z' = 0$ und $0 = f_*[z'] = [fz']$, d.h. $\exists\, x$: $\partial x = fz'$. Dann erfüllt $x'' := gx$ sowohl $\partial x'' = \partial gx = g\partial x = gfz' = 0$ als auch $\partial_*[x''] = [f^{-1}\partial g^{-1}gx] = [f^{-1}\partial x] = [z']$.
Exaktheit bei $H_q(C)$:
($\subseteq$) da $g \circ f = 0$.
($\supseteq$) Es sei $\partial z = 0$ mit $0 = g_*[z] = [gz]$, d.h. $\exists\, x''$: $\partial x'' = gz$. Dann $\exists\, x$: $gx = x''$. Daher ist $gz = \partial x'' = \partial gx = g\partial x \Rightarrow \exists\, x'$: $fx' = z - \partial x \Rightarrow f\partial x' = \partial fx' = \partial(z - \partial x) = 0$ und $f_*[x'] = [fx'] = [z - \partial x] = [z]$.
Exaktheit bei $H_q(C'')$:
($\subseteq$) Wir haben $\partial_* g_*[z] = [f^{-1}\partial g^{-1}gz] = [f^{-1}\partial z] = [f^{-1}0] = 0$.
($\supseteq$) Es sei $\partial z'' = 0$ und $0 = \partial_*[z'']$, d.h. $\exists\, x'$: $\partial x' = z'$, wobei $z' \in f^{-1}\partial g^{-1}z''$, d.h. $\exists\, x$: $gx = z''$ und $fz' = \partial x$. Dann ist $\partial(x - fx') = fz' - f(\partial x') = 0$ und $g(x - fx') = z'' - 0$, d.h. $g_*[x - fx'] = [z'']$. □

44.5 Bemerkungen

1. Die De-Rham Kohomologie ist durch die Eigenschaften aus Satz (44.3) schon eindeutig bestimmt, siehe [**42**, Kap.5].
2. Für die 0. Kohomologie gilt:
$$\begin{aligned} H^0(M) &= \{f \in C^\infty(M,\mathbb{R}) : df = 0\} \\ &= \{f \in C^\infty(M,\mathbb{R}) : f \text{ ist lokal konstant}\} \\ &= \mathbb{R}^\#, \end{aligned}$$
wobei # die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von M ist.
3. Falls $k < 0$ oder $\dim M < k$ so ist $H^k(M) = 0$.
4. Seien M und N homotopieäquivalent, d.h. es gibt glatte Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to M$ mit $f \circ g \sim \mathrm{id}_N$ und $g \circ f \sim \mathrm{id}_M$. Die Abbildungen $H(f) := f^* : H(N) \to H(M)$ und $H(g) := g^* : H(M) \to H(N)$ sind dann inverse Isomorphismen. Ein Beispiel homotopieäquivalenter Räume sind das offene Möbiusband und der Zylinder.
5. Ist insbesondere $A \subseteq M$ ein Deformationsretrakt, d.h. eine Homotopie $h : M \times \mathbb{R} \to M$ existiert, sodaß $h(\cdot, 1) = \mathrm{id}_M$ und $h(\cdot, 0)|_A = \mathrm{id}_A$, so gilt $H(M) \cong H(A)$. Z.B. ist die Basis jedes Vektorbündels vermöge der Einbettung als Nullschnitt ein Deformationsretrakt des Totalraums.
6. Ist M kontrahierbar, d.h. ein Punkt p in M existiert, welcher ein Deformationsretrakt von M ist, dann gilt: $H(M) \cong H(\{p\})$, d.h. jede geschlossene Form ist exakt (dies ist das versprochene Poincaré-Lemma). Falls $M = \mathbb{R}^m$ – oder allgemeiner $M \subset \mathbb{R}^m$ sternförmig ist – so ist $h : M \times \mathbb{R} \to M$ mit $(x,t) \mapsto t \cdot x$ eine Kontraktion von M zu einen Punkt, also ist M kontrahierbar, Lokal ist also jede Mannigfaltigkeit kontrahierbar.
7. Ist M einfach zusammenhängend, dann ist $H^1(M) = 0$. Um dies zu zeigen geht man so vor: Sei $\omega \in \Omega^1(M)$ mit $d\omega = 0$. Wir wollen ein $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M,\mathbb{R})$ finden mit $df = \omega$. Dazu wählen wir einen fixen Punkt $x_0 \in M$ und suchen für jeden anderen Punkt $x \in M$ eine Kurve c, welche x_0 mit x verbindet, und definieren
$$f(x) := \int_c \omega = \int_0^1 c^*(\omega).$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Kurve ab, denn die Zusammensetzung mit einer zweiten verkehrt durchlaufenen Kurve liefert eine geschlossene Kurve c. Diese ist nach Voraussetzung homotop zur konstanten Kurve konst_{x_0}, also ist $[c^*(\omega)] = [(\mathrm{konst}_{x_0})^*(\omega)]$. Die beiden Formen auf $[0,1]$ unterscheiden sich also nur um eine exakte Form dg, und somit ist:

$$\int_c \omega = \int_0^1 c^*(\omega) = \int_0^1 (\mathrm{konst}_{x_0})^*(\omega) = \int_0^1 0 = 0.$$

Da lokal so ein f mit $df = \omega$ immer existiert, folgt daß das oben definierte f auch glatt ist. Und wegen

$$df(c'(0)) = (f \circ c)'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_0^1 c(t\cdot)^*(\omega) = \omega(c'(0))$$

ist es auch die gesuchte Stammfunktion.

8. Falls $\ldots \to E_i \xrightarrow{T_i} E_{i+1} \to \ldots$ eine exakte Sequenz von endlichdimensionalen Vektorräumen ist, so folgt durch Aufsummieren der Gleichung

$$\begin{aligned} \dim(E_i) &= \dim(\operatorname{Ker} T_i) + \dim(\operatorname{Bild}(T_i)) \\ &= \dim(\operatorname{Ker} T_i) + \dim(\operatorname{Ker} T_{i+1}) \end{aligned}$$

die Identität

$$\sum_i (-1)^i \dim E_i = 0$$

Die Mayer-Vietoris Sequenz impliziert also, daß für die Euler-Charakteristik folgendes gilt:

$$\chi(U \cup V) + \chi(U \cap V) = \chi(U) + \chi(V)$$

9. Da $\mathbb{R}^m$ kontrahierbar ist, ist seine Euler-Charakteristik jene des Punktes also 1 nach Dimensionsaxiom (44.3.1). Es ist $\chi(S^0) = 2$ wegen (44.3.3). Nach dem vorigen Punkt ist für jeden Punkt $p \in M$ einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \chi(M \setminus \{p\}) + \chi(\mathbb{R}^m) - \chi(\mathbb{R}^m \setminus \{p\}) \\ &= \chi(M \setminus \{p\}) + \chi(\{p\}) - \chi(S^{m-1}). = \chi(M \setminus \{p\}) + 1 - \chi(S^{m-1}). \end{aligned}$$

Für die Sphären erhalten wir somit

$$\chi(S^m) = \chi(S^m \setminus \{p\}) + 1 - \chi(S^{m-1}) = 2 - \chi(S^{m-1}).$$

Kompakte 2-dimensionale zusammenhangende Mannigfaltigkeiten vom Geschlecht g erhält man aus S^2 durch Ankleben von g Henkeln oder g Möbiusbändern, also ergibt sich rekursive im nicht-orientierbaren Fall

$$\begin{aligned} \chi(M_g) &= \chi(M_{g-1} \setminus \{p\} \cup \text{Möb}) = \chi(M_{g-1}) - 1 + \chi(\text{Möb}) - \chi(S^1) \\ &= \chi(M_{g-1}) - 1 = 2 - (g-1) - 1 = 2 - g, \end{aligned}$$

und im orientierbaren Fall

$$\begin{aligned} \chi(M_g) &= \chi(M_{g-1} \setminus \{p_-, p_+\} \cup S^1 \times \mathbb{R}) = \chi(M_{g-1}) - 2 + \chi(S^1 \times \mathbb{R}) - \chi(S^1 \sqcup S^1) \\ &= \chi(M_{g-1}) - 2 = 2 - 2(g-1) - 2 = 2 - 2g \end{aligned}$$

10. Die Euler-Charakteristik χ einer Mannigfaltigkeit, läßt sich auch dadurch berechnen, daß man sie TRIANGULIERT, d.h. in Simplexe zerlegt. Sei γ_i die Anzahl der verwendeten Simplexe der Dimension i, dann gilt: $\chi = \sum_i (-1)^i \gamma_i$. Insbesonders gilt für jeden Polyeder, daß die Anzahl der Ecken minus die Anzahl der Kanten plus die Anzahl der Seitenflächen gleich $2 = \chi(S^2)$ ist.
11. Eine weitere Möglichkeit die Euler-Charakteristik zu berechnen ist mittels MORSE-FUNKTIONEN, das sind Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$, deren kritische Punkte nicht degeneriert sind, d.h. die Hessesche Matrix ist definit. Sei $\beta_k(f)$ die Anzahl der kritischen Punkte, in denen die Hessesche Matrix genau k negative Eigenwerte hat, so gelten die Morse-Ungleichungen, siehe [**57**, S.161–162]

$$\beta_k(M) \le \beta_k(f)$$
$$\sum_k (-1)^k \beta_k(f) = \chi(M).$$

12. Noch allgemeiner kann man für ein Vektorfeld ξ mit isolierten Nullstellen (z.B. das Gradientenfeld einer Morsefunktion) einen Index $\operatorname{ind}_x(\xi)$ in diesen Punkten definieren, siehe [**57**, S.133]. Und es gilt dann nach einen Satz von Hopf, siehe [**57**, S.164] $\chi(M) = \sum_{\xi(x)=0} \operatorname{ind}_x(\xi)$.
Falls es also ein nirgends verschwindendes Vektorfeld gibt, so muß die Eulercharakteristik $\chi(M)$ verschwinden. Dies ziegt den Igelsatz (50.11).
Man kann umgekehrt zeigen, daß auf jeder kompakten, orientierten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit mit $\chi(M) = 0$ ein Nullstellenfreies Vektorfeld existiert, siehe [**57**, S.137].
13. Die Kohomologie der Sphären S^n ist:

$$H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & 1 \le k \le n-1 \\ \mathbb{R} & k = n \\ 0 & n+1 \le k \end{cases}$$

also hat das Poincaré-Polynom die Form: $f_M(t) = 1 + t^n$.
(i) $H^0(S^n) = \mathbb{R}$ folgt aus (2).
(ii) $H^k(S^n) = 0$ für $k > n$ gilt immer, vergl. (3).
(iii) Wir müssen noch zeigen: $H^k(S^n) \cong H^{k+1}(S^{n+1})$ für $1 \le k$, und $H^1(S^n) = 0$ für $n > 2$. Verwendet man dann noch $H^1(S^1) = \mathbb{R}$ so folgen daraus die restlichen Behauptungen. $S^n = U \cup V$, wobei $U = \{x \in S^n : -1 \le \langle x, a\rangle\}$ und $V = \{x \in S^n : +1 \ge \langle x, a\rangle\}$. Also ist $U \cap V \cong S^{n-1} \times]-1, +1[$ und somit

$H(U \cap V) = H(S^{n-1})$. Die Mayer-Vietoris Sequenz (für $k \geq 1$) ist

$$\begin{array}{l}
\vdots \\
\downarrow \\
H^k(U) \oplus H^k(V) \cong H^k(Pkt) \oplus H^k(Pkt) \\
\downarrow \\
H^k(U \cap V) \cong H^k(S^{n-1}) \\
\downarrow \delta \\
H^{k+1}(S^n) \\
\downarrow \\
H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \cong H^{k+1}(Pkt) \oplus H^{k+1}(Pkt) \\
\downarrow \\
\vdots
\end{array}$$

Also ist $H^k(S^{n-1}) \xrightarrow[\cong]{\delta} H^{k+1}(S^n)$ für $0 < k < n$. Der Anfang der Sequenz sieht so aus:

$$\begin{array}{c}
0 \\
\downarrow \\
H^0(S^n) \cong \mathbb{R} \\
\downarrow \\
H^0(Pkt) \oplus H^0(Pkt) \cong \mathbb{R}^2 \\
\downarrow \\
H^0(S^{n-1}) \cong \mathbb{R} \\
\downarrow \\
H^1(S^n) \\
\downarrow \\
0
\end{array}$$

Folglich ist $H^1(S^n) = 0$ für $n \geq 2$. Die Gleichung $H^1(S^1) = \mathbb{R}$ läßt sich ganz analog aus der folgenden Sequenz ableiten:

$$
\begin{array}{c}
0 \\
\downarrow \\
H^0(S^1) \cong \mathbb{R} \\
\downarrow \\
H^0(Pkt) \oplus H^0(Pkt) \cong \mathbb{R}^2 \\
\downarrow \\
H^0(S^0) \cong H^0(Pkt) \oplus H^0(Pkt) \cong \mathbb{R}^2 \\
\downarrow \\
H^1(S^1) \\
\downarrow \\
0
\end{array}
$$

45 Klassische Mechanik

45.1 Kraftgesetz von Newton

Für die KRAFT F, die MASSE m, und die BESCHLEUNIGUNG $\ddot{x}$ gilt folgende Formel:

$$F(x) = m \cdot \ddot{x}.$$

Wir beschränken uns hier und im Folgendem der Einfachheit halber auf zeitunabhängige Kräfte. Auch setzen wir $m = 1$, denn ein allgemeines m läßt sich in F absorbieren.

Sei vorerst der Raum $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ der Orte x offen. Die Funktion $F : Q \to \mathbb{R}^n$ kann dann als Vektorfeld interpretiert werden. Besonders wichtig ist der Fall, wo F ein GRADIENTEN-FELD ist, d.h. ein POTENTIAL $U : Q \to \mathbb{R}$ existiert mit $F = -\operatorname{Grad} U$. Dies ist eine lokale (INTEGRABILITÄTS-)Bedingung $dF = 0$ und F und eine globale (KOHOMOLOGISCHE) Bedingung $H^1(Q) = 0$ an Q, siehe (44).

Die einfachste Bewegungsinvariante dieser DG ist die ENERGIE

$$E(x, v) := \tfrac{|v|^2}{2} + U(x).$$

Dabei heißt $m\frac{|v|^2}{2}$ die KINETISCHE und $U(x)$ die POTENTIELLE Energie.

Die Newtonsche Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 2-ter Ordnung. Eine solche läßt sich als (System) gewöhnliche(r) Differentialgleichung(en) 1-ter Ordnung auf $TQ = Q \times \mathbb{R}^n$ umschreiben indem man als zusätzliche Variable den Geschwindigkeitsvektor $v = \dot{x}$ verwendet:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &=: v \\
\dot{v} &= F(x).
\end{aligned}
$$

45.2 Newtonsches Gesetz auf Mannigfaltigkeiten

Wie wir in (25.1) bemerkt haben, wird eine gewöhnliche Differentialgleichung 1-ter Ordnung auf einer Mannigfaltigkeit Q durch ein Vektorfeld $\xi : Q \to TQ$ beschrieben, denn die erste Ableitung einer Kurve $x : \mathbb{R} \to Q$ ist eine Kurve $\dot{x} : \mathbb{R} \to TQ$ mit Werten im Tangentialbündel TQ. Wenn $(x^1, \dots, x^n)$ lokale Koordinaten auf Q sind, dann bilden die Derivationen $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ eine Basis des Tangentialraums T_xQ. Seien $(v^1, \dots, v^n)$ die Koordinaten bezüglich dieser Basis, so sind $(x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n)$ lokale Koordinaten des Tangentialbündels TQ, die Fußpunkt-Abbildung $\pi_Q : TQ \to Q$ ist in lokalen Koordinaten durch die Zuordnung

$$(x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$$

gegeben und die Ableitung der Kurve $t \mapsto x(t) \in Q$ ist durch

$$t \mapsto (x^1(t), \dots, x^n(t); \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t))$$

gegeben.

Was entspricht einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2-ter Ordnung, wie sie das Kraftgesetz darstellt? Die zweite Ableitung einer Kurve $x : \mathbb{R} \to Q$ ist eine Kurve $\ddot{x} : \mathbb{R} \to T(TQ) =: T^2Q$ mit Werten im 2-ten Tangentialbündel von Q. Seien $(x^1, \dots; v^1, \dots)$ obige lokale Koordinaten auf TQ, dann bilden die Derivationen $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots; \frac{\partial}{\partial v^1}, \dots)$ eine Basis des Tangentialraums $T_{(x,v)}(TQ)$ an die Mannigfaltigkeit TQ im Punkte $(x, v) \in TQ$. Seien $(y^1, \dots, y^n; w^1, \dots, w^n)$ die Koordinaten bezüglich dieser Basis, so sind $(x^1, \dots; v^1, \dots; y^1, \dots; w^1, \dots)$ lokale Koordinaten des zweiten Tangentialbündels T^2Q. Bezüglich dieser Koordinaten ist die Fußpunkt-Abbildung $\pi_{TQ} : T^2Q \to TQ$ gegeben durch $(x^1, \dots; v^1, \dots; y^1, \dots; w^1, \dots) \mapsto (x^1, \dots; v^1, \dots,$ die Ableitung $T\pi_Q : T^2Q \to TQ$ der Fußpunkt-Abbildung $\pi_Q : TQ \to Q$ durch $(x^1, \dots; v^1, \dots; y^1, \dots; w^1, \dots) \mapsto (x^1, \dots; y^1, \dots,$ und schließlich sieht die zweite Ableitung der Kurve $t \mapsto x(t) \in Q$ wie folgt aus:

$$\ddot{x} = (x^1, \dots, x^n; \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n; \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n; \ddot{x}^1, \dots, \ddot{x}^n).$$

Eine gewöhnliche Differentialgleichung 2-ter Ordnung $\ddot{x} = X(x, \dot{x})$ ist demnach durch eine Abbildung $X : TQ \to T(TQ)$ gegeben, welche in Koordinaten folgendes Aussehen hat:

$$X(x, v) = (x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n; v^1, \dots, v^n; X^1(x, v), \dots, X^n(x, v)).$$

Oder unter Verwendung der Basis-Vektorfelder

$$X(x, v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^n X^i(x, v) \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

Die Abbildung $X : TQ \to T(TQ)$ ist also ein Vektorfeld auf TQ, welches zusätzlich die Eigenschaft hat, daß auch $T\pi_Q \circ X = \mathrm{id}$ ist, also die 2-te und 3-te Komponente gleich ist. Man kann diese zusätzliche Bedingung auch durch $\kappa_Q \circ X = X$ formulieren, wobei $\kappa_Q : T^2Q \to T^2Q$ den kanonischen Flip bezeichnet, welcher gerade die beiden mittleren Komponenten vertauscht (Dieser ist global definiert !). Ein Vektorfeld X auf TQ mit dieser zusätzlichen Eigenschaft nennt man einen Spray. Diese beschreiben also gerade gewöhnliche Differentialgleichungen 2-ter Ordnung auf Q. Für die

Lösungskurven $c : \mathbb{R} \to TQ$ der entsprechenden Differentialgleichung 1-ter Ordnung auf TQ bedeutet dies, daß

$$c = \tfrac{d}{dt}(\pi \circ c)$$

ist, wobei $\pi : TQ \to Q$ die Fußpunkt-Abbildung ist.

45.3 Variationsproblem

Mit der Philosophie, daß die Natur minimalistisch vorgeht, wird man versucht sein ein Funktional am Raum der Kurven zu finden, dessen kritische Punkte gerade die Lösungskurven der Differentialgleichung sind. Betrachten wir vorerst wieder den Fall, daß $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist. Die KRITISCHEN PUNKTE eines Funktionals I der Gestalt

$$I(x) = \int_a^b L(x(t), \dot x(t))\, dt$$

sind gerade die Lösungen der EULER-LAGRANGE GLEICHUNG

$$\frac{\partial}{\partial x^i} L(x, \dot x) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot x^i} L(x, \dot x) \text{ für } i = 1, \dots, n$$

einer impliziten Differentialgleichung 2-ter Ordnung.

Um das einzusehen, beachten wir, daß das Funktional

$$x \mapsto I(x) := \int_a^b L(x(t), \dot x(t))\, dt$$

genau x als kritischen Punkt hat, wenn die Richtungsableitung $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} I(x + s\,v)$ für alle v verschwindet. Diese berechnen wir nun:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} I(x + s\,v) &= \int_a^b \frac{\partial_L}{\partial x}(x(t), \dot x(t)) \cdot v(t) + \frac{\partial_L}{\partial v}(x(t), \dot x(t)) \cdot \dot v(t)\; dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial_L}{\partial x}(x(t), \dot x(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot x(t)) \right) \right) \cdot v(t)\; dt \\
&\quad + \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot x(t)) \cdot v(t) \right) \cdot v(t)\; dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial_L}{\partial x}(x(t), \dot x(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot x(t)) \right) \right) \cdot v(t)\; dt + 0.
\end{aligned}$$

Da v beliebig war, müssen folglich alle Komponenten

$$\frac{\partial_L}{\partial x^i}(x(t), \dot x(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(x(t), \dot x(t)) \right) = 0$$

sein.

Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die Variablen x und $\dot x$ in L getrennt sind, d.h. $L(x, \dot x) = f(x) + g(\dot x)$ ist, dann lautet die Euler-Lagrange Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f(x) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot x^i} g(\dot x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \dot x^j\, \partial \dot x^i} g(\dot x) \cdot \ddot x^j \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Durch Vergleich mit der Newton-Gleichung $F(x) = \ddot{x}$, erhalten wir als einfachste Lösung für L die Terme

$$g(\dot{x}) := \tfrac{|\dot{x}|^2}{2} \quad \text{und} \quad f(x) := -U(x)$$

und somit die sogenannte Lagrange-Funktion

$$L(x,v) = \tfrac{|v|^2}{2} - U(x).$$

Die Zeitentwicklung ist also anstelle des komplizierteren Objekts eines Sprays $X : TQ \to T(TQ)$ durch eine reellwertige Funktion $L : TQ \to \mathbb{R}$ festgelegt. Allerdings ist die schöne gewöhnliche explizite Differentialgleichung 2-ter Ordnung (das Newton'sche Kraftgesetz) durch eine in Koordinaten implizite Differentialgleichung 2-ter Ordnung zu ersetzen, für die wir keine Theorie auf Mannigfaltigkeiten entwickelt haben.

45.4 Lagrange-Formalismus

Versuchen wir nun umgekehrt aus einer allgemeinen Lagrange-Funktion $L : TQ \to \mathbb{R}$ einer Mannigfaltigkeit Q das Vektorfeld $X : TQ \to T^2Q$ und die Energie $E : TQ \to \mathbb{R}$ zu erhalten. Die Euler-Lagrange Gleichung sieht in Koordinaten wieder wie folgt aus:

$$\tfrac{\partial}{\partial x^i} L = \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial}{\partial \dot{x}^i} L = \sum_j \dot{x}^j \tfrac{\partial^2}{\partial x^j\,\partial \dot{x}^i} L + \sum_j \ddot{x}^j \tfrac{\partial^2}{\partial \dot{x}^j\,\partial \dot{x}^i} L$$

Schreiben wir auch das gesuchte Vektorfeld X_L in den lokalen Koordinaten als:

$$X_L(x,v) = (x^1,\dots;v^1,\dots;v^1,\dots;X^1(x,v),\dots,X^n(x,v)).$$

so erhalten wir für die Koeffizienten X^i durch Einsetzen von $\ddot{x}^i = X^i(x,\dot{x})$ die implizite Gleichung

$$\tfrac{\partial}{\partial x^i} L = \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial}{\partial \dot{x}^i} L = \sum_j \dot{x}^j \tfrac{\partial^2}{\partial x^j\,\partial \dot{x}^i} L + \sum_j X^j \tfrac{\partial^2}{\partial \dot{x}^j\,\partial \dot{x}^i} L$$

Falls die Matrix $(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i\,\partial \dot{x}^j})_{i,j=1}^n$ invertierbar ist können wir durch Multiplikation mit der inversen Matrix $L^{k,i}$ die X^i berechnen:

$$\begin{aligned}\sum_i L^{k,i}\Big(\tfrac{\partial}{\partial x^i} L - \sum_j \dot{x}^j \tfrac{\partial^2}{\partial x^j\,\partial \dot{x}^i} L\Big) &= \sum_i\sum_j L^{k,i} X^j \tfrac{\partial^2}{\partial \dot{x}^j\,\partial \dot{x}^i} L \\ &= \sum_j X^j\,\delta_j^k = X^k\end{aligned}$$

Das dadurch definierte Vektorfeld

$$X_L = \sum_i v^i \tfrac{\partial}{\partial x^i} + \sum_i\sum_k L^{i,k}\Big(\tfrac{\partial}{\partial x^k} L - \sum_j \dot{x}^j \tfrac{\partial^2}{\partial x^j\,\partial \dot{x}^k} L\Big)\tfrac{\partial}{\partial v^i}$$

heißt dann Lagrange-Vektorfeld zu L. Wir müßten allerdings noch überprüfen ob diese Definition wirklich etwas Koordinaten-unabhängiges definiert. Das werden wir später zeigen.

Da wir die implizite Gleichung für das Lagrange-Vektorfeld nur unter zusätzlichen Bedingungen lösen können, wollen wir versuchen die einfachste Bewegungsinvariante, die Energie E, direkt aus L zu bestimmen.

Im speziellen Fall wo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $L(x,v) = \frac{|v|^2}{2} - U(x)$ ist, versuchen wir die kinetische Energie $|v|^2/2$ aus L zu gewinnen. In Koordinaten können wir das durch

$$|v|^2 = \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=1} L(x, t\,v) = \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} L(x, v+tv) = \sum_{i=1}^n v^i \tfrac{\partial}{\partial v^i} L(x,v)$$

erreichen. Für ein allgemeines Vektorbündel $V \to Q$ und eine Funktion $L : V \to \mathbb{R}$ definieren wir folglich die sogenannte Faserableitung $d_f L : V \to V^*$ von L durch

$$d_f L(\xi)(\eta) := \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} L(\xi + t\eta).$$

Wenn $(x^1, \dots; v^1, \dots)$ lokale Vektorbündel-Koordinaten von V mit Fußpunkt-Koordinaten $(x^1, \dots, x^n)$ sind, dann ist

$$(d_f L)(x,v)(x,w) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial v^i}(x,v) \cdot w^i.$$

Für eine Lagrange-Funktion $L : TQ \to \mathbb{R}$ einer allgemeinen Mannigfaltigkeit Q definieren wir die Wirkung $A : TQ \to \mathbb{R}$ durch

$$A(\xi) := d_f L(\xi) \cdot \xi, \text{ d.h. } A(x,v) = \sum_{i=1}^n v^i \tfrac{\partial}{\partial v^i} L(x,v)$$

und die Energie $E : TQ \to \mathbb{R}$ als

$$E := A - L, \text{ d.h. } E(x,v) = \sum_{i=1}^n v^i \tfrac{\partial}{\partial v^i} L(x,v) - L(x,v).$$

Wir können nun leicht nachrechnen, daß die Energie in der Tat eine Bewegungsinvariante ist, denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(x(t), v(t)) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i v^i(t) \tfrac{\partial}{\partial v^i} L(x(t), v(t)) - L(x(t), v(t)) \right) \\ &= \sum_i \dot{v}^i \frac{\partial L}{\partial v^i} + \sum_i v^i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} v^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \dot{v}^i \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wegen der Euler-Lagrange Gleichung.

45.5 Mechanik auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Auf einer (Pseudo-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) wird die Lagrange-Funktion bezüglich eines Potentials $U : Q \to \mathbb{R}$ in Analogie durch

$$L(\xi) = \tfrac{1}{2} g(\xi, \xi) - U(\pi(\xi))$$

definiert, d.h. in lokalen Koordinaten

$$L(x,v) = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} g_{i,j}(x)\, v^i v^j - U(x).$$

Die Faserableitung ist dann offensichtlich

$$d_f L(\xi) \cdot \eta = g(\xi, \eta)$$

und somit ist die Wirkung $A(\xi) = g(\xi,\xi)$ und die Energie

$$E(\xi) = \tfrac{1}{2} g(\xi,\xi) + U(\pi(\xi)).$$

Im Falle, daß $U = 0$ ist, heißt das Vektorfeld X_L geodätischer Spray. Es ist dann $\frac{\partial}{\partial x^i} L = \frac{1}{2}\sum_{j,k} \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i} v^j v^k$ und $\frac{\partial}{\partial v^i} L = \sum_j g_{i,j}(x) v^j$. Und somit ist die Matrix $(\frac{\partial^2}{\partial v^i\, \partial v^j})$ gerade die Koeffizienten Matrix $(g_{i,j})$ der Metrik und ihre Inverse $(L^{i,j})$ wird üblicherweise mit $(g^{i,j})$ bezeichnet, siehe (41.1). Außerdem ist

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k\, \partial v^i} L = \frac{\partial}{\partial x^k} \sum_j g_{i,j}(x) v^j = \sum_j \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^k} v^j$$

Also lautet die Euler-Lagrange Gleichung in expliziter Form

$$\begin{aligned}
\ddot{x}^k &= \sum_i g^{k,i} \left(\frac{1}{2} \sum_{j,r} \frac{\partial g_{j,r}}{\partial x^i} v^j v^r - \sum_j \dot{x}^j \sum_r \frac{\partial g_{i,r}}{\partial x^j} v^r \right) \\
&= \sum_{i,j,r} g^{k,i}\, \dot{x}^j\, \dot{x}^r \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{j,r}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i,r}}{\partial x^j} \right) \\
&= -\sum_i g^{k,i} \sum_{j,r} \dot{x}^j\, \dot{x}^r\, \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial g_{j,r}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i,r}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^r} \right) \\
&= -\sum_{j,r} \dot{x}^j\, \dot{x}^r \sum_i g^{k,i} \Gamma_{j,r,i} \\
&= -\sum_{j,r} \dot{x}^j\, \dot{x}^r\, \Gamma^k_{j,r}.
\end{aligned}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Geodäten, wobei $\Gamma_{j,r,i}$ die Christoffelsymbole der 1-ten Art und $\Gamma^k_{j,r}$ jene der 2-ten Art sind, siehe (58.2). Also sind die Integral-Kurven in Q des geodätischen Spray's X_L gerade die Geodäten, d.h. die wird als kritischen Punkten der Bogenlänge erkannt haben.

Für eine allgemeines U und ein $e > U(x)$ für alle $x \in Q$ definiert man eine neue (die sogenannte Jacobi-Metrik) $g_e := (e - U) \cdot g$. Die Integralkurven c von X_L mit Energie $e = g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$ für alle t sind bis auf Reparametrisierung genau die Geodäten der Jacobi-Metrik g_e mit Energie 1.

45.6 Zusammenhang zwischen Lagrange-Vektorfeld X_L und Energie E

Schön wäre wenn es so einen ähnlichen Zusammenhang gäbe, wie er zwischen Gradient und Potential besteht. Dazu erinnern wir uns daß der Gradient eines Potentials $U : Q \to \mathbb{R}$ bezüglich einer Riemann-Metrik g auf Q gegeben ist durch:

$$g_x(\operatorname{Grad} U(x), \eta) = dU(x) \cdot \eta \text{ für alle } \eta \in T_x Q,$$

wobei dU das totale Differential von U bezeichnet. Wir suchen also eine Bilinearform ω, welche

$$\omega_{x,v}(X_L, Y) = dE(x,v) \cdot Y \quad \text{für alle } Y \in T_{(x,v)}(TQ)$$

erfüllt. Sei X_L das Vektorfeld auf TQ, welches die Euler-Lagrange Gleichung für eine hinreichen reguläre Lagrange-Funktion L beschreibt. In Koordinaten hat jedes Vektorfeld X_L, welches eine gewöhnliche Differentialgleichung 2-ter Ordnung beschreibt, nach oben gezeigten die folgende Gestalt:

$$X_L(x,v) = \sum_{i=1}^n v^i \tfrac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^n X^i(x,v)\,\tfrac{\partial}{\partial v^i}.$$

Für die Energie haben wir die Formel

$$E(x,v) = \sum_{i=1}^n v^i \tfrac{\partial}{\partial v^i} L(x,v) - L(x,v)$$

und für ihr Differential

$$\begin{aligned} dE(x,v) &= \sum_j \tfrac{\partial}{\partial x^j} E(x,v)\,dx^j + \sum_j \tfrac{\partial}{\partial v^j} E(x,v)\,dv^j \\ &= \sum_j \left(\sum_{i=1}^n v^i \tfrac{\partial}{\partial x^j}\tfrac{\partial}{\partial v^i} L - \tfrac{\partial}{\partial x^j} L \right) dx^j \\ &\quad + \sum_j \left(\tfrac{\partial}{\partial v^j} L + \sum_{i=1}^n v^i \tfrac{\partial}{\partial v^j}\tfrac{\partial}{\partial v^i} L - \tfrac{\partial}{\partial v^j} L \right) dv^j \\ &= \sum_j \left(\sum_{i=1}^n v^i \tfrac{\partial}{\partial x^j}\tfrac{\partial}{\partial v^i} L - \tfrac{\partial}{\partial x^j} L \right) dx^j + \sum_j \left(\sum_{i=1}^n v^i \tfrac{\partial}{\partial v^j}\tfrac{\partial}{\partial v^i} L \right) dv^j. \end{aligned}$$

Eine allgemeine Bilinearform ω auf TQ, d.h. ein 2-fach kovariantes Tensorfeld auf TQ ist bezüglich der lokalen Koordinaten $(x^1,\dots;v^1,\dots)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} \omega = & \sum_{i,j} \omega(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j})\, dx^i \otimes dx^j + \sum_{i,j} \omega(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial v^j})\, dx^i \otimes dv^j \\ & + \sum_{i,j} \omega(\tfrac{\partial}{\partial v^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j})\, dv^i \otimes dx^j + \sum_{i,j} \omega(\tfrac{\partial}{\partial v^i}, \tfrac{\partial}{\partial v^j})\, dv^i \otimes dv^j. \end{aligned}$$

Folglich wäre

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v^i\,\omega(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}) + \sum_{i=1}^n X^i\,\omega(\tfrac{\partial}{\partial v^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}) &= \omega(X, \tfrac{\partial}{\partial x^j}) = dE \cdot \tfrac{\partial}{\partial x^j} = \\ &= \sum_{i=1}^n v^i\, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\tfrac{\partial}{\partial v^i} L - \tfrac{\partial}{\partial x^j} L \\ \sum_{i=1}^n v^i\,\omega(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial v^j}) + \sum_{i=1}^n X^i\,\omega(\tfrac{\partial}{\partial v^i}, \tfrac{\partial}{\partial v^j}) &= \omega(X, \tfrac{\partial}{\partial v^j}) = dE \cdot \tfrac{\partial}{\partial v^j} = \\ &= \sum_{i=1}^n v^i\, \tfrac{\partial}{\partial v^j}\tfrac{\partial}{\partial v^i} L. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir durch Koeffizienten-Vergleich

$$\begin{aligned} \omega(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial v^j}) &= \tfrac{\partial}{\partial v^j}\tfrac{\partial}{\partial v^i} L \\ \omega(\tfrac{\partial}{\partial v^i}, \tfrac{\partial}{\partial v^j}) &= 0. \end{aligned}$$

Setzen wir die implizite Gleichung

$$\tfrac{\partial}{\partial x^i}\, L = \tfrac{d}{dt}\,\tfrac{\partial}{\partial v^i}\, L = \sum_j v^j\, \tfrac{\partial^2}{\partial x^j\,\partial v^i}\, L + \sum_j X^j\, \tfrac{\partial^2}{\partial v^j\,\partial v^i}\, L$$

in die erste Gleichung ein, so drängt sich auf $\omega(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) := -\frac{\partial^2}{\partial v^i\,\partial v^j} L$ und

$$\omega(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}) := \tfrac{\partial^2}{\partial x^j\,\partial v^i} L - \tfrac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial v^j} L.$$

zu setzen.

In den lokalen Koordinaten $(x^1, \dots; v^1, \dots)$ ist also ω gegeben durch:

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{i,j} \Big(\tfrac{\partial^2 L}{\partial x^j\,\partial v^i} - \tfrac{\partial^2 L}{\partial x^i\,\partial v^j}\Big)\; dx^i \otimes dx^j \\ &\quad + \sum_{i,j} \tfrac{\partial^2 L}{\partial v^j\,\partial v^i}\; dx^i \otimes dv^j - \sum_{i,j} \tfrac{\partial^2 L}{\partial v^i\,\partial v^j}\; dv^i \otimes dx^j\end{aligned}$$

Es zeigt sich also, daß die Bilinearform ω schief-symmetrisch ist, und somit eine 2-Form $\omega \in \Omega^2(TQ)$ darstellt. Unter Verwendung von $du^i \wedge du^j := du^i \otimes du^j - du^j \otimes du^i$ ist sie in lokalen Koordinaten durch

$$\omega = \sum_{i,j} \tfrac{\partial^2 L}{\partial x^j\,\partial v^i}\; dx^i \wedge dx^j + \sum_{i,j} \tfrac{\partial^2 L}{\partial v^j\,\partial v^i}\; dx^i \wedge dv^j$$

gegeben. Sie ist sogar exakt, denn die 1-Form

$$\vartheta := \sum_{i=1}^n \tfrac{\partial L}{\partial v^i}\; dx^i$$

hat als äußere Ableitung $d\vartheta = -\omega$.

Allerdings haben wir noch nicht überprüft, ob ω und ϑ wirklich Koordinaten-unabhängig definiert sind. Wir werden das später nachholen.

Global läßt sich nun die definierende implizite Gleichung für das Lagrange Vektorfeld X als

$$i_X\,\omega = dE$$

schreiben, wobei ι der Einsetz-Operator $(\iota_X\,\omega)(Y) := \omega(X,Y)$ ist.

Leider hängen diese Differentialformen aber noch von L ab, und wir schreiben besser $\omega_L := \omega$, $\vartheta_L := \vartheta$.

45.7 Hamilton-Formalismus

Um diese Abhängigkeit der Differentialformen ω_L und ϑ_L von der Lagrange-Funktion L loszuwerden, wollen wir neue Koordinaten einführen. Es drängen sich natürlich die partiellen Ableitungen $p_i := \frac{\partial L}{\partial v^i}$ auf. Die Koordinaten x^i in der Basis-Mannigfaltigkeit benennen wir bloß um in $q^i := x^i$.

Die Form ϑ_L ist dann in den neuen Koordinaten gegeben durch

$$\vartheta_0 := \sum_{i=1}^n p_i\, dq^i$$

und ihre äußere Ableitung $-\omega_0 := d\vartheta_0$ durch

$$\omega_0 := \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i.$$

Wir haben aber das Problem, ob die q^i und p_i wirklich Koordinaten eines Punkten in TQ sind. Dazu müssen wir den Koordinatenwechsel bestimmen. Seien dazu $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ andere Koordinaten auf Q, so gilt für die Basen von TQ

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

und für die Komponenten v^j bezüglich dieser Basen

$$v^j = \sum_i \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \bar{v}^i.$$

Weiters ist

$$\frac{\partial v^j}{\partial \bar{v}^i} = \frac{\partial}{\partial \bar{v}^i}\Big(\sum_k \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}\,\bar{v}^k\Big) = \sum_k \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}\,\frac{\partial \bar{v}^k}{\partial \bar{v}^i} = \sum_k \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}\,\delta_i^k = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}.$$

Somit gilt für die neuen Koordinaten:

$$\bar{p}_i = \frac{\partial}{\partial \bar{v}^i} L = \sum_k \frac{\partial v^k}{\partial \bar{v}^i} \frac{\partial}{\partial v^k} L = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} p_k$$

Dies ist nicht das richtige Transformationsverhalten für Vektoren im Tangentialraum. Vergleichen wir es aber mit den Koordinaten-Wechsel im Kotangentialbündel T^*Q der Komponenten $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ bezüglich der Basis $(dx^1, \dots, dx^n)$:

$$dx^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\, d\bar{x}^j$$

$$\bar{\eta}_j = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\, \eta_i,$$

siehe (31.5), so zeigt sich, daß $(q^1, \dots; p_1, \dots)$ gerade die üblichen Koordinaten eines Punktes des Kotangentialbündels T^*Q sind. Der Übergang von den Koordinaten $(x^1, \dots; v^1, \dots)$ am Tangentialbündel TQ zu den Koordinaten $(q^1, \dots; p_1, \dots)$ am Kotangentialbündel T^*Q ist gerade durch die Faserableitung $d_f L : TQ \to T^*Q$ gegeben, welche bezüglich der Basen $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ und $(dx^1, \dots, dx^n)$ folgende Darstellung hat:

$$(d_f L)_i = \frac{\partial L}{\partial v^i},$$

also $(x^1, \dots; v^1, \dots)$ auf $(q^1, \dots; p^1, \dots)$ abbildet, mit $Q^i(x,v) := x^i$ und $p^i(x,v) = \frac{\partial L}{\partial v^i}(x,v)$.

Wir zeigen nun, daß die kanonischen 1-Form ϑ_0 wirklich Koordinaten-unabhängig ist und damit auch $\omega_0 = d\vartheta_0$ ist.

Die beiden Abbildungen $T\pi^* : TT^*Q \to TQ$ und $\pi_{T^*Q} : TT^*Q \to T^*Q$ welche lokal gegeben sind durch $(q,p,v,\rho) \mapsto (q,v)$ und $(q,p,v,\rho) \mapsto (q,p)$ definieren eine Abbildung $(\pi_{T^*Q}, T\pi^*) : TT^*Q \to T^*Q \times_Q TQ := \{(\alpha,\xi) : \pi^*(\alpha) = \pi(xs)\}$. Zusammengesetzt mit der Evaluation $\mathrm{ev} : T^*Q \times_Q TQ \to \mathbb{R}$, $(p,q;p,v) \mapsto \sum_i p_i\, v^i$ ist dies genau die kanonische 1-Form θ_0, denn

$$\sum_i p_i\, v^i = \sum_i p_i\, dq^i(v).$$

Man sieht nun sofort, daß

$$\vartheta_L = (d_f L)^* \vartheta_0 \text{ und somit auch } \omega_L = (d_f L)^* \omega_0$$

ist, also sind diese Formen auch Koordinaten unabhängig.

Der Energie entspricht dann eine sogenannte Hamilton-Funktion $H : T^*Q \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$H \circ d_f L := E, \text{ d.h. } H(q,p) = \sum_{i=1}^n \dot{q}^i\, p_i - L(x,v)$$

und dem Vektorfeld X_L entspricht nun das sogenannte Hamiltonsche Vektorfeld X_H, welches $d_f L$-verwandt zu X_L definiert ist durch

$$X_H \circ d_f L := T(d_f L) \circ X_L.$$

Bezüglich der Koordinaten (q^i, p_i) ist $X_H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$:
Denn $\omega = \sum_i dq^i \wedge dp_i$ und sei $X_H = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial q^i}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i = dH = \iota_{X_H}\omega \\
&= \sum_{i,j} a^i\, \iota_{\frac{\partial}{\partial p_i}} (dq^j \wedge dp_j) + \sum_{i,j} b^i\, \iota_{\frac{\partial}{\partial q_j}} (dq^j \wedge dp_j) \\
&= \sum_i a^i dq^i - \sum_i b^i dp_i
\end{aligned}$$

und ein Koeffizienten-Vergleich liefert $a^i = \frac{\partial H}{\partial q^i}$ und $b^i = -\frac{\partial H}{\partial p^i}$.

Die Integralkurven $t \mapsto (q(t), p(t))$ von X_H sind also die Lösungen von $\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i}$ und $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$.

Da die Integral-Kurven die Ableitungen von Kurven in der Basis Q sind, und die Basiskoordinaten einander entsprechen, sind die Basis Kurven für X_H und X_L die selben.

Die Gleichung $i_{X_E}\omega_L = dE$ geht über in

$$i_{X_H}\omega_0 = dH, \text{ d.h. } \omega_0(X_H, Y) = dH \cdot Y \text{ für alle } Y.$$

Dies sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned}
i_{X_H}\omega_0(T_x(d_f L)\xi) &= \omega_0\Big((X_H)_{(d_f L)x}, T_x(d_f L)\xi\Big) \\
&= \omega_0\Big(T_x(d_f L)X_H, T_x(d_f L)\xi\Big) = \omega_L(X_L, \xi_x) \\
&= (i_{X_L}\omega_L)(\xi) = dE(\xi) = d(H \circ d_f L)(\xi) \\
&= dH_{(d_f L)x} \cdot T_x(d_f L) \cdot \xi,
\end{aligned}$$

wobei $T_x(d_f L)\xi$ alle Tangentialvektoren in $T^*_{(d_f L)x}Q$ durchläuft.

Es ist $A = \theta_0(X_H) \circ d_f L$:
Denn aus $\theta_0 = \sum_i p_i dq^i$ und $X_H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$ folgt $\theta_0(X_H) = \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}$.
Weiters ist $E = \sum_j v^j \frac{\partial L}{\partial v^j} - L = \sum_j v^j p_j - L$ und somit $\frac{\partial E}{\partial p_i} = v^i + \sum_j \frac{\partial v^j}{\partial p_i} p_j - \sum_j \frac{\partial L}{\partial v^j} \cdot \frac{\partial v^j}{\partial p_i} = v^i$. Also erhalten wir schließlich $\theta_0(X_H) = \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_i p_i \frac{\partial E}{\partial p_i} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial v^i} \cdot v^i = A$.

Wir haben als Vorteile der Hamilton-Mechanik, daß die Zeitentwicklung beschreibende Objekt eine reell-wertige Funktion $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ ist die gleichzeitig auch eine

Bewegungsinvariante darstellt und außerdem das zugehörige Vektorfeld X_H sich auf einfache Weise aus $\iota_{X_H}\omega = dH$ berechnen läßt.

Hamilton-Mechanismus auf Riemann-Mannigfaltigkeiten

Es sei $\langle \_, \_ \rangle$ eine Riemann-Metrik auf Q und $L : TQ \to \mathbb{R}$ die Lagrange-Funktion, die durch $L(v) = \frac{1}{2}\langle v, v\rangle - U(\pi(v))$ gegeben ist. Dann ist $d_f L : TQ \to T^*Q$ die Abbildung $\sharp : w \mapsto \langle w, \_ \rangle$ und $A(v) = \langle v, v\rangle$. Also ist $E = A - L = \frac{1}{2}\langle v, v\rangle + U(\pi(v))$. Ist insbesonders $U = 0$, so ist $A = 2E = 2L$. Die Hamilton-Funktion $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ ist dann durch $H(\eta) = \frac{1}{2}\langle \eta^\flat, \eta^\flat\rangle$ gegeben, d.h. in Koordinaten durch $H(\sum_i \eta_i dx^i) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g^{i,j}\eta_i\eta_j$.

45.8 Symplektische Mechanik

Allgemeiner betrachtet man anstelle von T^*Q nun symplektische Mannigfaltigkeiten M, d.h. Mannigfaltigkeiten zusammen mit einer sogenannten symplektische Form ω, d.h. einer nicht-degenerierten geschlossenen 2-Form $\omega \in \Omega^2(M)$. Wir haben gezeigt, daß solch eine Mannigfaltigkeit gerade-dimensional sein muß, und man kann weiters zeigen, daß man lokal immer Koordinaten $(q^1, \dots, p_1, \dots)$ wählen kann, so daß $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i$ ist. Das n-fache wedge-Produkt von ω definiert eine Volumsform

$$\mathrm{vol}_\omega := \omega \wedge \dots \wedge \omega$$

auf M. Insbesondere ist M orientiert. Sei $H : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion (eine sogenannte Hamilton-Funktion), so bezeichnet man mit X_H das sogenannte Hamiltonsche Vektorfeld, welches durch die implizite Gleichung

$$i_{X_H}\omega = dH$$

gegeben ist. In lokalen Koordinaten ist X_H durch

$$X_H = \sum_i \tfrac{\partial H}{\partial p_i}\tfrac{\partial}{\partial q^i} - \sum_i \tfrac{\partial H}{\partial q^i}\tfrac{\partial}{\partial p_i}$$

gegeben.

Die Hamilton-Funktion H ist konstant längs der Integral-Kurven des Hamilton-Vektorfelds X_H:

Sei $t \mapsto x(t)$ eine Integralkurve, d.h. $x : \mathbb{R} \to T^*Q$ mit $\dot x(t) = X_H(x(t))$. Dann ist

$$\begin{aligned}(H \circ x)\dot{}(t) &= dH_{x(t)}(\dot x(t)) = \iota_{X_H}\omega_{x(t)}(\dot x(t))\\ &= \omega(X_H(x(t)), \dot x(t)) = \omega(X_H(x(t)), X_H(x(t))) = 0,\end{aligned}$$

also $H \circ x$ konstant.

Der Fluß Fl_t des Vektorfelds X_H ist ein Symplektomorphismus, d.h. läßt die symplektische Form ω invariant und folglich auch die symplektische Volumsform $\omega^m = \mathrm{vol}_\omega$, d.h.

$$\left(Fl_t^{X_H}\right)^* \mathrm{vol}_\omega = \mathrm{vol}_\omega .$$

Denn es ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathrm{Fl}_t)^*\omega &= (\mathrm{Fl}_t^*)\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(\mathrm{Fl}_s)^*\omega = (\mathrm{Fl}_t^*)\mathcal{L}_{X_H}\omega\\ &= (\mathrm{Fl}_t^*)(\iota_{X_H}d\omega + d\iota_{X_H}\omega) = (\mathrm{Fl}_t^*)(\iota_{X_H}0 + ddH) = 0,\end{aligned}$$

Also ist $(\mathrm{Fl}_t)^*\omega$ konstant gleich $(\mathrm{Fl}_0)^*\omega = \omega$.

Nicht jedes Vektorfeld X auf M ist ein Hamiltonsches Vektorfeld. Um eines zu sein muß wieder eine lokale (Integrabilitätbedingung) $\mathcal{L}_X\omega = 0$ für X erfüllt sein, sowie eine globale (kohomologische) Bedingung $H^1(M) = 0$ an M.

45.9 Legendre-Transformation

Um im Spezialfall der symplektischen Mannigfaltigkeit T^*Q mit ihrer kanonischen 2-Form ω_0 alles zurück in den Lagrange Formalismus zu übersetzen, benötigen wir eine Beschreibung der inversen der Legendre-Transformation $d_f L : TQ \to T^*Q$ ausschließlich durch die Hamilton-Funktion H. Es gilt $(d_f L)^{-1} = d_f H : T^*Q \to T^{**}Q = TQ$, denn unter Verwendung der Abbildung $d_f H : (q^i, p_j) \mapsto (x^i, v^j = \frac{\partial H}{\partial p_j})$ erhalten wir $(L \circ d_f H)(q^i, p_j) = ((A - E) \circ d_f H)(q^i, p_j) = \theta_0(X_H)(q^i, p_j) - H(q^i, p_j) = \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H(q^i, p_j) = \sum_i p_i v^i - H(q^i, p_j)$ und somit $\frac{\partial L}{\partial v^i} = \sum_k \frac{\partial p_k}{\partial v^i} \cdot v^k + p_i - \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial v^i} = p_i$. Also ist $d_f L \circ d_f H = \mathrm{id}$.

Damit können wir $E := (d_f H^{-1})^*(H)$, $A := (d_f H^{-1})^*(G)$ wobei $G := \vartheta_0(X_H)$, $L := A - E$ und $X_L := (d_f H^{-1})^*(X_H)$ zurückgewinnen.

VII. Integration

In diesem Kapitel entwickeln wir die Integration auf orientierten Mannigfaltigkeiten. Die integrierbaren Objekte sind dabei die Differentialformen maximalen Grades. Wir beweisen den allgemeinen Satz von Stokes und führen dafür auch Mannigfaltigkeiten mit Rand ein. Im Fall einer orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit haben wir eine ausgezeichnete Form maximalen Grades, die Volumsform. Damit sind wir in der Lage auch Funktionen zu integrieren und führt zu den Green'schen Formeln. Schließlich folgt noch ein Abschnitt über den Laplace-Beltrami Operator, wo wir den Satz von Hodge über harmonische Formen beweisen.

46. Orientierbarkeit

Um Integrationen auf Mannigfaltigkeiten durchführen zu können benötigen wir einen Orientierungsbegriff: Man beachte etwa die Formel $\int_a^b f = -\int_b^a f$ für das gewöhnliche Riemann-Integral über ein Intervall $[a, b]$.

46.1 Definition (Orientierbarkeit)

Eine Mannigfaltigkeit M heißt ORIENTIERBAR $:\Leftrightarrow$ es existiert ein kompatibler Atlas $\mathcal{A}$, sodaß $(M, \mathcal{A})$ im Sinne von (34.3) orientiert ist.

Ein Vektorbündel $E \to M$ heißt ORIENTIERBAR $:\Leftrightarrow$ es existiert ein Vektorbündelatlas $\mathcal{A}$, dessen Transitionsfunktionen Werte in $GL_+(\mathbb{R}^n) := \{T \in GL(n) : \det(T) > 0\}$ haben.

46.2 Proposition (Orientierbare Vektorbündel). *Sei $E \to M$ ein Vektorbündel. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *Das Vektorbündel $E \to M$ ist orientierbar.*
2. *Auf jeder Faser E_x kann eine Orientierung gewählt werden und dazu ein Vektorbündelatlas, dessen Vektorbündelkarten faserweise orientierungserhaltend sind.*
3. *Auf jeder Faser E_x kann eine Orientierung gewählt werden, sodaß jede Vektorbündelkarte mit zusammenhängender Domäne entweder überall faserweise orientierungserhaltend oder überall orientierungsvertauschend ist.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (3): Sei also $\mathcal{A}$ ein Vektorbündelatlas, dessen Transitionsfunktionen faserweise orientierungserhaltend sind. Wir definieren eine Orientierung auf E_x, indem wir für irgendeine VB-Karte $\varphi \in \mathcal{A}$ um x die induzierte Orientierung vom $\mathbb{R}^k$ nehmen.

Das ist wohldefiniert, denn würden φ, φ' auf E_x verschiedene Orientierungen induzieren, so wäre $\varphi^{-1} \circ \varphi'$ bei x orientierungsvertauschend. $\mathcal{A}$ ist also ein VB-Atlas, der aus faserweise orientierungserhaltenden Karten besteht.

Sei ψ irgendeine beliebige VB-Karte um x mit zusammenhängender Domäne, dann ist zu zeigen, daß ψ lokal um x orientierungserhaltenden bzw. vertauschend ist. Sei also ψ_x orientierungserhaltend bzw. vertauschend. Die Transitionsfunktion ψ zu φ hat Werte in $GL(\mathbb{R}^k)$, in x hat sie einen Wert in GL_+ bzw. GL_-. Also hat sie lokal Werte in der offenen Menge GL_+ bzw. GL_-, und damit ist ψ lokal orientierungserhaltenden bzw. vertauschend.

(3) $\Rightarrow$ (2) ist klar.

(2) $\Rightarrow$ (1) Der in (2) geforderte Atlas hat faserweise orientierungserhaltende Transitionsfunktionen. (Diese sind faserweise Zusammensetzungen von orientierungserhaltenden Vektorraumisomorphismen.) □

46.3 Lemma (Orientierbare Mannigfaltigkeiten).
M ist orientierbare Mannigfaltigkeit $\Leftrightarrow$ $TM \to M$ ist orientierbares Vektorbündel.

Beweis. ($\Rightarrow$) Die Transitionsfunktionen des durch M induzierten Vektorbündelatlas auf $TM \to M$ sind genau die Ableitungen der Kartenwechsel für M.

($\Leftarrow$) Betrachte den von den Karten auf M induzierten VB-Atlas auf $TM \to M$ und wähle auf den Fasern von TM eine Orientierung wie in Punkt (3) der Proposition (46.2): Ist φ' eine durch eine Karte φ von M induzierte Vektorbündelkarte von $TM \to M$, die orientierungsvertauschend ist, so ersetze φ durch eine umparametrisierte Karte $\psi := \varphi \circ j$, mit $j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$,

$$j := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & +1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & +1 \end{pmatrix}.$$

Der so erhaltene Atlas auf M hat nur orientierungserhaltende Kartenwechsel, liefert also eine Orientierung auf M. □

46.4 Beispiel

Sei G eine Lie-Gruppe, also eine Mannigfaltigkeit mit glatter Gruppenstruktur: Dann ist $TG \to G$ global ein triviales Vektorbündel (siehe (67.2)) und da jedes triviale Vektorbündel orientierbar ist, sind $TG \to G$ und G selbst orientierbar.

46.5 Bemerkung

Sind alle Mannigfaltigkeiten M_i orientierbar, dann sind es auch $\prod M_i$ und $\coprod M_i$. Z.B. sind alle Tori, $T^n := (S^1)^n$, orientierbar, denn S^1 ist eine Lie-Gruppe.

46.6 Bemerkungen

1. Sind 2 der folgenden 3 Vektorbündel orientierbar, so auch das dritte: $E_1 \to M$, $E_2 \to M$, $E_1 \oplus E_2 \to M$. Aus faserweisen Orientierungen zweier dieser Bündel läßt sich leicht eine Orientierung auf dem dritten konstruieren.
2. Sei $E_0 \xrightarrow{i} E_1 \xrightarrow{p} E_2$ eine KURZE EXAKTE SEQUENZ VON VEKTORBÜNDELN, d.h. faserweise ist i injektiv, p surjektiv und $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Bild}(i)$. Falls zwei der Bündel orientierbar sind, so ist es auch das dritte. (Benütze, daß jede kurze exakte Sequenz von Vektorbündel splittet, d.h. $E_1 \cong E_0 \oplus E_2$, und dann (1).)
3. Ist das Vektorbündel $E \to M$ orientierbar und $f : N \to M$ glatt, so ist auch das induzierte Bündel $f^*(E) \to N$ orientierbar. (Wähle auf $(f^*(E))_x \cong E_{f(x)}$ die Orientierung von $E_{f(x)}$)
4. Sind 2 der folgenden 3 Objekte orientierbar, so auch das dritte: $E \to M$ als Vektorbündel, E als Mannigfaltigkeit, M als Mannigfaltigkeit. (Benütze die kurze exakte Sequenz: $p^*(E) \to TE \to p^*(TM)$, sowie die Tatsache, daß $E \to M$ das von $0 : M \to E$ induzierte Bündel zu $p^*(E) \to E$ und $TM \to M$ das von $0 : M \to E$ induzierte Bündel zu $p^*(TM) \to E$ ist.)

46.7 Beispiele

1. Vektorbündel mit eindimensionaler Faser sind genau dann orientierbar, falls sie trivial sind. Alle 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten sind orientierbar. Das Vektorbündel M"ob $\to S^1$ ist nicht orientierbar, ebensowenig (nach Bem.(4)) das Möbiusband als Mannigfaltigkeit.
2. Jedes komplexe Vektorbündel ist orientierbar, denn $GL(\mathbb{C}^n) \subseteq GL_+(\mathbb{R}^{2n})$ und $GL(\mathbb{C}^n)$ ist zusammenhängend und enthält die orientierungserhaltende Identität. Das Tangentialbündel einer komplexen Mannigfaltigkeit ist ein komplexes Vektorbündel und daher orientierbar. Somit ist also jede komplexe Mannigfaltigkeit selbst orientierbar.
3. Eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn eine komplexe Struktur existiert. [**77**]
4. Sei $E \to M$ ein Vektorbündel mit einfach zusammenhängender Basismannigfaltigkeit M, dann ist das Vektorbündel $E \to M$ orientierbar, da es trivial ist. Insbesondere ist jede einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit orientierbar.

46.8 Lemma (Nullstellenmengen sind orientierbar). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^k$ glatt und* $\operatorname{rang} f'(x) = k$ *für alle $x \in U$. Dann ist $f^{-1}(0)$ orientierbar.*

Beweis. Sei $M := f^{-1}(0)$ und $T_pM = \operatorname{Ker} T_pf \subseteq \mathbb{R}^m$. Wir wollen zeigen, daß $TM \to M$ orientierbar ist.

Wir verwenden (2) der Proposition (46.2): Seien $v_i \in \mathbb{R}^m$ mit $i = 1, \dots k$ so gewählt, daß $(T_pf \cdot v_i)_{i=1}^k$ eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^k$ ist. Wir ergänzen dann die v_i zu einer positiv orientierten Basis $(v_i)_{i=1}^m$ im $\mathbb{R}^m$, sodaß die $v_i \in T_pM$ für $i > k$. Die (v_i) mit $i > k$ bilden dann eine die Orientierung definierende Basis in T_pM, womit wir eine Orientierung auf der Faser erhalten haben.

Sei φ ein lokaler Diffeomorphismus des $\mathbb{R}^m$, der die Teilmannigfaltigkeit $f^{-1}(0) = M$ trivialisiert, d.h. $\varphi(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-k}) = M \cap \operatorname{Bild} \varphi$. Die Einschränkung $\varphi|_{\mathbb{R}^{m-k}}$ ist also eine Karte für M. Die Ableitung $\varphi'(x)$ ist die zugehörige VB-Karte:

$$\mathbb{R}^{m-k} \to T_pM = \operatorname{Ker}(f'(\varphi(p))) \text{ um } \varphi(x) = p.$$

Sie ist die Einschränkung von $\varphi'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Die Ableitung $(f \circ \varphi|_{\mathbb{R}^k})'(x) = f'(p) \circ (\varphi|_{\mathbb{R}^k})'(x)$, $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ ist ein VR-Isomorphismus, denn $\operatorname{rang}(f \circ \varphi)' = \operatorname{rang} f' = k$ und $(f \circ \varphi)'(e_i) = 0$ für $i > k$. Die Ableitung ist durch Spiegeln einer Koordinate im "ersten" $\mathbb{R}^k$ o.B.d.A. orientierungserhaltend. Weiters ist o.B.d.A. $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ orientierungserhaltend (Vertausche dazu Koordinaten im "ersten" $\mathbb{R}^{m-k} \subseteq \mathbb{R}^m$), d.h. $(\varphi'(x)(e_i))_{i=1}^m$ und $f'(p)(\varphi'(x)(e_i))$ für $i \leq k$ sind positiv orientiert, also ist die Ergänzung $(\varphi'(x)(e_i))$, $i > k$, nach Definition eine positiv orientierte Basis von T_pM. Somit ist φ' eine positiv orientierte VB-Karte für TM. □

46.9 Beispiele

1. Alle S^n sind orientierbar.
2. Alle kompakten 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^3$ sind orientierbar, siehe Klassifikationssatz (9.2).
3. $\mathbb{P}^1 \cong S^1$ ist orientierbar. Die projektive Ebene $\mathbb{P}^2$ enthält ein Möbiusband als offenen Teil, also ist sie nicht orientierbar. Allgemein gilt: $\mathbb{P}^n$ ist orientierbar $\Leftrightarrow n$ ungerade.
4. TM ist als Mannigfaltigkeit immer orientierbar, als Vektorbündel hingegen nur, wenn M als Mannigfaltigkeit orientierbar ist:
   Für jedes beliebige Vektorbündel $p : E \to M$ haben wir die kurze exakte Sequenz $p^*(E) \to TE \to p^*(TM)$. Im Falle $E = TM$ und $p = \pi_M$ reduziert sich das auf $p^*(TM) \to T(TM) \to p^*(TM)$, also ist $T^2M \to TM$ als Vektorbündel isomorph zu $p^*(TM) \oplus p^*(TM)$. Die Summe gleicher Bündel ist aber immer orientierbar. Wählt man auf beiden Summanden die gleiche Orientierung, so ergibt das auf der Summe offenbar eine Orientierung, die, unabhängig von der jeweiligen Wahl, positiv ist.

46.10 Die Orientierungsüberlagerung

Sei M eine Mannigfaltigkeit, $M^{or} := \{(p, \omega) : p \in M, \omega \text{ Orientierung auf } T_pM\}$. Wir definieren einen Atlas $\mathcal{A}$ für M^{or} mittels Karten φ für M durch $\varphi_\pm : \operatorname{Dom}\varphi \to M^{or}$, $x \mapsto (\varphi(x), \pm\omega)$ wobei ω die Orientierung, die unter $T\varphi$ aus der Standardorientierung des $\mathbb{R}^n$ entsteht, ist. Zu zeigen ist, daß $\mathcal{A}$ ein C^∞-Atlas auf M^{or} ist. Seien φ und ψ Karten auf M, dann folgt $\varphi_+^{-1} \circ \psi_+$ ($\varphi_+^{-1} \circ \psi_-$, etc.) ist auf einer offenen Menge definiert und stimmt dort, mit $\varphi^{-1} \circ \psi$ überein.

Sei z.B. $x \in \operatorname{Dom}(\varphi_+^{-1} \circ \psi_+) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\varphi_+^{-1} \circ \psi_+$ ist lokaler Diffeomorphismus $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\varphi_+^{-1} \circ \psi_+$ ist lokal orientierungserhaltend (-vertauschend). $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\varphi_+^{-1} \circ \psi_+$ ist lokal um x definiert

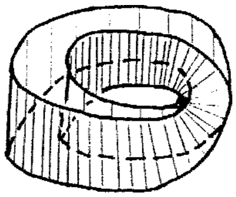
M^{or} ist eine zweiblättrige Überlagerung von M, sie heißt ORIENTIERUNGSÜBERLAGERUNG.
M^{or} ist orientiert: Die Orientierung auf $T_{(p,\omega)}M^{or}$ ist ω.
Es gilt außerdem: M ist orientierbar $\Leftrightarrow M^{or} \cong M \times \{-1, 1\}$, denn:

($\Leftarrow$) Die Einbettung $M \hookrightarrow M \times \{-1,1\} \cong M^{or}$ ist offen und M^{or} ist orientiert. Also ist M orientierbar.

($\Rightarrow$) Ist M orientierbar, dann gibt es auf T_pM eine ausgezeichnete Orientierung ω. Somit liefern $p \mapsto (p,\omega)$ bzw. $p \mapsto (p,-\omega)$ eine Trivialisierung $M \times \{-1,1\} \cong M^{or}$.

46.11 Beispiel

(1) Ein zweifach verdrehtes Möbiusband ist die Orientierungsüberlagerung des Möbiusbandes.



(2) $S^n = (P^n)^{or}$ für n ungerade.

47. Integration und der Satz von Stokes

47.1 Proposition (Pull-back von Volumsformen). *Sei $f : M \to N$ glatt, $\dim M = m = \dim N$ und $(x^1,\dots,x^m)$ lokale Koordinaten von M und $(y^1,\dots,y^m)$ solche von N. Dann gilt:*

$$f^*(g \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) = (g \circ f) \det\left(\frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^i}\right) dx^i \wedge \dots \wedge dx^m.$$

Beweis. O.B.d.A. $g = 1$ und $f^*(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) = \omega \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m)$. Wenden wir dies auf $(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^m})$ an, so folgt (siehe auch (42.2)):

$$\begin{aligned}
\omega &= f^*(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m)\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^m}\right)\\
&= (dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m)\left(Tf\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,Tf\frac{\partial}{\partial x^m}\right)\\
&= (dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m)\left(\sum_{i_1}\frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^{i_1}},\dots,\sum_{i_m}\frac{\partial f^{i_m}}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^{i_m}}\right)\\
&= \sum_\pi (dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m)\left(\frac{\partial}{\partial y^{\pi(1)}},\dots,\frac{\partial}{\partial y^{\pi(m)}}\right)\prod_{i=1}^m \frac{\partial(y^{\pi(i)} \circ f)}{\partial x^i}\\
&= \det\left(\frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i}\right) \qquad \square
\end{aligned}$$

47.2 Bemerkung

Speziell für $f = \mathrm{id}$ und $g = 1$ gilt:

$$dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m = \det\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

47.3 Proposition. *M ist orientierbar $\Leftrightarrow$ Das Vektorbündel $\Lambda^m T^*M$ ist trivial.*

Beweis.

($\Rightarrow$) Wir wollen zeigen: Es gibt ein $\omega \in \Lambda^m T^*M$, sodaß $\omega_p \neq 0$ für alle $p \in M$ ist. Ein solches ω liefert dann unmittelbar eine VB-Karte des (eindimensionalen!) Bündels $\Lambda^m T^*M \to M$. Lokal in U können wir erreichen, daß $\omega(p)(v_1, \dots, v_m) > 0$ ist für eine positiv orientierte Basis $(v_i)_{i=1}^m$ in T_pM. Sei nun eine passende Überdeckung mit offenen Mengen U gegeben, und zu jedem U solch ein lokales ω_U, und sei $\{f_U\}$ eine untergeordnete Partition der Eins. Wir definieren ω durch $\omega := \sum_U f_U \cdot \omega_U \in \Omega^m(M)$, mit $\omega(p) > 0$ für alle $p \in M$.

($\Leftarrow$) Sei $f : M \times \mathbb{R} \to \Lambda^m T^*M$ ein globaler Vektorbündelisomorphismus, dann ist $\omega := f(\_ \times \{1\})$ eine nirgends verschwindende m-Form. Wir nennen die Basis $(v_i)_{i=1}^m$ auf T_pM positiv orientiert, falls $\omega_p(v_1, \dots v_m) > 0$. Sei φ eine Karte mit zusammenhängender Domäne und $(x^1, \dots x^m)$ lokale Koordinaten:

$$\omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right) \neq 0 \Rightarrow \omega(\dots) > 0 \text{ (bzw. } < 0\text{) überall.}$$

Nach Proposition (46.2) ist also $TM \to M$ als Vektorbündel orientierbar und somit ist M als Mannigfaltigkeit orientierbar. □

47.4 Motivation

Wir können Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ nicht so ohne weiteres über eine Mannigfaltigkeit integrieren. Sehen wir uns dazu den einfachsten Fall der 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten an. Wenn M ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit Grenzen a und b ist, dann mißt das übliche Riemann-Integral $\int_M f = \int_a^b f$ die orientierte Fläche unterhalb des Graphens von f. Damit wir das Integral für eine beliebige 1-dimensionale Mannigfaltigkeit M auch definieren können, brauchen auf jeden Fall eine Orientierung auf M. In diesem Kapitel seien also alle Mannigfaltigkeiten orientiert. Weiters müssen wir aber auch (infinitesimale) Längen (bzw. Volumina) auf M messen können. Falls M eine Riemann-Mannigfaltigkeit ist, dann können wir das mittels der Volumsform vol_M tun, im eindimensionalen Fall also mit dem Bogenelement.

Auf abstrakten Mannigfaltigkeiten brauchen wir ein Substitut für das Volumselement. Im 1-dimensionalen, wäre das eine 1-Form $\omega \in \Omega^1(M)$ (welche in keinem Punkt verschwindet). Dann könnten wir das Integral $\int_M f \cdot \omega$ von f bzgl. ω über M definieren. Da aber $f \cdot \omega$ selbst eine 1-Form ist, genügt es $\int_M \omega$ für beliebige 1-Formen $\omega \in \Omega^1(M)$ zu erklären. Sei dazu $c : [a, b] \to M$ eine orientierungserhaltende globale Parametrisierung, dann ist $\int_M \omega := \int_a^b \omega_{c(t)}(\dot{c}(t))dt$ das wie üblich definierte Kurvenintegral.

Auf allgemeinen orientierten m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten M wollen wir nun das Integral $\int_M \omega$ für beliebige m-Formen $\Omega^m(M)$ mit kompaktem Träger definieren.

47.5 Definition (Integration von Differentialformen)

Sei M eine orientierte m-dimensionale Mannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega^m(M)$ mit kompaktem Träger.

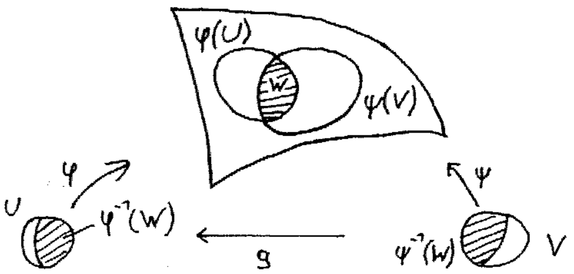
1. Falls $M = U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen ist, dann läßt sich ω als $\omega(x) = f(x)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$ mit $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ schreiben. Das Integral definieren wir dann als gewöhnliches Riemann-Integral:
$$\int_M \omega := \int_U f(x^1, \ldots, x^m) d(x^1, \ldots, x^m).$$
2. Falls $\operatorname{Trg} \omega \subseteq \varphi(U)$ für eine orientierungserhaltende Karte $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \to \varphi(U)$ ist, definieren wir:
$$\int_M \omega := \int_U \varphi^*(\omega).$$
3. Ist $\operatorname{Trg} \omega$ beliebig kompakt, so wählen wir eine endliche, offene Überdeckung mit Kartenumgebungen von $\operatorname{Trg} \omega$, sowie eine Partition der Eins $\{f_i\}$, die der Überdeckung untergeordnet ist. Dann hat jedes $f_i \cdot \omega$ Träger in einer Karte, und somit können wir nach (2) definieren:
$$\int_M \omega = \int_M \Big(\sum_i f_i\Big) \omega := \sum_i \int_M f_i\, \omega.$$

Bemerkung

Diese Definitionen sind sinnvoll, d.h. die Begriffe hängen nicht von den getroffenen Wahlen ab:

Im Fall (1) ist nichts zu zeigen. Aber man beachte, daß für jeden orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $g : \mathbb{R}^m \supseteq V \to U \subseteq \mathbb{R}^m$ gilt:
$$\int_{g(V)} \omega = \int_V g^*(\omega),$$
denn falls $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$ ist, so ist
$$(g^*(\omega))(x) = (f \circ g)(x)\ \det(g'(x))\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$
nach (47.1).

Im Fall (2) sei $\operatorname{Trg} \omega \subset \varphi(U) \cap \psi(V) =: W$ für zwei Karten φ und ψ. Sei der Kartenwechsel $g := \varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(W) \to \varphi^{-1}(W)$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus.



Dann gilt

$$\int_U \varphi^*(\omega) = \int_{\varphi^{-1}(W)} \varphi^*(\omega) = \int_{g(\psi^{-1}(W))} \varphi^*(\omega) \overset{(1)}{=\!=}$$
$$= \int_{\psi^{-1}(W)} \underbrace{g^*(\varphi^*(\omega))}_{(\varphi\circ g)^*(\omega)} = \int_{\psi^{-1}(W)} \psi^*(\omega) = \int_V \psi^*(\omega).$$

Diese Gleichung folgt aus dem in (1) Gesagten.

Im Fall (3) sei $\{g_j\}$ eine zweite Partition der Eins, die einer endlichen Überdeckung des Trägers mit Kartenumgebungen untergeordnet ist. Dann gilt

$$\sum_i \int_M f_i\omega = \sum_i \int_M \left(\sum_j g_j\right) f_i\omega = \sum_i \sum_j \int_M g_j f_i \omega =$$
$$= \sum_j \int_M \left(\sum_i f_i\right) g_j\omega = \sum_j \int_M g_j\omega.$$

47.6 Definition (Dichten)

Falls wir über nicht orientierbaren Mannigfaltigkeiten integrieren wollen, brauchen wir etwas anderes als m-Formen. Dazu definieren wir ein eindimensionales Vektorbündel VOL (M) durch Angabe der Transitionsfunktionen $x \mapsto |\det \psi'(x)| \in GL(1)$ zu den Kartenwechseln ψ. Schnitte von $\mathrm{vol}(M)$ heißen Dichten, solche kann man dann über M integrieren. Falls M orientierbar ist, ist $\mathrm{vol}(M) \cong \Lambda^m T^*M$.

47.7

Wir steuern jetzt auf den Satz von Stokes zu: Der 1.te Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt bekanntlich, daß $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$. Insbesondere gilt: $\int_{-\infty}^0 f' = \int_a^0 f' = f(0)$, falls $\mathrm{Trg}\, f$ kompakt ist und a unterhalb des Infimums von $\mathrm{Trg}\, f$ liegt.

Lemma (Satz von Stokes für Halbraum). *Sei $H = H^{m+1} := \{(t,x) : t \leq 0, x \in \mathbb{R}^m\}$ ein $(m+1)$-dimensionaler Halbraum. Die Teilmenge $\partial H := \{(0,x) : x \in \mathbb{R}^m\} \cong \mathbb{R}^m$ heißt der Rand von H, und für eine m-Form ω im $\mathbb{R}^{m+1}$ mit kompaktem Träger gilt:*

$$\int_H d\omega = \int_{\partial H} \omega := \int_{\partial H} \mathrm{incl}^*\, \omega,$$

wo $\mathrm{incl} : \partial H \hookrightarrow H$ *die Inklusion ist.*

Beweis. Es gilt für $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^{m+1})$:

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i=0}^m \omega_i \, dx^0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^m; \\
d\omega &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \, dx^j \wedge dx^0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^m + 0 \\
&= \sum_{i=0}^m \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} (-1)^i \, dx^0 \wedge \dots \wedge dx^m \;\Rightarrow \\
\Rightarrow \int_H d\omega &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \int_H \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \, d(x^0, \dots, x^m) \overset{\text{Fubini}}{=\!=} \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial \omega_0}{\partial x^0}(x^0, x^1, \dots, x^m) \, dx^0 \right) \, d(x^1, \dots, x^m) \\
&\quad + \sum_{i=1}^m (-1)^i \int_{H_i} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \, dx^i \right) \, d(x^0, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^m) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \omega_0(0, .) + 0,
\end{aligned}$$

wobei $H_i := \{(t, x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_m) : t \le 0\}$ ist, und der 2te Summand 0 ist, da $\operatorname{Trg} \omega$ kompakt ist. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial H} \omega &= \int_{\partial H} \operatorname{incl}^* \omega \\
&= \int_{\partial H} \sum_{i=0}^m \omega_i(0, x^1, \dots, x^m) \det \left(\tfrac{\partial(x^0, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} \right) \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \omega_0(0, x^1, \dots, x^m) \, d(x^1, \dots, x^m) + 0,
\end{aligned}$$

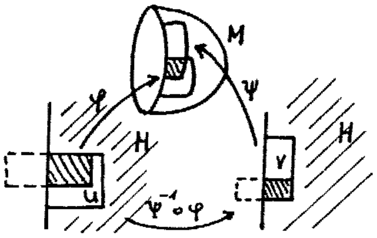
denn

$$\det \left(\frac{\partial(x^0, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} \right) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \square$$

Wir wollen diese Überlegungen nun auf Räume übertragen, die nur lokal wie H aussehen:

47.8 Definition (Berandete Mannigfaltigkeit)

Eine C^∞-Mannigfaltigkeit mit Rand ist eine Menge M zusammen mit einem Atlas $\mathcal{A}$ von injektiven Abbildungen $\varphi : U \to M$, wobei $U \subseteq H$ offen in einem abgeschlossenen Halbraum H, und die Kartenwechsel $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(\psi(V)) \to \psi^{-1}(\varphi(U))$ auf offenen Teilmengen von Halbräumen definiert und glatt sind.



Dabei heißt eine Abbildung zwischen solchen Mengen glatt, wenn es eine glatte Fortsetzung auf offene Mengen im $\mathbb{R}^m$ gibt. Wie üblich setzen wir voraus, daß die durch den Atlas induzierte finale Topologie Hausdorff und parakompakt ist. Der Rand von M ist dann definiert als

$$\partial M := \{p \in M : \exists \text{ eine Karte } \varphi \text{ um } p \text{ mit } \varphi^{-1}(p) \in \partial H\}.$$

Da der Kartenwechsel ein lokaler Homöomorphismus des $\mathbb{R}^n$ ist, erhält er innere Punkte, und somit ist $p \in \partial M \Leftrightarrow \varphi^{-1}(p) \in \partial H$ für jede Karte φ um p. Der Rand ∂M ist dann eine Mannigfaltigkeit (ohne Rand). Ein Atlas auf ∂M ist durch die Einschränkungen $\varphi|_{\partial M}$ gegeben.

Man kann die Begriffe TM, T^*M, $C^\infty(M,N)$, $\Lambda^k T^*M$ und $\Omega^k(M)$ wie auf Mannigfaltigkeiten ohne Rand definieren.

47.9 Definition (innerer Tangentialvektor)

Ein Vektor $v \in T_pM$ heißt innerer Tangentialvektor falls $p \notin \partial M$ oder $T\varphi^{-1}(p,v) \in T_{\varphi^{-1}(p)}H$ hat 0-te Komponente kleiner als 0.

47.10 Lemma (Verlängern berandeter Mannigfaltigkeiten). *Jede Mannigfaltigkeit mit Rand läßt sich zu einer Mannigfaltigkeit ohne Rand "verlängern", d.h. sie ist Teilmannigfaltigkeit der gleichen Dimension:*

Beweisskizze. Mittels Partition der Eins findet man ein VF auf M, das nur aus inneren Tangentialvektoren besteht. Durch "Zusammenstauchen" kann dessen Fluß global gemacht werden: $\mathrm{Fl}(1,.) : M \to M \setminus \partial M$ ist dann eine Einbettung von M in die Mannigfaltigkeit ohne Rand $M \setminus \partial M$. □

Beispiele für berandete Mannigfaltigkeiten sind: das abgeschlossene Möbiusband und die abgeschlossene Kugel.

47.11 Lemma (Rand eines Mannigfaltigkeit). *Der Rand einer orientierten Mannigfaltigkeit M mit Rand ist in kanonischer Weise orientierbar.*

Beweis. Eine Basis $(e_i)_{i=1}^m$ von $T_p(\partial M)$ heißt positiv orientiert, falls $(e_0,\dots,e_m)$ in T_pM positiv orientiert ist für einen nach außen weisenden Tangentialvektor e_0. (d.h. $-e_0$ ist innerer Tangentialvektor) □

47.12 Satz von Stokes. *Sei M eine $(n+1)$-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M und dieser trage die kanonische Orientierung. Sei $\omega \in \Omega^n(M)$ mit $\mathrm{Trg}\,\omega$ kompakt, dann gilt:*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega := \int_{\partial M} \mathrm{incl}^*\,\omega \quad (\textit{wobei } \mathrm{incl} : \partial M \hookrightarrow M)$$

Beweis. Sei $\{f_i\}$ eine Partition der Eins, die einer Überdeckung mit Kartenbildern untergeordnet ist. Dann ist $\omega = \sum_i \omega_i$ mit Formen $\omega_i := f_i \cdot \omega$ mit Träger in Kartenbildern. Somit ist

$$d\omega = \sum_i d(\omega_i),\ \operatorname{Trg} d(\omega_i) \subseteq \operatorname{Trg}(\omega_i) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_M d\omega = \sum_i \int_M d(\omega_i),\ \int_{\partial M} \omega = \sum_i \int_{\partial M} \omega_i.$$

Es genügt also, den Beweis für die Situation, wo $\operatorname{Trg}\omega$ in einer Kartenumgebung liegt, zu führen. Also o.B.d.A. $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1})$ und somit $\int_H \partial\omega = \int_{\partial H} \omega$. Für diese Situation wurde das in (47.7) bereits gezeigt. □

48. Integration auf Riemann-Mannigfaltigkeiten

48.1 Bemerkungen

1. Die VOLUMSFORM auf einer m-dimensionalen orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit M ist jene eindeutig bestimmte m-Form vol_M, welche punktweise auf positiv orientierten Orthonormalbasen von TM den Wert 1 hat, siehe (41.2). In lokalen Koordinaten ist sie gegeben durch:
$$\mathrm{vol}_M = \sqrt{G}\, du^1 \wedge \dots \wedge du^m$$
$$\text{mit } G := \det((g_{i,j})_{i,j}) \text{ und } g_{i,j} := g\left(\tfrac{\partial}{\partial u^i}, \tfrac{\partial}{\partial u^j}\right),$$
wobei g die Riemann-Metrik auf M ist.
2. Sei N eine orientierte Teilmannigfaltigkeit von Kodimension 1 der $(n+1)$-dimensionalen orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit M und sei ν_x für $x \in N$ der eindeutig bestimmte Vektor in T_xM, sodaß $(\nu_x, e_1, \dots, e_n)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis in T_xM ist für eine (jede) orientierte Orthonormalbasis $(e^1, \dots, e^n)$ von T_xN. Sei ν zu einem Vektorfeld gleichen Namens auf ganz M fortgesetzt, so gilt
$$\mathrm{vol}_N = \mathrm{inkl}^*(i_\nu(\mathrm{vol}_M)) \text{ auf } N,$$
denn $\mathrm{vol}_N(e_1, \dots, e_n) = 1 = \mathrm{vol}_M(\nu_N, e_1, \dots, e_n) = (i_{\nu_N} \mathrm{vol}_M)(e_1, \dots, e_n)$. Insbesonders gilt das für den Rand $N = \partial M$ einer berandeten Mannigfaltigkeit M. Der Vektor ν ist dann der nach außen weisende Einheitsnormalvektor.
3. Sei allgemeiner $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ein beliebiges Vektorfeld. Dann ist $\operatorname{div}\xi \cdot \mathrm{vol}_M = \mathcal{L}_\xi \mathrm{vol}_M$ nach (43.2) und es gilt auf ∂M:
$$\mathrm{incl}^*(i_\xi \mathrm{vol}_M) = \langle \xi, \nu_{\partial M}\rangle \cdot \mathrm{vol}_{\partial M} \text{ auf } \partial M,$$
denn
$$\begin{aligned}(i_\xi \mathrm{vol}_M)(e_1, \dots, e_m) &= \mathrm{vol}_M(\xi, e_1, \dots, e_m) = \\ &= vol_M\Big(\underbrace{\langle\xi,\nu\rangle\nu}_{\in (T(\partial M))^\perp} + \underbrace{(\xi - \langle\xi,\nu\rangle\nu)}_{\in T(\partial M)}, e_1, \dots, e_m\Big) \\ &= \langle\xi,\nu\rangle \cdot \mathrm{vol}_M(\nu, e_1, \dots, e_m) + 0 \\ &= \langle\xi,\nu\rangle \cdot \mathrm{vol}_{\partial M}(e_1, \dots, e_m).\end{aligned}$$

48.2 Greensche Satz. *Sei M eine orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit mit Rand und sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int_M \operatorname{div} \xi \cdot \operatorname{vol}_M = \int_{\partial M} \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \operatorname{vol}_{\partial M} .$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_M \operatorname{div} \xi \cdot \operatorname{vol}_M &\overset{(43.2)}{=\!=} \int_M \mathcal{L}_\xi \operatorname{vol}_M \overset{(42.7)}{=\!=} \int_M (d \circ i_\xi + i_\xi \circ d) \operatorname{vol}_M \\ &= \int_M d(i_\xi \operatorname{vol}_M) + 0 \overset{\text{Stokes}}{=\!=} \int_{\partial M} \operatorname{incl}^*(i_\xi \operatorname{vol}_M) \\ &= \int_{\partial M} \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \operatorname{vol}_{\partial M} . \qquad \square\end{aligned}$$

48.3 Produktregeln

$$\begin{aligned}\operatorname{Grad}(f \cdot g) &= g \cdot \operatorname{Grad}(f) + f \cdot \operatorname{Grad}(g) \\ \operatorname{div}(f \cdot \xi) &= f \cdot \operatorname{div}(\xi) + df \cdot \xi = f \cdot \operatorname{div}(\xi) + \langle \operatorname{Grad}(f), \xi \rangle \\ \Delta(f \cdot g) &= f \cdot \Delta(g) + \Delta(f) \cdot g - 2\langle \operatorname{Grad}(f), \operatorname{Grad}(g) \rangle,\end{aligned}$$

siehe Aufgabe (72.69).

48.4 Greensche Formeln. *Sei M eine kompakte orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit mit Rand und seien f und h in $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Dann gilt:*

$$\int_M \Big(\langle \operatorname{Grad} f, \operatorname{Grad} h \rangle - f \cdot \Delta h \Big) \cdot \operatorname{vol} = \int_{\partial M} f \cdot \langle \operatorname{Grad} h, \nu \rangle \cdot \operatorname{vol}$$

$$\int_M (f \cdot \Delta h - h \cdot \Delta f) \cdot \operatorname{vol} = -\int_{\partial M} (f \, dh - h \, df)(\nu) \cdot \operatorname{vol}$$

Beweis. (1) Es gilt $\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{Grad} h) = f \cdot \operatorname{div}(\operatorname{Grad} h) + \langle \operatorname{Grad} f, \operatorname{Grad} h \rangle = -f \cdot \Delta h + \langle \operatorname{Grad} f, \operatorname{Grad} h \rangle$ und somit für $\xi = f \cdot \operatorname{Grad} h$:

$$\begin{aligned}\int_M \Big(\langle \operatorname{Grad} f, \operatorname{Grad} h \rangle - f \cdot \Delta h \Big) \cdot \operatorname{vol}_M &= \int_M \operatorname{div}(f \cdot \operatorname{Grad} h) \cdot \operatorname{vol}_M = \\ &= \int_M \operatorname{div} \xi \cdot \operatorname{vol}_M \overset{(48.2)}{=\!=} \int_{\partial M} \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \operatorname{vol}_{\partial M} \\ &= \int_{\partial M} \langle f \cdot \operatorname{Grad} h, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \operatorname{vol}_{\partial M} = \int_{\partial M} f \cdot \langle \operatorname{Grad} h, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \operatorname{vol}_{\partial M} \\ &= \int_{\partial M} f \cdot dh(\nu_{\partial M}) \cdot \operatorname{vol}_{\partial M} .\end{aligned}$$

(2) Vertauscht man f und h in (1) und zieht das Resultat von (1) ab so erhält man die zweite Greensche Formel. $\square$

48.5 Folgerung (Subharmonische Funktionen sind konstant).
Sei M eine kompakte, orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit ohne Rand. Dann ist

jede SUBHARMONISCHE FUNKTION $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ – *d.h.* $\Delta f \leq 0$ – *konstant. Insbesonders gilt dies für harmonische Funktionen, d.h. die stationären Punkte f der Wärmeleitungsgleichung* $\Delta f = 0$.

Beweis. Wählen wir in der 1.ten Greenschen Formel die erste Funktion konstant 1, so erhalten wir $\int_M -\Delta f \cdot \mathrm{vol}_M = \int_\emptyset df(\nu) \cdot \mathrm{vol} = 0$. Wegen $\Delta f \leq 0$ ist also Δf konstant 0, i.e. f harmonisch. Nach der 1.ten Greenschen Formel für $h = f$ erhalten wir analog

$$\begin{aligned} 0 &\overset{\text{Green}}{=\!=} \int_M (|\operatorname{Grad} f|^2 - f \cdot \underbrace{\Delta f}_{=0}) \cdot \mathrm{vol}_M \\ &= \int_M |\operatorname{Grad} f|^2 \cdot \mathrm{vol}_M, \end{aligned}$$

also ist $\operatorname{Grad} f = 0$ und somit ist f konstant. □

49. Der Laplace-Beltrami-Operator

49.1 Der Laplace-Beltrami-Operator ist selbstadjungiert

Was läßt sich allgemein über den Laplace-Beltrami-Operator $\Delta : \Omega(M) \to \Omega(M)$ einer kompakten Riemann-Mannigfaltigkeit aussagen? Auf jedem homogenen Teil $\Omega^k(M)$ haben wir ein inneres Produkt, welches gegeben ist durch

$$\big\langle \alpha, \beta \big\rangle_{\Omega^k(M)} := \int_M \big\langle \alpha(.), \beta(.) \big\rangle_{\bigwedge^k T^*M} \ \mathrm{vol}_M .$$

Es gilt, daß d und d^* adjungierte Operatoren bezüglich diesem inneren Produkt sind, denn:

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathrm{vol} \ \text{ für } \alpha, \beta \in \Omega^k(M)$$

und für $\alpha \in \Omega^k$ und $\beta \in \Omega^{k-1}$ rechnen wir wie folgt

$$\begin{aligned} \Big(\langle \alpha, d\beta \rangle - \langle d^*\alpha, \beta \rangle \Big) \ \mathrm{vol} &= \langle d\beta, \alpha \rangle \ \mathrm{vol} - \Big\langle \beta, (-1)^{km+m+1} * d * \alpha \Big\rangle \ \mathrm{vol} \\ &= d\beta \wedge *\alpha + (-1)^{km+m} \beta \wedge * * d * \alpha \\ &= d\beta \wedge *\alpha + (-1)^{km+m} \beta \wedge (-1)^{(m-k+1)(k-1)} d * \alpha \\ &= d\beta \wedge *\alpha + (-1)^{k-1} \beta \wedge d * \alpha \\ &= d(\beta \wedge *\alpha). \\ \Rightarrow \int_M \langle \alpha, d\beta \rangle \ \mathrm{vol} &= \int_M \langle d^*\alpha, \beta \rangle \ \mathrm{vol}. \end{aligned}$$

Somit ist der Laplace-Beltrami-Operator $\Delta = dd^* + d^*d$ symmetrisch, d.h.

$$\langle \Delta\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \Delta\beta \rangle$$

Er ist auch positiv, denn

$$\langle \Delta\alpha, \alpha \rangle = \langle (dd^* + d^*d)\alpha, \alpha \rangle = \langle d^*\alpha, d^*\alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle \geq 0.$$

Wegen dieser Gleichung gilt auch:

$$\Delta\alpha = 0 \Leftrightarrow d\alpha = 0 = d^*\alpha, \ \text{ also } \operatorname{Ker}(\Delta) = \operatorname{Ker}(d) \cap \operatorname{Ker}(d^*).$$

Der Operator Δ ist ein linearer Differentialoperator vom Grad 2. Man kann zeigen, daß er elliptisch ist, siehe [**42**, 6.35] und damit folgende Lemmas gelten:

49.2 Lemma. *Eine Folge von k-Formen $\alpha_n \in \Omega^k(M)$, für die sowohl $\{\|\alpha_n\|^2 := \langle\alpha_n, \alpha_n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ als auch $\{\|\Delta(\alpha_n)\|^2 : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, besitzt eine Cauchy-Teilfolge in $\Omega^k(M)$.*

Ohne Beweis, siehe [**42**, 6.6].

49.3 Lemma. *Jede* SCHWACHE LÖSUNG *α von $\Delta\alpha = \gamma$ ist eine wirkliche Lösung, d.h. Aus $\alpha \in L(\Omega^k(M), \mathbb{R})$ mit $\langle\gamma, \beta\rangle = \alpha(\Delta(\beta))$ für alle $\beta \in \Omega^k(M)$ folgt, daß ein $\tilde{\alpha} \in \Omega^k(M)$ existiert mit $\alpha(\beta) = \langle\tilde{\alpha}, \beta\rangle$ für alle β.*

Ohne Beweis, siehe [**42**, 6.5].

49.4 Theorem von Hodge. *Sei M eine kompakte orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit so gilt:*

$$\dim(\operatorname{Ker}\Delta) < \infty \quad \textit{und} \quad (\operatorname{Ker}\Delta)^\perp = \operatorname{Im}\Delta$$

Beweis.

(1) Angenommen $\operatorname{Ker}\Delta$ ist unendlich-dimensional, dann existiert eine orthogonale Folge von $\varphi_n \operatorname{Ker}\Delta$. Diese hat somit einen Häufungspunkt nach (49.2), und das ist ein Widerspruch.

(2) Die Idee zum Beweis der 2. Aussage ist die Gleichung $(\operatorname{Ker} T)^\perp = \operatorname{Im}(T^*)$ aus der linearen Algebra für lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen. Im unendlich-Dimensionalen stimmt diese so nicht mehr, aber mittels der Elliptizität können wir sie nun für $T := \Delta$ zeigen.

Es gilt $\operatorname{Bild}\Delta \subseteq (\operatorname{Ker}\Delta)^\perp$, denn für $\beta \in \operatorname{Ker}\Delta$ ist $\langle\Delta\alpha, \beta\rangle = \langle\alpha, \Delta^*\beta\rangle = 0$ da Δ symmetrisch ist.

Behauptung: $\exists\ c \forall\ \beta \in (\operatorname{Ker}\Delta)^\perp : \|\beta\| \leq c\|\Delta\beta\|$. (Also ist $\Delta^{-1} : \operatorname{Bild}\Delta \to (\operatorname{Ker}\Delta)^\perp$ stetig.)

Wir wollen die Behauptung indirekt beweisen. Angenommen $\exists\ \beta_n \in (\operatorname{Ker}\Delta)^\perp$ mit $|\beta_n| = 1$ und $|\Delta\beta_n| \to 0$. Nach Lemma (49.2) dürfen wir annehmen, daß β_n eine Cauchy-Folge ist. Also existiert

$$\ell(\psi) := \lim_{n\to\infty} \langle\beta_n, \psi\rangle \text{ für alle } \psi \in \Omega^k.$$

Das lineare Funktional $\ell : \Omega^p \to \mathbb{R}$ ist beschränkt, denn $|\ell(\psi)| \leq 1 \cdot |\psi|$ und es gilt $\ell|_{\operatorname{Ker}\Delta} = 0$, denn

$$\varphi \in \operatorname{Ker}\Delta \Rightarrow \ell(\varphi) = \lim_n \langle\beta_n, \varphi\rangle = \lim_n 0 = 0$$

aber auch $\ell|_{\operatorname{Im}\Delta} = 0$, denn

$$\ell(\Delta\varphi) = \lim_{n\to\infty} \langle\beta_n, \Delta\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle\Delta\beta_n, \varphi\rangle = 0.$$

Also ist ℓ eine schwache Lösung von $\Delta\ell = 0$. Nach Lemma (49.3) ist es eine wirkliche Lösung, d.h. $\exists\ \beta \in \Omega^k : \ell(\psi) = \langle\beta, \psi\rangle$ für alle $\psi \in \Omega^k$. Somit ist $\beta \in (\operatorname{Ker}\Delta)^\perp$, denn $\langle\beta, \psi\rangle = \ell(\psi) = 0$ für $\psi \in \operatorname{Ker}\Delta$, und $\beta \neq 0$, ja sogar $\|\beta\| = \lim_n \|\beta_n\| = 1$. Aber es ist $0 = \ell(\Delta\varphi) = \langle\beta, \Delta\varphi\rangle = \langle\Delta\beta, \varphi\rangle$ für alle $\varphi \in \Omega^k$ und somit $\Delta\beta = 0$. Das ist ein Widerspruch.

Behauptung: $\Delta : \Omega \to (\operatorname{Ker}\Delta)^\perp$ ist surjektiv.

Sei $\alpha \in (\operatorname{Ker} \Delta)^\perp$. Wir definieren $\ell(\Delta\varphi) := \langle \alpha, \varphi\rangle$ für alle $\varphi \in \Omega^k$. Dann ist ℓ wohldefiniert, denn aus $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$ folgt $\varphi_1 - \varphi_2 \in \operatorname{Ker} \Delta$ und somit $\langle \alpha, \varphi_1 - \varphi_2\rangle = 0$. Und ℓ ist beschränkt, denn für den auf $\operatorname{Ker} \Delta$ orthogonal stehenden Anteil ψ von φ gilt: $\Delta\varphi = \Delta\psi$ und somit

$$|\ell(\Delta\varphi)| = |\ell(\Delta\psi)| = |\langle \alpha, \psi\rangle| \le |\alpha| \cdot |\psi| \le c \cdot |\alpha| \cdot |\Delta\psi| = c \cdot |\alpha| \cdot |\Delta\varphi|$$

Also ist ℓ nach dem SATZ VON HAHN-BANACH (siehe [**23**, 7.2.1]) erweiterbar zu einem $\|\_\|$-beschränkten linearen Funktional auf Ω^k. Diese Erweiterung ist aber eine schwache Lösung von $\Delta\ell = \alpha$, und somit existiert nach Lemma (49.3) ein $\omega \in \Omega^k$ mit $\langle \omega, \psi\rangle = \ell(\psi)$ für alle ψ. Und somit $\langle \Delta\omega, \psi\rangle = \langle \omega, \Delta^*\psi\rangle = \ell(\Delta\psi) = \langle \alpha, \psi\rangle \,\forall\, \psi$ also ist $\Delta\omega = \alpha$. □

49.5 Folgerung (Orthogonale Zerlegung der Formen). *Für kompakte orientierbare Riemann-Mannigfaltigkeiten M haben wir folgende orthogonale Zerlegungen:*

$$\Omega = \operatorname{Ker} \Delta \oplus \operatorname{Bild} \Delta \quad \textit{und weiter} \quad \operatorname{Bild} \Delta = \operatorname{Bild} d \oplus \operatorname{Bild} d^*$$

Beweis. Die erste direkte Summenzerlegung haben wir in (49.4) gezeigt. Nun zur zweiten:

($\supseteq$) Die linearen Unterräume $\operatorname{Bild} d$ und $\operatorname{Bild} d^*$ sind in $\operatorname{Bild} \Delta = (\operatorname{Ker} \Delta)^\perp$ enthalten, da $\langle d\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, d^*\beta\rangle = \langle \alpha, 0\rangle = 0$ und $\langle d^*\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, d\beta\rangle = \langle \alpha, 0\rangle = 0$ für alle $\beta \in \operatorname{Ker} \Delta$ nach (49.1).

($\subseteq$) Dies ist wegen $\Delta = dd^* + d^*d$ offensichtlich.

($\oplus$) Die Summe ist orthogonal, denn wegen $\langle d\alpha, d^*\beta\rangle = \langle d^2\alpha, \beta\rangle = \langle 0, \beta\rangle = 0$ steht $\operatorname{Bild}(d)$ auf $\operatorname{Bild}(d^*)$ normal. □

49.6 Definition (Green-Operator)

Unter dem GREEN-OPERATOR versteht man den Operator $G : \Omega \to (\operatorname{Ker} \Delta)^\perp$ definiert durch $\Delta(G(\alpha)) = \alpha - H(\alpha)$, wobei $H : \Omega \to \operatorname{Ker} \Delta$ die orthonormale Projektion ist, die von jedem $\alpha \in \Omega$ den harmonischen Teil $H(\alpha) \in \operatorname{Ker} \Delta$ berechnet. Die Formen im Kern von H werden auch als HARMONISCHE FORMEN bezeichnet. Wegen (49.4) gilt:

$$\Delta = \Delta|_{\operatorname{Bild} \Delta} \oplus 0 : \operatorname{Bild} \Delta \oplus \operatorname{Ker} \Delta \to \operatorname{Bild} \Delta \oplus \operatorname{Ker} \Delta$$

und $\Delta|_{\operatorname{Bild} \Delta} : (\operatorname{Ker} \Delta)^\perp \to \operatorname{Bild} \Delta$ ist klarerweise bijektiv und stetig. Nach dem offenen Abbildungssatz für Fréchet-Räume (siehe [**23**, 5.5.2]) ist $\Delta|_{\operatorname{Bild} \Delta}$ ein Homöomorphismus. Mit seiner Hilfe läßt sich der Green-Operator auch als $G = (\Delta|_{\operatorname{Bild} \Delta})^{-1} \circ H^\perp$ schreiben, wobei $H^\perp := \mathrm{id}_\Omega - H$. Folglich ist G beschränkt, selbstadjungiert und kompakt.

49.7 Folgerung. *Sei $T : \Omega \to \Omega$ ein linearer Operator, welcher mit Δ kommutiert, d.h. $T \circ \Delta = \Delta \circ T$, so kommutiert er auch mit G. Insbesondere gilt das für d, d^* und Δ.*

Beweis. Aus $T \circ \Delta = \Delta \circ T$ folgt, daß $\operatorname{Ker} \Delta$ und $\operatorname{Bild} \Delta = (\operatorname{Ker} \Delta)^\perp$ T-invariant sind. Somit kommutiert T mit H und $H^\perp$ also auch mit G. □

49.8 Folgerung (Harmonische Repräsentanten).
Die Kohomologie $H(M)$ von M ist isomorph zum Raum $\operatorname{Ker} \Delta$ *der harmonischen*

Formen. Genauer, in jeder Kohomologieklasse gibt es genau einen harmonischen Repräsentanten.

Beweis. Nach (49.5) ist $\Omega = \operatorname{Ker} \Delta \oplus \operatorname{Bild} d \oplus \operatorname{Bild} d^*$. Wir behaupten $\operatorname{Ker} d = \operatorname{Ker} \Delta \oplus \operatorname{Bild} d$.

($\supseteq$). Nach (49.1) ist $\operatorname{Ker} \Delta = \operatorname{Ker} d \cap \operatorname{Ker} d^* \subseteq \operatorname{Ker} d$ und wegen $d^2 = 0$ ist $\operatorname{Im} d \subseteq \operatorname{Ker} d$.

($\subseteq$). Sei $\omega \in \operatorname{Ker} d$. Nach (49.5) ist $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ mit $\omega_1 \in \operatorname{Ker} \Delta$, $\omega_2 \in \operatorname{Im} d$ und $\omega_3 \in \operatorname{Im} d^*$ und somit $0 = d\omega = d\omega_1 + d\omega_2 + d\omega_3$ mit $d\omega_1 = 0 = d\omega_2$ wegen ($\supseteq$). Da $\omega_3 \in \operatorname{Im} d^*$ existiert ein α mit $d^*\alpha = \omega_3$ und somit $0 = d\omega_3 = dd^*\alpha$ und weiters $\|om\|^2 = \|d^*\alpha\|^2 = \langle d^*\alpha, d^*\alpha\rangle = \langle dd^*\alpha, \alpha\rangle = \langle 0, \alpha\rangle = 0$. Also ist $\omega = \omega_1 + \omega_2 \in \operatorname{Ker} \Delta \oplus \operatorname{Im} d$.

49.9 Folgerung (Kohomologie ist endlichdimensional). *Die Kohomologie jeder kompakten, orientierbaren Mannigfaltigkeit ist endlichdimensional, d.h. alle Betti-Zahlen sind endlich.*

Beweis. Wir wählen eine Riemann-Metrik auf M, dann ist $H(M) \cong \operatorname{Ker} \Delta$ nach (49.8), und ist somit endlichdimensional nach (49.4). □

49.10 Definition (Poincaré-Dualität)

Für jede kompakte orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit induziert die Abbildung $\Omega^{m-k}(M) \times \Omega^k(M) \to \mathbb{R}$, welche durch $(\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$ gegeben ist, eine bilineare Abbildung $H^{m-k}(M) \times H^k(M) \to \mathbb{R}$, die sogenannte Poincaré-Dualität.

Diese Definition macht Sinn, denn aus $\alpha_2 - \alpha_1 = d\alpha$ folgt $\alpha_2 \wedge \beta - \alpha_1 \wedge \beta = d\alpha \wedge \beta = d(\alpha \wedge \beta) \pm \alpha \wedge d\beta$, wo $d\beta = 0$, da $[\beta] \in H^k(M) = \operatorname{Ker} d/\operatorname{Bild} d$ ist. Somit ist nach den Satz von Stokes $\int_M \alpha_2 \wedge \beta = \int_M \alpha_1 \wedge \beta$.

49.11 Lemma. *Die Poincaré-Dualität induziert einen Isomorphismus $H^{m-k} \cong (H^k)^*$, i.e. für die Betti-Zahlen gilt $\beta_k = \beta_{m-k}$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß die Poincaré-Dualität nicht degeneriert ist.

Sei dazu $[\alpha] \in H^{m-k} \setminus \{0\}$, wir dürfen annehmen, daß α harmonisch ist. Wählen wir $\beta := *\alpha$, so gilt: $d\beta = d*\alpha = \pm * d^*\alpha = 0$ und $\int_M \alpha \wedge \beta = \int_M \alpha \wedge *\alpha = \int_M \langle \alpha, \alpha\rangle \operatorname{vol} > 0$, da $\alpha \neq 0$.

Wir zeigen nun, daß eine bilineare nicht-degenerierte Abbildung $b : E \times F \to \mathbb{R}$ auf endlichdimensionalen Vektorräumen einen Isomorphismus $E \to F^*$ induziert.

Die induzierte Abbildung $E \ni v \mapsto b(v, \cdot) \in F^*$ ist injektiv, denn $b(v, w) = 0$ für alle $w \in F$ impliziert $v = 0$. Also ist $\dim E \leq \dim(F^*) = \dim F$, und aus Symmetriegründen $\dim E = \dim F$. Somit ist die induzierte Abbildung ein Isomorphismus. □

Da H^k nach (49.4) endlich-dimensional ist, liefert jedes innere Produkt auf H^k einen Isomorphismus $\sharp : H^k \to (H^k)^*$ und somit nach (49.11) einen Isomorphismus $H^{m-k} \to (H^k)^* \leftarrow H^k$. Verwenden wir insbesonders den Isomorphismus $H(M) \cong \operatorname{Ker} \Delta \subseteq \Omega(M)$ und das von $\Omega(M)$ induzierte innere Produkt aus (49.1) so läßt sich obiger Isomorphismus $H^{m-k} \to H^k$ wie folgt beschreiben:

$$\alpha \leftrightarrow (\beta \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \gamma,$$

mit $\int_M \alpha \wedge \beta = \langle \gamma, \beta \rangle_{\Omega^k(M)} := \int_M \langle \gamma, \beta \rangle_{\Lambda^k(M)} \operatorname{vol}_M = \int_M *\gamma \wedge \beta$ für alle $\beta \in H^k(M)$, also ist $\alpha = *(\gamma)$, d.h. der Isomorphismus ist durch den Hodge-Stern-Operator gegeben. Beachte dabei, daß

$$\begin{aligned}
\Delta(*(\gamma)) &= (dd^* + d^*d) * \gamma \\
&= (-1)^{1+m+m(m-k)} d * d * * \gamma + (-1)^{1+m+m(m-k+1)} * d * d * \gamma \\
&= (-1)^{1+m+m(m-k)+k(m-k)} d * d \gamma + (-1)^{1+m+m(m-k+1)} * d * d * \gamma \\
&= *((-1)^{m(m+1-2k)}(-1)^{1+m+mk} d * d * \\
&\qquad + (-1)^{m(m-1-2k)}(-1)^{1+m+m(k+1)} * d * d)\gamma \\
&= *(dd^* + d^*d)\gamma = *\Delta\gamma = *(0) = 0
\end{aligned}$$

für $\gamma \in \operatorname{Ker} \Delta$.

49.12 Folgerung. *Ist M kompakt, zusammenhängend, orientierbar und m-dimensional, so ist $H^m(M) \cong \mathbb{R}$, i.e. $\beta_M = 1$.*

Vgl. dies mit (50.5).

Beweis. Die Poincaré-Dualität liefert den Isomorphismus $H^m \cong (H^0)^*$, und $H^0 = \mathbb{R}$, da M zusammenhängend ist. Die Zusammensetzung der Isomorphismen ist: $\omega \mapsto \int_M \omega \wedge 1 = \int_M \omega$. □

49.13 Folgerung. *Ist M kompakt, zusammenhängend, orientierbar und von ungerader Dimension so verschwindet die Euler-Charakteristik $\chi = \sum_k (-1)^k \beta_k$.*

Beweis. Sei $\dim M = 2n + 1 = m$ so gilt

$$\begin{aligned}
\chi &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \beta_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \beta_k + \sum_{k=n+1}^{m} (-1)^k \beta_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \beta_k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{m-k} \beta_{m-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \underbrace{(\beta_k - \beta_{m-k})}_{\text{nach (49.11) } =0} = 0.
\end{aligned}$$ □

49.14 Kann man die Form einer Trommel hören?

Um diese sehr anschauliches Problem in eine mathematische Formulierung zu bekommen, denken wir uns eine Trommel als ein berandetes Gebiet im $\mathbb{R}^2$ denken. Lassen wir diese nun mit festgehaltenem Rand schwingen, so besitzt sie gewisse Eigenfrequenzen, die wir – zumindest mit absolut absolutem Gehör – hören könnten. Es stellt sich nun die Frage, ob das Gebiet durch dieses Spektrum von Eigenfrequenzen bereits bis auf Isometrien eindeutig festgelegt ist.

Allgemeiner können wir das Problem auch für beliebig dimensionale, abstrakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten stellen, [**49**].

Da wir sie nur ein wenig aus der Ruhelage bringen wollen, ist es egal in welchem umgebenden Raum die Mannigfaltigkeit isometrisch eingebettet ist, am Einfachsten in $M \times \mathbb{R}$. Sei nun $u(x,t)$ die Entfernung des Punktes $x \in M$ von seiner Ruhelage zum Zeitpunkt t. Dann erfüllt u, wie bei der üblichen Gleichung der schwingenden Saite, die partielle Differentialgleichung 2.ter Ordnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = 0 \text{ mit } U|_{\partial M} = 0.$$

Wobei Δ der Laplace-Beltrami-Operator der Riemann-Mannigfaltigkeit ist, siehe (43.3).

Die übliche Lösungsmethode verwendet den Ansatz der getrennten Variablen, d.h. $u(x,t) := \varphi(x) \cdot \psi(t)$. Die Gleichung übersetzt sich dann in $\frac{\Delta\varphi}{\varphi}(x) = -\frac{\psi''}{\psi}(t)$ und somit müssen beide Seiten konstant – z.B. gleich λ – sein. Insbesondere suchen wir also Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ und Eigenfunktionen $\varphi \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ des Operators $\Delta : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$.

Falls M kompakt ist, so sind nach (49.1) alle Eigenwerte reell und die Eigenfunktionen zu verschieden Eigenwerten stehen orthogonal (da Δ symmetrisch ist). Die Eigenwerte sind alle nicht negativ (da $varDelta$ positiv ist) und lassen sich zu einer monoton wachsenden Folge (λ_k) anordnen, die sich nur im Unendlichen häuft, denn andernfalls besäße eine zugehörige orthonormale Folge von Eigenfunktionen nach (49.2) einen Häufungswert. Vermöge einer orthonormalen Folge von zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi_k \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. läßt sich die Wellengleichung mittels Fourierreihen

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \Big) \cdot \varphi_k(x)$$

lösen, wobei die Konstanten a_k und b_k durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind. Die Klangwelle der Mannigfaltigkeit ist dann ein geeigneter Mittelwert:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\alpha_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \beta_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \Big).$$

Und somit können wir (in einem gewissen Sinn) die λ hören.

Diese Folge (λ_k) heißt das Spektrum der Riemann-Mannigfaltigkeit. Z.B. ist das Spektrum der S^n die Folge $(k(k+n-1))_{k=0}^\infty$, wobei jedes $k > 0$ mit Vielfachheit $\frac{(n+2k-1)!(n+k-2)!}{(n-1)!k!}$ auftritt.

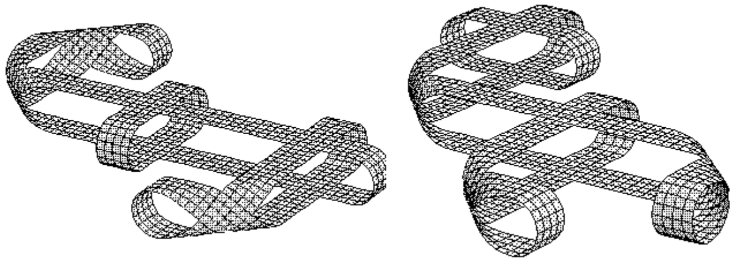
Man kann nun zeigen, daß folgende Dinge gehört werden können, d.h. durch das Spektrum bereits eindeutig bestimmt sind:
die Dimension, das Volumen und die Euler-Charakteristik und damit das Geschlecht (einer 2-dimensionalen unberandeten Mannigfaltigkeit) und die totale skalare Krümmung (siehe (64.13)).

Man konnte zeigen, daß man die folgenden Riemann-Mannigfaltigkeiten mit ihrer kanonischen Metrik durch Hören erkennen kann: die Sphären S^n, die reellen projektiven Räume $\mathbb{P}^{2n-1}$ für $n \le 3$, den flachen Torus $S^1 \times S^1$, sowie alle kompakten 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit konstanten Krümmung $K > 0$ [Tanaka1978].

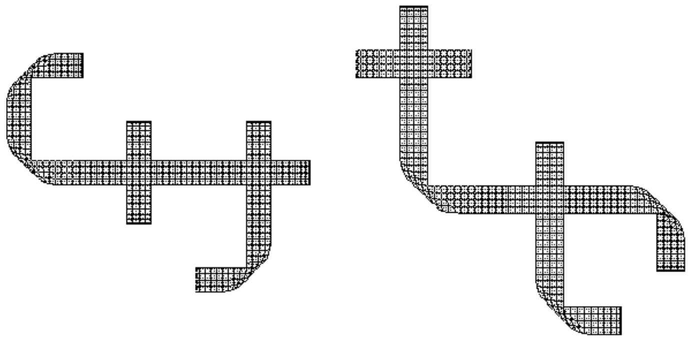
Jedoch gibt es isospektrale Riemann-Mannigfaltigkeiten die nicht isometrisch sind. Das erste Beispiel wurde von [**35**] gefunden und waren zwei 16-dimensionale Tori. [ConwaySloane1992] gaben 4-dimensionale Tori an. Marie-France [**54**] konstruierte 2-dimensionale Beispiele die als Quotienten der hyperbolischen Halbebene nach diskreten Gruppen von Isometrien erhalten werden. Daß es sogar isospektrale Deformationen von Riemann-Mannigfaltigkeiten gibt, wurde von [**7**] gezeigt und in [Sunada1985] systematisiert. Schließlich konstruierten [GordonWebbWolpert1991] eine berandete Fläche die aus $168 = 7 \cdot 24$ Kreuzen zusammengesetzt ist und auf welcher die Elemente von $SL_{\mathbb{Z}_2}(3)$ als fixpunktfreie Isometrien wirken. Die diskreten Untergruppen

$$G_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad G_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \right\}$$

liefern dann zwei 24-blättrige Überlagerungen $M \to M/G_i =: M_i$ mit M_1 und M_2 isospektral aber nicht isometrisch.



Faktorisiert man noch die offensichtliche isometrische Involution $\tau_i : M_i \to M_i$ heraus, so erhält man zwei isospektrale aber nicht isometrische Gebiete mit Ecken in $\mathbb{R}^2$.



50. Anwendungen zum Satz von Stokes

50.1 Kurvenintegrale

Sei M eine Mannigfaltigkeit, $\omega \in \Omega^1(M)$ geschlossen, $c : [0,1] \to M$ glatt. Dann ist $\int_c \omega = \int_0^1 c^*(\omega)$ und lokal sieht $c^*(\omega)$ wie folgt aus:

$$\omega = \sum \omega_i dx^i,$$

$$c^*(\omega) = \sum (\omega_i \circ c) \det \left(\frac{\partial(x_i \circ c)}{\partial t} \right) dt = \sum \omega_i(c(t))(x_i \circ c)'(t) dt.$$

Nach dem Satz von Stokes (47.12) ist für $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$: $\int_c df = \int_{[0,1]} c^*(df) = \int_{\partial[0,1]} c^*(f) = c^*(f)(1) - c^*(f)(0) = f(c(1)) - f(c(0))$. Falls M einfach-zusammenhängend ist, so ist nach (44.5) die erste Kohomologie $H^1(M) = 0$. Somit ist jedes geschlossene ω exakt, d.h. $\omega = df$ für passendes $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$). Es ist also $\int_c \omega = \int_c df = f(c(1)) - f(c(0))$, d.h. das Integral ist wegunabhängig.

50.2 Cauchyscher Integralsatz. *Sei M ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$, $f : M \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung und c eine geschlossene Kurve in M. Dann gilt: $\int_c f = 0$.*

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}\int_c f(z)\,dz &:= \int_c (f_1(z) + i f_2(z))(dx + i dy)\\ &:= \int_c \underbrace{(f_1(z)dx - f_2(z)dy)}_{=:\omega_1} + i \int_c \underbrace{(f_1(z)dy + f_2(z)dx)}_{=:\omega_2}\\ &:= \int_c \omega_1 + \int_c \omega_2.\\ \text{mit}\quad & d\omega_1 = d\omega_2 = 0.\end{aligned}$$

Wegen der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x}\\ \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial y}.\end{aligned}$$

und dem Poincare-Lemma folgt $\int_c f(z)\,dz = 0$. □

50.3 Cauchysche Integralformel. *Sei M ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f : M \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $D \subseteq M$ eine Kreisscheibe um z_0 und c parametrisiere den Rand ∂D von D. Dann gilt:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Beweis. Sei $\omega := \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$. Dann ist $d\omega = 0$ auf $M \setminus \{z_0\}$, weil $z \mapsto \frac{f(z)}{z-z_0}$ dort holomorph ist (verwende die Cauchy-Riemann'schen-Differentialgleichungen). Sei K_ε die Scheibe $B(z_0,\varepsilon)$ und R_ε der Kreisring $D \setminus K_\varepsilon \subseteq M$. Mit dem Satz von Stokes erhält man:

$$\begin{aligned}0 = \int_{R_\varepsilon} d\omega &= \int_{\partial R_\varepsilon} \omega = \int_{\partial D} \omega - \int_{\partial K_\varepsilon} \omega \Rightarrow\\ \Rightarrow \int_{\partial D} \omega &= \int_{\partial K_\varepsilon} \omega = \int_0^1 \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{2\pi i t})}{\varepsilon e^{2\pi i t}} \varepsilon 2\pi i e^{2\pi i t} dt\\ \Rightarrow f(z_0) &= \int_{\partial D} \omega \text{ für } \varepsilon \to 0. \quad \square\end{aligned}$$

50.4 Kohomologie

Sei M kompakt, orientierbar und ohne Rand. Wie in (47.3) folgt die Existenz eines $\omega \in \Omega^m(M)$, $m = \dim M$, mit $\omega(v_1, \dots v_m) > 0$ für alle positiv orientierten Basen $(v_i)_{i=1}^m$. Somit ist $\int_M \omega > 0$ und ω ist geschlossen, weil ω eine m-Form ist.

Die Form ω kann aber nicht exakt sein: Gäbe es ein $\eta \in \Omega^{m-1}(M)$ mit $\omega = d\eta$, dann wäre

$$\int_M \omega = \int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = 0, \text{ da } \partial M = \emptyset.$$

Das ist ein Widerspruch. Also ist $H^m(M) \neq 0$. Genauer gilt der folgende Satz:

50.5 Satz (Höchste Kohomologie). *Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit ohne Rand,* $\dim M = m$. *Es gilt:*

. $H^m(M) = \mathbb{R}$, *falls M kompakt und orientierbar, cf. 49.12.*
. $H^m(M) = 0$ *sonst, siehe* [**51**, Vol.I, S.371].

Beweis Skizze. Man verwendet zum Beweis die folgende - hier nicht bewiesene - Verschärfung des Poincaré-Lemmas:

50.6 Lemma (Poincaré-Lemma mit kompakten Träger). *Sei $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^m)$ mit kompakten Träger und $\int \omega = 0$. Dann existiert ein $\eta \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ mit kompakten Träger und $\omega = d\eta$.*

(Zum Beweis des Lemmas verwendet man $H^{m-1}(S^{m-1}) = \mathbb{R}$, siehe [**51**, Vol.I, Chapter 8])

Für M orientierbar und kompakt haben wir dies in (49.12) unter Verwendung des Theorems von Hodge beweisen. Direkter zeigt man es auch wie folgt. Die Abbildung $\int^\# : H^m(M) \to \mathbb{R}$ mit $\int^\# [\omega] := \int_M \omega$ ist wohldefiniert:

$$\int (\omega + d\eta) = \int \omega + \int d\eta = \int \omega.$$

Sie ist klarerweise linear und surjektiv. Wir wollen zeigen, daß sie auch injektiv ist, also trivialen Kern hat: Sei dazu $\omega \in \Omega^m(M)$ mit $\int \omega = 0$. Wie müssen zeigen, daß $\omega = d\eta$ für ein η.

Sei dazu $\omega_0 \in \Omega^m(M)$ mit $\int \omega_0 = 1$ und $\operatorname{Trg} \omega_0 \subseteq \operatorname{Bild} \psi_0$ für passendes ψ_0. Wir zeigen, daß es ein $c \in \mathbb{R}$ und ein $\eta \in \Omega^{m-1}(M)$ gibt mit $\omega = c \cdot \omega_0 + d\eta$. Daraus folgt dann wegen $\int \omega = 0$ sofort $c = 0$ und damit $\omega = d\eta$.

Betrachten wir zuerst den Fall $\operatorname{Trg} \omega \subseteq \operatorname{Bild} \psi$: Es gibt dann endlich viele Karten ψ_i mit $\operatorname{Bild} \psi_i \cap \operatorname{Bild} \psi_{i+1} \neq \emptyset$, ψ_0 die obige Karte bei ω_0 und weiters $\psi_m = \psi$ ist. Dazu gibt es ω_i mit kompaktem Träger $\operatorname{Trg} \omega_i \subseteq \operatorname{Bild} \psi_{i-1} \cap \operatorname{Bild} \psi_i$ und $\int \omega_i = 1$. Aus dem Lemma (50.6) folgt die Existenz von η_i mit $\operatorname{Trg} \eta_i \subseteq \operatorname{Bild} \psi_i$ und $\omega_i - \omega_{i-1} = d\eta_i$. Schließlich existiert ebenso für $c := \int \omega$ ein η_{m+1} mit $\omega - c\omega_m = d\eta_{m+1}$. Daraus folgt $\omega = c\omega_0 + d(\eta_{m+1} + c \sum_{i=1}^m \eta_i)$. Sei nun ω beliebig und $\{f_i\}$ eine Partition der Eins, die einer Überdeckung mit Kartenumgebungen untergeordnet ist: $\omega = \sum_i f_i \omega = \sum_i c_i \omega_0 + d \sum_i \eta_i$. Damit ist der erste Teil gezeigt.

Wir wollen die Behauptung jetzt für den Fall zeigen, daß M kompakt, aber nicht orientierbar ist: Auf der Orientierungsüberlagerung M^{or} der Mannigfaltigkeit M definieren wir die Orientierungsvertauschung $\chi : \chi(p, \pm\omega) := (p, \mp\omega)$. Weiters sei

$$\Omega^k_\pm(M^{or}) := \{\omega \in \Omega^k(M^{or}) : \chi^*\omega = \pm\omega\} \text{ und analog}$$
$$H^k_\pm(M^{or}) := \{\omega \in \Omega^k_\pm(M^{or}) : d\omega = 0\}/\{d\eta : \eta \in \Omega^{k-1}_\pm(M^{or})\}.$$

Wir behaupten:

$$\Omega^k(M^{or}) = \Omega^k_+(M^{or}) \oplus \Omega^k_-(M^{or})$$
$$H^k(M^{or}) = H^k_+(M^{or}) \oplus H^k_-(M^{or})$$
$$p^\# : H^k(M) \xrightarrow{\cong} H^k_+(M^{or})$$

Sei $\omega \in \Omega^k(M^{or})$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\omega = \frac{1}{2}\Big((\omega + \chi^*\omega) + (\omega - \chi^*\omega)\Big) \in \Omega^k_+ \oplus \Omega^k_- \text{ wobei } \Omega^k_- \cap \Omega^k_+ = \{0\}\\
\Rightarrow\ &\Omega^k(M^{or}) = \Omega^k_-(M^{or}) \oplus \Omega^k_+(M^{or}) \text{und } d(\Omega^k_\pm) \subseteq \Omega^{k+1}_\pm,\\
&\text{weil } \chi^*(d\omega) = d(\chi^*\omega) = \pm d\omega \text{ für } \omega \in \Omega^k_\pm\\
\Rightarrow\ &H^k(M^{or}) = H^k_-(M^{or}) \oplus H^k_+(M^{or})\\
&\text{und } \Omega^k(M) \to \Omega^k(M^{or}) \text{ ist injektiv, da } p \text{ submersiv ist.}
\end{aligned}$$

Wir zeigen:

$$p^*(\Omega^k(M)) = \Omega^k_+(M^{or}).$$

($\subseteq$) Weil $\chi^* p^* \omega = (p \circ \chi)^*\omega = p^*\omega$.

($\supseteq$) Sei $\omega \in \Omega^k_+(M^{or})$ und sei $U \subseteq M^{or}$, sodaß $p|_U : U \to p(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Sei $\alpha|_{pU} := ((p|_U)^{-1})^*\omega$. (Das ist wohldefiniert, weil $\chi^*\omega = \omega$.) Es ist dann $p^*\alpha = \omega$, und p^* ist surjektiv.

Somit gilt $\Omega^k(M) \to \Omega^k_+(M^{or}) \to \Omega^k(M^{or})$. Wegen $p^* \circ d = d \circ p^*$ folgt daraus $p^{*\#} : H^k(M) \to H^k_+(M^{or})$, was die letzte Behauptung war.

Wir nehmen also M als kompakt aber nicht orientierbar an. Es folgt $H^m(M^{or}) \cong \mathbb{R}$ nach dem Vorigen. Sei $\omega_0 \in H^m(M^{or})$ mit $\int \omega_0 = 1, \omega_0 > 0$ für eine positiv orientierte Basis, $\omega_0 = \omega_- + \omega_+$. Es gilt $\int \omega_+ = 0$, denn $\int \omega_+ = \int \chi^*\omega_+ = -\int \omega_+$. Aus $\int \omega_+ = \int^\# [\omega_+] = 0$ folgt aber nach dem Vorigen:

$$\begin{aligned}
&\omega = d\eta = 0 \in H^m(M^{or}) \Rightarrow\\
\Rightarrow\ &[\omega_0] \in H^m_-(M^{or}) \Rightarrow H^m(M^{or}) = H^m_-(M^{or}) \Rightarrow\\
\Rightarrow\ &H^m(M) \cong H^m_+(M^{or}) = \{0\}.
\end{aligned}$$

Für den Fall, daß M orientierbar, aber nicht kompakt ist, verweisen wir auf [**51**, Vol.I, Chap.8]. Daraus folgt sofort der Fall, daß M nicht kompakt und nicht orientierbar ist: $H^m(M) \to H^m(M^{or}) = \{0\}$. □

50.7 Beispiel

Für die Orientierungsüberlagerung $S^n \to P^n$, ist die Orientierungsvertauschung die Antipodalabbildung $x \mapsto -x$ und somit folgt aus $H^k(P^n) \cong H^k_+(S^n)$, daß

$$H^k(P^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq 0, n \\ \mathbb{R} & \text{für } k = 0 \quad \text{(da } P^n \text{ zush. ist)} \\ 0 & \text{für } k = n \text{ gerade} \\ \mathbb{R} & \text{für } k = n \text{ ungerade} \end{cases}$$

50.8 Brouwerscher Fixpunktsatz. *Sei $f : B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\} \to B^n$ glatt, dann gibt es ein $x \in B^n$ mit $f(x) = x$.*

Beweis. Indirekt: Sei $f(x) \neq x$ für alle x, dann gibt es eine C^∞-Abbildung $r : B^n \to S^{n-1}$ mit $r|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$, sei nämlich $r(x)$ der auf der Seite von x liegende Schnittpunkt der wohldefinierten Geraden durch x und $f(x)$ mit der Sphäre S^{n-1}. Wir erweitern r zu einer Abbildung gleichen Namens $r : \mathbb{R}^n \to S^{n-1}$. Nun folgt

$$\begin{tikzcd}
H^{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r, "r^*"] \arrow[dd, equal] & H^{n-1}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\mathrm{incl}^*"] \arrow[d, equal] & H^{n-1}(S^{n-1}) \arrow[dd, equal] \\
& 0 \arrow[dr, dotted] & \\
\mathbb{R} \arrow[ur, dotted] \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Das ist ein Widerspruch. □

50.9 Definition (Abbildungsgrad)

Seien M, N zusammenhängende, kompakte und orientierbare Mannigfaltigkeiten von gleicher Dimension m und sei $f : M \to N$ glatt. Der Abbildungsgrad $\deg f \in \mathbb{R}$ sei durch folgendes Diagramm definiert:

$$\begin{tikzcd}
H^m(M) \arrow[d, "\int^\#"'] & H^m(N) \arrow[l, "H^m(f)"'] \arrow[d, "\int^\#"'] \\
\mathbb{R} & \mathbb{R} \arrow[l, dotted, "\deg f"']
\end{tikzcd}$$

$$\deg f \cdot t \longleftarrow t$$

wobei

$$\deg f \cdot \int^\# [\omega] = \deg f \cdot \int \omega = \int^\# H^m(f)[\omega] := \int^\# [f^*\omega] = \int f^*\omega.$$

Man kann zeigen, daß $\deg f$ eine ganze Zahl ist.

50.10 Folgerung.

1. $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.
2. $f \sim g$ *homotop* $\Rightarrow \deg f = \deg g$.
3. f *ist Diffeomorphismus* $\Rightarrow \deg f = \pm 1$;
   Weiters ist $\deg f = 1 \Leftrightarrow f$ *orientierungserhaltend ist.*
4. f *ist nicht surjektiv* $\Rightarrow \deg f = 0$.

Beweis. (1) da $(f \circ g)^\# = g^\# \circ f^\#$.
(2) da dann $f^\# = g^\#$.
(3) folgt aus (1) unter Verwendung von $\deg f \in \mathbb{Z}$.
(4) Es ist $\omega \in \Omega^m(N)$, $\operatorname{Trg} \omega \subseteq N \setminus f(M)$ und $\int_N \omega = 1$. Also ist $\deg f \cdot 1 = \int_M f^*\omega = \int_M 0 = 0$, und somit ist $\deg f = 0$. □

50.11 Igelsatz. *Sei* $\xi \in \mathfrak{X}(S^{2n})$. *Dann gibt es ein* $p \in S^{2n}$ *mit* $\xi(p) = 0$.

Beweis. Indirekt: Sei $\xi(p) \neq 0$ für alle p. Dann gibt es eine Homotopie zwischen Identität und Antipodalabbildung: verbinden wir p mit $-p$ längs des Großkreises in Richtung $\xi(p)$, so folgt $1 = \deg \mathrm{id} = \deg(\mathrm{Antipod}) = -1$. Widerspruch. □

VIII. Hyperflächen

In diesen Kapitel kehren wir vorerst zu konkreten 2-dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$-zurück. Wir besprechen die verschiedenen Krümmungsbegriffe (wie Normal-, Haupt-, Gauß und mittlere Krümmung) und stellen die nötigen Formeln bereit. Dann untersuchen wir spezielle Klassen solcher Hyperflächen: Drehflächen, Regelflächen, Torsen und Minimalflächen. Schließlich behandeln wir noch Geodäten, die Exponentialabbildung die jedem Tangentialvektor die Geodäte mit dieser Startgeschwindigkeit zuordnet und Jacobifelder die mit der Variation von Geodäten zusammenhängen. Wir zeigen den Integralsatz von Gauß-Bonnet. Dann besprechen wir den Paralleltransport von Tangentialvektoren längs Kurven und die damit verbundene kovariante Ableitung. Schließlich führen wir noch die Riemann-, die Ricci- und die Schnittkrümmung ein und behandeln den Zusammenhang zu zuvor definierten Krümmungen.

51. Normalkrümmungen

51.1 Definition (Hyperfläche)

Eine Hyperfläche M im $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmannigfaltigkeit der Kodimension 1, d.h. der Dimension $m = n - 1$. Sie kann lokal z.B. durch eine Gleichung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oder eine Parametrisierung $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ gegeben sein.

Beispiele

Flächen im $\mathbb{R}^3$, Sphären $S^m \subset \mathbb{R}^n$ und $SL(\mathbb{R}^n) \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

51.2 Gaußabbildung

In jedem Punkt $p \in M$ haben wir genau zwei normierte Normalvektoren auf T_pM im $\mathbb{R}^n$. Falls M orientiert ist, können wir einen dieser Normalvektoren auszeichnen, nämlich so, daß $(\nu_p, e_1, \dots, e_m)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ ist, für eine (jede) positiv orientierte Orthonormalbasis $(e_1, \dots, e_m)$ von T_pM, cf. (47.11). Ist M lokal durch eine Gleichung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben, so ist der Gradient $\operatorname{Grad} f$ ein Normalvektor, den wir nur noch normieren müssen, cf. (46.8). Es gibt also lokal und für orientierte Hyperflächen sogar global eine glatte Abbildung $M \ni p \mapsto \nu_p \in S^m \subset \mathbb{R}^n$ mit $\nu_p \perp T_pM$. Ein derart gewählte Funktion ν wird Gauss-Abbildung genannt.

51.3 Normalkrümmung

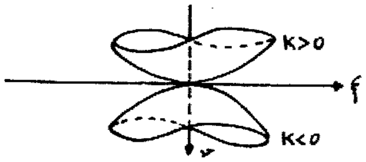
Wir wollen nun die "Krümmung einer Hyperfläche" definieren. Es sei $\nu_p \perp T_pM$ ein fix gewählter Einheits-Normalvektor und $\xi \in T_pM$ ein Einheits-Tangentialvektor. Wir betrachten nun den Schnitt der Ebene $(t,s) \mapsto p + t\nu + s\xi$ durch p mit den Richtungsvektoren ξ und ν, mit M. Sei f eine lokale reguläre Gleichung von M um p. O.B.d.A. sei $|\operatorname{Grad}_p f|$ normiert und gleichorientiert wie ν_p, also $\nu_p = \operatorname{Grad}_p f$. Der Schnitt der Ebene mit M ist dann durch die Gleichung $f(p + t\nu_p + s\xi) = 0$ in (t,s) gegeben. Wir wollen in dieser impliziten Gleichung t nach s mittels impliziten Funktionensatz (10.2) auflösen. Dies ist wegen

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} f(p + t\nu_p + s\xi)|_{s=0} = f'(p)(\nu_p) = \langle \operatorname{Grad}_p f, \nu_p \rangle = |\operatorname{Grad}_p f|^2 = 1 \neq 0.$$

möglich. Wir erhalten also als Durchschnitt lokal eine Schnittkurve $c : s \mapsto p + t(s)\nu_p + s\xi$ in M mit $c(0) = p$ und $c'(0) = \xi + t'(s)\nu_p = \xi$, da $c'(0) \in T_pM$. Von der Kurve c können wir annehmen, daß sie proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Die in (3.2) definierte signierte Krümmung der ebenen Kurve c, wobei wir als positiv orientierte Basis (ν_p, ξ) wählen, nennt man die NORMALKRÜMMUNG $K(\xi) := K_M(\xi) := K_c(0)$ von M im Punkt p und Richtung ξ. Beachte, daß $(\xi, -\nu_p)$ das Begleitbein von c im Punkte $p = c(0)$ ist! Eine Formel von $K(\xi)$ erhalten wir wie folgt: Wegen $c(t) \in M$ gilt $c'(t) \in T_{c(t)}M = \nu_{c(t)}{}^\perp$, also $\langle c'(t), \nu_{c(t)} \rangle = 0$. Durch Differenzieren an der Stelle 0 erhalten wir: $\langle c''(0), \nu_p \rangle + \langle \xi, T_p\nu \cdot \xi \rangle = 0$. Folglich gilt:

$$K(\xi) = K_c(0) = -\langle c'', \nu_p \rangle = \langle \xi, T_p\nu \cdot \xi \rangle$$

Diese Formel können wir nun auch für $|\xi| \neq 1$ verwenden.



51.4 Weingarten-Abbildung

Man nennt die Tangentialabbildung

$$L_p := T_p\nu : T_pM \to T_{\nu_p}S^m = \nu_p{}^\perp = T_pM$$

der Gauß-Abbildung $\nu : M \to S^m$ die WEINGARTEN-ABBILDUNG. Der Vektor $L_p(\xi)$ mißt also die infinitesimale Änderung der Normalen, wenn man auf M von p in Richtung $\xi \in T_pM$ geht. Es gilt also

$$K(\xi) = \langle \xi, L \cdot \xi \rangle.$$

51.5 Bemerkung

Die Weingarten-Abbildung $L_p : T_pM \to T_pM$ ist symmetrisch. Denn seien ξ_1 und ξ_2 zwei Vektorfelder auf M. Wir setzen sowohl ξ_i, als auch ν lokal um p zu Vektorfeldern des $\mathbb{R}^n$ fort. Wegen $\langle \xi_1, \nu \rangle|_M = 0$ gilt

$$0 = \langle \xi_1, \nu \rangle'(p)(\xi_p) = \Big\langle {\xi_1}'(p)(\xi_2(p)), \nu(p) \Big\rangle + \Big\langle \xi_1(p), \nu'(p)(\xi_2(p)) \Big\rangle$$
$$= \Big\langle {\xi_1}'(p)(\xi_2(p)), \nu_p \Big\rangle + \Big\langle \xi_1(p), L_p(\xi_2(p)) \Big\rangle.$$

Somit erhalten wir

$$\Big\langle \xi_1(p), L_p(\xi_2(p)) \Big\rangle - \Big\langle \xi_2(p), L_p(\xi_1(p)) \Big\rangle =$$
$$= \Big\langle {\xi_2}'(p)(\xi_1(p)) - {\xi_1}'(p)(\xi_2(p)), \nu_p \Big\rangle = \Big\langle \underbrace{[\xi_1, \xi_2](p)}_{\in T_pM}, \nu_p \Big\rangle = 0$$

Ein zweiter Beweis geht wie folgt: Sei $\varphi : \mathbb{R}^m \to M \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale bei p zentrierte Parametrisierung. Mit φ_i bezeichnen wir die i-te partielle Ableitung von φ. Die $\varphi_i(0)$ bilden für $i = 1, \dots, m$ eine Basis von T_pM und es gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_i(0), L_p \cdot \varphi_j(0) \rangle &= \langle \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\varphi(t\, e_i), T_p\nu \cdot \tfrac{d}{ds}|_{s=0}\varphi(s\, e_j) \rangle \\
&= \langle \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\varphi(t\, e_i), \tfrac{d}{ds}|_{s=0}\nu(\varphi(s\, e_j)) \rangle \\
&= \tfrac{d}{ds}|_{s=0} \langle \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\varphi(t\, e_i + s\, e_j), \nu(\varphi(s\, e_j)) \rangle \\
&\quad - \langle \tfrac{d}{ds}|_{s=0} \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\varphi(t\, e_i + s\, e_j), \nu(\varphi(0\, e_j)) \rangle \\
&= 0 - \langle \varphi_{i,j}(0), \nu_p \rangle,
\end{aligned}$$

und ist somit offensichtlich symmetrisch in (i, j), da die gemischten 2-ten partiellen Ableitungen $\varphi_{i,j}$ von φ es sind.

51.6 Fundamentalformen

Die symmetrische bilinear-Form $II_p(\xi_1, \xi_2) := \langle \xi_1, L_p(\xi_2) \rangle$ auf T_pM heißt 2-te Fundamentalform von M. Unter der 1-te Fundamentalform versteht man die Riemann-Metrik, d.h. $I(\xi, et) := \langle \xi, \eta \rangle$. Wir haben in (51.3) gezeigt, daß $K(\xi) = II(\xi, \xi)$ gilt.

52. Haupt-, Gauß- und mittlere Krümmung

52.1

Jetzt wollen wir die Extremalwerte der Normalkrümmung bestimmen. Wegen der Homogenität von L macht diese Aufgabe nur Sinn, wenn wir die Abbildung K auf die Einheitssphäre $S^{m-1} \subset T_pM$ einschränken. Damit $\xi \in S^{m-1}$ ein kritischer Punkt ist, muß $T_\xi K : T_\xi S^{m-1} \to \mathbb{R}$ konstant 0 sein, d.h. $K'(\xi)(v) = 0$ für alle $v \in T_\xi S^{m-1} = \xi^\perp$. Es gilt:

$$K'(\xi)(v) = \tfrac{d}{dt}|_{t=0} II(\xi + tv, \xi + tv) \overset{(51.5)}{=\!=} 2II(\xi, v) = 2\langle L\xi, v \rangle.$$

Es muß also $L\xi \in T_xM$ normal stehen auf alle v, welche auf ξ normal stehen, d.h. $L\xi$ muß proportional zu ξ sein. Dies zeigt den

Satz von Rodriguez. *Die kritischen Punkte ξ der Normalkrümmung sind genau die Eigenvektoren der symmetrischen, linearen Abbildung L, und der zu ξ gehörige Eigenwert λ ist gegeben durch*

$$\lambda = \lambda\langle\xi,\xi\rangle = \langle\xi,\lambda\xi\rangle = \langle\xi,L\xi\rangle = II(\xi,\xi) = K(\xi),$$

die Normalkrümmung von M in Richtung von ξ. Im Fall $m = 2$ sind die kritischen Punkte auch extremal, nämlich das Minimum und das Maximum von $K(\xi)$ für $|\xi| = 1$. Für $m > 2$ sind die kritischen Punkte nicht notwendig extremal. □

52.2 Haupt- und Gauß-Krümmung

Man nennt die Eigenwerte von L die Hauptkrümmungen und die zugehörigen Eigenvektoren Hauptkrümmungsrichtungen. Da L symmetrisch ist, gibt es nur reelle Eigenwerte und dazu eine Orthonormalbasis von T_pM aus Eigenvektoren (Verwende: $0 = \langle Av,w\rangle - \langle v,Aw\rangle = (\lambda-\mu)\langle v,w\rangle$). Seien K_i die Hauptkrümmungen und ξ_i eine Orthonormalbasis von zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen. Dann gilt nach [Euler]:

$$K(\xi) = II(\xi,\xi) = II\Big(\sum_i\langle\xi,\xi_i\rangle\xi_i, \sum_j\langle\xi,\xi_j\rangle\xi_j\Big) = \\ = \sum_{i=j}\langle\xi,\xi_i\rangle\langle\xi,\xi_j\rangle II(\xi_i,\xi_j) = \sum_i\langle\xi,\xi_i\rangle^2K_i.$$

Unter der Gauss-Krümmung $K \in \mathbb{R}$ im Punkt p versteht man das Produkt aller Hauptkrümmungen, also die Determinante von L.
Die mittlere Krümmung $H \in \mathbb{R}$ ist das arithmetische Mittel der Hauptkrümmungen, also $\frac{1}{m}$ der Spur von L.
Eine Kurve c in M heißt Krümmungslinie, falls ihre Ableitung in jedem Punkt eine Hauptkrümmungsrichtung ist.
Ein Vektor $\xi \neq 0$ heißt Asymptotenrichtung, falls $II(\xi,\xi) = K(\xi) = 0$ ist. Eine Kurve c in M heißt Asymptotenlinie, falls ihre Ableitung in jedem Punkt eine Asymptotenrichtung ist.
Schließlich heißen zwei Vektoren $\xi_1 \neq 0$ und $\xi_2 \neq 0$ konjugiert, falls $II(\xi_1,\xi_2) = 0$ ist.
Ein Punkt p heißt Nabelpunkt, falls alle Hauptkrümmungen gleich sind, L also ein Vielfaches der Identität ist. Dann ist die Normalkrümmung konstant gleich der mittleren Krümmung.
Sind alle Hauptkrümmungen 0, so spricht man von einem Flachpunkt.

52.3 Beispiele

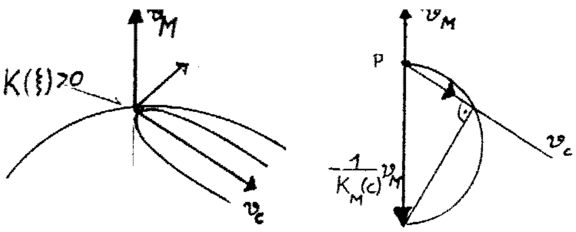
1. Hyperebene: $\mathbb{R}^m := e_0^\perp \subset \mathbb{R}^n$. Als Normalvektor verwenden wir e_0. Die Gaußabbildung ist somit konstant e_0 und die Weingarten-Abbildung $L = 0$. Also sind die oben definierten Krümmungen alle gleich 0. Alle Punkte sind Flachpunkte und alle Richtungen Hauptkrümmungsrichtungen und Asymptotenrichtungen.
2. Sphäre: $S^m = \{x : |x| = R\} \subset \mathbb{R}^n$. Hier können wir im Punkte $x \in S^m$ als Normale $\nu_x = \frac{1}{R}x$ nehmen. D.h. die Gaußabbildung ist die lineare Abbildung

$\frac{1}{R}$ id und somit ist dies auch die Weingarten-Abbildung. Also sind alle Punkte Nabelpunkte und alle Richtungen Hauptkrümmungsvektoren mit Hauptkrümmung $\frac{1}{R}$. Es gibt keine Asymptotenrichtungen. Die Gauß-Krümmung ist somit $\frac{1}{R^m}$ und die mittlere Krümmung ist $\frac{1}{R}$.

3. Zylinder: $M := \{(x,t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$. Als Normale in $(x,t) \in M$ können wir $\nu_{x,t} = (x,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ verwenden. Der Tangentialraum von M in diesem Punkt ist also $T_{(x,t)}M := \nu_{x,t}^\perp = \{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y \perp x\}$ und die Gaußabbildung ist die Einschränkung der linearen Abbildung $\mathrm{id} \oplus 0$ auf $T_x S^{m-1} \times \mathbb{R}$. Die Weingarten-Abbildung sieht somit genauso aus. Eine Hauptkrümmung ist also 0 mit Krümmungsrichtung $(0,1)$ und alle anderen Hauptkrümmungen sind 1. Die Erzeuger $\{x\} \times \mathbb{R}$ sind die Asymptotenlinien. Eine Kurve $c : s \mapsto (x(s), t(s))$ ist genau dann Krümmungslinie, wenn $s \mapsto t(s)$ konstant ist.

52.4 Lemma [53].
Ist c eine Kurve auf M mit $c(0) = p \in M$ und $c'(0) = \xi \in T_pM$, $|\xi| = 1$, so gilt:

1. $(\nu \circ c)'(0) = L_p \cdot \xi$, *d.h.* $L_p \cdot \xi$ *mißt die infinitesimale Änderung von* ν *längs* c.
2. $-\langle c''(0), \nu_p\rangle = II(\xi,\xi) = \langle L_p \cdot \xi, \xi\rangle = K(\xi)$, *d.h. die Normalkomponente der Beschleunigung hängt nur vom Geschwindigkeitsvektor ab, und ist die Normalkrümmung in dessen Richtung.*
3. *Es ist* $-K_M(\xi) = K_c(0)\langle \nu_M(p), \nu_c(0)\rangle = K_c(0)\cos\theta$, *wobei* θ *der Winkel zwischen der Flächennormale* $\nu_M(p)$ *und dem Hauptnormalenvektor* $\nu_c(0)$ *(oder äquivalent der Schmiegebene) von* c *in* p *ist und* $K_c(0) \geq 0$ *die Krümmung der Raumkurve* c *ist.*
4. *Der Schmiegkreis an* c *in* p *hat seinen Mittelpunkt auf der Sphäre um* $p - \frac{1}{2K_M(\xi)}\nu_M(p)$ *durch* p.



Beweis. (1) ist gerade die Definition der Weingarten-Abbildung.
(2) Dazu differenzieren wir $0 = \langle c'(t), \nu_M(c(t))\rangle$ wie in (51.3) und erhalten

$$-\Big\langle c''(0), \nu_M(c(0))\Big\rangle = \Big\langle c'(0), (\nu \circ c)'(0)\Big\rangle \overset{(1)}{=\!=} \langle \xi, L \cdot \xi\rangle = II(\xi,\xi) = K(\xi).$$

(3) Das Resultat folgt aus (2) wegen

$$-K(\xi) \overset{(51.3)}{=\!=\!=} \Big\langle c''(0), \nu_M(p)\Big\rangle \overset{(7.1)}{=\!=\!=} \Big\langle K_c(0)\nu_c(0), \nu_M(p)\Big\rangle = K_c(0)\Big\langle \nu_c(0), \nu_M(p)\Big\rangle.$$

(4) Aus der Theorie der Kurven (2.3) wissen wir, daß der Mittelpunkt des Schmiegkreises durch $c(0) + \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0)$ gegeben ist. Nun betrachten wir das Dreieck mit den

Ecken p, $p - \frac{1}{K(\xi)}\nu_M(p)$ und $p + \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0)$. Dieses hat einen rechten Winkel bei $c(0) + \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0)$, denn nach (3) ist

$$\Big\langle \nu_M(p), \nu_c(0) \Big\rangle = -\frac{II(\xi,\xi)}{K_c(0)} = -\frac{K_M(\xi)}{K_c(0)}$$

und somit

$$\Big\langle \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0), \frac{1}{K_M(\xi)}\nu_M(p) + \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0) \Big\rangle =$$
$$= -\frac{1}{K_c(0)K_M(\xi)}\frac{K_M(\xi)}{K_c(0)} + \frac{1}{K_c(0)^2} = 0.$$

Also liegt der Schmiegkreismittelpunkt auf dem Thaleskreis (oder in Wirklichkeit auf der Sphäre) mit der Strecke von p nach $p - \frac{1}{K_M(\xi)}\nu_M(p)$ als Durchmesser. □

52.5 Lemma (Flächen mit lauter Nabelpunkten).
Eine zusammenhängende Hyperfläche M besitzt genau dann nur Nabelpunkte, wenn sie Teil einer Ebene oder einer Sphäre ist.

Beweis. ($\Leftarrow$) Dies haben wir in (52.3) gezeigt.
($\Rightarrow$) Da jeder Punkt Nabelpunkt ist, ist die Weingarten-Abbildung proportional zur Identität, i.e. $L_{\varphi(x)} \cdot \varphi_i(x) = \lambda_x \varphi_i(x)$, wobei wir mit dem Index i die partielle Ableitung in die i-te Koordinatenrichtung bezeichnen. Wegen $la_x := \operatorname{Spur}(L_{\varphi(x)})$ ist $\lambda : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ glatt. Also ist $\nu_{i,j} := \partial_j\partial_i(\nu \circ \varphi) = \partial_j(L \cdot \varphi_i) = \partial_j(\lambda\,\varphi_i) = \lambda_j\,\varphi_i + \lambda\,\varphi_{i,j}$. Insbesondere gilt

$$\lambda_j\,\varphi_i = \nu_{i,j} - \lambda\varphi_{i,j} = \nu_{j,i} - \lambda\varphi_{j,i} = \lambda_i\,\varphi_j$$

und somit ist $\lambda_i = 0 = \lambda_j$ für $i \neq j$, d.h. λ ist konstant.
Falls $\lambda = 0$ ist, so ist $L = 0$, also ν konstant und M eine Ebene. Ist $\lambda \neq 0$, dann ist $(\lambda\,\varphi - \nu)_i = la\,\varphi_i - L \cdot \varphi_i = 0$ und somit $\xi := \frac{1}{\lambda}(\lambda\,\varphi - \nu)$ konstant, d.h. $|\varphi - \xi| = \frac{1}{|\lambda|}$. Somit liegt M lokal auf einer Sphäre um ξ. Da die Sphäre aber durch einen kleinen Teil von M eindeutig bestimmt ist, liegt M ganz auf der Sphäre. □

52.6 Satz von Dupin. *Für ein $m \geq 3$ sei $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ein lokaler Diffeomorphismus, für dessen partielle Ableitungen Φ_i orthogonal stehen, d.h. $\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$. Dann sind die Parameterlinien $t \mapsto \Phi(t \cdot e_i)$ Krümmungslinien auf jeder Hyperfläche $\Phi(e_j^\perp)$ für $i \neq j$.*

Man kann sich Φ vorstellen als m jeweils durch $t \in \mathbb{R}$ parametrisierte, paarweise orthogonal schneidende Familien von Flächen $\Phi(te_j + e_j^\perp)$ für $i = 1, \ldots, m$. Man nennt deshalb so ein Φ auch ein m-fach orthogonales Flächensystem.

Beweis. Es sei j fix gewählt. Wir müssen zeigen, daß für $i \neq j$ der Tangentenvektor der Parameterlinie $t \mapsto \Phi(t \cdot e_i)$, also die partielle Ableitung Φ_i, ein Eigenvektor der Weingarten-Abbildung L der Hyperfläche $M := \Phi(e_j^\perp)$ ist. Da $\langle \Phi_k, \Phi_j \rangle = 0$ für alle $k \neq j$ ist, ist Φ_j ein Normalvektor an den Tangentialraum der Hyperfläche M, der ja von den Φ_k mit $k \neq j$ erzeugt wird. Sei ν der normierte Normalvektor. Da $L\,\Phi_i \in TM = \Phi_j^\perp$ ist, ist Φ_i genau dann ein Eigenvektor zu L, wenn $\langle L\,\Phi_i, \Phi_k \rangle = 0$

ist für alle $k \neq i, j$.

$$0 = \langle \Phi_k, \Phi_i \rangle \overset{\partial_j}{\Rightarrow} \quad 0 = \langle \Phi_{k,j}, \Phi_i \rangle + \langle \Phi_k, \Phi_{i,j} \rangle \qquad (+)$$
$$0 = \langle \Phi_k, \Phi_j \rangle \overset{\partial_i}{\Rightarrow} \quad 0 = \langle \Phi_{k,i}, \Phi_j \rangle + \langle \Phi_k, \Phi_{j,i} \rangle \qquad (-)$$
$$0 = \langle \Phi_i, \Phi_j \rangle \overset{\partial_k}{\Rightarrow} \quad 0 = \langle \Phi_{i,k}, \Phi_j \rangle + \langle \Phi_i, \Phi_{j,k} \rangle \qquad (-)$$

Zieht man von der ersten Gleichung die beiden anderen ab, so erhält man $0 = -2\langle \Phi_{k,i}, \Phi_j \rangle$ und da Φ_j proportional zu ν ist, auch $\langle L\,\Phi_i, \Phi_k \rangle = -\langle \nu, \Phi_{k,i} \rangle = 0$, da partielles Differenzieren nach i von $\langle \nu \circ \Phi, \Phi_k \rangle$ wie im 2.ten Beweis von (51.5) die Gleichung $\langle L \cdot \Phi_i, \Phi_k \rangle + \langle \nu, \Phi_{k,i} \rangle = 0$ liefert. □

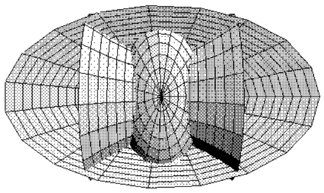
52.7 Beispiel. Die folgenden lokalen Koordinatensysteme erfüllen die Voraussetzungen des Satzes von Dupin (52.6):

1. Kartesische Koordinaten: $\Phi = \mathrm{id}$;
2. Zylinder-Koordinaten: $\Phi : (\varphi, r, z) \leftrightarrow (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi, z)$;
3. Kugel-Koordinaten: $\Phi : (\varphi, \alpha, s) \leftrightarrow (s \cos\alpha \cos\varphi, s \cos\alpha \sin\varphi, s \sin\alpha)$.

52.8 Beispiel (Elliptische Koordinaten)

Es sei: $g(t; x, y, z) := \frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} + \frac{z^2}{c-t}$ mit $0 < a < b < c$. Es ist $g(t; x, y, z) = 1$ ein

$$\begin{cases} \text{Ellipsoid} & \text{für } t < a \\ \text{einschaligen Hyperboloid} & \text{für } a < t < b \\ \text{zweischaligen Hyperboloid} & \text{für } b < t < c. \end{cases}$$



Wir betrachten die Funktion

$$G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \supset U \times V \to \mathbb{R}^3$$
$$G(u, v, w; x, y, z) := \Big(g(u; x, y, z), g(v; x, y, z); g(w, x, y, z) \Big)$$

mit $U := \,]-\infty, a[\, \times \,]a, b[\, \times \,]b, c[$ und $V := \{(x, y, z) : x, y, z > 0\}$, und behaupten, daß die Lösung $\Phi : (u, v, w) \mapsto (x, y, z)$ der impliziten Gleichung $G(u, v, w; x, y, z) = (1, 1, 1)$ ein dreifach orthogonales Flächensystem ist.
Es ist $\Phi : U \to V$ bijektiv, denn durch jeden Punkt $(x, y, z) \in V \subset \mathbb{R}^3$ geht genau

1. ein Ellipsoid mit $u(x, y, z) := t \in \,]-\infty, a[$;
2. ein einschaliges Hyperboloid mit $v(x, y, z) := t \in \,]a, b[$;
3. und ein zweischaliges Hyperboloid mit $w(x, y, z) := t \in \,]b, c[$.

Um das einzusehen beachte man, daß die Gleichung $g(t; x, y, z) - 1 = 0$ nach Ausmultiplizieren der Nenner ein kubisches Polynom γ in t wird bei fixen (x, y, z):

$$\begin{aligned}\gamma(t) := x^2(b-t)(c-t) + y^2(a-t)(c-t) + z^2(a-t)(b-t)\\ - (a-t)(b-t)(c-t).\end{aligned}$$

Für dieses Polynom gilt: $\gamma(a) > 0$, $\gamma(b) < 0$, $\gamma(c) > 0$ und weiters

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\gamma(t)}{(a-t)(b-t)(c-t)} = -1.$$

Also existiert in jedem der Intervalle $]-\infty, a[$, $]a, b[$ und $]b, c[$ genau eine Nullstelle. Durch Differenzieren der impliziten Gleichung erhalten wir

$$\frac{\partial(G_1, G_2, G_3)}{\partial(u, v, w)} + \frac{\partial(G_1, G_2, G_3)}{\partial(x, y, z)} \cdot \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = 0.$$

Die Matrix $\frac{\partial(G_1,G_2,G_3)}{\partial(u,v,w)}$ ist von Diagonalgestalt mit Eintragungen

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x, y, z) = \frac{x^2}{(a-t)^2} + \frac{y^2}{(b-t)^2} + \frac{z^2}{(c-t)^2} \neq 0 \text{ für } t = u, v, w.$$

Die Matrix $\frac{\partial(G_1,G_2,G_3)}{\partial(x,y,z)}$ hat als Zeilen $\frac{\partial g}{\partial(x,y,z)} = (\frac{2x}{a-t}, \frac{2y}{b-t}, \frac{2z}{c-t})$ für $t = u, v, w$. Diese Zeilen sind paarweise orthogonal, denn z.B.

$$\begin{aligned}&\frac{4x^2}{(a-u)(a-v)} + \frac{4y^2}{(b-u)(b-v)} + \frac{4z^2}{(c-u)(c-v)} =\\ &= \frac{4}{u-v}\left(\left(\frac{x^2}{a-u} + \frac{y^2}{b-u} + \frac{z^2}{c-u}\right) - \left(\frac{x^2}{a-v} + \frac{y^2}{b-v} + \frac{z^2}{c-v}\right)\right)\\ &= \frac{4}{u-v}(g(u; x, y, z) - g(v; x, y, z)\\ &= \frac{4}{u-v}(1-1) = 0.\end{aligned}$$

Also ist der implizite Funktionensatz anwendbar und F glatt mit Jacobimatrix

$$\Phi'(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = -\left(\frac{\partial(G_1, G_2, G_3)}{\partial(x, y, z)}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial(G_1, G_2, G_3)}{\partial(u, v, w)}.$$

Diese hat orthogonale Spalten, also erfüllt Φ die Voraussetzungen von (52.6). Der Diffeomorphismus Φ ist übrigens explizit gegeben durch:

$$\begin{aligned}x^2(u, v, w) &= \frac{(a-u)(a-v)(a-w)}{(a-b)(a-c)}\\ y^2(u, v, w) &= \frac{(b-u)(b-v)(b-w)}{(b-a)(b-c)}\\ z^2(u, v, w) &= \frac{(c-u)(c-v)(c-w)}{(c-a)(c-b)}\end{aligned}$$

Wir wissen also nach (52.6), daß die Krümmungslinien obiger Quadriken gerade die Schnittlinien der orthogonalen Familien sind.

52.9 Beispiel (Parabolische Koordinaten)

Wir gehen analog zu (52.8) vor. Es sei nun: $g(t;x,y,z) := \frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} - 2z + c + \lambda$ mit $a > b$. Es ist $g(t;x,y,z) = 0$ für verschiedene t ein elliptisches bzw. ein hyperbolisches Paraboloid. Es seien u, v und w die Lösungen der kubischen Gleichung $g(t;x,y,x) = 0$ in t, d.h.

$$(u-t)(v-t)(w-t) = (a-t)(b-t)(2z-c-t) - x^2(b-t) - y^2(a-t),$$

also ist

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(u-a)(v-a)(w-a)}{a-b} \\ y^2 &= \frac{(u-b)(v-b)(w-b)}{b-a} \\ z &= \frac{c-a-b+u+v+w}{2} \end{aligned}$$

Die durch diese Gleichungen definierte Funktion $\Phi : (u,v,w) \mapsto (x,y,z)$ erfüllt nun auf $\{(u,v,w) : u,v,w$ paarweise verschieden$\}$ die Voraussetzungen des Satzes von Dupin (52.6), denn

$$\Phi'(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{x}{2(u-a)} & \frac{x}{2(v-a)} & \frac{x}{2(w-a)} \\ \frac{y}{2(u-b)} & \frac{y}{2(v-b)} & \frac{y}{2(w-b)} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir wissen also nach (52.6), daß die Krümmungslinien obiger Quadriken gerade die Schnittlinien der orthogonalen Familien sind.

52.10 Satz von Liouville. *Für $n \geq 3$ bildet jeder konforme Diffeomorphismus offener Mengen des $\mathbb{R}^n$ Sphären auf Sphären ab.*

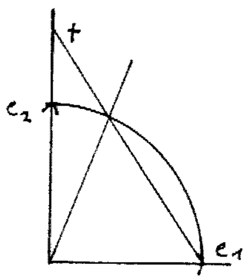
Beweis. Sei S eine Sphäre und $x \in S$ und $v \in T_xS$. O.B.d.A. sei 0 ihr Mittelpunkt. Wir wählen eine lokale orthogonale Parametrisierung φ von S um x mit $\partial_1\varphi(0) = v$ (z.B. die stereographische Projektion). Dann ist $\Phi(t;u) := t\,\varphi(u)$ eine Funktion, welche die Voraussetzungen von (52.6) erfüllt. Die Zusammensetzung $f \circ \Phi$ mit einem konformen Diffeomorphismus f muß ebenfalls die Voraussetzungen von (52.6) erfüllen, also ist $t \mapsto f(\varphi(t\,e_1))$ eine Krümmungslinie und $f'(x)(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\varphi(t\,e_1))$ eine Hauptkrümmungsrichtung. Da aber $v \in T_xS$ beliebig war, sind alle Tangentialvektoren Hauptkrümmungsrichtungen, d.h. $f(S)$ hat nur Nabelpunkte. Wegen (52.5) ist $f(S)$ also Teil einer Sphäre oder einer Ebene. Da $f(S)$ kompakt ist, ist es eine Sphäre. □

Vergleiche dieses Resultat mit den Ergebnissen über konformen Abbildungen im 2-dimensionalen ((33) und (34)).

52.11 Satz von Liouville. *Sei $m \geq 2$. Die Gruppe der konformen Diffeomorphismen des $\mathbb{R}^m$ besteht genau aus den Ähnlichkeitsabbildungen (d.h. (nicht notwendig eigentliche) Bewegungen zusammengesetzt mit Streckungen). Die Gruppe der konformen Diffeomorphismen der S^m wird durch die Ähnlichkeitsabbildungen und die Inversion $x \mapsto \frac{1}{|x|^2}x$ in einer stereographischen Karte erzeugt.*

Beweis. Den Fall $m = 2$ haben wir bereits im Kapitel über Kurven behandelt. Sei also $m > 2$ und f ein konformer Diffeomorphismus des $\mathbb{R}^m$. Nach (52.10) bildet dieser Sphären auf Sphären ab. Und ebenso zeigt man, daß er auch Hyperebenen auf solche abbildet. Da sich Geraden als Durchschnitte von $m-1$ Hyperebenen schreiben lassen, werden auch Geraden auf Geraden abgebildet. Geometrisch kann man das auch mittels des konformen Diffeomorphismuses f^{-1} sehen: Seien x_1, x_2, x_3 verschiedene Punkte einer Geraden. Angenommen die Punkte $y_i = f(x_i)$ lägen auf keiner Gerade. Dann würde eine Sphäre S existieren mit $y_i \in S$. Das Bild $f^{-1}(S)$ müßte aber wieder eine Sphäre sein, auf welcher die Punkte $x_i := f^{-1}(x_i)$ lägen, das ist unmöglich.

Eine Abbildung des $\mathbb{R}^m$, welche Geraden erhält, ist aber bereits affin: Eine solche erhält auch antipodale Punkte auf den Sphären, denn die Tangentialebenen in solchen sind parallel, i.e. sie schneiden den Durchmesser orthogonal, und diese Eigenschaft wird durch f erhalten. Damit muß f aber auch die Mittelpunkte erhalten, denn diese sind die Durchschnitte aller Durchmesser, die ja gerade antipodale Punkte verbinden. Durch Anwenden einer Translation können wir erreichen, daß $f(0) = 0$ ist und somit $f(r\,S^{m-1}) = \rho(r)\,S^{m-1}$ für alle $r > 0$ mit eine Funktion $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Durch Anwenden einer Streckung können wir $\rho(1) = 1$ erreichen. Bleibt zu zeigen, daß $\rho = \mathrm{id}$ und somit f nach (1.2) eine Isometrie ist. Wir betrachten dazu das rechtwinkelige Dreieck mit Ecken 0, e_1, $r \cdot e_2$.



Es wird auf das Dreieck mit Ecken $f(0) = 0$, $f(e_1)$, $f(e_2)$ abgebildet. Schneiden wir die Hypothenuse des ursprünglichen Dreiecks mit der Einheits-Sphäre so erhalten wir ein gleichschenkeliges Dreieck mit diesen beiden Schnittpunkten und 0 als Ecken. Dieses wird durch f auf ein ähnliches Dreieck abgebildet, da der Winkel bei 0 erhalten bleibt, und die Längen der Schenkel um den Faktor $\rho(1) = 1$ gestreckt werden. Damit muß aber auch das ursprüngliche Dreieck auf ein ähnliches abgebildet werden, denn es ist durch den Schnitt der 0 gegenüberliegenden Seite des 2.ten Dreiecks mit den beiden Koordinatenachsen eindeutig festgelegt. Für das Verhältnis der Katheten muß also gelten: $\rho(r)/\rho(1) = r/1$, und somit ist $\rho = \mathrm{id}$.

Im Fall eines konformen Diffeomorphismus f der S^m gehen wir zur Darstellung bezüglich einer stereographischen Projektion über. Diese Darstellung ist dann konform, da die stereographische Projektion Winkel erhält. Falls f den Pol der Projektion nicht invariant läßt, so verschieben wir sein Bild zuerst nach 0 in der Karte und danach wenden wir die Inversion an. Die Zusammensetzung der Kartendarstellung mit diesen beiden konformen Diffeomorphismen liefert uns somit einen konformen Diffeomorphismus $\tilde{f}$ des $\mathbb{R}^n$, welcher wegen Teil 1 eine Ähnlichkeitsabbildung sein muß. $\square$

53. Formeln für Hyperflächen

53.1 Formeln für parametrisierte Flächen

Sei $\varphi : \mathbb{R}^m \to M \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung der Hyperfläche M. Für einen Punkt $p = \varphi(u) \in M$ ist eine Basis des Tangentialraums $T_pM = \operatorname{Bild} \varphi'(u)$ durch $(\partial_1 \varphi(u), \dots, \partial_m \varphi(u))$ gegeben, wobei $\partial_i \varphi(u) = \frac{\partial}{\partial u^i} \varphi(u)$ die i-te partielle Ableitung von φ in u ist, wir wollen dafür kurz $\varphi_i(u)$ schreiben. Analog soll $\varphi_{i,j}$ die zweite partielle Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} \varphi(u)$ sein. Es gilt $\langle (\nu \circ \varphi)(u), \varphi_i(u) \rangle = 0$ für alle i. Als j-te partielle Ableitung erhalten wir: $0 = \langle L \cdot \varphi_j, \varphi_i \rangle + \langle \nu, \varphi_{i,j} \rangle$, also $\langle L \cdot \varphi_j, \varphi_i \rangle = -\langle \nu, \varphi_{i,j} \rangle$. Falls die φ_i orthonormal sind, hätten wir damit die Matrix von L bestimmt. Auch im allgemeinen Fall müßte L durch alle diese inneren Produkte festgelegt sein. Dazu benötigen wir folgendes Lemma aus der linearen Algebra.

53.2 Lemma. *Sei $(g_1, \dots, g_m)$ eine Basis des Vektorraums V und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Sei $g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle$ und $G = (g_{i,j})$ die zugehörige symmetrische Matrix, $[T] := (T^i_j)$ die Matrix von T bezüglich der Basis $(g_i, \dots, g_j)$, d.h. $Tg_j = \sum_i T^i_j g_i$, und schließlich A die Matrix mit Eintragungen $A^i_j := \langle g_i, Tg_j \rangle$. Dann gilt $[T] = G^{-1} \cdot A$.*

Beweis. Es ist also $Tg_j = \sum_i T^i_j g_i$, wobei j die Spalten und i die Zeilen zählt, und somit

$$A^k_j := \langle g_k, Tg_j \rangle = \left\langle g_k, \sum_i T^i_j g_i \right\rangle = \sum_i \langle g_k, g_i \rangle T^i_j = \sum_i g_{k,i} T^i_j$$

Also ist $A = G \cdot [T]$ und somit $[T] = G^{-1} \cdot A$. □

53.3 Folgerung (Matrixdarstellung der Weingarten-Abbildung).
Die Weingarten-Abbildung hat bezüglich der Basis $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ folgende Matrixdarstellung

$$[L] = -(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle)^{-1} \cdot (\langle \nu, \varphi_{i,j} \rangle). \quad \square$$

53.4 Formeln für 2-Flächen

Sei nun speziell $m = 2$ (d.h. $n = 3$) und $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(t, s) \mapsto \varphi(t, s)$ eine lokale Parametrisierung. Dann setzt man:

$$\begin{gathered} E := g_{11} = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle, \quad F := g_{12} = \langle \varphi_t, \varphi_s \rangle, \quad G := g_{22} = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle \\ \nu := \frac{1}{|\varphi_t \times \varphi_s|}, \qquad |\varphi_t \times \varphi_s|^2 = |\varphi_t|^2 \cdot |\varphi_s|^2 - \langle \varphi_t, \varphi_s \rangle^2 = E\,G - F^2 \\ e := -\langle \nu, \varphi_{t,t} \rangle, \quad f := -\langle \nu, \varphi_{t,s} \rangle, \quad g := -\langle \nu, \varphi_{s,s} \rangle. \end{gathered}$$

Bezüglich der Basis (φ_t, φ_s) sehen die Fundamentalformen wie folgt aus:

$$[I] = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \text{ und } [II] = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Die Weingarten-Abbildung ist:

$$
\begin{aligned}
[L] &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die Gauß-Krümmung ist also

$$K = \det L = \frac{(eg - f^2)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

wie man auch aus $K = \det L = \det(I^{-1} \cdot II) = \det I / \det II$ sieht, und die mittlere Krümmung ist

$$2H = \operatorname{Spur} L = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & * \\ * & Eg - Ff \end{pmatrix} = \frac{Ge - 2Ff + Eg}{EG - F^2}.$$

Die Hauptkrümmungen erhalten wir als Lösung der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - \operatorname{Spur} L \cdot \lambda + \det L = 0$, also $K_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$.

Die Hauptkrümmungsrichtungen sind dann Vektoren $\xi = a_t \varphi_t + a_s \varphi_s$ mit $L(\xi) = K_i \xi$, d.h.

$$
\begin{aligned}
0 = 0 \cdot (EG - F^2) &= \det \left(\begin{pmatrix} a_t \\ a_s \end{pmatrix} \quad [L] \begin{pmatrix} a_t \\ a_s \end{pmatrix} \right) \cdot (EG - F^2) \\
&= \det \begin{pmatrix} a_t & (Ge - Ff)a_t + (Gf - Fg)a_s \\ a_s & (Ef - Fe)a_t + (Eg - Ff)a_s \end{pmatrix} \\
&= {a_t}^2 (Ef - Fe) + a_t a_s (Eg - Ge) + {a_s}^2 (Fg - Gf) \\
&= \det \begin{pmatrix} {a_t}^2 & -a_t a_s & {a_s}^2 \\ g & f & e \\ G & F & E \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

53.5 Folgerung. *Die Krümmungslinien $c(t) = \varphi(u(t), v(t))$ sind durch folgende Differentialgleichung gegeben:*

$$(fE - eF)_{c(t)} u'(t)^2 + (gE - eG)_{c(t)} u'(t) v'(t) + (gF - fG)_{c(t)} v'(t)^2 = 0$$

Beweis. Dies folgt sofort aus (53.4) □

Beispiel. Das Heliocoid ist durch $\varphi : (u,v) \mapsto (av\cos u, av\sin u, bu)$ gegeben. Es ist

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (-av\sin u, av\cos u, b)\\
\varphi_v &= (a\cos u, a\sin u, 0)\\
E &= a^2v^2 + b^2\\
F &= 0\\
G &= a^2\\
D &= a\sqrt{a^2v^2+b^2}\\
\varphi_{u,u} &= (-av\cos u, -av\sin u, 0)\\
\varphi_{u,v} &= (-a\sin u, a\cos u, 0)\\
\varphi_{v,v} &= (0,0,0)\\
e &= 0, \text{ da } v\varphi_v = -\varphi_{u,u}\\
f &= -\frac{a^2b}{D} = -\frac{ab}{\sqrt{a^2v^2+b^2}}\\
g &= 0, \text{ da } \varphi_{v,v} = 0
\end{aligned}$$

und somit die Gleichung der Krümmungslinien

$$\begin{aligned}
0 &= (fE - eF)_{c(t)}u'(t)^2 + (gE - eG)_{c(t)}u'(t)v'(t) + (gF - fG)_{c(t)}v'(t)^2\\
&= f(a^2v(t)^2 + b^2)u'(t)^2 - fa^2v'(t)^2
\end{aligned}$$

Wenn wir die Krümmungslinie nach v parametrisieren, d.h. $v(t) = t$ annehmen, dann erhalten wir:

$$u'[v] = \pm\frac{1}{\sqrt{v^2 + (b/a)^2}}$$

also

$$u[v] := c \pm \operatorname{arsinh}\frac{a\,v}{b}$$

53.6 Lemma. *Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to M$ eine lokale Parametrisierung um einen Punkt p von M, der nicht Nabelpunkt ist, so gilt: Die Koordinatenrichtungen φ_t und φ_s sind genau dann Hauptkrümmungsrichtungen, wenn $F = I(\varphi_s, \varphi_t) = 0$ und ebenso $f = II(\varphi_t, \varphi_s) = 0$. Es gibt immer eine lokale Parametrisierung mit dieser Eigenschaft.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Da die Krümmungslinien orthogonal stehen ist $F = 0$. Setzen wir die Koordinatenrichtung φ_t in obiger Formel für die Determinante ein, so erhalten wir:

$$0 = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ & f & e\\ & 0 & E\end{pmatrix} = fE$$

und da $E = |\varphi_t|^2 \neq 0$, gilt ebenso $f = 0$.

($\Leftarrow$) Die Koordinaten-Richtungen werden durch $a_t = 0$ bzw. $a_s = 0$ beschrieben. Dann ist aber wegen $F = f = 0$ die zweite Spalte obiger Matrix 0. Somit ist deren Determinante ebenfalls 0.

Für die Existenz solch einer Parametrisierung siehe [**83**, S.40]. □

53.7 Determinatenformeln für die Krümmung

Wir wollen nun bestimmen, welche Größen intrinsisch sind, d.h. sich nicht ändern, wenn wir zu einer isometrischen Fläche übergehen. Das sind also jene Größen, die von einem in der Fläche lebenden Wesen erkannt werden können, ohne das sich diese eines umgebenden Raums bewußt sein müssen. Klarerweise können diese Längen und damit auch Winkel messen. D.h. die 1-te Fundamentalform ist intrinsisch. Nicht jedoch die 2-te Fundamentalform, da sie über die Ableitung des Normalenvektors definiert ist. Wir wissen also von vornherein von keiner der definierten Krümmungen, ob sie intrinsisch sind. Wenn wir Zylinder und Ebene vergleichen, so sehen wir, daß sowohl die Hauptkrümmungen als auch die mittlere Krümmung nicht intrinsisch sind. Wir wollen nun zeigen, daß die Gaußkrümmung es dennoch ist. Dazu benötigen wir zuerst Formeln für e, f und g, in welchen ν nicht vorkommt:

$$\begin{aligned}
e = -\langle \nu, \varphi_{t,t}\rangle &= -\left\langle \frac{\varphi_t \times \varphi_s}{|\varphi_t \times \varphi_s|}, \varphi_{t,t}\right\rangle \\
&= -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\langle \varphi_t \times \varphi_s, \varphi_{t,t}\rangle \\
&= -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,t}) \\
\text{sowie } f &= -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,s}) \\
\text{und } g &= -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{s,s}).
\end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, daß die Fläche A des von zwei Vektoren v und w im $\mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelogramms wie folgt gegeben ist:

$$\begin{aligned}
A &= |v|\cdot|w|\cdot\sin\measuredangle(v,w) = |v|\cdot|w|\cdot\sqrt{1-\cos^2\measuredangle(v,w)} \\
&= |v|\cdot|w|\cdot\sqrt{1-\frac{\langle v,w\rangle^2}{|v|\cdot|w|}} = \sqrt{|v|^2\cdot|w|^2-\langle v,w\rangle^2}
\end{aligned}$$

Wir wollen nun versuchen die Gauß-Krümmung allein durch die Koeffizienten der 1.ten Fundamentalform, sowie deren partiellen Ableitungen darzustellen. Sei dazu $D := \sqrt{EG-F^2}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
KD^4 &\overset{(53.4)}{=\!=} (-eD)(-gD) - (-fD)^2 \\
&= \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,t})\cdot\det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{s,s}) - \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,s})^2 \\
&= \det((\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,t})^*(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{s,s})) - \det((\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,s})^*(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,s})) \\
&= \det\begin{pmatrix} \varphi_t^*\varphi_t & \varphi_t^*\varphi_s & \varphi_t^*\varphi_{s,s} \\ \varphi_s^*\varphi_t & \varphi_s^*\varphi_s & \varphi_s^*\varphi_{s,s} \\ \varphi_{t,t}^*\varphi_t & \varphi_{t,t}^*\varphi_s & \varphi_{t,t}^*\varphi_{s,s} \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} \varphi_t^*\varphi_t & \varphi_t^*\varphi_s & \varphi_t^*\varphi_{t,s} \\ \varphi_s^*\varphi_t & \varphi_s^*\varphi_s & \varphi_s^*\varphi_{t,s} \\ \varphi_{t,s}^*\varphi_t & \varphi_{t,s}^*\varphi_s & \varphi_{t,s}^*\varphi_{t,s} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \det \begin{pmatrix} E & F & \langle \varphi_t, \varphi_{s,s} \rangle \\ F & G & \langle \varphi_s, \varphi_{s,s} \rangle \\ \langle \varphi_{t,t}, \varphi_t \rangle & \langle \varphi_{t,t}, \varphi_s \rangle & \langle \varphi_{t,t}, \varphi_{s,s} \rangle \end{pmatrix}$$
$$- \det \begin{pmatrix} E & F & \langle \varphi_t, \varphi_{t,s} \rangle \\ F & G & \langle \varphi_s, \varphi_{t,s} \rangle \\ \langle \varphi_{t,s}, \varphi_t \rangle & \langle \varphi_{t,s}, \varphi_s \rangle & \langle \varphi_{t,s}, \varphi_{t,s} \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} E & F & \langle \varphi_t, \varphi_{s,s} \rangle \\ F & G & \langle \varphi_s, \varphi_{s,s} \rangle \\ \langle \varphi_{t,t}, \varphi_t \rangle & \langle \varphi_{t,t}, \varphi_s \rangle & \langle \varphi_{t,t}, \varphi_{s,s} \rangle - \langle \varphi_{t,s}, \varphi_{t,s} \rangle \end{pmatrix}$$
$$- \det \begin{pmatrix} E & F & \langle \varphi_t, \varphi_{t,s} \rangle \\ F & G & \langle \varphi_s, \varphi_{t,s} \rangle \\ \langle \varphi_{t,s}, \varphi_t \rangle & \langle \varphi_{t,s}, \varphi_s \rangle & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} E & F & F_s - \frac{1}{2} G_t \\ F & G & \frac{1}{2} G_s \\ \frac{1}{2} E_t & F_t - \frac{1}{2} E_s & F_{t,s} - \frac{1}{2}(E_{s,s} + G_{t,t}) \end{pmatrix}$$
$$- \det \begin{pmatrix} E & F & \frac{1}{2} E_s \\ F & G & \frac{1}{2} G_t \\ \frac{1}{2} E_s & \frac{1}{2} G_t & 0 \end{pmatrix},$$

wegen des Entwicklungssatzes von Matrizen und weil:

$$E = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle, \quad G = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle, \quad F = \langle \varphi_t, \varphi_s \rangle$$
$$E_t = 2\langle \varphi_{t,t}, \varphi_t \rangle, \quad G_t = 2\langle \varphi_{s,t}, \varphi_s \rangle, \quad F_t = \langle \varphi_{t,t}, \varphi_s \rangle + \langle \varphi_t, \varphi_{s,t} \rangle$$
$$E_s = 2\langle \varphi_{t,s}, \varphi_t \rangle, \quad G_s = 2\langle \varphi_{s,s}, \varphi_s \rangle, \quad F_s = \langle \varphi_{t,s}, \varphi_s \rangle + \langle \varphi_t, \varphi_{s,s} \rangle,$$
$$F_s - \frac{1}{2} G_t = \langle \varphi_t, \varphi_{s,s} \rangle, \quad F_t - \frac{1}{2} E_s = \langle \varphi_{t,t}, \varphi_s \rangle,$$
$$F_{t,s} - \tfrac{1}{2} E_{s,s} = \langle \varphi_{t,t,s}, \varphi_s \rangle + \langle \varphi_{t,t}, \varphi_{s,s} \rangle,$$
$$G_{t,t} = 2(\langle \varphi_{s,t,t}, \varphi_s \rangle + \langle \varphi_{s,t}, \varphi_{s,t} \rangle),$$
$$F_{t,s} - \tfrac{1}{2}(E_{s,s} + G_{t,t}) = \langle \varphi_{t,t}, \varphi_{s,s} \rangle - \langle \varphi_{s,t}, \varphi_{s,t} \rangle.$$

Durch Ausmultiplizieren der Determinanten obiger Formel für K erhalten wir:

$$\begin{aligned} 4(EG - F^2)^2 K = {} & E(E_s G_s - 2F_t G_s + {G_t}^2) \\ & + F(E_t G_s - E_s G_t - 2E_s F_s + 4F_t F_s - 2F_t G_t) \\ & + G(E_t G_t - 2E_t F_s + {E_s}^2) \\ & - 2(EG - F^2)(E_{s,s} - 2F_{t,s} + G_{t,t}). \end{aligned}$$

Eine symmetrischere Formel für K ist die folgende:

$$K = -\frac{1}{D^4} \det \begin{pmatrix} E & E_t & E_s \\ F & F_t & F_s \\ G & G_t & G_s \end{pmatrix} - \frac{1}{2D} \left(\partial_t \frac{E_s - F_t}{D} + \partial_s \frac{G_t - F_s}{D} \right)$$

wobei wieder $D := \sqrt{EG - F^2}$. Diese kann leicht durch Auflösen der Determinante und durch Differenzieren verifiziert werden.

53.8 Theorema Egregium [18]. *Sind zwei Flächen aufeinander abwickelbar, d.h. sie sind (lokal) isometrisch, so haben sie in entsprechenden Punkten die gleiche Gauß-Krümmung. Die Gauß-Krümmung K ist also eine intrinsischer Begriff, d.h. sie hängt nur von der Metrik der Fläche und nicht vom umgebenden Raum ab.*

Für eine partielle Umkehrung siehe (60.1).

Beweis. Wegen obiger Formel in (53.7) hängt die Gauß-Krümmung nur von den Koeffizienten der Riemann-Metrik sowie deren 1.ten und 2.ten partiellen Ableitungen ab. Diese sind aber für zwei isometrische Flächen gleich, denn für eine Parametrisierung φ der einen ist $\psi = g \circ \varphi$ eine Parametrisierung der anderen, wo g die lokale Isometrie ist, also ist $\langle T_p g(\xi_1), T_p g(\xi_2)\rangle = \langle \xi_1, \xi_2\rangle$. Wählt man nun für $\xi_i = T\varphi \circ \eta_i$, so folgt das Resultat. □

53.9 Lemma (Jacobi-Gleichung). *Sind (t, s) geodätische Koordinaten auf M (d.h. für die zugehörige Parametrisierung gilt $E = 1$, $F = 0$), so erfüllt die Gauß-Krümmung die* JACOBI-GLEICHUNG*:*

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \sqrt{G}$$

Beweis. Obige Determinanten-Formel für K liefert in diesem Fall:

$$K \cdot G^2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}G_t \\ 0 & G & \frac{1}{2}G_s \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}G_{t,t}\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & G & \frac{1}{2}G_t \\ 0 & \frac{1}{2}G_t & 0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}GG_{t,t} + \frac{1}{4}{G_t}^2$$

$$\Rightarrow \quad K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \sqrt{G} \qquad \square$$

53.10 Formeln für durch Gleichung gegebene Hyperflächen

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine reguläre, lokale Gleichung für M. Der Normalvektor ν ist dann der normierte Gradient von f, i.e.

$$\nu = \frac{\operatorname{Grad} f}{|\operatorname{Grad} f|} = \frac{(f_1, \dots, f_n)}{\sqrt{{f_1}^2 + \dots + {f_n}^2}}.$$

Der Tangentialraum ist gegeben durch

$$T_x M = \operatorname{Ker} f'(x) = (\operatorname{Grad}_x f)^\perp = \left\{(h^1, \dots, h^n) : 0 = \sum_{i=1}^n h^i f_i\right\}.$$

Für die zweite Fundamentalform gilt somit:

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_x(k,h) &= \langle k, L_x h\rangle = \langle k, \tfrac{d}{dt}\big|_0 \nu(x+th)\rangle = \langle k, \frac{d}{dt}\Big|_0 \frac{\operatorname{Grad} f(x+th)}{|\operatorname{Grad} f(x+th)|}\rangle \\
&= \langle k, \frac{d}{dt}\Big|_0 \frac{\operatorname{Grad} f(x+th)}{|\operatorname{Grad} f(x)|} + \frac{d}{dt}\Big|_0 \frac{\operatorname{Grad} f(x)}{|\operatorname{Grad} f(x+th)|}\rangle \\
&= \frac{1}{|\operatorname{Grad} f(x)|}\, \tfrac{d}{dt}\big|_0 \underbrace{\langle k, \operatorname{Grad} f(x+th)\rangle}_{f'(x+th)(k)} \\
&\quad + \frac{d}{dt}\Big|_0 \frac{1}{|\operatorname{Grad} f(x+th)|}\, \langle k, \operatorname{Grad} f(x)\rangle \\
&= \frac{1}{|\operatorname{Grad} f(x)|}\, f''(x)(h,k) + \tfrac{d}{dt}\big|_0 \frac{1}{|\operatorname{Grad} f(x+th)|}\, f'(x)(k)
\end{aligned}$$

Für $h \in T_xM$ gilt somit

$$K(h) = \mathrm{II}(h,h) = \frac{1}{|\operatorname{Grad}_x f|}\, f''(x)(h,h) + 0.$$

Wir wollen nun die Hauptkrümmungen, d.h. die kritischen Werte von K auf $\{h : h \perp \nu,\ |h| = 1\} = \{h \in \mathbb{R}^n : f'(x)h = 0, \langle h,h\rangle = 1\}$ bestimmen. Anstelle von K können wir wegen obiger Formel auch die auf T_xM proportionale Form $h \mapsto f''(x)(h,h)$ verwenden. Wir verwenden die Methode der Lagrange-Multiplikatoren: Danach ist h mit $|h| = 1$ und $f'(x)h = 0$ genau dann ein kritischer Punkt, wenn λ und μ existieren mit

$$2\, f''(x)(h, \_) = \lambda\, 2\, \langle h, \_\rangle + \mu\, f'(x)(\_),$$

oder äquivalent

$$2\, f''(x)(h,k) = \lambda\, 2\, \langle h,k\rangle + \mu\, f'(x)(k) \text{ für alle } k \in \mathbb{R}^n.$$

Wenn wir die Hessesche Matrix $\operatorname{Hess}_x f$ von f bei x durch

$$\Big\langle \operatorname{Hess}_x f \cdot h, k \Big\rangle := f''(x)(h,k)$$

definieren, so ist diese Gleichung mit

$$2\ \operatorname{Hess}_x f \cdot h = \lambda\, 2\, h + \mu\ \operatorname{Grad}_x f$$

äquivalent. Als Matrizen-Gleichung läßt sich das zusammen mit $f'(x)h = 0$ wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Hess}_x f - \lambda\ \mathrm{id} & \operatorname{Grad}_x f \\ f'(x) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix}$$

Eine Lösung $h \neq 0$ existiert genau dann, wenn die Determinante verschwindet, denn wenn $h = 0$ ist, so muß wegen der Gleichung auch $\mu = 0$ sein. Seien die λ_i die Lösungen dieser polynomialen Gleichung in λ. Dann sind die Hauptkrümmungen durch

$$K_i = \frac{\lambda_i}{|\operatorname{Grad}_x f|} = \frac{\lambda_i}{\sqrt{{f_1}^2 + \cdots + {f_n}^2}}$$

gegeben, da

$$|\operatorname{Grad}_x f|\, K(h) = f''(x)(h,h) = \lambda |h|^2 + \frac{\mu}{2} f'(x)h.$$

Im Spezialfall, wo die Hessesche Matrix Diagonalgestalt hat, d.h. $f_{i,j} = 0$ für alle $i \neq j$ ist, gilt:

$$0 = \det \begin{pmatrix} f_{1,1}-\lambda & \dots & 0 & f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & f_{n,n}-\lambda & f_n \\ f_1 & \dots & f_n & 0 \end{pmatrix} = (\text{Entwicklung n. 1.Zeile})$$

$$\begin{aligned} &= (f_{1,1}-\lambda)\det \begin{pmatrix} f_{2,2}-\lambda & \dots & 0 & f_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & f_{n,n}-\lambda & f_n \\ f_2 & \dots & f_n & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^n f_1 \det \begin{pmatrix} 0 & f_{2,2}-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_{n,n}-\lambda \\ f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (f_{1,1}-\lambda)\det \begin{pmatrix} f_{2,2}-\lambda & \dots & 0 & f_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & f_{n,n}-\lambda & f_n \\ f_2 & \dots & f_n & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{2n-1} {f_1}^2 \det \begin{pmatrix} f_{2,2}-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f_{n,n}-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (f_{1,1}-\lambda)\det \begin{pmatrix} f_{2,2}-\lambda & \dots & 0 & f_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & f_{n,n}-\lambda & f_n \\ f_2 & \dots & f_n & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - {f_1}^2 \prod_{j\neq 1} (f_{j,j}-\lambda) \end{aligned}$$

Da die Determinante bei einer Permutation der Koordinaten des $\mathbb{R}^n$ unverändert bleibt, muß der Koeffizient von f_i^2 analog zu jenem von f_1^2 sein, und so erhalten wir für sie weiter

$$\begin{aligned} &= -\sum_{i=1}^n {f_i}^2 \prod_{j\neq i} (f_{j,j}-\lambda) \\ &= -\Big((-\lambda)^{n-1} \sum_i {f_i}^2 + (-\lambda)^{n-2} \sum_i {f_i}^2 \sum_{j\neq i} f_{j,j} + \dots + \sum_i {f_i}^2 \prod_{j\neq i} f_{j,j}\Big). \end{aligned}$$

Somit ist die Gauß-Krümmung

$$K = \prod_{i=1}^{m} K_i = \prod_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{|\operatorname{Grad}_x f|} = \sum_i {f_i}^2 \prod_{j\neq i} f_{j,j} \left(\sum_i {f_i}^2\right)^{-(1+\frac{m}{2})}$$

und die mittlere Krümmung

$$mH = \sum_{i=1}^{m} K_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{|\operatorname{Grad}_x f|} = \sum_i {f_i}^2 \sum_{j\neq i} f_{j,j} \left(\sum_i {f_i}^2\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

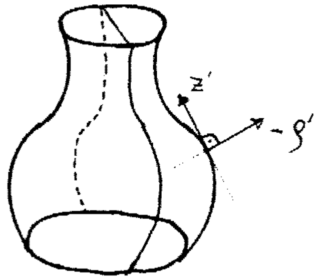
Speziell im $\mathbb{R}^3$ gilt, daß $h = (h^1, h^2, h^3)$ genau dann ein Hauptkrümmungsvektor ist, wenn $f'(x)h = \sum_i h^i f_i = 0$ und $\det(\operatorname{Grad}_x f, h, \operatorname{Hess}_x f \cdot h) = 0$, denn

$$\begin{aligned}
& h = (h^1, h^2, h^3) \quad \text{ist ein Hauptkrümmungsvektor} \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & h \in T_xM \text{ und } \{L_x h, h\} \text{ sind linear abhängig} \\
\Leftrightarrow\quad & h \in T_xM \text{ und } L_x h \times h = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & h \in T_xM \text{ und } \langle L_x h \times h, \nu\rangle = \det(L_x h, h, \nu) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_i h^i f_i = 0 \text{ und } 0 = \det(\nu, h, Lh) = \\
& = \det\left(\frac{\operatorname{Grad} f}{|\operatorname{Grad} f|}, h, \frac{1}{|\operatorname{Grad} f|} \operatorname{Hess}_x f \cdot h + \mathbb{R}\cdot \operatorname{Grad} f\right) \\
& = \frac{1}{(\operatorname{Grad} f)^2} \det\left(\operatorname{Grad} f, h, \operatorname{Hess}_x f \cdot h\right).
\end{aligned}$$

54. Drehflächen

54.1 Definition (Drehfläche)

Unter einer Drehfläche versteht man jenes Gebilde, das entsteht, wenn eine Kurve in der (x, z)-Ebene um die z-Achse gedreht wird. Sei also $c : s \mapsto (r(s), z(s))$ diese Kurve, von der wir annehmen dürfen, daß sie nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Dann ist die davon erzeugte Drehfläche M durch $\{(r(s)x, z(s)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : x \in S^{m-1}\}$ gegeben. Ist also speziell $m = 2$, so können wir S^1 durch $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ parametrisieren und erhalten somit eine Parametrisierung $\varphi : (s, \theta) \mapsto (r(s)\cos\theta, r(s)\sin\theta, z(s))$ von M.



Wir wollen nun die Gauß-Krümmung berechnen. Die partiellen Ableitungen von φ sind

$$\left.\begin{aligned}\varphi_s(s,\theta) &= (r'(s)\cos\theta, r'(s)\sin\theta, z'(s))\\ \varphi_\theta(s,\theta) &= (-r(s)\sin\theta, r(s)\cos\theta, 0)\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} E &= r'(s)^2 + z'(s)^2 = 1\\ F &= 0\\ G &= r(s)^2\end{aligned}\right\} \quad \xRightarrow{\text{Jacobi-Glg.}}$$

$$\Rightarrow \quad K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2(\sqrt{G}) = -\frac{1}{r(s)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2(r(s)) = -\frac{r''(s)}{r(s)}.$$

Wir wollen nun den Satz von Dupin (52.6) verwenden um die Krümmungslinien auf Drehflächen zu bestimmen. Sei dazu $c = (r,z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, welche durch Rotation die Drehfläche erzeugt. Es sei $\Psi(u^1,u^2) := c(u^1) + u^2\,\nu(u^1) = (r(u^1) - u^2\,z'(u^1), r(u^1) + u^2\,r'(u^1))$, wobei ν die Einheitsnormale an c bezeichnet. Dann ist

$$\Psi_1(u^1,u^2) = c'(u^1) + u^2\,\nu'(u^1) = (1 - u^2\,K(u^2))\,\tau(u^1) \perp \nu(u^1) = \Psi_2(u^1,u^2).$$

Folglich erfüllt $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\begin{aligned}&\Phi(u^1,u^2,u^3) :=\\ &\quad = ((r(u^1) - u^2\,z'(u^1))\,\cos u^3, (r(u^1) - u^2\,z'(u^1))\,\sin u^3, r(u^1) + u^2\,r'(u^1)),\end{aligned}$$

die Voraussetzungen von (52.6). Folglich sind sowohl die Meridiane $s \mapsto \Phi(s,0,\theta) = \varphi(s,\theta)$ als auch Breitenkreise $\theta \mapsto \Phi(s,0,\theta) = \varphi(s,\theta)$ Krümmungslinien. Ein Meridian ist der Schnitt von M mit einer Ebene durch die z-Achse. Die Schnittkrümmung in Richtung ξ des Meridians ist also gerade die Krümmung des Meridians bzw. der erzeugenden Kurve c, wenn wir als ν_M gerade $-\nu_c = (z', -r')$ wählen. Das dies eine Hauptkrümmung ist, sieht man übrigens auch direkt: Der Normalvektor an die Fläche in einem Punkt des Meridians liegt in dieser Ebene. Wenn wir ihn also in Richtung ξ des Meridians differenzieren, liegt das Resultat $L\,\xi$ wieder in der Ebene, muß also proportional zu ξ sein. Da c nach der Bogenlänge parametrisiert ist, gilt: $(r'',z'') = K_c(-z',r')$ und somit ist $K_1 := K(\xi) = -\frac{r''}{z'} = \frac{z''}{r'}$. Daß die Breitenkreise ebenfalls Krümmungslinien sind, folgt auch direkt daraus, daß sie normal auf die Meridiane stehen. Für die zweite Hauptkrümmung ergibt sich somit: $K_2 = \frac{K}{K_1} = \frac{z'}{r} = -\frac{r''\,r'}{z''\,r}$. Der Satz von Meusnier (52.4) liefert aber auch eine geometrische Methode die zweite Hauptkrümmung und damit die Gauß-Krümmung zu berechnen: Die Einheitsnormale an die Fläche ist bis auf eine Drehung um die z-Achse um den Winkel θ gerade $(z',0,-r')$. Die Hauptnormale an den Breitenkreis ist der ebenso gedrehte Vektor $(-1,0,0)$. Die Krümmung des Breitenkreises ist $\frac{1}{r}$ und die Normalkrümmung in Richtung seiner Tangente also $K_2 = -\frac{1}{r}\langle(z',0,-r'),(-1,0,0)\rangle = \frac{z'}{r}$.

Asymptotenrichtungen $\xi = \xi^1\varphi_s + \xi^2\varphi_\theta$ sind durch

$$\begin{aligned}0 = K(\xi) = \langle \xi, L\xi\rangle &= \langle \xi^1\varphi_s + \xi^2\varphi_\theta, \xi^1 K_1\varphi_s + \xi^2 K_2\varphi_\theta\rangle\\ &= (\xi^1)^2 K_1 E + (\xi^2)^2 K_2 G + \xi^1\xi^2(K_1+K_2)F\\ &= K_1\,(\xi_1)^2 + G\,K_2\,(\xi^2)^2\end{aligned}$$

gegeben. Für

$$\begin{aligned} 1 = |\xi|^2 &= \langle \xi^1\varphi_s + \xi^2\varphi_\theta, \xi^1\varphi_s + \xi^2\varphi_\theta\rangle \\ &= E(\xi^1)^2 + G(\xi^2)^2 + 2F\xi^1\xi^2 \\ &= (\xi^1)^2 + G\,(\xi^2)^2 \end{aligned}$$

und $K = K_1\,K_2 < 0$ bedeutet dies

$$\begin{aligned} (\xi^1)^2 &= -\frac{K_2}{K_1}\,G\,(\xi^2)^2 = \frac{\frac{K_2}{K_1}}{-1+\frac{K_2}{K_1}} = \frac{K_2}{K_2-K_1} \\ (\xi^2)^2 &= \frac{1}{G}\,\frac{1}{1-\frac{K_2}{K_1}} = \frac{1}{G}\,\frac{K_1}{K_1-K_2}. \end{aligned}$$

54.2 Beispiel. Wir betrachten den Torus mir Radius A der Seele und Radius $a < A$ der Meridiane. Dieser wird durch Rotation der bogenlängenparametrisierten Kurve

$$c(s) := \Big(A, 0\Big) + a\,\Big(\cos(\frac{s}{a}), \sin(\frac{s}{a})\Big)$$

erzeugt. Folglich ist die eine Hauptkrümmung $K_1 := \frac{1}{a} > 0$, die Gaußkrümmung

$$K = -\frac{r''(s)}{r(s)} = \frac{\cos(s/a)/a}{A + a\cos(s/a)},$$

und schließlich die zweite Hauptkrümmung

$$K_2 := \frac{K}{K_1} = \frac{\cos(s/a)}{A + a\cos(s/a)} = \frac{1}{a + A/\cos(s/a)}.$$

Somit verschwindet die Gaußkrümmung am Nord- und am Südpolkreis ($s = \pm\pi/2$). Sie ist positiv auf dem äußeren Hemi-Torus und negativ am inneren. Am äußeren Hemi-Torus existieren keine Asymptotenrichtungen. Die Pol-Kreise sind Asymptotenlinien. In jedem Punkt des inneren Hemi-Torus existieren genau zwei Asymptotenrichtungen $\xi = \xi^1\varphi_s + \xi^2\varphi_\theta$ mit

$$\begin{aligned} (\xi^1)^2 &= \frac{K_2}{K_2-K_1} = \frac{\frac{1}{a+A/\cos(s/a)}}{\frac{1}{a+A/\cos(s/a)} - \frac{1}{a}} = -\frac{a\cos(s/a)}{A} \\ (\xi^2)^2 &= \frac{1}{G}\,\frac{K_1}{K_1-K_2} \\ &= \frac{1}{A(A+a\cos(s/a))} \end{aligned}$$

54.3 Drehflächen konstanter Gauß-Krümmung

Um Drehflächen zu finden, die konstante Gauß-Krümmung $K = -\frac{r''}{r}(s)$ haben, müssen wir also das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} r''(s) + K\,r(s) &= 0 \\ r'(s)^2 + z'(s)^2 &= 1 \end{aligned}$$

lösen. Die erste Gleichung hat als lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung einen 2-dimensionale linearen Lösungsraum.

Der Fall $K = 0$ ist nicht sehr interessant, denn dann ist $r'' = 0$, d.h. $r(s) = as + b$ und somit $z(s) = \sqrt{1 - a^2}\, s$. Also ist die Lösung ein Kegel für $0 < a < 1$ und in den degenerierten Fällen $a = 0$ ein Zylinder, bzw. für $a = 1$ eine Ebene.

Für $K \neq 0$ erhält man ein Erzeugendensystem durch den Ansatz $r(s) := e^{\lambda s}$, woraus sich $\lambda^2 = -K$ ergibt.

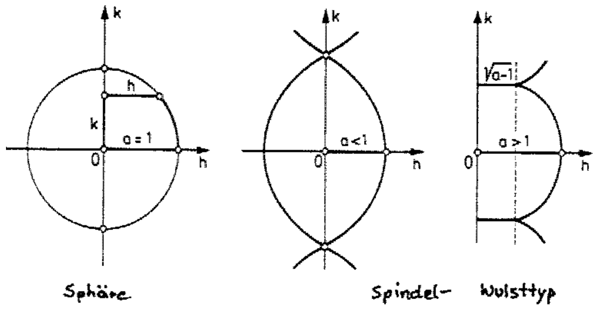
Betrachten wir zuerst den Fall $K > 0$, dann ist $s \mapsto e^{\pm i\sqrt{K}s}$ ein Erzeugendensystem der Lösungen. Die allgemeine reelle Lösung ist also $r : s \mapsto a\cos(\sqrt{K}s) + b\sin(\sqrt{K}s)$. Wenn wir $(a, b) =: r_0(\cos(-\sqrt{K}s_0), \sin(-\sqrt{K}s_0))$ mit $r_0 \geq 0$ setzen, dann ist

$$r(s) = r_0 \cos(\sqrt{K}(s - s_0)).$$

O.B.d.A. ist $s_0 = 0$ (nach einer Zeitverschiebung) und $r_0 > 0$ (sonst parametrisiert φ keine Fläche). Folglich ist

$$z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - r'(\sigma)^2}\, d\sigma = \int_0^s \sqrt{1 - r_0^2 K \sin^2(\sqrt{K}\,\sigma)}\, d\sigma,$$

ein Legendre-Integral. Für $r_0^2 K = 1$ liefert das eine Sphäre. Für $r_0^2 K > 1$ eine sogenannte Wulstfläche, und für $r_0^2 K < 1$ eine Spindelfläche. Diese sind alle lokal isometrisch, aber nicht ineinander durch Bewegungen überführbar.



Nun betrachten wir den Fall $K < 0$, dann ist die allgemeine Lösung der ersten Gleichung

$$r(s) = ae^{\sqrt{-K}s} + be^{-\sqrt{-K}s}$$

mit beliebigem a und b.

Falls $ab = 0$, so können wir durch eine Spiegelung der Zeitachse erreichen, daß $a = 0$ ist. Durch eine Zeitverschiebung um $-\ln(b)/\sqrt{-K}$ können wir $b = 1/\sqrt{-K}$ erreichen und durch eine Streckung um $\sqrt{-K}$ und gleichzeitige Umparametrisierung mit Faktor $1/\sqrt{-K}$ ist die Lösung dann

$$r(s) = e^{-s}, \quad z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - e^{-2\sigma}}\, d\sigma \text{ für } s \geq 0.$$

Das ist die Bogenlängen-Parametrisierung der Traktrix. Die zugehörige Drehfläche heißt Pseudosphäre. Man kann $z(s)$ wie folgt ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-e^{-2s}}\,ds &= \int -\sqrt{1-r^2}\,\frac{dr}{r} \\
&= \int -\sqrt{1-\left(\tfrac{2u}{1+u^2}\right)^2}\;\frac{1+u^2}{2u}\;\frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\,du \\
&= \int \frac{(1-u^2)^2}{u(1+u^2)^2}\,du = \int \frac{1}{u} - \frac{4u}{(1+u^2)^2}\,du \\
&= c + \ln u + \frac{2}{1+u^2} = c + \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r}\right) + 1 - \sqrt{1-r^2} \\
&= c + 1 + \operatorname{Arcosh}(\frac{1}{r}) - \sqrt{1-r^2}
\end{aligned}$$

Also

$$z(s) = \operatorname{Arcosh}(\frac{1}{r(s)}) - \sqrt{1-r(s)^2}$$

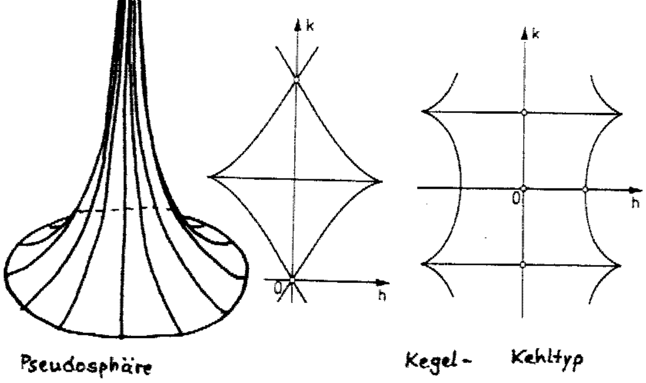
Im Fall $ab \neq 0$ kann man erreichen, daß $a = -b$ oder $a = b$ ist, indem wir s durch $s-c$ ersetzen: Dann ist

$$r(s-c) = a\,e^{-\sqrt{-K}c}\,e^{\sqrt{-K}s} + b\,e^{\sqrt{-K}c}\,e^{-\sqrt{-K}s}.$$

Wählen wir $e^{2\sqrt{-K}c} = |\frac{a}{b}|$, dann ist $|a\,e^{-\sqrt{-K}c}| = |b\,e^{\sqrt{-K}c}|$.
Die entstehenden Flächen

$$\begin{aligned}
r(s) &:= a\,\cosh(\sqrt{-K}s), \qquad & z(s) &:= \int_0^s \sqrt{1+a^2K\sinh^2(\sqrt{-K}\sigma)}\,d\sigma; \\
r(s) &:= a\,\sinh(\sqrt{-K}s), \qquad & z(s) &:= \int_0^s \sqrt{1+a^2K\cosh^2(\sqrt{-K}\sigma)}\,d\sigma
\end{aligned}$$

nennt man Flächen vom Kegeltyp bzw. vom Kehltyp.



54.4 Geodätische Koordinaten der Poincaré'schen Halbebene

Die Poincaré'sche Halbebene M ist die oberer Halbebene $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ versehen mit der Riemann-Metrik $g : (ds)^2 = \frac{1}{y^2}((dx)^2 + (dy)^2)$.

Die Geodäten sind die Kreise mit Mittelpunkt auf der x-Achse, also jene Kreise, die die x-Achse rechtwinklig schneiden. Die Kreise durch ∞ sind dabei die zur y-Achse parallele Geraden. Wir wollen letztere nach Bogenlänge parametrisieren. Sei also $c(t) := (x,t)$. Dann ist die Bogenlänge

$$s(t) = \int |c'(t)|_{c(t)}\, dt = \int \frac{dt}{t} = \ln(t)$$

mit Umkehrfunktion $t(s) = e^s$. Als Parametrisierung von M verwenden wir nun

$$\varphi : (r,\theta) \mapsto (\theta, e^r).$$

Die Ableitung von φ ist somit

$$\varphi'(r,\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^r & 0 \end{pmatrix}$$

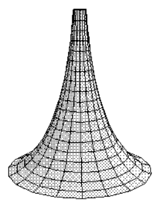
und für die Koeffizienten der Metrik erhalten wir:

$$E = g(\partial_r\varphi, \partial_r\varphi) = 1, \quad F = g(\partial_r\varphi, \partial_\theta\varphi) = 0, \quad G = g(\partial_\theta\varphi, \partial_\theta\varphi) = e^{-2r}.$$

Es gilt somit

$$\sqrt{G}(0,\theta) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}(0,\theta) = -1, \quad K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \sqrt{G} = -1.$$

54.5 Geodätische Koordinaten der Pseudosphäre



Die Pseudosphäre ist die Drehfläche M die bei Rotation der Traktrik $\tau : z = \operatorname{Arcosh}(\frac{1}{\rho}) - \sqrt{1-\rho^2} = \ln\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} - \sqrt{1-\rho^2}$ für $0 < \rho \le 1$ um die z-Achse entsteht (siehe (54.3)). Die Bogenlängen-Parametrisierung der Traktrix ist durch $\rho = e^{-s}$ gegeben und beschreibt somit nach (57.3.4) eine Geodäte (einen Meridian) auf der Pseudosphäre. Geodätische Koordinaten erhalten wir somit durch den Ansatz:

$$\varphi(r,\theta) = (e^{-r}\cos\theta, e^{-r}\sin\theta, \tau(e^{-r})).$$

Die Ableitung ist somit

$$\varphi'(r,\theta) = \begin{pmatrix} -e^{-r}\cos\theta & -e^{-r}\sin\theta \\ -e^{-r}\sin\theta & e^{-r}\cos\theta \\ -e^{-r}\tau'(e^{-r}) & 0 \end{pmatrix}$$

und für die Koeffizienten der Metrik erhalten wir wegen $\tau'(\rho) = -\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}$:

$$E = \langle \partial_r\varphi, \partial_r\varphi\rangle = 1, \quad F = \langle \partial_r\varphi, \partial_\theta\varphi\rangle = 0, \quad G = \langle \partial_\theta\varphi, \partial_\theta\varphi\rangle = e^{-2r}.$$

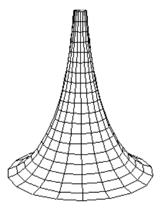
und somit wie in (54.4)

$$\sqrt{G}(0,\theta) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}(0,\theta) = -1, \quad K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \sqrt{G} = -1.$$

Diese Koordinaten stimmen mit den in (54.4) konstruierten für die Poincaré'sche Halbebene überein, also erhalten wir wie folgt eine Isometrie der Teilmenge $\{(x,y) : y \geq 1\}$ der Poincaré'sche Halbebene auf die Pseudosphäre:

$$\begin{tikzcd}
\text{Poincaré'sche Halbebene} \arrow[rr] & & \text{Pseudosphäre} \\
(x,y) \arrow[rr] & & \left(\frac{\cos x}{y}, \frac{\sin x}{y}, \tau(\frac{1}{y})\right) \\
(\theta, e^r) \arrow[rr] & & (e^{-r}\cos\theta, e^{-r}\sin\theta, \tau(e^{-r})) \\
& (r,\theta) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& \mathbb{R}^2 &
\end{tikzcd}$$

Dies kann auch mit einer direkten Rechnung verifiziert werden.



54.6 Geodätische Koordinaten der hyperbolische Scheibe

Die hyperbolische Scheibe ist nach (34.6) die offene Einheitsscheibe $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ versehen mit der Riemann-Metrik

$$g : (ds)^2 = \frac{1}{(1-(x^2+y^2))^2}((dx)^2 + (dy)^2).$$

Geodäten sind jene Kreise (und Geraden), die den Einheitskreis orthogonal treffen. Wir wollen die Geodäten durch 0 wieder nach Bogenlänge parametrisieren. Sei also $c(t) := (t, 0)$. Dann ist die Bogenlänge

$$s(t) = \int |c'(t)|_{c(t)}\, dt = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

mit Umkehrfunktion $t(s) = \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} = \tanh(s)$. Als Parametrisierung von $\mathbb{D}$ verwenden wir nun

$$\varphi : (r, \theta) \mapsto (\theta, \tanh r) \mapsto (\tanh r \cos\theta, \tanh r \sin\theta).$$

Die Ableitung ist somit

$$\varphi'(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta / \cosh^2 r & -\tanh r \cdot \sin\theta \\ \sin\theta / \cosh^2 r & \tanh r \cdot \cos\theta \end{pmatrix}$$

und für die Koeffizienten der Metrik erhalten wir:

$$E = g(\partial_r\varphi, \partial_r\varphi) = 1, \quad F = g(\partial_r\varphi, \partial_\theta\varphi) = 0, \quad G = g(\partial_\theta\varphi, \partial_\theta\varphi) = \cosh^2 r.$$

Es gilt somit

$$\sqrt{G}(0, \theta) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}(0, \theta) = 0, \quad K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \sqrt{G} = -1.$$

Dies sind gerade die Koeffizienten einer Fläche von Kehltyp mit Koordinaten

$$r(s) := \frac{1}{2}\left(e^s + e^{-s}\right) = \cosh s, \text{ und } z(s) := \int_0^s \sqrt{1 - r'(\sigma)^2}\, d\sigma$$

aus (54.3). Also erhalten wir analog zu (54.5) eine Isometrie der hyperbolischen Scheibe mit einer Fläche von Kehltyp.

54.7 Eine andere Beschreibung der hyperbolischen Scheibe

Wir wollen die hyperbolische Scheibe nun durch einen Diffeomorphismus so verzerren, daß die Geodäten genau die Geraden werden. Dieser Diffeomorphismus soll die Scheibe invariant lassen und ihren Mittelpunkt und ihren Rand punktweise fix lassen. Dazwischen müssen wir also die Kreise die den Rand orthogonal treffen so deformieren, daß sie Geraden durch die gleichen Schnittpunkte mit den Rand werden. Eine elementar-geometrische Überlegung zeigt, daß dies in Polarkoordinaten durch $(r, \theta) \mapsto (\frac{2r}{1+r^2}, \theta)$ erreicht wird. Unseren gewünschten Diffeomorphismus erhalten wir also durch folgende Zusammensetzung:

$$\begin{tikzcd}
(r,\theta) \arrow[r] \arrow[d, equal] & (\frac{2r}{1+r^2}, \theta) \arrow[d, "\text{kart.Koord.}"] \\
(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan \frac{y}{x}) & (\frac{2r}{1+r^2}\cos\theta, \frac{2r}{1+r^2}\sin\theta) \arrow[d, equal] \\
(x,y) \arrow[u, "\text{Pol.Koord.}"] & (\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2})
\end{tikzcd}$$

Beachte noch, daß die Ableitung von $r \mapsto \frac{2r}{1+r^2}$ durch $r \mapsto \frac{2(1-r^2)}{(1+r^2)^2}$ und die Umkehrfunktion durch $\frac{1-\sqrt{1-r^2}}{r} \leftarrow\!\shortmid r$ gegeben ist (die Wahl der Lösung der quadratische Gleichung ergibt sich dabei aus $r < \frac{2r}{1+r^2}$). Beachte aber, daß wir auf diese Weise keine geodätischen Koordinaten erhalten, denn dazu müßten wir die radialen Geodäten wie in (54.6) zurückparametrisieren.

54.8 Die Poincaré'sche Halbebene ist isomorph zur hyperbolischen Scheibe

Wir betrachten die Möbius-Transformation $\mu : z \mapsto (az+b)/(cz+d)$, die folgende speziellen Werte hat:

$$0 \mapsto -i, \quad i \mapsto 0, \quad \pm 1 \mapsto \pm 1, \quad \infty \mapsto i.$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir: $d = ib$, $b = -ia$, $c = -ia$ und wegen $1 = ad - bc = 2a^2$ schließlich $a = d = 1/\sqrt{2}$ und $b = c = -i/\sqrt{2}$, oder (wenn wir mit $i\sqrt{2}$ erweitern)

$$z \mapsto \frac{iz+1}{z+i}.$$

Sie bildet die obere Halbebene auf die Einheitsscheibe ab. Ihre Umkehrfunktion ist durch $w \mapsto (w+i)/(iw+1)$ gegeben. Wenn wir nun die hyperbolische Metrik auf $\mathbb{D}$ mittels μ auf die obere Halbebene zurückziehen, so erhalten wir die Metrik:

$$|v|_z = |\mu'(z)v|_{\mu(z)} = \frac{|\mu'(z)|}{1-|\mu(z)|^2}\,|v| = \frac{|v|}{i(\bar{z}-z)} = \frac{|v|}{2\mathfrak{Im}(z)}.$$

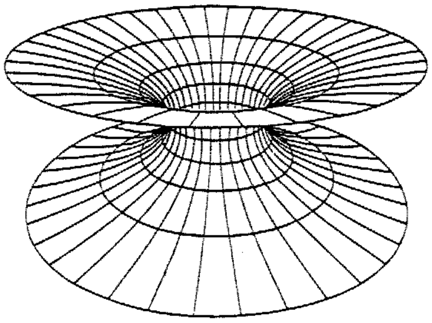
Dies ist bis auf den Faktor 1/2 die Metrik der Poincaré'schen Halbebene aus (54.4).

54.9 Minimale Drehflächen

Wir wollen jene Drehflächen bestimmen, die $H = 0$ erfüllen, siehe Abschnitt (56). Da die beiden Hauptkrümmungen $-\frac{r''}{z'}$ und $\frac{z'}{r}$ sind, müssen wir das Differentialgleichungssystem $r''r = (z')^2 = 1 - (r')^2$ lösen. Dies ist äquivalent zu

$$(\frac{r^2}{2})'' = rr'' + (r')^2 = 1 \text{ mit der einzigen Lösung } r(s)^2 = (s+a)^2 \pm b^2.$$

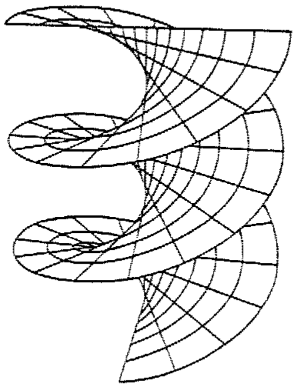
Nach Zeitverschiebung erhalten wir für $r(s)^2 = s^2 - b^2$ mit $b > 0$, daß $r'(s) = \frac{s}{r(s)}$ und somit ist $r'(s)^2 > 1$ also liefert dies keine Lösung. Für $b = 0$ erhalten wir nach Zeitverschiebung (und Spiegelung) die Lösung $r(s) = s$ und $z(s) = 0$, eine Ebene. Für $r(s)^2 = s^2 + b^2$ mit $b > 0$ erhalten wir $z(s) = \int_0^s \frac{b}{\sqrt{\sigma^2+b^2}}\,d\sigma = b\,\mathrm{Arsinh}(s/b)$, d.h. $s = b\sinh(z/b)$ und $r = b\sqrt{1+\sinh^2(z/b)} = b\cosh(z/b)$. Dies ist also gerade die Bogenlängen-Parametrisierung der Kettenlinie $r/b = \cosh(z/b)$.



55. Regelflächen und Torsen

55.1 Definition (Regelflächen und Torsen)

Unter einer Regelfläche versteht man eine 2-Fläche, die sich lokal durch $\varphi : (s,\theta) \mapsto c(\theta) + s\ w(\theta)$ parametrisieren läßt. Damit φ regulär ist muß man offensichtlich voraussetzen, daß $\varphi_s(s,\theta) = w(\theta)$ und $\varphi_\theta(s,\theta) = c'(\theta) + s\ w'(\theta)$ linear unabhängig sind. Durch jeden Punkt einer Regelfläche geht also ein Geradenstück $\theta \mapsto c(\theta) + s\ w(\theta)$. Diese Gerade heißt Erzeugende. Ist der Normalvektor längs jeder Erzeugenden konstant, so spricht man von einer Torse.



55.2 Bemerkung

Wir wollen nun die Parametrisierung $\varphi : (s,\theta) \mapsto c(\theta) + s\,w(\theta)$ einer Regelfläche in 3 Schritten noch etwas verbessern.

1) O.B.d.A. $|w|$=1, denn

$$\bar\varphi(\bar s,\theta) := c(\theta) + \bar s\,\bar w(\theta) = \varphi(s,\theta)$$
$$\text{mit } \bar w(\theta) := \frac{w(\theta)}{|w(\theta)|}, \quad \bar s(s,\theta) := s\,|w(\theta)|$$

2) O.B.d.A. ist zusätzlich $c' \perp w$, denn

$$\bar\varphi(\bar s,\theta) := \bar c(\theta) + \bar s\,w(\theta) = \varphi(s,\theta)$$
$$\text{mit } \bar c(\theta) := c(\theta) + g(\theta)\,w(\theta), \quad \bar s(s,\theta) := s - g(\theta),$$

wobei $0 = \langle \bar c', w\rangle = \langle c' + g'\,w + g\,w', w\rangle = \langle c', w\rangle + g'$, d.h. $g(\theta) := g(0) - \int_0^\theta \langle c', w\rangle$.
3) O.B.d.A. ist zusätzlich $|c'| = 1$, denn

$$\bar\varphi(s,\bar\theta) := \bar c(\bar\theta) + s\,\bar w(\bar\theta) = \varphi(s,\theta)$$
$$\text{mit } \bar c(\bar\theta) := c(\theta), \quad \bar w(\bar\theta) := w(\theta), \quad \bar\theta'(\theta) := |c'(\theta)|$$

Alle diese Annahmen wollen wir im folgenden an die lokale Parametrisierung einer Regelfläche stellen.

55.3 Ein Begleitbein für c

Wir haben in jedem Punkt θ der Kurve c die Orthonormalbasis $(c'(\theta), w(\theta), \nu_{c(\theta)})$ des $\mathbb{R}^3$. Dabei sei M so orientiert, daß diese Basis positiv orientiert ist. Wir wollen für das Begleitbein $(c', w, v := \nu \circ c)$ der Kurve c das Analogon zu den Frenetschen Ableitungsgleichungen herleiten, d.h. die Ableitungen dieser Vektoren in eben dieser Basis ausdrücken. Dazu beachten wir noch, daß $v'(\theta) = T\nu \cdot c'(\theta) = L\, c'(\theta)$ ist, und rechnen:

$$
\begin{aligned}
& 1 = \langle w, w\rangle = \langle c', c'\rangle = \langle v, v\rangle \\
\Rightarrow\quad & 0 = \langle w', w\rangle = \langle c'', c'\rangle = \langle v', v\rangle \\
\text{Sei}\quad & \begin{cases} p(\theta) & := \langle c'', w\rangle(\theta) = -\langle c', w'\rangle(\theta) \\ r(\theta) & := \langle c'', v\rangle(\theta) = -\langle c', v'\rangle(\theta) \\ q(\theta) & := \langle w', v\rangle(\theta) = -\langle w, v'\rangle(\theta) \end{cases} \\
\Rightarrow\quad & \begin{cases} c'' & = \langle c'', w\rangle w + \langle c'', v\rangle v = p\, w + r\, v \\ w' & = \langle w', c'\rangle c' + \langle w', v\rangle v = -p\, c' + q\, v \\ v' & = \langle v', c'\rangle c' + \langle v', w\rangle w = -r\, c' - q\, w \end{cases} \\
\text{Kurz also:}\quad & \frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix} c' \\ w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p & r \\ -p & 0 & q \\ -r & -q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' \\ w \\ v \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Obige Rechnung läßt sich auch für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve c auf einer allgemeinen Fläche durchführen. Dann ist w ein tangentiales Einheits-Vektorfeld, welches normal auf c' steht. Die Funktion p heißt dann auch GEODÄTISCHE KRÜMMUNG, r NORMALKRÜMMUNG und q RELATIVE TORSION von c.

Für unsere Parametrisierung bedeutet das:

$$
\begin{aligned}
\varphi &= c + s\, w \\
\varphi_s &= w \\
\varphi_\theta &= c' + s\, w' = c' + s(-p\, c' + q\, v) = (1 - s\, p)c' + s\, q\, v \\
\varphi_{s,s} &= 0 \\
\varphi_{s,\theta} &= w' = -p\, c' + q\, v
\end{aligned}
$$

Somit sind dies geodätische Koordinaten mit

$$
E = 1, \quad F = 0, \quad G = (1 - s\, p)^2 + (s\, q)^2, \qquad D^2 = EG - F^2 = G
$$

$$
e = -\frac{1}{D}\det(\varphi_s, \varphi_\theta, \varphi_{s,s}) = 0
$$

$$
f = -\frac{1}{D}\det(\varphi_s, \varphi_\theta, \varphi_{s,\theta}) = -\frac{1}{D}\begin{pmatrix} 0 & 1-sp & -p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & sq & q \end{pmatrix} = \frac{q}{D}
$$

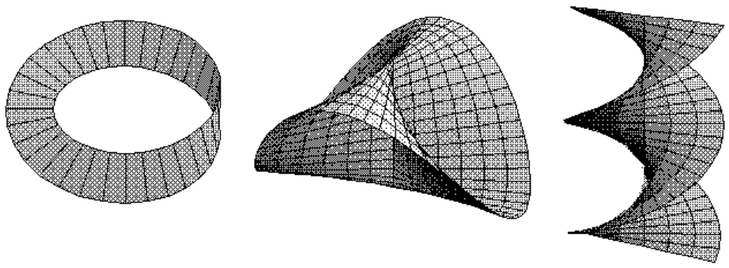
Die Gauß-Krümmung einer Regelfläche ist somit

$$
K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{q^2}{G^2} = -\frac{q^2}{((1 - s\, p)^2 + (s\, q)^2)^2} \le 0.
$$

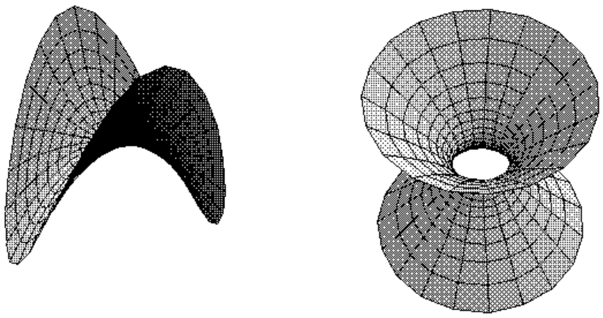
Die Erzeuger $s \mapsto s\, w(\theta)$ sind als Geraden natürlich Asymptotenlinien.

Beispiele von Regelflächen sind:

1. Möbiusband: $\varphi(s,\theta) := ((2-\theta\sin\frac{s}{2})\sin s, (2-\theta\sin\frac{s}{2})\cos s, \theta\cos\frac{s}{2})$.
2. Plückers Kegel: $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$ mit Erzeuger $z =$konstant, d.h. $\frac{y}{x} = \frac{1}{z} \pm \sqrt{\frac{1}{z^2}-1}$.
3. Helicoid oder Wendelfläche: $\tan\frac{z}{a} = \frac{y}{x}$ mit Erzeuger $z = konstant$, d.h. $\frac{y}{x} = \tan\frac{z}{a}$.

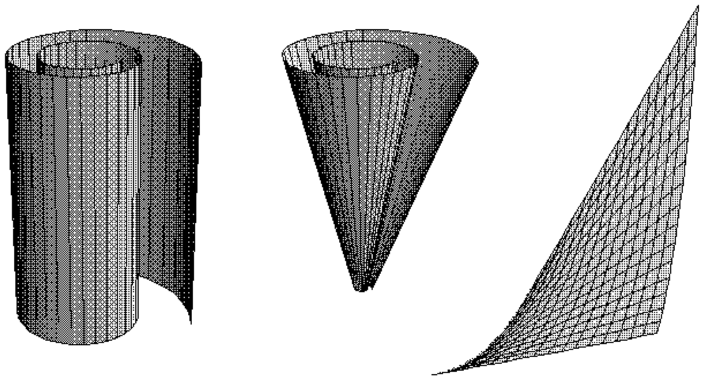


4. hyperbolisches Paraboloid: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, oder parametrisiert durch $\varphi : (t,s) \mapsto (a\,(t+s), \pm b\, s, t^2 + 2t\, s)$
5. einschaliges Hyperboloid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, oder parametrisiert durch $\varphi : (t,s) \mapsto (a\,(\cos t \mp s\,\sin t), b\,(\sin t \pm s\,\cos t), \pm c\, s)$.



Beispiele von Torsen sind:

1. (verallgemeinerter) Kegel; parametrisiert durch $\varphi(s,\theta) := c_0 + s\; w(\theta)$ für $s \neq 0$ mit $w'(s) \times w(s) \neq 0$.
2. (verallgemeinerter) Zylinder; parametrisiert durch $\varphi(s,\theta) := c(\theta) + s\; w_0$ mit $w_0 \times c'(s) \neq 0$.
3. Tangentialfläche einer regulären Raum-Kurve c mit nirgends verschwindender Krümmung K_c; parametrisiert durch $\varphi(s,\theta) := c(\theta) + sc'(\theta)$ für $s \neq 0$.



55.4 Satz (Charakterisierung von Torsen). *Für eine Regelfläche M, parametrisiert durch $\varphi(s,\theta) = c(\theta) + sw(\theta)$ mit $|w| = |c'| = 1$ und $w \perp c'$, sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *M ist eine Torse;*
2. *$K = 0$;*
3. *$q(\theta) := \langle w'(\theta), v(\theta)\rangle = 0$ für alle θ;*
4. *$L_{\varphi(s,\theta)}\, w(\theta) = 0$ für alle θ und $s(= 0)$;*
5. *$w(\theta)$ ist Hauptkrümmungsrichtung im Punkt $\varphi(s,\theta)$ für alle θ und $s(= 0)$;*
6. *$w'(\theta) \in T_{\varphi(s,\theta)}M$ für alle θ und $s(= 0)$;*

Beweis. Es ist $\varphi_s = w$, $\varphi_\theta = (1 - s\,p)c' + s\,q\,v$ und somit

$$\nu_{\varphi(s,\theta)} = \frac{\varphi_\theta \times \varphi_s}{|\varphi_\theta \times \varphi_s|}(s,\theta) = \frac{(s\,p(\theta) - 1)\,v(\theta) + s\,q(\theta)\,c'(\theta)}{\sqrt{s^2\,q(\theta)^2 + (s\,p(\theta) - 1)^2}}$$

($1 \Leftrightarrow 3$) Es bleibt ν genau dann konstant längs jedes Erzeugers, wenn $(\varphi_\theta \times \varphi_s)(s,\theta) = (s\,p(\theta) - 1)\,v(\theta) + s\,q(\theta)\,c'(\theta)$ konstante Richtung bei variierenden s hat, also wenn $(s\,p(\theta) - 1) : (s\,q(\theta)) = (p(\theta) - \frac{1}{s}) : q(\theta)$ konstant in t ist, d.h. $q(\theta) = 0$ ist.

($3 \Leftrightarrow 2$) Klar, da $K = -\left(\frac{q}{(1-s\,p)^2 + (s\,q)^2}\right)^2$.

($1 \Rightarrow 4$) $L_{\varphi(s,\theta)}\, w(\theta) = \frac{\partial}{\partial s}\nu(c(\theta) + s\,w(\theta)) = 0$.

($4 \Rightarrow 3$) Klar, da $L\,w \in TM$, und $\langle w, L\,w\rangle = K(s \mapsto c(\theta) + s\,w(\theta)) = 0$. Also gilt $L_{\varphi(0,\theta)} \cdot w(\theta) = 0 \Leftrightarrow 0 = \langle Lw, c'\rangle = \langle w, Lc'\rangle = \langle w, v'\rangle = -\langle w', v\rangle = q$ wegen (55.3).

($4 \Leftrightarrow 5$) Aus $L\,w = \lambda\,w$ folgt $\lambda = \langle w, L\,w\rangle = K(w) = 0$.

($3 \Leftrightarrow 6$) Es ist $w'(\theta) \in T_{\varphi(s,\theta)}M \Leftrightarrow 0 = \langle w'(\theta), (\varphi_\theta \times \varphi_s)(s,\theta)\rangle = \langle q\,v - p\,c', (s\,p - 1)\,v + s\,q\,c'\rangle = -q(\theta)$ □

55.5 Folgerung (Verschwindende Gauß-Krümmung).
Eine Fläche ohne Nabelpunkte ist genau dann eine Torse, wenn die Gauß-Krümmung überall verschwindet.

Beweis. Da keine Nabelpunkte existieren, können wir orthonormale Vektorfelder von Hauptkrümmungsrichtungen auf M finden. Da $K = 0$, sind die Lösungskurven (Krümmungslinien) des Vektorfelds mit zugehöriger Hauptkrümmung 0 Geraden, also ist M eine Regelfläche. Wegen (55.4) ist M sogar eine Torse. □

Bemerkung

Für Flächen mit Nabelpunkten ist obige Folgerung nicht gültig. Ein Beispiel einer Fläche mit $K = 0$, die aber keine Torse ist, findet sich in [**83**, S.53].

55.6 Lemma (Schmiegtorse). *Sei c eine Kurve in M, für welche es ein Vektorfeld w in TM längs c gibt, mit $II(c', w) = 0$ und $\{c', w\}$ linear unabhängig. Dann ist $(s, \theta) \mapsto c(\theta) + sw(\theta)$ eine Torse, die sogenannte* Schmiegtorse, *da sie die Fläche längs c berührt.*

Falls $II(c', c')(\theta) \neq 0$ für alle θ, so existiert ein solches w, da $c' \notin \{w : II(c', w) = 0\}$.

Beweis. O.B.d.A. sei $|w| = 1$. Es ist $\varphi_{s,\theta} = w'$, also $\langle v, w'\rangle = -\langle(\nu \circ c)', w\rangle = -\langle L\, c', w\rangle = -II(c', w) = 0$, somit parametrisiert φ eine Torse nach (55.4). □

55.7 Folgerung. *Die Hauptnormale an eine nach der Bogenlänge parametrisierte Krümmungslinie c auf M erzeugt eine Schmiegtorse.*

Beweis. Für ein normales Tangentialvektorfeld w an c gilt $II(c', w) = \langle L\, c', w\rangle = K(c')\langle c', w\rangle = 0$. □

55.8 Proposition. *Eine Kurve c auf einer Fläche M ist genau dann eine Krümmungslinie, wenn $\varphi(s, \theta) := c(\theta) + s\nu(c(\theta))$ eine Torse parametrisiert.*

Beweis. Die Kurve c ist genau dann Krümmungslinie, wenn zu jedem θ ein λ existiert mit $L \cdot c'(\theta) = \lambda c'(\theta)$. Wegen $L \cdot c'(\theta) = (\nu \circ c)'(\theta) = w'(\theta)$ ist das genau dann der Fall, wenn $w'(\theta) \in TM$, da $\langle w', w\rangle = 0$, also nach (55.4) genau dann wenn φ eine Torse parametrisiert. □

55.9 Lemma (Generische Torsen). *Jede Torse ist in einer offenen und dichten Teilmenge lokal ein Zylinder, ein Kegel oder die Tangentialfläche an eine Kurve.*

Beweis. Sei $\varphi(s, \theta) = c(\theta) + s\, w(\theta)$ eine lokale Parametrisierung einer Torse mit $|c'| = 1 = |w|$ und $c' \perp w$. Falls w lokal konstant ist, so ist M lokal ein Zylinder. Falls andernfalls $0 \neq w'(= q\, v - p\, c')$ gilt, so ist für Torsen $p = -\langle w', c'\rangle \neq 0$ wegen $q = 0$ nach (55.4). In diesem Fall versuchen wird die Regelfläche so umzuparametrisieren, daß $|c'| = 1 = |w|$ und $c' \perp w'$ gilt. Dazu machen wir den Ansatz $\bar\varphi(\bar s, \theta) = \bar c(\theta) + \bar s \bar w(\theta) = \varphi(s, \theta)$ mit $\bar c(\theta) := c(\theta) + g(\theta)\, w(\theta)$ und $\bar s = s - g(\theta)$, wobei

$$0 = \langle w'(\theta), \bar c'(\theta)\rangle = \underbrace{\langle w'(\theta), c'(\theta)\rangle}_{-p(\theta)} + g(\theta) \underbrace{\langle w'(\theta), w'(\theta)\rangle}_{p(\theta)^2 + q(\theta)^2} + g'(\theta) \underbrace{\langle w'(\theta), w(\theta)\rangle}_{0},$$

d.h. $g := \frac{p}{p^2+q^2}$. Die Kurve $\bar c$ heißt auch Striktionslinie der Regelfläche.

Wir können nun noch wie in (55.2) erreichen, daß $|\bar c'| = 1$ gilt.

Für jede Torse gilt $q = 0$ nach (55.4). Somit ist $\bar c(\theta) = c(\theta) + \frac{1}{p(\theta)}\, w(\theta)$ und

$$\bar c'(\theta) = c'(\theta) + \frac{1}{p(\theta)} \underbrace{w'(\theta)}_{p(\theta)\, c'(\theta)} - \frac{p'(\theta)}{p(\theta)^2}\, w(\theta) = -\frac{p'(\theta)}{p(\theta)^2}\, w(\theta)$$

Es ist also die Striktionslinie $\bar c$ genau dann konstant und somit M lokal ein (verallgemeinerter) Kegel, wenn $p' = 0$ gilt. Falls andererseits p' lokal nicht verschwindet, dann ist $\bar c$ regulär und $\bar c'$ proportional zu w, also M lokal die Tangentialfläche zu $\bar c$.

Die Menge der θ, wo eine der folgenden drei Bedingungen gilt, ist offensichtlich offen und auch dicht,

1. $p = 0$ lokal (dann ist M lokal ein verallgemeinerter Zylinder);
2. $0 \neq p$ lokal konstant (dann ist M lokal ein verallgemeinerter Kegel);
3. $p(\theta)\, p'(\theta) \neq 0$ (dann ist M lokal eine Tangentialfläche):

Falls nämlich eine Umgebung von θ_0 im Komplement dieser Menge liegt, so ist $p\,p' = 0$ lokal und somit, falls $p(\theta) \neq 0$ ist, $p' = 0$ lokal um θ, d.h. p lokal konstant wäre, ein Widerspruch. □

55.10 Taille, Striktions- oder Kehl-Linie

Wir wollen nun noch andere Beschreibungen der Striktionslinieaus (55.9) einer nicht zylindrischen Regelfläche geben. Es seien zwei windschiefe Geraden $t \mapsto a_j + tw_j$ für $j = 0, 1$ gegeben, d.h. $w_1 \times w_2 \neq 0$. Der Abstand zweier Punkte mit Parameter t_0 und t_1 auf ihnen ist

$$d(t_0, t_1) := |a_0 - a_1 + t_0 w_0 - t_1 w_1|.$$

Der kritische Wert muß

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt_0} d(t_0, t_1)^2 = \langle a_0 - a_1 + t_0 w_0 - t_1 w_1, w_0\rangle \quad \text{und} \\ 0 &= \frac{d}{dt_1} d(t_0, t_1)^2 = \langle a_0 - a_1 + t_0 w_0 - t_1 w_1, w_1\rangle \end{aligned}$$

erfüllen. Wegen

$$\det \begin{pmatrix} \langle w_0, w_0\rangle & -\langle w_1, w_0\rangle \\ \langle w_0, w_1\rangle & -\langle w_1, w_1\rangle \end{pmatrix} = -(\langle w_0, w_0\rangle\langle w_1, w_1\rangle - \langle w_0, w_1\rangle^2) = -|w_0 \times w_1|^2 \neq 0$$

existiert eine eindeutige Lösung und zwar ist

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{\langle v_0, a_0 - a_1\rangle\langle v_1, v_1\rangle - \langle v_1, a_0 - a_1\rangle\langle v_0, v_1\rangle}{\langle w_0, w_1\rangle^2 - \langle w_0, w_0\rangle\langle w_1, w_1\rangle} \\ &= \frac{\langle\langle v_1, v_1\rangle v_0 - \langle v_0, v_1\rangle v_1, a_0 - a_1\rangle}{|w_0 \times w_1|^2} \\ &= \frac{\langle v_1 \times (v_0 \times v_1), a_0 - a_1\rangle}{|w_0 \times w_1|^2} = \frac{\det(v_1, v_0 \times v_1, a_0 - a_1)}{|w_0 \times w_1|^2}. \end{aligned}$$

Sei nun $\varphi : (s, \theta) \mapsto c(\theta) + s\, w(\theta)$ Parametrisierung eine Regelfläche mit $|w| = 1$ und $w'(\theta) \neq 0$. Dann ist der Punkt auf dem Erzeuger durch $c(\theta)$ der vom Erzeuger $c(\theta+\varepsilon)$ minimalen Abstand hat, durch

$$c(\theta) - \frac{\det(w(\theta + \varepsilon), w(\theta) \times w(\theta + \varepsilon), c(\theta + \varepsilon) - c(\theta))}{|w(\theta) \times w(\theta + \varepsilon)|^2}\, w(\theta)$$

gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\det(w(\theta+\varepsilon), w(\theta)\times w(\theta+\varepsilon), c(\theta+\varepsilon)-c(\theta))}{|w(\theta)\times w(\theta+\varepsilon)|^2} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\det(w(\theta+\varepsilon), w(\theta)\times \frac{w(\theta+\varepsilon)-w(\theta)}{\varepsilon}, \frac{c(\theta+\varepsilon)-c(\theta)}{\varepsilon})}{|w(\theta)\times \frac{w(\theta+\varepsilon)-w(\theta)}{\varepsilon}|^2} \\
&= \frac{\det(c'(\theta), w(\theta), w(\theta)\times w'(\theta))}{|w(\theta)\times w'(\theta)|^2} = \frac{\langle c'(\theta)\times w(\theta), w(\theta)\times w'(\theta)\rangle}{|w(\theta)\times w'(\theta)|^2} \\
&= \frac{\langle c'(\theta), w(\theta)\rangle\langle w(\theta), w'(\theta)\rangle - \langle c'(\theta), w'(\theta)\rangle\langle w(\theta), w(\theta)\rangle}{|w(\theta)\times w'(\theta)|^2} \\
&= -\frac{\langle c'(\theta), w'(\theta)\rangle}{|w(\theta)\times w'(\theta)|^2}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Identitäten:

$$\begin{aligned}
\det(a,b,c) &= \langle a\times b, c\rangle \\
a\times(b\times c) &= \langle a,c\rangle b - \langle a,b\rangle c \\
\langle a\times b, c\times d\rangle &= \langle a,c\rangle\langle b,d\rangle - \langle a,d\rangle\langle b,c\rangle
\end{aligned}$$

verwendet. Dabei folgt die erste Gleichung durch Interpretation als Volumen des Parallelipipeds; die zweite, da $a\times(b\times c)$ normal auf $b\times c$ und damit im Erzeugnis $\langle\{b,c\}\rangle$ liegt; die dritte durch

$$\begin{aligned}
\langle a\times b, c\times d\rangle &\overset{(1)}{=} \det(a,b,c\times d) = \det(b,c\times d,a) \overset{(1)}{=} \langle b\times(c\times d), a\rangle \\
&\overset{(2)}{=} \langle\langle b,d\rangle c - \langle b,c\rangle d, a\rangle = \langle a,c\rangle\langle b,d\rangle - \langle a,d\rangle\langle b,c\rangle.
\end{aligned}$$

Der Grenzpunkt

$$c(\theta) - \frac{\langle c', w'\rangle}{|w\times w'|^2}(\theta)\, w(\theta) = c(\theta) + \frac{p(\theta)}{p(\theta)^2+q(\theta)^2}\, w(\theta)$$

heißt der ZENTRALE PUNKT am Erzeuger. Die Verbindungskurve der zentralen Punkte ist genau die Striktionslinie.

Wir wollen nun die Punkte der Erzeuger mit minimaler Gauß-Krümmung $K = -\big(q/((1-s\,p)^2+(s\,q)^2)\big)^2$ bestimmen. Dazu müssen wir $s(\theta)$ so bestimmen, daß der Nenner $1-2s\,p(\theta)+s^2\big(p(\theta)^2+q(\theta)^2\big)\ge 0$ möglichst klein wird, d.h. $s(\theta) = p(\theta)/p(\theta)^2+q(\theta)^2$. Diese Punkte sind also genau die zentralen Punkte und für die Gauß-Krümmung in diesen Punkten gilt:

$$\begin{aligned}
K &= -\left(\frac{q}{(1-\frac{p^2}{p^2+q^2})^2+(\frac{pq}{p^2+q^2})^2}\right)^2 = -\left(\frac{q(p^2+q^2)^2}{q^4+p^2q^2}\right)^2 \\
&= -\left(\frac{p(\theta)^2+q(\theta)^2}{q(\theta)}\right)^2
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also folgendes Theorem gezeigt:

55.11 Theorem (Kehllinie). *Die Gauß-Krümmung einer Regelfläche mit $w'(\theta) \neq 0$ ist auf den Erzeugern genau in den zentralen Punkten von maximalem Betrag und zwar $K = -\left(\frac{p(\theta)^2+q(\theta)^2}{q(\theta)}\right)^2$. Die zentralen Punkte sind gegeben durch:*

$$c(\theta) + \frac{p(\theta)}{p^2(\theta)+q^2(\theta)} w(\theta),$$

und sind genau jene Punkte x, wo $w' \perp T_x M$, bzw. jene, die infinitesimal von benachbarten Erzeugern minimalen Abstand haben. □

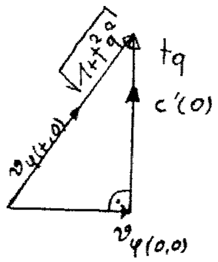
55.12 Satz [Chasle1839]. *Sei M eine Regelfläche, $c(0)$ der zentrale Punkt, dann gilt*

$$\tan \sphericalangle(\nu_{c(0)}, \nu_{c(0)+s\,w(0)}) = -s\,q(0).$$

Es ist also der Anstieg der Normalen relativ zur Normalen im zentralen Punkt proportional zur Distanz vom zentralen Punkt.

Beweis. Sei also $x := c(0)$ ein zentraler Punkt.

$$\begin{aligned}
w'(0) \perp T_x M \quad &\Rightarrow \quad 0 = \langle w', \varphi_\theta \rangle = \langle w', c' \rangle = -\langle w, c'' \rangle = -p \\
&\Rightarrow \quad \varphi_\theta(s,0) = c'(0) + s\,q(0) v(0) \\
&\Rightarrow \quad \nu_{\varphi(s,0)} = \frac{\varphi_s \times \varphi_s}{|\varphi_\theta \times \varphi_s|}(s,0) \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{|c'(0) + s\,q(0)\,v(0)|} w(0) \times (c'(0) + s\,q(0)\,v(0)) \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{1 + s^2 q^2(0)} (\nu_{c(0)} - s\,q(0)\,c'(0)) \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{1 + s^2 q^2(0)}\, \nu_{\varphi(s,0)} = \nu_{c(0)} - s\,q(0)\,c'(0) \\
&\Rightarrow \quad \tan \sphericalangle(\nu_{\varphi(0,0)}, \nu_{\varphi(s,0)}) = -s\,q(0) \quad \square
\end{aligned}$$



56. Minimalflächen

56.1 Definition (Minimalfläche)

Eine Fläche heißt Minimalfläche, falls sie (lokal) ein kritischer Punkt für die Oberfläche ist, d.h. wenn wir sie nur lokal (bzw. auf einem kompakten Teil) variieren. Wir brauchen also nicht die gesamte Oberfläche (die unendlich sein kann), sondern nur jenen Teil, der sich ändert, betrachten.

56.2 Satz, [53]. *Eine Fläche ist genau dann eine Minimalfläche, wenn $H = 0$.*

Beweis. Das vorliegende Variationsproblem besteht also darin, die lokalen Minima der Funktion $M \mapsto \mathrm{vol}(M) := \int_M \mathrm{vol}_M \in \mathbb{R}$ zu bestimmen. Sei die Fläche M ein kritischer Punkt dieses Funktionals. Jede in der Nähe von M liegende Fläche läßt sich per Definition als $\{x + f(x)\nu(x) : x \in M\}$ mit einer reellwertigen glatten Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ darstellen. Somit muß $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \mathrm{vol}(M^t) = 0$ sein, wobei M^t die Fläche $\{x + t\, f(x)\nu(x)\}$ ist. Dazu müssen wir $\frac{d}{dt}\Big|_0 \mathrm{vol}_{M^t}$ bestimmen. Wir wählen eine lokale Parametrisierung $\varphi : U \to M$ von M mit zugehörigen lokalen Koordinaten $(u^1, \dots, u^m)$. Eine lokale Parametrisierung von M^t ist dann $\varphi^t(u) = \varphi(u) + t\, f(\varphi(u))\nu(\varphi(u))$. Lokal ist

$$vol_{M^t} = \sqrt{\det(g^t_{i,j})}\, du^1 \wedge \dots \wedge du^m,$$

wobei

$$g^t_i := \partial_i \varphi^t = \partial_i \varphi + t\Big(\partial_i (f \circ \varphi) \cdot (\nu \circ \varphi) + (f \circ \varphi) \cdot \partial_i (\nu \circ \varphi)\Big)$$

und $g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle$. Also ist

$$\tfrac{d}{dt}\big|_0\, g^t_i = \Big(\partial_i (f \circ \varphi) \cdot (\nu \circ \varphi) + (f \circ \varphi) \cdot L(\partial_i \varphi)\Big) = \Big(\tfrac{\partial f}{du^i} \cdot \nu + f \cdot L(g_i)\Big)$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\big|_0\, g^t_{i,j} &= \langle g_i, \tfrac{d}{dt}\big|_0\, g^t_j \rangle + \langle \tfrac{d}{dt}\big|_0\, g^t_i, g_j \rangle \\ &= f \cdot \Big(\langle L(\partial_i \varphi), \partial_j \varphi \rangle + \langle \partial_i \varphi, L(\partial_j \varphi) \rangle \Big) =: 2f\, h_{i,j}, \end{aligned}$$

und weiters

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\big|_0 \sqrt{\det(g^t_{i,j})} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{i,j})}} \det(g_{i,j})\, \mathrm{Spur}\Big((g_{i,j})^{-1} (\tfrac{d}{dt}\big|_0\, g^t_{i,j}) \Big) \\ &= \sqrt{\det(g_{i,j})} (f \circ \varphi)\, \mathrm{Spur}\Big((g_{i,j})^{-1} (h_{i,j}) \Big) \\ &= \sqrt{\det(g_{i,j})} (f \circ \varphi)\, \mathrm{Spur}\, L \\ &= m \sqrt{\det(g_{i,j})} (f \circ \varphi)\, H. \end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, daß $\det'(A)(B) = \det A \cdot \mathrm{Spur}(A^{-1}B)$. Also:

$$\tfrac{d}{dt}\big|_0\, \mathrm{vol}_{M^t} = mf\, H\, \mathrm{vol}_M$$

Schlußendlich gilt:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \mathrm{vol}(M^t) &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \int \mathrm{vol}_{M^t} = \int \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \mathrm{vol}_{M^t} \\ &= m \int_M f\, H\, vol_M. \end{aligned}$$

Soll das für alle in der Nähe von M liegenden Flächen gelten, d.h. für alle $f : M \to \mathbb{R}$, so muß $H = 0$ sein (wähle $f = H$). □

56.3 Plateausches Problem

Sei $c : S^1 \to \mathbb{R}^3$ eine einfachgeschlossene rektifizierbare Kurve. Gesucht ist eine Minimal-Fläche $\varphi : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(S^1) = c(S^1)$. [RadoDouglas1930] haben gezeigt, daß es eine Lösung mit eventuellen, isolierten Singularitäten gibt. [**65**] zeigte, daß die absoluten Minima keine Singularitäten besitzen. Nach [**69**] ist φ auch am Rand differenzierbar, falls c differenzierbar ist.

Folgendes Lemma stellt einen, wegen der Schwingungsgleichung erwarteten, Zusammenhang zwischen Minimalflächen und dem Laplaceoperator her.

56.4 Lemma (Minimalfläche via isothermale Koordinaten).
Eine Fläche M ist genau dann eine Minimalfläche, wenn alle Komponenten einer (jeder) isothermalen Parametrisierung φ harmonisch sind.

Beweis. Eine isothermale Parametrisierung erfüllt $E = G$, $F = 0$. Also ist

$$
\begin{aligned}
& 2H = \frac{Ge - 2Ff + Eg}{EG - F^2} = \frac{E(e+g)}{E^2} = \frac{e+g}{E}. \\
& \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = E = G = \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \varphi_{1,1}, \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_{2,1}, \varphi_2 \rangle. \\
& \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = F = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \varphi_{1,2}, \varphi_2 \rangle = -\langle \varphi_1, \varphi_{2,2} \rangle. \\
\Rightarrow \quad & \langle \varphi_{1,1} + \varphi_{2,2}, \varphi_1 \rangle = 0 \text{ und analog } \langle \varphi_{1,1} + \varphi_{2,2}, \varphi_2 \rangle = 0. \\
\Rightarrow \quad & \varphi_{1,1} + \varphi_{2,2} = \lambda\nu \text{ und } e + g = -\langle \varphi_{1,1} + \varphi_{2,2}, \nu \rangle = -\langle \lambda\nu, \nu \rangle = -\lambda. \\
\Rightarrow \quad & \Delta\varphi := \varphi_{1,1} + \varphi_{2,2} = -(e+g)\nu = -2H\,E\,\nu \text{ mit } E = |\varphi_1|^2 = |\varphi_2|^2 > 0.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt nun $H = 0 \Leftrightarrow \Delta\varphi := 0$. □

Das führt natürlich in die komplexe Analysis, denn eine Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist genau dann harmonisch, wenn sie der Realteil (oder äquivalent der Imaginärteil) einer holomorphen Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist.

56.5 Lemma (konforme Gaußabbildung). *Die Gauß-Abbildung einer zusammenhängenden Fläche ist genau dann konform, wenn M eine Sphäre oder eine Minimalfläche ist.*

Beweis. Falls M Teil einer Sphäre ist, so ist die Gaußabbildung proportional zur Identität, also konform.

Sei M eine Minimal-Fläche, d.h. $H = 0$. Dann gilt für die Hauptkrümmungen $K_1 = -K_2$, und somit ist $K \leq 0$. Nun benutzen wir die charakteristische Gleichung $L^2 - 2H\,L + K\,\mathrm{id} = 0$ für L. Also ist $L^2 = -K \cdot \mathrm{id}$, d.h. $\langle Lv, Lw \rangle = -K\langle v, w \rangle$, und somit ist die Gaußabbildung konform.

Sei umgekehrt die Gaußabbildung konform, d.h. $\langle Lv, Lw \rangle = \lambda\langle v, w \rangle$, i.e. $L^2 = \lambda \cdot \mathrm{id}$. Also gilt $2\,H\,L = (K + \lambda) \cdot \mathrm{id}$ wegen der charakteristischen Gleichung von L. Falls in einem Punkt $H \neq 0$ ist, dann ist $L = (K + \lambda)/H \cdot \mathrm{id}$, d.h. auf dieser offenen Menge sind alle Punkte Nabelpunkte, also muß nach (52.5) M dort Teil einer Sphäre (oder eine Ebene) sein, und somit H konstant sein. Falls H konstant 0 ist, so liegt eine Minimalfläche vor. □

56.6 Historisches über Minimalflächen

In [Lagrange1760] wurden erstmals Minimalflächen betrachtet, und zwar waren dies solche, die Graph einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind. Die charakterisierende Differentialgleichung ist dann

$$f_{x,x}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{x,y} + f_{y,y}(1 + f_x^2) = 0.$$

Dann zeigte [**53**], daß eine Fläche genau dann minimal ist, wenn ihre mittlere Krümmung verschwindet. Er fand auch heraus, daß die einzigen Minimalflächen mit Geraden als Niveaulinien die Ebene und die Wendelfläche sind, und daß die einzige minimale Drehfläche durch die Kettenlinie entsteht, also das Katenoid, gegeben durch $\varphi(t, s) = (a \cosh s \cos t, a \cosh s \cos t, bs)$, ist.

[**28**] suchte nach Funktionen $z = f(x, y) = g(x) + h(y)$, deren Graph eine Minimalfläche ist und fand $g(x) = \frac{1}{a} \ln \cos ax$, $h(y) = \frac{1}{a} \ln \sin ay$ und somit $f(x, y) = \frac{1}{a} \ln(\frac{\cos ax}{\cos ay})$: In der Tat ist

$$f_{x,x} = g'', \quad f_{x,y} = 0, \quad f_{y,y} = h''$$

für $f(x, y) := g(x) + h(y)$ und somit ist die obige Differentialgleichung

$$g''(x)\,(1 + h'(y)^2) + h''(y)\,(1 + g'(x)^2) = 0$$

Also ist

$$\frac{h''(y)}{1 + h'(y)^2} = a = -\frac{-g''(x)}{1 + g'(x)^2},$$

für eine Konstante a, also

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{a} \log \cos(a\,x) \\ h(y) &= \frac{1}{a} \log \cos(a\,y) \end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel einerMinimalfläche ist, ist Enneper's Fläche $(u, v) \mapsto (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2)$.

[**9**] gelang es schließlich zu zeigen, daß die Wendelfläche die einzige Minimalfläche ist, die eine Regelfläche ist.

[**84**] fand die erste allgemeine Konstruktion für Minimalflächen.

[**67**] zeigte, daß der Graph einer auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten Funktion nur dann eine Minimalfläche ist, wenn er eine Ebene ist.

[**16**] konnte schließlich zeigen, daß die Gaußabbildung einer Minimalfläche, die nicht eine Ebene ist, höchstens 6 Punkte auf der S^2 ausläßt. Ennepers Fläche läßt einen aus. Das Katenoid 2, Scherk's Fläche 4, und es gibt auch Beispiele (Chen's und Voss's Fläche), wo die Gaußabbildung keinen bzw. 3 Punkte ausläßt. Ob es ein Beispiel für 5 bzw. 6 ausgelassene Punkte wirklich gibt, ist unbekannt.

Für dies und vieles andere mehr siehe [**39**].

Für das folgende siehe auch [**46**, S.431]: Sei M eine Riemann-Fläche, $\nu : M \to S^2$ eine meromorphe Funktion und ω eine meromorphe 1-Form auf M. Wir setzen

$$x(p) := \mathfrak{Re} \int_{p_0}^{p} (1 - \nu^2(z))\,\omega(z)$$
$$y(p) := \mathfrak{Re} \int_{p_0}^{p} i(1 + \nu^2(z))\,\omega(z)$$
$$z(p) := \mathfrak{Re} \int_{p_0}^{p} 2\nu(z)\,\omega(z)$$

Dann ist $p \mapsto (x(p), y(p), z(p))$ eine Immersion $M \to \mathbb{R}^3$, deren Bild eine immersierte Minimalfläche ist. Jede immersierte Minimalfläche läßt sich so erhalten: Die geometrische Bedeutung von ν ist die der stereographischen Projektion der Gaußabbildung. Die Gauß-Krümmung ist

$$\int_M K \operatorname{vol}_M = \text{Fläche}(\nu(M)) = -\left(\frac{4|\nu'|}{|f|(1+|\nu|^2)^2}\right)^2$$

[**63**]. Eine symmetrischere Gestalt obiger Formeln ist: Seien ω_j holomorphe 1-Formen ohne reelle Perioden, mit $\sum_{j=1}^3 \omega_j^2 = 0$, d.h. falls $\omega_j = \varphi_j(z)\,dz$ ist, so soll $\sum_j \varphi_j^2 = 0$ gelten, und $\sum_{j=1}^3 |\omega_j|^2 > 0$. Dann ist $x_j := \mathfrak{Re}(\int \omega_j)$ die Parametrisierung einer Minimalfläche.

56.7 Folgerung. *Die Gauß-Krümmung einer Minimalfläche ist nirgends positiv. Es gibt keine kompakte Minimalfläche im $\mathbb{R}^3$.*

Beweis. Daß $K \leq 0$ gilt, haben wir im Beweis von (56.5) gezeigt. Und, da nach (60.6) jede kompakte Fläche im $\mathbb{R}^3$ Punkte mit positiver Gauß-Krümmung besitzt, gibt es keine kompakten Minimalflächen. □

57. Geodäten

Wir wollen nun auf allgemeinen Hyperflächen das Problem der kürzesten Verbindungswege lösen.

57.1 Definition (Geodäte)

Unter einer GEODÄTE versteht man eine Kurve in M, welche ein kritischer Punkt für die Bogenlänge ist.

57.2 Satz (Charakterisierung der Geodäten).
Eine Kurve c ist genau dann eine Geodäte, wenn für eine Parametrisierung von c gilt: $c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$ für alle t, d.h. die Beschleunigung nur dazu dient, daß die Kurve auf der Mannigfaltigkeit bleibt. Diese Parametrisierung ist dann automatisch proportional zur Bogenlänge.

Beweis. Sei $c : [a, b] \to M$ eine Kurve, o.B.d.A. nach der Bogenlänge parametrisiert. Diese ist ein kritischer Punkt der Bogenlänge, wenn für alle 1-PARAMETER-FAMILIEn von Kurven (c^s) mit $s \in \mathbb{R}$, die Ableitung $\frac{d}{ds}\big|_{s=0} L(c^s)$ gleich 0 ist. Unter

1-Parameter-Familien von Kurven versteht man Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to M$, $(t,s) \mapsto c^s(t)$, welche $c^s(a) = c(a)$, $c^s(b) = c(b)\ \forall\ s$ und $c^0 = c$ erfüllen. Berechnen wir also diese Ableitung, wobei wir $c(t,s) := c^s(t)$ setzen:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(c^s) &= \tfrac{d}{ds}\big|_{s=0} \int_a^b |\tfrac{\partial}{\partial t} c(t,s)|dt = \int_a^b \tfrac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} |\tfrac{\partial}{\partial t} c(t,s)|dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} \langle \frac{\partial}{\partial t} c(t,s), \frac{\partial}{\partial t} c(t,s)\rangle}{\underbrace{|\frac{\partial}{\partial t} c(t,0)|}_{=1}} dt \\
&= \int_a^b \Big\langle \tfrac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} \tfrac{\partial}{\partial t} c(t,s), \tfrac{\partial}{\partial t} c(t,0) \Big\rangle dt \\
&= \int_a^b \Big\langle \tfrac{\partial}{\partial t}\tfrac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0}\ c(t,s), \tfrac{\partial}{\partial t} c(t,0) \Big\rangle dt = \qquad\qquad \text{(part.Integr.)} \\
&= \Big[\Big\langle \tfrac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0}\ c(t,s), \tfrac{\partial}{\partial t} c(t,0) \Big\rangle\Big]_{t=a}^{b} \\
&\qquad - \int_a^b \Big\langle \tfrac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0}\ c(t,s), \big(\tfrac{\partial}{\partial t}\big)^2 c(t,0) \Big\rangle\, dt \\
&= 0 - \int_a^b \langle \eta(t), c''(t)\rangle dt = \int_a^b h\, \underbrace{\big(\langle c'', \nu\circ c\rangle^2 - \langle c'', c''\rangle\big)}_{\le 0 \text{ (Cauchy-Schwarz)}}
\end{aligned}
$$

Wobei wir $\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} c(t,s) =: \eta(t)$ so gewählt haben, daß

$$\eta(t) = h(t)\Big(c''(t) - \big\langle c''(t), \nu(c(t))\big\rangle\, \nu(c(t))\Big) \in T_{c(t)}M$$

gilt, für eine glatte Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ mit $h(a) = 0 = h(b)$. Dies ist möglich, da η ein Vektorfeld auf M längs c ist, welches nur $\eta(a) = 0 = \eta(b)$ erfüllen muß.

Die Ableitung verschwindet also für solche η genau dann, wenn in der Cauchy-Schwarz Ungleichung Gleichheit gilt: $\langle c'', c''\rangle = \langle c'', \nu\circ c\rangle^2$, i.e. $c''(t) \parallel \nu(c(t))$. Mit anderen Worten, falls $c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$ für alle t.

Umgekehrt sei c eine Parametrisierung, welche $c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$ erfüllt. Dann ist insbesonders $c''(t) \perp c'(t)$ und somit $\langle c'(t), c'(t)\rangle$ konstant, also c proportional zur Bogenlänge parametrisiert. D.h. obige Argumente sind auf c anwendbar. □

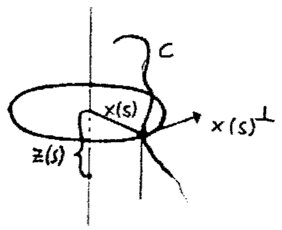
57.3 Beispiele

1. In einer Hyperebene sind offensichtlich die Geraden die Geodäten.
2. Allgemeiner: Die Erzeugenden einer Regelfläche sind Geodäten.
3. Jeder Großkreis auf der Sphäre S^m, d.h. Schnitt einer Ebene durch 0 mit S^m, ist eine Geodäte, denn die 2.Ableitung eines Kreises zeigt zum Mittelpunkt, also genau in Richtung des Normalvektors an die Sphäre.
4. Auf einer Drehfläche sind die Meridiane Geodäten. Auch jene Breitenkreise, welche kritische Punkte für den Radius sind, sind Geodäten.

5. Auf einem Zylinder können wir auch leicht Geodäten in andere Richtungen angeben, nämlich: $t \mapsto (\cos\varphi\; c(t), a\sin\varphi)$, wobei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte der Äquatorialsphäre ist.
6. Allgemeiner: Man kann die Geodäten einer Torse leicht bestimmen, indem man die Torse in der Ebene aufwickelt, denn dort sind sie Geraden.

57.4 Satz von Clairaut. *Auf jeder Drehfläche ist das Produkt aus dem Abstand von der Drehachse mit dem Cosinus des Winkels zwischen einer Geodäte und dem Breitenkreis konstant längs der Geodäte.*

$$\cos\sphericalangle(\textit{Geodäte,Breitenkreis}) \cdot \textit{Radius} = \text{konst}$$



Beweis. Sei $c : t \mapsto (x(t); z(t)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte auf M, d.h. $c''(t) \perp T_{c(t)}M$. Es ist $(x(t)^\perp, 0)$ tangential an den Breitenkreis durch $c(t)$ und $|c'(t)| = 1$, folglich gilt

$$\begin{aligned}
\Big(\text{Radius} \cdot \cos\sphericalangle(\text{Geodäte,Breitenkreis})\Big)'(t) &= \\
&= \frac{d}{dt}\Big(|x(t)| \cdot \frac{1}{|c'(t)|\,|x(t)|}\ \cos\sphericalangle\Big(c'(t), \begin{pmatrix} x(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix}\Big)\Big) \\
&= \frac{d}{dt}\Big\langle \begin{pmatrix} x'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \Big\rangle \\
&= \Big\langle \begin{pmatrix} x''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \Big\rangle + \Big\langle \begin{pmatrix} x'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \Big\rangle \\
&= \langle c''(t), \begin{pmatrix} x(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \rangle + \langle x'(t), x'(t)^\perp \rangle = 0 + 0,
\end{aligned}$$

da $c''(t) \in T_{c(t)}M$ und somit $c''(t) \perp (x(t)^\perp, 0)$ gilt. Folglich ist der behauptete Ausdruck konstant. □

57.5 Folgerung (Äquator auf Drehflächen). *Unter einem* ÄQUATOR *einer Drehfläche versteht man einen Breitenkreis der (lokal) maximalen Radius besitzt. Sei c eine Geodäte, welche den Äquator zum Zeitpunkt* 0 *im Winkel* γ_0 *schneidet. Dann oszilliert die Geodäte um den Äquator genau dann, wenn sie einen Breitenkreis mit Radius* $r(0)\cos\gamma_0$ *sowohl für ein* $t > 0$ *als auch ein* $t < 0$ *trifft.*

Beweis. Es sei $\varphi : (s, \theta) \mapsto (r(s)\cos\theta, r(s)\sin\theta, z(s))$ eine Parametrisierung von M wie in (54.1). Jeder Breitenkreis, dessen Radius ein kritischer Punkt ist (d.h. es gilt $r' = 0$), ist offensichtlich eine Geodäte. Insbesonders gilt das für einen Äquator. Sei nun $c(t) = \varphi(s(t), \theta(s))$ eine Bogenlängen-Parametrisierung einer Geodäte, $r(t) := r(s(t))$ und $\gamma(t) := \sphericalangle(c'(t), \text{Breitenkreis})$. Nach (57.4) ist der Ausdruck "$\cos\sphericalangle(\text{Geodäte,Breitenkreis})\cdot$

Radius” konstant, also ist $\frac{r(0)}{r(t)}\cos\gamma_0 = \cos\gamma(t) \le 1$. Nach (58.4) stimmen zwei Geodäten, die sich berühren, überein. Falls $\cos\gamma_0 = 0$ ist, so schneidet die Geodäte den Breitenkreis orthogonal, berührt also den Meridian (der nach (57.3.4) eine Geodäte ist), und stimmt somit mit ihm überein. Andernfalls ist $\langle x'(t), x(t)^\perp\rangle = r(t)\cos\gamma(t) = r(0)\cos\gamma_0 \ne 0$ und o.B.d.A. größer als 0. Es ist

$$\begin{aligned}\langle x'(t), x(t)^\perp\rangle &= \langle \frac{d}{dt}\Big(r(s(t))\begin{pmatrix}\cos(\theta(t))\\ \sin(\theta(t))\end{pmatrix}\Big), r(s(t))\begin{pmatrix}-\sin(\theta(t))\\ \cos(\theta(t))\end{pmatrix}\rangle\\ &= r(s(t))^2\,\frac{d}{dt}\theta(t).\end{aligned}$$

Wenn wir $1 = |c'(t)|^2 = |\varphi_s|^2\,(s')^2 + |\varphi_\theta|^2\,(s')^2 = (s')^2 + (r\,\theta')^2$ verwenden, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$(s')^2 = 1 - \Big(\frac{r(0)\cos\gamma_0}{r(s(t))^2}\Big)^2$$

Es wird $\gamma(t_0)$ genau dann 0, wenn $1 = \cos(\gamma(t_0)) = \frac{r(0)}{r(t_0)}\cos\gamma_0$ ist, d.h. $c(t_0)$ auf einem Breitenkreis mit Radius $r(t_0) = r(0)\,\cos\gamma_0$ liegt, und diesen wegen $\gamma(t_0) = 0$ folglich berührt, d.h. $r'(t_0) = 0$ da $r(t) \le r(0)\,\cos\gamma_0$. Falls dieser Radius ein kritischer Punkt ist, so ist dieser Breitenkreis eine Geodäte, und zwar nach (58.4) die einzige Geodäte, die ihm berührt, d.h. r ist konstant und $\gamma = 0$. Andernfalls ist $\frac{d}{ds}r(s) \ne 0$ und somit ist $s'(t) = 0$ wegen $0 = \frac{d}{dt}(r(s(t))) = \frac{d}{ds}r(s)\,\frac{d}{dt}s(t)$. Wegen $s' = 0$ und $\varphi_s \perp \varphi_\theta$ bedeutet

$$c'' = (s')^2\,\varphi_{s,s} + 2\,s'\,\theta'\,\varphi_{s,\theta} + (\theta')^2\,\varphi_{\theta,\theta} + s''\,\varphi_s + \theta''\,\varphi_\theta \perp \varphi_s,$$

daß $-(\theta')^2\,r\,r' + s'' = 0$. Also ist $s'' = (\theta')^2\,r\,r' \ne 0$ und somit nimmt s ein lokales Extremum bei t_0 an. Dies läßt sich direkter auch wie folgt zeigen: Falls eine Geodäte einen Breitenkreis zum Zeitpunkt t_0 berührt, so muß $t \mapsto s(t+t_0) - s(t_0)$ symmetrisch und $t \mapsto \theta(t+t_0) - \theta(t_0)$ schiefsymmetrisch sein: O.B.d.A. ist nämlich $t_0 = 0$ sowie $\theta(t_0) = 0$ und mit $c : t \mapsto \varphi(s(t), \theta(t))$ ist auch $t \mapsto \varphi(s(-t), -\theta(-t))$ eine Geodäte mit gleicher Ableitung bei t_0, da $s'(t_0) = 0$ ist. Nach (58.4) stimmen diese beiden Geodäten überein und, da φ injektiv ist, gelten die behaupteten Symmetrien. □

58. Exponentialabbildung

Wir haben gezeigt: c ist Geodäte $\Leftrightarrow\ \forall\, t : c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$, also genau dann, wenn folgende Differentialgleichung erfüllt ist:

$$c''(t) = \langle c''(t), \nu_{c(t)}\rangle\nu_{c(t)} = -\langle c'(t), L\,c'(t)\rangle\nu_{c(t)}.$$

Diese wollen wir nun in lokalen Koordinaten beschreiben. Dazu entwickeln wir die zweiten partiellen Ableitungen der Parametrisierung φ in der Basis $(\varphi_1, \dots, \varphi_m; \nu)$ von $\mathbb{R}^n$:

58.1 Bemerkung. Es sei M ein Fläche im $\mathbb{R}^3$ und E, F, G die Koeffizienten der 1-ten Fundamentalform, d.h.

$$\begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2}\\ g_{2,1} & g_{2,2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \begin{pmatrix} g^{1,1} & g^{1,2}\\ g^{2,1} & g^{2,2}\end{pmatrix} = \frac{1}{D^2}\begin{pmatrix} G & -F\\ -F & E\end{pmatrix},$$

wobei $D := \sqrt{E\,G - F^2}$. Die Christoffelsymbole 1-ter Ordnung haben dann folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i,j,k} &:= \frac{1}{2}\Big(\partial_i(g_{j,k}) + \partial_j(g_{i,k}) - \partial_k(g_{i,j})\Big)\\
\Gamma_{1,1,1} &:= \frac{1}{2}\,E_1\\
\Gamma_{1,2,1} &:= \frac{1}{2}\,E_2\\
\Gamma_{2,2,1} &:= \frac{1}{2}\,(2F_2 - G_1)\\
\Gamma_{1,1,2} &:= \frac{1}{2}\,(2F_1 - E_2)\\
\Gamma_{1,2,2} &:= \frac{1}{2}\,G_1\\
\Gamma_{2,2,2} &:= \frac{1}{2}\,G_2
\end{aligned}$$

Und für jene zweiter Ordnung gilt:

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{i,j} &:= \Gamma_{i,j,1}\,g^{1,k} + \Gamma_{i,j,2}\,g^{2,k}\\
\Gamma^1_{1,1} &:= \Gamma_{1,1,1}\,g^{1,1} + \Gamma_{1,1,2}\,g^{2,1}\\
&= \frac{E_1}{2}\,\frac{G}{D^2} + (F_1 - \frac{E_2}{2})\,\frac{-F}{D^2} = \frac{G\,E_1 - 2\,F\,F_1 + F\,E_2}{2\,D^2}\\
\Gamma^1_{1,2} &:= \Gamma_{1,2,1}\,g^{1,1} + \Gamma_{1,2,2}\,g^{2,1}\\
&= \frac{E_2}{2}\,\frac{G}{D^2} + \frac{G_1}{2}\,\frac{-F}{D^2} = \frac{G\,E_2 - F\,G_1}{2\,D^2}\\
\Gamma^1_{2,2} &:= \Gamma_{2,2,1}\,g^{1,1} + \Gamma_{2,2,2}\,g^{2,1}\\
&= (F_2 - \frac{G_1}{2})\,\frac{G}{D^2} + \frac{G_2}{2}\,\frac{-F}{D^2} = \frac{2\,G\,F_2 - G\,G_1 - F\,G_2}{2\,D^2}\\
\Gamma^2_{1,1} &:= \Gamma_{1,1,1}\,g^{1,2} + \Gamma_{1,1,2}\,g^{2,2}\\
&= \frac{E_1}{2}\,\frac{-F}{D^2} + (F_1 - \frac{E_2}{2})\,\frac{E}{D^2} = \frac{-F\,E_1 + 2\,E\,F_1 - E\,E_2}{2\,D^2}\\
\Gamma^2_{1,2} &:= \Gamma_{1,2,1}\,g^{1,2} + \Gamma_{1,2,2}\,g^{2,2}\\
&= \frac{E_2}{2}\,\frac{-F}{D^2} + \frac{G_1}{2}\,\frac{E}{D^2} = \frac{-F\,E_2 + E\,G_1}{2\,D^2}\\
\Gamma^2_{2,2} &:= \Gamma_{2,2,1}\,g^{1,2} + \Gamma_{2,2,2}\,g^{2,2}\\
&= (F_2 - \frac{G_1}{2})\,\frac{-F}{D^2} + \frac{G_2}{2}\,\frac{E}{D^2} = \frac{-2\,F\,F_2 + F\,G_1 + E\,G_2}{2\,D^2}
\end{aligned}$$

58.2 Ableitungsgleichungen für Flächen.
Die zweiten partiellen Ableitungen einer lokalen Parametrisierung φ besitzen folgende

Entwicklung in der Basis $(\varphi_1, \dots, \varphi_m, \nu)$*:*

$$\varphi_{i,j}(u) = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k(u)\varphi_k(u) - h_{i,j}(u)\nu_{\varphi(u)},$$

wobei $h_{i,j} := -\langle \varphi_{i,j}, \nu\rangle = \langle \varphi_i, L\,\varphi_j\rangle$ *und* $\Gamma_{i,j}^k$ *die entsprechend gewählten Koeffizienten sind, diese heißen auch* Christoffelsymbole der 2-ten Art.
Die Christoffelsymbole $\Gamma_{i,j}^k$ *der 2-ten Art können aus den* Christoffelsymbolen der 1-ten Art

$$\Gamma_{i,j,k} := \langle \varphi_{i,j}, \varphi_k\rangle = \tfrac{1}{2}(\partial_j g_{i,k} + \partial_i g_{k,j} - \partial_k g_{i,j})$$

wie folgt berechnet werden:

$$\Gamma_{i,j}^k = \sum_{l=1}^m \Gamma_{i,j,l}\, g^{l,k} \quad \textit{mit } (g^{l,k}) := (g_{l,k})^{-1} \textit{ und } g_{l,k} := \langle \varphi_l, \varphi_k\rangle.$$

Beweis. Um die Koeffizienten der Entwicklung von $\varphi_{i,j}$ zu berechnen, bilden wir zuerst das innere Produkt mit ν und erhalten $\langle \varphi_{i,j}, \nu\rangle = 0 - h_{i,j}\cdot 1$ für den Koeffizienten von ν. Indem wir das innere Produkt mit φ_l berechnen erhalten wir:

$$\Gamma_{i,j,l} := \langle \varphi_{i,j}, \varphi_l\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k(u)\varphi_k(u), \varphi_l(u)\right\rangle + 0 = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k g_{k,l}.$$

Durch Multiplikation mit der inversen Matrix $(g^{l,p})$ ergibt sich:

$$\sum_{l=1}^m \Gamma_{i,j,l}\, g^{l,p} = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k g_{k,l} g^{l,p} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k \delta_k^p = \Gamma_{i,j}^p.$$

Es gilt:

$$\partial_k g_{i,j} = \partial_k \langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = \langle \varphi_{i,k}, \varphi_j\rangle + \langle \varphi_i, \varphi_{j,k}\rangle.$$

Durch zyklisches Vertauschen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \partial_i g_{j,k} &= \langle \varphi_{j,i}, \varphi_k\rangle + \langle \varphi_j, \varphi_{k,i}\rangle \\ \partial_j g_{k,i} &= \langle \varphi_{k,j}, \varphi_i\rangle + \langle \varphi_k, \varphi_{i,j}\rangle. \end{aligned}$$

Die alternierende Summe dieser 3 Gleichungen ist

$$2\Gamma_{k,j,i} = 2\langle \varphi_{k,j}, \varphi_i\rangle = \partial_j g_{k,i} - \partial_i g_{j,k} + \partial_k g_{i,j}. \qquad \square$$

58.3 Die Differentialgleichung für Geodäten $c := \varphi \circ u$ mit lokaler Darstellung $u(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t))$ sieht in lokalen Koordinaten nun so aus:

$$c(t) = (\varphi \circ u)(t) \quad \Rightarrow \quad c'(t) = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \cdot \frac{du^i}{dt}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad c''(t) &= \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{du^i}{dt} \cdot \frac{du^j}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \cdot \frac{d^2 u^i}{dt^2} \right) \qquad (58.2) \\ &\in \sum_k \left(\sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k \frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} + \frac{d^2 u^k}{dt^2} \right) \varphi_k + \mathbb{R}\cdot \nu. \end{aligned}$$

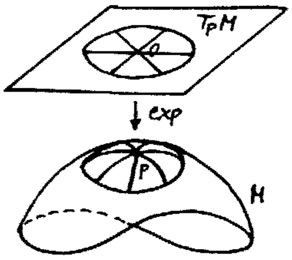
Also ist c eine Geodäte, d.h. $c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$ genau dann, wenn

$$\frac{d^2u^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^m \Gamma^k_{i,j} \frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0 \qquad \text{für } k = 1, \dots, m.$$

Dieses System gewöhnlicher Differentialgleichungen 2.ter Ordnung hat bei vorgegebenen Anfangsdaten $u^k(0)$ und $\frac{du^k}{dt}(0)$ lokal eine eindeutig bestimmte Lösung.

58.4 Lemma. Die Exponentialabbildung.
Zu jedem $x \in M$ und $\xi \in T_xM$ existiert eine eindeutige Geodäte $c : I \to M$ mit maximalen Definitionsintervall $I \subseteq \mathbb{R}$, mit konstanter skalarer Geschwindigkeit und Anfangsbedingung $c(0) = x$, $c'(0) = \xi$.

Ordnet man nun $\xi \in TM$ den Wert $c(1)$ der Geodäte c mit Anfangsbedingung ξ 1 zu, so nennt man das Ergebnis $\exp(\xi)$. *Die* Exponentialfunktion $\exp$ *ist auf einer offenen Umgebung des Nullschnitts M in TM definiert. Sie ist dort glatt, hat Werte in M und erfüllt: $exp_x(0_x) = x$ und $T_{0_x}(\exp_x) = \mathrm{id}_{T_xM}$, wobei* $\exp_x := \exp|_{T_xM} : T_xM \to M$. *Die Geodäte c mit Anfangswert ξ ist dann durch $c(t) = \exp(t\,xs)$ gegeben.*



Der Grund für die Bezeichnungsweise exp ist, daß für $M := S^1 \subset \mathbb{C}$ mit $TM = \{(x, t\,x^\perp) : |x| = 1,\, t \in \mathbb{R}\} \cong S^1 \times \mathbb{R}$ die Exponentialabbildung gegeben ist durch $\exp(x, t\,x^perp) = x\,e^{i\,t}$. Für allgemeine Liegruppen anstelle von S^1 siehe auch (67.6).

Beweis. Die lokale Formel aus (58.3) für die Geodätengleichung zeigt, daß exp durch eine gewöhnliche Differentialgleichung 2.ter Ordnung gegeben ist. Aus der glatten Abhängigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen von den Anfangsdaten folgt, daß die Exponentialfunktion auf einer offenen Umgebung von M in TM definiert und dort glatt ist.

Eine andere Möglichkeit dies zu sehen ohne dabei lokale Koordinaten zu verwenden, geht wie folgt:
Falls c eine Geodäte ist, so gilt $c''(t) = \lambda(t) \cdot \nu_{c(t)}$, wobei

$$\lambda(t) = \langle c''(t), \nu(c(t))\rangle = \langle c'(t), (\nu \circ c)'(t)\rangle = -\langle c', L \circ c'\rangle(t) = -K(c'(t)),$$
$$\text{d.h.: } c \text{ ist Geodäte } \Leftrightarrow c'' = -\langle c', (\nu \circ c)'\rangle(\nu \circ c).$$

Wählen wir eine lokale Gleichung f für M, dann ist $\nu = \frac{1}{|\operatorname{Grad} f|} \operatorname{Grad} f$ und macht nicht nur auf M sondern auch lokal im umgebenden $\mathbb{R}^n$ Sinn. Somit ist die obige Geodätengleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung 2.ter Ordnung am $\mathbb{R}^n$, besitzt also bei vorgegebener Anfangsbedingung für $c(0)$ und $c'(0)$ eine eindeutige Lösung $c : I \to \mathbb{R}^n$, welche glatt von den Anfangsdaten abhängt.
Es ist noch zu zeigen, daß die Kurve c in M bleibt. Da für eine Lösung $\langle c', \nu \circ c\rangle' =$

$\langle c'', \nu\circ c\rangle + \langle c', (\nu\circ c)'\rangle = 0$ gilt, ist $\langle c', \nu\circ c\rangle$ konstant und zwar gleich $\langle c'(0), \nu_{c(0)}\rangle = \langle \xi, \nu_x\rangle = 0$. Somit gilt:

$$(f\circ c)'(t) = \langle \mathrm{Grad}_{c(t)} f, c'(t)\rangle = |\,\mathrm{Grad}_{c(t)} f|\cdot\langle \nu_{c(t)}, c'(t)\rangle = 0,$$

Es ist also $f\circ c$ konstant gleich $f(c(0)) = f(x) = 0$, d.h. $c(t)\in f^{-1}(0) = M$.

Falls c_ξ die Geodäte mit Anfangswert $c'(0) = \xi$ bezeichnet, so ist für $t\in\mathbb{R}$ die Kurve $s\mapsto c_\xi(t\,s)$ die Geodäte mit Anfangswert $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} c_\xi(t\,s) = t\,c_\xi'(0) = t\,\xi$ also gilt folgende Homogenitätsrelation

$$c_\xi(t\,s) = c_{t\,\xi}(s).$$

Es ist somit $c_\xi(t) = c_{t\,\xi}(1) = \exp(t\,\xi)$ und damit $\exp(0_x) = c_{0_x}(0) = x$ und $T_{0_x}\exp_x\cdot\xi = \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp_x(t\,xs) = \frac{d}{dt}\Big|_0 c_\xi(t) = \xi$. □

58.5 Geodätische Polarkoordinaten

Wir können nun die Existenz von lokalen Koordinaten φ auf jeder Riemann-Fläche zeigen, welche $E = 1$ und $F = 0$ erfüllen.

Seien dazu Polarkoordinaten in T_xM gewählt. Wegen $T_{0_x}exp_x = \mathrm{id}_{T_xM}$, ist $\exp_x$ ein lokaler Diffeomorphismus von T_xM nach M und wir erhalten eine Parametrisierung

$$\varphi(r,\theta) := \exp_x(r(\cos\theta\cdot v + \sin\theta\cdot v^\perp))\quad\text{mit } \varphi(0,\theta) = p,$$

wobei v ein Einheitsvektor in T_xM ist.

Da $t\mapsto \exp(tw)$ die Geodäte mit Anfangswert $w\in T_xM$ ist, ist $r\mapsto\varphi(r,\theta)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte mit Anfangsrichtung $v_\theta := \cos\theta\cdot v + \sin\theta\cdot v^\perp$, $|v_\theta| = 1$, eine sogenannte RADIALE GEODÄTE. Also gilt:

$$\left.\begin{aligned} E = |\varphi_r|^2 = |v_\theta|^2 = 1 \quad&\Rightarrow\quad \langle\varphi_r, \varphi_{r,\theta}\rangle = 0\\ \varphi_{r,r}\perp TM \quad&\Rightarrow\quad \langle\varphi_{r,r}, \varphi_\theta\rangle = 0\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial r}\langle\varphi_r,\varphi_\theta\rangle = \langle\varphi_{r,r},\varphi_\theta\rangle + \langle\varphi_r,\varphi_{\theta,r}\rangle = 0.$$

Außerdem ist $\varphi(0,\theta) = x$ und somit $\varphi_\theta(0,\theta) = 0$, also $F = \langle\varphi_r(r,\theta), \varphi_\theta(r,\theta)\rangle = \langle\varphi_r(0,\theta),\varphi_\theta(0,\theta)\rangle = 0$. Schließlich ist $G = \langle\varphi_\theta,\varphi_\theta\rangle \ge 0$.

Die geschlossenen Kurven $\theta\mapsto\varphi(r,\theta)$ nennt man GEODÄTISCHE KREISE. Diese sind im allgemeinen keine Geodäten!

58.6 Satz. Geodätische Parallelkoordinaten.
Die Koeffizienten einer Riemann-Metrik haben genau dann lokal die Gestalt $E = 1$, $F = 0$ und $G > 0$, wenn $t\mapsto\varphi(t,s)$ nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäten sind, welche die Kurven $s\mapsto\varphi(t,s)$ orthogonal schneiden. Insbesondere ist also die Länge ihrer Segmente von $s = s_1$ bis $s = s_2$ gerade $s_2 - s_1$, und somit unabhängig von s.

Zu jeder Kurve $c:\mathbb{R}\to M$ existieren längs c eindeutig bestimmte lokale Koordinaten φ mit obigen Eigenschaften und $\varphi(0,s) = c(s)$.

Für einen geodätischen Kreis c sind das gerade die geodätischen Polarkoordinaten aus (58.5).

Beweis. Zuerst die Existenz: Dafür wählen wir ein Einheitsvektorfeld ξ längs c, welches normal steht auf c' und definieren eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch $\varphi(t,s) := \exp_{c(s)}(t\xi(s))$. Dann ist $\varphi(0,s) = c(s)$ und $t \mapsto \varphi(t,s)$ ist die bogenlängenparametrisierte Geodäte mit Anfangsvektor $\xi(s)$. Also gilt: $\varphi_s(0,s) = c'(s)$ sowie $\varphi_t(0,s) = \xi(s)$ und somit ist φ ein lokaler Diffeomorphismus.

Da $t \mapsto \varphi(t,s)$ Geodäten sind, ist $E = g_{1,1} = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = 1$ und

$$\tfrac{d^2u^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{i,j} \tfrac{du^i}{dt} \tfrac{du^j}{dt} = 0,$$

i.e. $0 = \Gamma^1_{1,1}$ und $0 = \Gamma^2_{1,1}$. Also wegen $g_{1,1} = 1$ auch

$$\begin{aligned}
0 = \Gamma^1_{1,1} &= \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \Gamma_{1,1,i} g^{i,1} = \tfrac{1}{2} \sum_i \big(\tfrac{d}{du^1} g_{i,1} + \tfrac{d}{du^1} g_{1,i} - \tfrac{d}{du^i} g_{1,1}\big) g^{i,1} \\
&= \tfrac{d}{du^1} g_{1,2} g^{2,1} = \big(\tfrac{d}{du^1} g_{1,2}\big)\big(-g_{1,2} \tfrac{1}{\det g_{i,j}}\big) = -\tfrac{1}{2} \tfrac{1}{\det g_{i,j}} \tfrac{d}{du^1} (g_{1,2})^2 \\
\Rightarrow \qquad 0 &= \tfrac{d}{du^1} (g_{1,2})^2
\end{aligned}$$

Wegen $g_{1,2}(0, u^1) = 0$ also $F = g_{1,2} = 0$.

Ist umgekehrt $E = 1$ und $F = 0$, so ist nach (59.2) $\Gamma^1_{1,1} = \Gamma^2_{1,1} = 0$. Damit sind die Kurven mit konstantem u^2 bogenlängenparametrisierte Geodäten, welche die Kurven mit konstantem u^1 orthogonal schneiden. □

58.7 Lemma. *Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to M$ eine Parametrisierung nach geodätischen Parallelkoordinaten, dann ist jede Geodäte $t \mapsto \varphi(t,s)$ für $t \in [t_1, t_2]$ kürzer als jede Kurve $\varphi \circ u$ mit einer Kurve u in U welche (t_1, s) mit (t_2, s) verbindet.*

Dieses Resultat liefert also, daß gewisse Geodäten unter allen hinreichend nahen Kurven minimal sind. Global muß das nicht stimmen, wie ein Bogen eines Großkreises auf der Sphäre von Länge größer als π zeigt.

Beweis. Sei $c_0(t) := \varphi(t,s)$ und $c_1(r) := \varphi(u(r))$, dann gilt

$$\begin{aligned}
L(c_1) &= \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{(\tfrac{du^1}{dr})^2 + (G \tfrac{du^2}{dr})^2} dr \geq \\
&\geq \int_{r_1}^{r_2} |\tfrac{du^1}{dr}| dr = u^1(r_2) - u^1(r_1) = t_1 - t_0 = L(c_0) \qquad \square
\end{aligned}$$

59. Integralsatz von Gauß-Bonnet

Es gelten folgende geometrische Formeln für die Gauß-Krümmung:

59.1 Satz (Gauß-Krümmung als Störung der Maße von Kreisen). *Seien geodätische Polarkoordinaten φ um $x \in M$ gewählt. Mit $L(r)$ bezeichnen wir die Länge bzw. mit $A(r)$ die Fläche des Inneren der geodätischen Kreise $\theta \mapsto \varphi(r,\theta)$ so gilt:*

1. $K_x = \frac{3}{\pi} \lim_{r \searrow 0} \frac{2r\pi - L(r)}{r^3}$ [BertrandPuiseaux1848]
2. $K_x = \frac{12}{\pi} \lim_{r \searrow 0} \frac{r^2\pi - A(r)}{r^4}$ [Diquet1848]

Die Gauß-Krümmung mißt also infinitesimal um wieviel der Umfang, beziehungsweise die Fläche eines geodätischen Kreises im Vergleich zu einem Euklidischen Kreis zu klein ist.

Beweis. Wir wissen bereits folgendes über die Funktion $\sqrt{G}$: Die Funktion $G = |\varphi_\theta|^2$ ist glatt und verschwindet nur für $r = 0$. Also ist auch $\sqrt{G}$ glatt für $r \neq 0$ aber nicht notwendigerweise für $t = 0$. Wir müssen aber das Verhalten bei 0 studieren. Dazu verwenden wir die Jacobi-Gleichung $K\sqrt{G} + \big(\frac{\partial}{\partial r}\big)^2 \sqrt{G} = 0$ aus (53.9).
Wir behaupten zunächst: $\lim_{r\searrow 0} \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}(r,\theta) = 1$. Sei dazu $v_\theta := \cos\theta \cdot v + \sin\theta \cdot v^\perp$. Dann erhalten wir durch partielle Integration der Funktion $r \mapsto \exp_x(rv_\theta) = \varphi(r,\theta)$ (bzw. Taylorformel mit Integralrestglied):

$$\begin{aligned}
f(x) - f(0) &= \int_0^1 (1-t)^0 f'(tx)(x)dt = \qquad \text{(part.Int.)}\\
&= -[(1-t)^1 f'(tx)(x)]_{t=0}^1 + \int_0^1 (1-t) f''(tx)(x,x)dt\\
&= f'(0)(x) + \int_0^1 (1-t) f''(tx)(x,x)dt\\
\varphi(r,\theta) &= \exp_x(rv_\theta)\\
&= \underbrace{\exp_x(0)}_{=x} + \underbrace{\exp_x'(0)(rv_\theta)}_{=rv_\theta} + \int_0^1 (1-t)\exp_x''(trv_\theta)(rv_\theta)(rv_\theta)dt.
\end{aligned}$$

Durch partielles Differenzieren nach θ ergibt sich:

$$\varphi_\theta(r,\theta) = r\tfrac{\partial}{\partial\theta} v_\theta + r^2 \cdot \underbrace{\int_0^1 (1-t)\tfrac{\partial}{\partial\theta} exp_x''(trv_\theta)(v_\theta, v_\theta)dt}_{\text{lokal beschränkt}}.$$

Also gilt für die rechtsseitige Ableitung bei 0:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial r}\sqrt{G}(0,\theta) &= \lim_{r\searrow 0} \frac{\sqrt{G}(r,\theta) - \sqrt{G}(0,\theta)}{r}\\
&= \lim_{r\searrow 0} \frac{|\varphi_\theta(r,\theta)| - 0}{r} = |\frac{\partial}{\partial\theta} v_\theta| = 1.
\end{aligned}$$

Aus der Jacobi-Gleichung folgt, daß $\big(\frac{\partial}{\partial r}\big)^2 \sqrt{G}(0,\theta)$ existiert und 0 ist. Machen wir nun den Potenzreihen-Ansatz für $\sqrt{G}$:

$$\sqrt{G} = a_0 + a_1 r + \tfrac{a_2}{2} r^2 + \tfrac{a_3}{6} r^3 + o(r^3),$$

so erhalten wir aus der Jacobi-Differentialgleichung $a_2 + K\,a_0 = 0$, $a_3 + K\,a_1 = 0$, und wegen $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ somit:

$$\sqrt{G} = r - \tfrac{K(x)}{6} r^3 + o(r^3).$$

Exakter ist die folgende Argumentation: Durch partielles Differenzieren der Jacobi-Gleichung nach r erhalten wir:

$$\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial r^3}(r,\theta) = -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\,K - \sqrt{G}\,\frac{\partial K}{\partial r}.$$

Bilden wir den Limes für $r \searrow 0$ so erhalten wir: $\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial r^3}(0,\theta) = -1\,K(x)+0$ gleichmäßig in θ.

Als nächstes behaupten wir

$$\frac{\sqrt{G}(r,\theta) - r + \frac{K(x)}{6}r^3}{r^3} \to 0 \text{ für } r \searrow 0 \quad \text{gleichmäßig in } \theta$$

Wegen des allgemeinen Mittelwertsatzes

$$\frac{f(r,\theta)-f(0,\theta)}{g(r,\theta)-g(0,\theta)} = \frac{f_r(\lambda(r,\theta),\theta)}{g_r(\lambda(r,\theta),\theta)}$$

gilt die Regel von l'Hospital gleichmäßig in θ, die wir nun 3mal anwenden:

$$\begin{aligned}
\lim_{r\searrow 0} \frac{\sqrt{G}(r,\theta) - r + \frac{K(x)}{6}r^3}{r^3} &= \lim_{r\searrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{G} - 1 + \frac{K(x)}{2}r^2}{3r^2}\\
&= \lim_{r\searrow 0} \frac{\frac{\partial^2}{\partial r^2}\sqrt{G} + K(x)r}{6r}\\
&= \lim_{r\searrow 0} \frac{\frac{\partial^3}{\partial r^3}\sqrt{G} + K(x)}{6}\\
&= 0 \qquad \text{gleichmäßig in } \theta
\end{aligned}$$

Zur Berechnung des Umfangs:

$$\begin{aligned}
L(r) &= \int_0^{2\pi} |\varphi_\theta| = \int_0^{2\pi} \sqrt{G}d\theta\\
&= \int_0^{2\pi} (r - \frac{K(x)}{6}r^3)d\theta + \int_0^{2\pi} o(r^3)d\theta\\
&= 2\pi(r - \frac{K(x)}{6}r^3) + o(r^3).
\end{aligned}$$

Also ist $K(x) = \frac{3}{\pi}\frac{2r\pi - L(r)}{r^3} + \frac{o(r^3)}{r^3}$.

Schließlich gilt für die Fläche:

$$\begin{aligned}
A(r) &= \int_{r\mathbb{D}} \mathrm{vol} = \int_0^{2\pi}\int_0^r \sqrt{G}(\rho,\theta)d\rho\,d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^r \left(\rho - \frac{K(x)}{6}\rho^3\right)d\rho\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^r o(\rho^3)d\rho\,d\theta\\
&= 2\pi\left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{K(x)}{24}r^4\right) + o(r^4)
\end{aligned}$$

Also ist $K(x) = \frac{12}{\pi}\frac{r^2\pi - A(r)}{r^4} + o(r^4)$. □

59.2 Christoffel-Symbole in geodätischen Koordinaten

Wir wählen eine geodätische Parametrisierung φ auf M, d.h. $E = 1$ und $F = 0$, mit zugehörigen lokalen Koordinaten $(r, \theta) = (u^1, u^2)$. Dann gilt für die Koeffizienten der Riemann-Metrik (siehe auch (58.1)):

$$g_{1,1} = E = 1 \qquad g^{1,1} = 1 \tag{12}$$

$$g_{1,2} = g_{2,1} = F = 0 \qquad g^{1,2} = g^{2,1} = 0 \tag{13}$$

$$g_{2,2} = G > 0 \qquad g^{2,2} = \frac{1}{G}. \tag{14}$$

Für die Christoffelsymbole erster Art (58.2) ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,2,2} &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial G}{\partial \theta} \\ \Gamma_{1,2,2} = \Gamma_{2,1,2} &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial G}{\partial r} \\ \Gamma_{2,2,1} &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial G}{\partial r} \\ \Gamma_{i,j,k} &= 0 \qquad \text{für alle anderen } i,\ j,\ k. \end{aligned}$$

Für jene zweiter Art:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{2,2} &= -\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial G}{\partial r} \\ \Gamma^2_{1,2} = \Gamma^2_{2,1} &= \tfrac{1}{2G}\tfrac{\partial G}{\partial r} \\ \Gamma^2_{2,2} &= -\tfrac{1}{2G}\tfrac{\partial G}{\partial \theta} \\ \Gamma^k_{i,j} &= 0 \qquad \text{für alle anderen } i,\ j,\ k. \end{aligned}$$

Eine Geodäte muß also folgende Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2u^1}{dt^2} + \Gamma^1_{2,2}\tfrac{du^2}{dt}\tfrac{du^2}{dt} &= 0 \\ \tfrac{d^2u^2}{dt^2} + 2\Gamma^2_{1,2}\tfrac{du^1}{dt}\tfrac{du^2}{dt} + \Gamma^2_{2,2}\tfrac{du^2}{dt}\tfrac{du^2}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2u^1}{dt^2} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial G}{\partial r}\left(\tfrac{du^2}{dt}\right)^2 &= 0 \\ \tfrac{d^2u^2}{dt^2} + \tfrac{1}{G}\tfrac{\partial G}{\partial r}\tfrac{du^1}{dt}\tfrac{du^2}{dt} + \tfrac{1}{2G}\tfrac{\partial G}{\partial \theta}\left(\tfrac{du^2}{dt}\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

59.3 Geodätische Krümmung, ein Spezialfall

Seien $(u^1, u^2) = (r, \theta)$ lokale geodätische Koordinaten wie in (59.2). Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte $t \mapsto u(t) = (u^1(t), u^2(t)) = (r(t), \theta(t))$ sei der Winkel zwischen $u'(t)$ und $\frac{\partial}{\partial r}$ mit $\Theta(t)$ bezeichnet, i.e.

$$\begin{aligned} \cos\Theta(t) &= \langle u'(t), \tfrac{\partial}{\partial r}\rangle \\ &= \left\langle \tfrac{dr(t)}{dt}\tfrac{\partial}{\partial r} + \tfrac{d\theta(t)}{dt}\tfrac{\partial}{\partial \theta},\ \ \tfrac{\partial}{\partial r}\right\rangle = \tfrac{dr(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial G}{\partial r}\left(\tfrac{du^2}{dt}\right)^2 = \tfrac{d^2u^1}{dt^2} = \tfrac{d}{dt}\cos\Theta(t) = -\sin\Theta(t)\tfrac{d\Theta(t)}{dt}.$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}\sin\Theta(t) &= \operatorname{vol}(\tfrac{\partial}{\partial r}, u'(t))\\ &= \sqrt{G}\,(dr\wedge d\theta)(\tfrac{\partial}{\partial r}, \tfrac{dr(t)}{dt}\tfrac{\partial}{\partial r} + \tfrac{d\theta(t)}{dt}\tfrac{\partial}{\partial \theta}) = \sqrt{G}\tfrac{d\theta}{dt} = \sqrt{G}\tfrac{du^2}{dt}.\end{aligned}$$

Schlußendlich erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial G}{\partial r}\left(\tfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\sin\Theta(t)\,\tfrac{d\Theta}{dt} = -\sqrt{G}\tfrac{d\theta}{dt}\tfrac{d\Theta}{dt},\ \text{d.h. } \tfrac{d\Theta}{dt} = -\tfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\tfrac{d\theta}{dt}$$

59.4 Theorema elegantissimum von Gauß.
Sei Δ ein geodätisches Dreieck in M mit Innenwinkeln α, β und γ, d.h. ein Dreieck dessen Seiten Geodäten sind, dann gilt:

$$\int_\Delta K\ \operatorname{vol}_M = \alpha+\beta+\gamma-\pi.$$

Insbesondere liefert das für die Ebene den Satz, daß die Winkelsumme im Dreieck 180 Grad (d.h. π) ist.

Beweis. Wir setzen vorerst voraus, daß das geodätische Dreieck ganz im Kartenbereich für geodätische Polarkoordinaten φ um die Ecke C enthalten ist.

Die beiden Seiten a und b entsprechen in Polarkoordinaten zwei Geraden durch 0. Und wir können die 0-Richtung so wählen, daß sie die Tangente an die Seite b ist. Die Seite c läßt sich in Polarkoordinaten dann durch eine Gleichung der Form $r = r(\theta)$ mit $\theta\in[0,\gamma]$ beschreiben. Sei $\Theta(\theta)$ der Winkel zwischen $\frac{\partial}{\partial r}$ und der Seite c. Klarerweise ist $\Theta(0) = \pi-\alpha$ und $\Theta(\gamma) = \beta$. Also gilt:

$$\begin{aligned}\int_\Delta K\ \operatorname{vol}_M &= \int_{\theta^{-1}(\Delta)} \theta^*(K\ \operatorname{vol}_M) = && \text{wegen (53.9)}\\ &= \int_{\theta^{-1}(\Delta)} -\tfrac{1}{\sqrt{G}}\tfrac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}\sqrt{G}\,dr\wedge d\theta\\ &= \int_0^\gamma\int_0^r -\tfrac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}(r,\theta)\,dr\,d\theta = && \text{wegen (53.9), siehe auch (60.1)}\\ &= \int_0^\gamma 1-\tfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}(r(\theta),\theta)\,d\theta = && \text{wegen (59.2)}\\ &= \int_0^\gamma 1+\tfrac{d\Theta}{d\theta}(\theta)\,d\theta = \gamma+\Theta(\gamma)-\Theta(0) = \gamma+\beta-(\pi-\alpha).\end{aligned}$$

Für ein allgemeines geodätisches Dreieck folgt das Resultat, durch Unterteilen in kleinere geodätische Dreiecke: Denn addiert man die Resultate für die Teildreiecke, so erhält man auf der linken Seite $\int_\Delta K\ \operatorname{vol}_M$. Die Summe aller Winkel ist die Summe der Winkel an den ursprünglichen Ecken plus π mal die Anzahl der übrigen Randecken plus 2π mal die Anzahl der inneren Ecken. Davon muß man noch π mal die Anzahl der Teilungs-Dreiecke abziehen. Da jeder weitere innere Punkt zwei weitere Dreiecke, und jeder zusätzliche Randpunkt ein weiters Dreieck hinzufügt, gilt: Summe der Randpunkte plus 2 mal Summe der Inneren Punkte ist Anzahl der Dreiecke minus 1. Somit ergibt diese Kombination von π's gerade $-\pi$ und die Formel gilt auch im allgemeinen Fall. □

Seien A, B und C die Ecken des geodätischen Dreiecks, a, b, c die Längen der Seiten und seien $\bar\alpha$, $\bar\beta$ und $\bar\gamma$ die Winkel des Euklidischen Dreiecks mit den Seiten a, b, c so gilt:

$$\alpha - \bar{\alpha} = \frac{\mathrm{vol}(\Delta)}{3} K + o\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

und analog für die anderen Winkel, siehe [**46**, S.387].

59.5 Folgerung. Globale Version von Gauß-Bonnet.
Sei M eine kompakte orientierte Riemann-Fläche so gilt:

$$\int_M K\ \mathrm{vol}_M = 2\,\pi\,\chi(M).$$

Beweis. Wir zerlegen die Fläche in lauter kleine geodätische Dreiecke. Dann gilt für die Euler-Charakteristik nach (44.5.9):

$$\chi(M) = \#\mathrm{Ecken} - \#\mathrm{Kanten} + \#\mathrm{Flächen}.$$

Da jede Kante zu genau zwei Flächen gehört und jede Fläche durch genau 3 Kanten berandet ist, gilt

$$2 \cdot \#\mathrm{Kanten} = 3 \cdot \#\mathrm{Flächen}$$

und somit ist

$$\chi(M) = \#\mathrm{Ecken} - \frac{1}{2} \cdot \#\mathrm{Flächen}.$$

Auf der anderen Seite gilt:

$$\begin{aligned}\int_M K\ \mathrm{vol}_M &= \sum_\Delta \int_\Delta K\ \mathrm{vol}_M \\ &= \text{Summe aller Innen-Winkel} - \pi \cdot \text{Anzahl der } \Delta \\ &= 2\,\pi \cdot \text{Anzahl der Ecken} - \pi \cdot \text{Anzahl der Flächen} \\ &= 2\,\pi\,\chi(M). \qquad \square\end{aligned}$$

Falls K konstant und negativ ist, so gilt $\mathrm{vol}(M) = 4\pi\frac{1}{K^2}(1-g)$, da dann $\chi(M) = 2\,(1-g)$ für das Geschlecht g gilt.

59.6 Folgerung. *Sei M eine kompakte Riemann-Fläche, dann gilt:*

1. *Es gibt Punkte $p \in M$ mit $\mathrm{sgn}(K(p)) = \mathrm{sgn}(\chi(M))$.*
2. *Ist $K \geq 0$ aber nicht konstant 0, so ist $\chi(M) = 2$, d.h. M ist diffeomorph zur Sphäre S^2 oder zur projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$.*
3. *Ist $K = 0$, so ist $\chi(M) = 0$, d.h. M ist diffeomorph zum Torus oder zur Kleinschen Flasche.*
4. *Ist $K \leq 0$ aber nicht konstant 0, so ist $\chi(M) < 0$, d.h. M ist diffeomorph zu einer Sphäre mit mindestens 2 Henkeln oder mindestens 3 Möbiusbändern.*

Beweis. Ist M nicht orientiert, so geht man zur Orientierungsüberlagerung über. Die Eulercharakteristik können wir aus (59.5) ablesen. Die zweiten Teile der Aussagen folgen dann aus den Klassifizierungssatz für kompakte orientierbare Flächen, als Sphären mit $g \geq 0$ Henkeln (wobei $\chi(M) = 2\,(1-g)$ für das Geschlecht g gilt), und aus jenen für nicht orientierbare Flächen, als Sphären an denen $g > 0$ Möbiusbänder geklebt sind (wobei $\chi(M) = 2 - g$ für das Geschlecht g gilt). $\square$

Wir wollen die Integral-Formel von Gauß-Bonnet nun auf Flächen mit nicht geodätischem Rand verallgemeinern.

59.7 Bemerkung

Wir wählen geodätische Koordinaten φ auf M, d.h. $E = 1$ und $F = 0$. Somit ist $e_1 := \varphi_1$, $e_2 := \frac{1}{\sqrt{G}}\varphi_2$ eine Orthonormalbasis. Sei $t \mapsto u(t)$ die lokale Darstellung einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve c. Sei τ der Einheits-Tangentialvektor und ξ ein Tangentialvektor von M, welcher normal auf τ steht. Sei schließlich $K_g(t)$ die geodätische Krümmung $K_g(t) := \langle c''(t), \xi(t)\rangle$, vgl. (55.3). Beachte, daß $K_g = 0$ genau dann gilt, wenn $c''(t) \perp T_{c(t)}M$ ist, d.h. c eine Geodäte ist.

Lemma. *Es existiert eine bis auf $2\pi\mathbb{Z}$ eindeutige Funktion $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\tau(t) = \cos\Theta(t)\, e_1(u(t)) + \sin\Theta(t)\, e_2(u(t))$ und es gilt:*

$$K_g(t) = \Theta'(t) + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u^1}\frac{du^2}{dt}.$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der entsprechenden Formel $K(s) = \Theta'(s)$ für Kurven in der Ebene.

Beweis. Wie in (3.9) ergibt sich die Existenz und Eindeutigkeit der Funktion Θ. Dann gilt

$$\xi(t) = -sin(\Theta(t))e_1(u(t)) + \cos(\Theta(t))e_2(u(t)).$$

Aus $g(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$ folgt: $g(\frac{d}{dt}e_i, e_j)+g(e_i, \frac{d}{dt}e_j) = 0$. Setzen wir nun die Darstellungen für $\tau' = c''$ und für ξ in der Formel für die geodätische Krümmung ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} K_g(t) &= \Big\langle \Theta'(t)\xi(t) + \cos\Theta(t)\tfrac{d}{dt}e_1(u(t)) + \sin\Theta(t)\tfrac{d}{dt}e_2(u(t)), \xi(t)\Big\rangle \\ &= \Theta'\,\langle \xi, xs\rangle + \cos^2\Theta\langle \tfrac{d}{dt}e_1, e_2\rangle - \sin^2\Theta\langle \tfrac{d}{dt}e_2, e_a\rangle + \\ &\qquad + \sin\Theta\cos\Theta(\langle \tfrac{d}{dt}e_2, e_2\rangle - \langle \tfrac{d}{dt}e_1, e_1\rangle) \\ &= \Theta'(t) + \Big\langle \tfrac{d}{dt}e_1(u(t)), e_2(u(t))\Big\rangle. \end{aligned}$$

und weiters:

$$\begin{aligned} \big\langle \tfrac{d}{dt}e_1, e_2\big\rangle &= \Big\langle \varphi_{1,1}\tfrac{du^1}{dt} + \varphi_{1,2}\tfrac{du^2}{dt}, \tfrac{1}{\sqrt{G}}\varphi_2\Big\rangle \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{G}}\Big(\Gamma_{1,1,2}\tfrac{du^1}{dt} + \Gamma_{1,2,2}\tfrac{du^2}{dt}\Big) = \tfrac{1}{2\sqrt{G}}\tfrac{\partial G}{\partial r}\tfrac{du^2}{dt} = \tfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\tfrac{du^2}{dt} \end{aligned}$$

und damit

$$K_g(t) = \Theta'(t) + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u^1}\frac{du^2}{dt}. \qquad \square$$

59.8 Satz. Gauß-Bonnet für Polygone.

Sei $\varphi : U \to M$ eine Karte von M und sei P ein Polygon in U und α_i die Außenwinkel von $\varphi(P)$. Dann gilt:

$$\int_{\varphi(P)} K\ \mathrm{vol}_M + \int_{\varphi(\partial P)} K_g + \sum_i \alpha_i = 2\pi.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, daß sich ganz $\varphi(P)$ durch geodätische Polarkoordinaten parametrisieren läßt. Es gilt dann

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2} = \frac{1}{\sqrt{G}}\Big(\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{G}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial\theta}\,0\Big) = \operatorname{div}\xi,$$

wobei $\xi := (-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r})\frac{\partial}{\partial r} + 0\frac{\partial}{\partial\theta}$. Also gilt nach dem Greenschen Satz:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(P)} K \operatorname{vol}_M &= \int_{\varphi(P)} \operatorname{div}\xi \operatorname{vol}_M\\ &= \int_{\varphi(\partial P)} \langle \xi, \nu_{\varphi(\partial P)}\rangle \operatorname{vol}_{\varphi(\partial P)}\\ &= \int_{\varphi(\partial P)} \sqrt{G}\,\xi^r d\theta - \sqrt{G}\,\xi^\theta dr\\ &= -\int_{\varphi(\partial P)} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r} d\theta.\end{aligned}$$

Verwenden wir nun die Formel aus dem Lemma in (59.7) für die geodätische Krümmung der Randkurve, so erhalten wir für jede Seite I des Polygons:

$$-\int_{\varphi(I)} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r} d\theta = \int_I \Theta'(t)dt - \int_I K_g(t)dt.$$

Wegen des Umlaufsatzes in der Ebene gilt im Falle der Euklidischen Metrik $G = 1$:

$$\sum_i \Big(\int_{I_i} \Theta'(t)dt + \alpha_i\Big) = 2\pi.$$

Eine allgemeine Riemann-Metrik können wir durch $G^s := s + (1-s)G$ affin mit der Euklidischen Metrik verbinden, und erhalten analog die Funktion Θ^s und die Winkel α_i^s, und diese hängen stetig von s ab. Da aber

$$\sum_i \Big(\int_{I_i} (\Theta^s)' + \alpha_i^s\Big) = \sum \Big(\Theta^s(\max I_i) - \Theta^s(\min I_i) + \alpha_i^s\Big) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

gilt, muß dieser Ausdruck konstant in s sein, und stimmt somit überall mit seinem Wert 2π für $s = 1$ überein.

Liegt das Polygon nicht gänzlich in einer Karte, so unterteilt man es fein genug und wendet das Resultat für die einzelnen Teile an. Die Summe der Integrale über innere Kanten fällt weg, da diese genau zweimal und zwar mit entgegengesetzter Orientierung durchlaufen werden. Die Außenwinkel schreiben wir als π minus Innenwinkel, und erhalten für die Summe der Außenwinkel: Die Summe der Innenwinkel an den Randecken plus 2π mal die Anzahl E^0 der inneren Ecken, vermindert um 2π mal die Anzahl K^0 der inneren Kanten, plus π mal die Anzahl der Randkanten. Da genauso viele Randecken wie Randkanten existieren, d.h. $K - K^0 = E - E^0$ ist, und die Summe der 2π auf der rechten Seite gerade $2\pi F$ ist, folgt so die allgemeine Formel. □

60. Flächen konstanter Krümmung

60.1 Satz von Minding. *Zwei Riemann-Flächen gleicher konstanter Gauß-Krümmung sind lokal isometrisch.*

Beweis. Wir wählen mittels (58.5) geodätische Polarkoordinaten in Punkten $p \in M$ und $\overline{p} \in \overline{M}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} G = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle, &\quad \overline{G} = \langle \bar\varphi_\theta, \bar\varphi_\theta \rangle, \\ G(0,\theta) = 0, &\quad \overline{G}(0,\theta) = 0, \\ \tfrac{\partial}{\partial r}\Big|_{r=0} \sqrt{G}(r,\theta) = 1, &\quad \tfrac{\partial}{\partial r}\Big|_{r=0} \sqrt{\overline{G}}(r,\theta) = 1. \end{aligned}$$

Sowohl $\sqrt{G}(.,\theta)$ als auch $\sqrt{\overline{G}}(.,\theta)$ sind Lösungen der Jacobi-Gleichung (53.9)

$$\tfrac{\partial^2}{\partial r^2} x(r) = -K \cdot x(r).$$

Eine solche ist durch Vorgabe von $x(0) = 0$ und $x'(0) = 1$ eindeutig bestimmt. Also haben die Riemann-Metriken in geodätischen Polarkoordinaten die gleichen Koeffizienten, und somit sind die Flächen lokal isometrisch.

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[d, "\exp"', "\cong"] & \mathbb{R}^2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dl, "\varphi"] \arrow[dr, "\overline{\varphi}"'] & T_{\overline{p}}\overline{M} \arrow[d, "\cong"', "\overline{\exp}"] \\ M \arrow[rr, dotted, "\cong"'] & & \overline{M} \end{tikzcd}$$

□

Wir versuchen nun eine globale Version obigen Satzes zu geben. Ganz allgemein kann das aber nicht gelten. Z.B. ist die Ebene und die Kreisscheibe lokal aber nicht global isometrisch.

60.2 Definition (geodätisch vollständig)

Eine Riemann-Mannigfaltigkeit M heißt GEODÄTISCH VOLLSTÄNDIG, falls alle Geodäten unendlichlang sind. Da für die Länge einer nach der Bogenlänge parametrisierten Geodäte $c : [a,b] \to M$ folgendes gilt: $L(c) = \int_a^b |c'(t)| dt = \int_a^b 1 dt = b - a$, ist die Geodäte genau dann unendlichlang, wenn ihr Parameterintervall ganz $\mathbb{R}$ ist.

60.3 Satz. *Je zwei abstrakte, einfachzusammenhängende, geodätisch vollständige Riemann-Flächen mit gleicher konstanter Gauß-Krümmung sind isometrisch isomorph.*

Beweis. Wegen der Einfachzusammenhängendheit folgt dies aus den lokalen Resultat (60.1). □

60.4 Folgerung

Jede einfachzusammenhängende, geodätisch vollständige, abstrakte Riemann-Fläche mit $K = 1$ ist bis auf Isometrien die Sphäre. Jede solche mit $K = -1$ ist bis auf Isometrien die Poincarésche Halbebene (bzw. hyperbolischen Scheibe) und jede derartige mit $K = 0$ ist die Ebene. Vergleiche das mit dem Riemannschen Abbildungssatz (35.1) sowie dem Uniformisierungssatz (36.2).

Durch Übergang zur universellen Überlagerung folgt wegen des Klassifizierungssatzes, daß jede Riemann-Fläche der Orbitraum einer auf einer einfachzusammenhängenden Riemann-Fläche mit diskret wirkenden Gruppe von konformen Abbildungen ist.

Die einzige nicht triviale, auf der Sphäre diskret wirkende Gruppe, ist die von der Antipodalabbildung erzeugte. Es gibt also nur zwei Flächen mit konstanter Gauß-Krümmung $K > 0$, nämlich die Sphäre und die projektive Ebene. Die Geometrie der projektiven Ebene wird auch elliptisch genannt, in ihr sind alle Geodäten geschlossen.

Es gibt auf der Ebene nur folgende diskret wirkende Gruppen:

1. die von einer Translation erzeugten,
2. die von einer Translation und einer Spiegelung erzeugten,
3. die von zwei Translationen erzeugten,
4. die von zwei Translationen und einer Spiegelung erzeugten.

Im Falle $K = 0$ gibt es also nur auf dem Zylinder, dem Möbiusband, dem Torus und der Kleinschen Flasche eine Metrik mit verschwindender Gauß-Krümmung.

Jede kompakte Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ besitzt eine Metrik mit konstant negativer Krümmung, siehe [**46**, S. 408].

Nach [CohnVossen1927] und [**17**] (siehe [**83**, S.105]) können zwei isometrische Flächen im $\mathbb{R}^3$ von strikt positiver Gauß-Krümmung durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden.

Kann man eine Fläche deformieren ohne ihre Metrik zu ändern? Ein Gegenbeispiel dazu wurde von [Efimov] gegeben: $\varphi(t, s) := t^9 + \lambda t^7 s^2 + s^9$ kann nicht einmal lokal deformiert werden falls λ transzendent ist, siehe [**46**, S.428].

60.5 Theorem (Flächen konstanter Krümmung).
Sei M eine abgeschlossene, zusammenhängende 2-Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit konstanter Gauß-Krümmung K, dann gilt:

1. *Ist $K > 0$, so ist M eine Sphäre* [**24**].
2. *Ist $K = 0$, so ist M ein verallgemeinerter Zylinder* [Massey1962], [Hartman-Nirenberg1959].
3. *Ist $K < 0$, so existiert M nicht* [**13**]. *Dies wurde durch* [Efimov] *verallgemeinert zu: Es gibt keine abgeschlossene Fläche mit einer, nach oben durch ein Konstante $k < 0$ beschränkte Gauß-Krümmung.*

Ohne Beweis.

60.6 Lemma. *Ist M kompakt, so existiert ein Punkt wo die Gauß-Krümmung positiv ist.*

Beweis. Das ist offensichtlich, da die Fläche in jedem Berührpunkt mit der "Umsphäre" positive Krümmung hat. □

60.7 Folgerung. *Es gibt keine kompakte Minimalfläche.*

61. Paralleltransport

Als nächstes versuchen wir irgendeine Kurve c auf der Fläche entlangzugehen und dabei einen Vektor möglichst parallel zu bewegen, d.h. seine Richtung so wenig wie möglich zu verändern.

61.1 Definition (Paralleles Vektorfeld)

Ein Vektorfeld längs einer Kurve c heißt PARALLEL, falls seine skalare Geschwindigkeit in den Punkt minimal ist.

61.2 Lemma (Charaktersierung von parallelen Vektorfeldern).
Ein Vektorfeld w längs einer Kurve c auf M ist genau dann parallel, wenn $w'(t) \in T_{c(t)}M^\perp$ für alle t.

Beweis. Aus $w(t) \in T_{c(t)}M$ folgt $\langle w(t), v(t)\rangle = 0$, mit $v(t) := \nu(c(t))$. Differenzieren wir diese Gleichung nach t, so erhalten wir

$$\langle w'(t), v(t)\rangle + \langle w(t), v'(t)\rangle = 0.$$

Damit $|w'(t)|$ minimal wird muß wegen

$$|w'(t)|^2 = |w'(t) - \langle w'(t), v(t)\rangle v(t)|^2 + |\langle w'(t), v(t)\rangle|^2$$

bei vorgegebener Normalprojektion $\langle w'(t), \nu(t)\rangle = -\langle w(t), v'(t)\rangle$ auf $v(t)$ der tangentiale Anteil $w'(t) - \langle w'(t), v(t)\rangle\, v(t)$ möglichst klein, am besten 0 werden, d.h. es ist $w'(t) = \langle w'(t), v(t)\rangle v(t)$, oder mit anderen Worten $w'(t) \in T_{c(t)}M^\perp$. □

Insbesondere gilt:

61.3 Lemma. *Eine proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve c ist genau dann eine Geodäte, wenn das Vektorfeld c' parallel längs c ist.*

61.4 Parallele Vektorfelder in lokalen Koordinaten

Sei φ eine lokale Parametrisierung von M und $t \mapsto u(t)$ die lokale Darstellung einer Kurve $c = \varphi\circ u$. Die Differentialgleichung für ein längs c paralleles Vektorfeld $t \mapsto w(t)$ bestimmen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} w(t) &= \sum_{i=1}^m w^i(t)\cdot(\partial_i\varphi)(u(t)) \Rightarrow \\ \Rightarrow\quad w' &= \sum_i \tfrac{dw^i}{dt}\cdot\varphi_i + \sum_{i,j} w^i\cdot\varphi_{i,j}\tfrac{du^j}{dt} \in \qquad\qquad \text{wegen (58.2)} \\ &\in \sum_k \left(\tfrac{dw^k}{dt} + \sum_{i,j} w^i \tfrac{du^j}{dt}\Gamma^k_{i,j}\right)\varphi_k + \mathbb{R}\cdot\nu. \end{aligned}$$

Also ist w parallel längs c genau dann, wenn

$$\tfrac{dw^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^m w^i\Gamma^k_{i,j}\tfrac{du^j}{dt} = 0 \text{ für } k = 1,\dots,m.$$

Dieses System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen hat bei vorgegebenen Anfangsdaten $w^k(0)$ eine eindeutige globale Lösung.

61.5 Lemma (Existenz paralleler Vektorfelder). *Zu jeder glatten Kurve $c : \mathbb{R} \to M$ und Anfangsvektor $w_0 \in T_{c(0)}M$ existiert eine eindeutig bestimmte parallele Kurve $w : \mathbb{R} \to TM$ mit $w(t) \in T_{c(t)}M$ und $w(0) = w_0$.*

Wir bezeichnen mit $\operatorname{ptp}(c,t)(v_0)$ *die parallele Kurve* v *über* c *mit Anfangswert* v_0 *zum Zeitpunkt* t. *Man nennt das auch den* PARALLELTRANSPORT *längs* c. *Für diesen gilt:*

1. $\operatorname{ptp}(c,t) : T_{c(0)}M \to T_{c(t)}M$ *ist eine Isometrie*
2. $\operatorname{ptp}(c,t)^{-1} = \operatorname{ptp}(c(.+t), -t)$
3. $\operatorname{ptp}(c, g(t)) = \operatorname{ptp}(c \circ g, t) \circ \operatorname{ptp}(c, g(0))$ *für* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Beweis. Eine zweite Möglichkeit die Existenz und Eindeutigkeit zu zeigen ist die folgende: w ist eine parallele Kurve genau dann, wenn $0 = \nabla w := w' - \langle w', \nu \circ c\rangle \nu \circ c$. Das ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 1.ter Ordnung, und somit existiert eine, durch den Anfangswert eindeutig bestimmte, globale Lösung w.

Verbleibt zu zeigen, daß $w(t) \in T_{c(t)}M$:
Da $\langle w, \nu \circ c\rangle' = \langle w', \nu \circ c\rangle + \langle w, (\nu \circ c')\rangle = 0$ für eine Lösung ist, ist $\langle w, \nu \circ c\rangle$ konstant gleich $\langle w, \nu \circ c\rangle(0) = \langle w_0, \nu_{c(0)}\rangle = 0$. D.h. $w(t) \in {\nu_{c(t)}}^{\perp} = T_{c(t)}M$.

(1) Klarerweise ist die Lösung $\operatorname{ptp}(c,.)(v_0)$ einer linearen Differentialgleichung vom Anfangswert v_0 linear abhängig. Es gilt

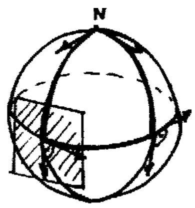
$$\langle \xi, \eta\rangle' = \langle \xi', \eta\rangle + \langle \xi, \eta'\rangle = 0 + 0,$$

falls ξ und η parallele Vektorfelder längs c sind, d.h $\xi', \eta' \in TM^{\perp}$. Also ist $\langle \xi, \eta\rangle$ konstant und $\operatorname{ptp}(c,t)$ eine Isometrie.

(2) und (3) folgen leicht aus der Eindeutigkeit der Lösungen von linearen Differentialgleichungen. □

61.6 Beispiel

1. In jeder Hyperebene sind genau die konstanten Vektorfelder die parallelen, da die Ableitung eines Vektorfelds wieder in der Ebene liegt.
2. Allgemeiner sind auf Torsen die parallelen Vektorfelder, gerade die konstanten Vektorfelder in einer Abwicklung der Torse in die Ebene.
3. Parallele Vektorfelder längs geschlossener Kurven können sehr wohl verschiedene Anfangs- und Endwerte besitzen: Man starte auf dem Nordpol der Sphäre und transportiere einen Vektor in Richtung eines Meridians bis zum Äquator. Dann transportiere man diesen auf den Äquator normal stehenden Vektor entlang des Äquators bis zu einem anderen Meridian, und transportiere ihn schließlich längs dieses anderen Meridians wieder zum Nordpol. Dort schließt der transportierte Vektor mit seiner Ausgangslage genau den Winkel der beiden Meridiane ein.



Eine allgemeine Konstruktionsmöglichkeit für parallele Vektorfelder ist die folgende:

61.7 Satz (Parallelität via Schmiegtorse).
Sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine Kurve auf M dann gilt: Ein Vektorfeld ist parallel längs c in M genau dann, wenn es parallel längs c in der Schmiegtorse ist.

Beweis. Die Schmiegtorse ist nach (55.6) lokal durch $\varphi(t,s) = c(s) + t\xi(s)$ gegeben, wobei ξ ein (das) Vektorfeld längs c ist, welches normal auf $L\,c'$ steht. Klarerweise ist der Tangentialraum in $c(t)$ von M identisch mit jenem der Schmiegtorse und somit ein Vektorfeld η längs c tangential an M genau dann, wenn es tangential an die Schmiegtorse ist. Und die kovariante Ableitung längs c stimmt auch für beide Flächen überein. Also sieht die Bedingung "parallel zu sein" für beide Flächen gleich aus. □

61.8 Definition (Holonomie)

Die Untergruppe

$$\{\mathrm{ptp}(c, 2\pi) : c \text{ ist geschlossene Kurve durch } x\}$$

der Gruppe $O(T_xM)$ heißt Holonomie-Gruppe von M (bei x). Sie ist eine Lie-Gruppe und für verschiedene x in einem zusammenhängenden M sind diese Untergruppen isomorph. Z.B. ist die Holonomiegruppe der S^2 gerade die $S0(2) \cong S^1$.

Wir werden in (64.12) charakterisieren, wann diese Gruppe trivial ist.

62. Kovariante Ableitung

Leider steckt in den obigen Beschreibungen für die Geodäten und die parallelen Vektorfelder noch die Flächen-Normale und damit der umgebende Vektorraum. Diese Begriffe sollten aber auch für abstrakte Riemann-Mannigfaltigkeiten Sinn machen.

Anstatt zu sagen, daß ein Vektor wie w' normal auf die Fläche steht, können wir auch sagen, daß seine tangentiale Komponente, d.h. seine Projektion auf den Tangentialraum verschwindet.

62.1 Definition (Kovariante Ableitung)

Sei w ein Vektorfeld längs einer Kurve c in M. Dann wollen wir die Normal-Projektion auf den Tangentialraum der Ableitung des Vektorfelds die kovariante Ableitung ∇ (sprich "Nabla" oder "Del") nennen und mit

$$\nabla w : t \mapsto w'(t) - \langle w'(t), \nu_{c(t)} \rangle \nu_c(t) \in T_{c(t)}M$$

bezeichnen. Diese mißt also die infinitesimale Änderung von w, wie sie in M gesehen wird, und ignoriert jene Komponente, die auf M normal steht.

Die Formel für die kovariante Ableitung ∇ eines Vektorfelds w längs einer Kurve $c = \varphi \circ u$ sieht in lokalen Koordinaten wie folgt aus:

$$\nabla w = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{dw^k}{dt} + \sum_{i,j}^{m} \Gamma_{i,j}^k w^i \frac{du^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^k},$$

wobei $w = \sum_k w^k \frac{\partial}{\partial u^k}$.

Man beachte, daß die Geodäten genau die Lösungen der Gleichung $\nabla c' = 0$ sind (wobei c' als Vektorfeld längs c aufzufassen ist), und die Vektorfelder w, die parallel längs einer Kurve c sind, genau die Lösungen der Gleichung $\nabla w = 0$ sind.
Es gelten folgende Formeln für ∇:

$$\begin{aligned}\nabla(\xi+\eta) &= \nabla\xi + \nabla\eta \\ \nabla(f\cdot\xi) &= f\cdot\nabla\xi + f'\cdot\xi \\ \langle\xi,\eta\rangle' &= \langle\nabla\xi,\eta\rangle + \langle\xi,\nabla\eta\rangle,\end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}\nabla(f\,\xi) &= (f'\,\xi + f\,\xi') - \langle f'\,\xi + f\,\xi',\nu\rangle\,\nu = f'\,\xi - 0 + f\,\nabla\xi, \\ \langle\xi,\eta\rangle' &= \langle\xi',\eta\rangle + \langle\xi,\eta'\rangle = \langle\nabla\xi + \langle\xi',\nu\rangle\nu,\eta\rangle + \langle\xi,\nabla\eta + \langle\eta',\nu\rangle\,\nu\rangle \\ &= \langle\nabla\xi,\eta\rangle + \langle\xi,\nabla\eta\rangle \quad \text{da } \langle\nu,\eta\rangle = 0 = \langle\xi,\nu\rangle.\end{aligned}$$

62.2 Gaußgleichung. *Für den Nabla-Operator gilt:*

$$\nabla w = w' + \langle L\,c', w\rangle\,\nu\circ c.$$

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus $\langle w,\nu\circ c\rangle = 0$ durch Differenzieren. □

62.3 Definition

Seien nun zwei Vektorfelder ξ und η auf M gegeben, dann können wir $\nabla_\eta\xi \in \mathfrak{X}(M)$ als $(\nabla_\eta\xi)(x) = \nabla(\xi\circ c)(0)$ definieren, wobei c eine Integralkurve des Vektorfelds η mit der Anfangsbedingung $c(0) = x$ ist.
Das läßt sich auch wie folgt schreiben:

$$(\nabla_\eta\xi)_x = T_x\xi\cdot\eta_x - \langle T_x\xi\cdot\eta_x,\nu_x\rangle\nu_x.$$

62.4 Lemma (Eigenschaften der kovarianten Ableitung). *Der Operator ∇ geht von $\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)$ nach $\mathfrak{X}(M)$ und hat folgende Eigenschaften.*

1. *∇ ist bilinear.*
2. *$\nabla_\eta\xi$ ist $C^\infty(M,\mathbb{R})$-linear in η.*
3. *$\nabla_\eta(f\xi) = f\nabla_\eta\xi + \eta(f)\,\xi$.*
4. *$\nabla_\eta\xi - \nabla_\xi\eta = [\eta,\xi]$.*
5. *$\eta\,\langle\xi_1,\xi_2\rangle = \langle\nabla_\eta\xi_1,\xi_2\rangle + \langle\xi_1,\nabla_\eta\xi_2\rangle$.*

Beweis. (1) und (2) sind klar. Zu (3):

$$\begin{aligned}&\big(\nabla_\eta(f\xi)\big)(x) = \\ &\quad = \nabla\big((f\xi)\circ c\big)(0) = \big(f(c(0)\big)\nabla(\xi\circ c)(0) + (f\circ c)'(0)\,\xi\big(c(0)\big) \\ &\quad = f(x)\cdot(\nabla_\eta\xi)(x) + T_xf(\eta_x)\cdot\xi_x = \big(f\nabla_\eta\xi + \eta(f)\,\xi\big)(x).\end{aligned}$$

Zu (4): Wegen der Gaußgleichung und der Symmetrie von L gilt:

$$\begin{aligned}(\nabla_\eta\xi - \nabla_\xi\eta)(x) &= \big(T_x\xi\cdot\eta_x + \langle L_x\eta_x,\xi_x\rangle\nu_x\big) - \big(T_x\eta\cdot\xi_x - \langle L_x\xi_x,\eta_x\rangle\nu_x\big) \\ &= [\eta,\xi](x) + 0.\end{aligned}$$

Zu (5):

$$\begin{aligned}
\big(\eta\,\langle\xi_1,\xi_2\rangle\big)(x) &= \big(\langle\xi_1,\xi_2\rangle\circ c\big)'(0)\\
&= \big\langle\nabla(\xi_1\circ c)(0),(\xi_2\circ c)(0)\big\rangle + \big\langle(\xi_1\circ c)(0),\nabla(\xi_2\circ c)(0)\big\rangle\\
&= \big(\langle\nabla_\eta\xi_1,\xi_2\rangle + \langle\xi_1,\nabla_\eta\xi_2\rangle\big)(x). \qquad \square
\end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, daß es so einen Differentialoperator auch auf abstrakten Riemann-Mannigfaltigkeiten gibt, und er durch die obigen Eigenschaften eindeutig bestimmt ist.

62.5 Satz (Levi-Civita Ableitung).
Sei M eine (abstrakte) Riemann-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau eine Abbildung $\nabla:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$, welche obige Eigenschaften (1)-(5) erfüllt, wobei das innere Produkt in (5) durch die Riemann-Metrik zu ersetzen ist. Diese Abbildung heißt KOVARIANTE ABLEITUNG, *oder auch* LEVI-CIVITA-ZUSAMMENHANG.

(Koordinatenfreie) Beweis. Wegen (5) gilt:

$$\begin{aligned}
\xi_1\,g(\xi_2,\xi_3) &= g(\nabla_{\xi_1}\xi_2,\xi_3)+g(\xi_2,\nabla_{\xi_1}\xi_3) && (+)\\
\xi_2\,g(\xi_3,\xi_1) &= g(\nabla_{\xi_2}\xi_3,\xi_1)+g(\xi_3,\nabla_{\xi_2}\xi_1) && (+)\\
\xi_3\,g(\xi_1,\xi_2) &= g(\nabla_{\xi_3}\xi_1,\xi_2)+g(\xi_1,\nabla_{\xi_3}\xi_2) && (-).
\end{aligned}$$

Daraus folgt durch Addieren der ersten beiden und Subtrahieren der 3.ten Gleichung unter Verwendung von (4):

$$\begin{aligned}
&\xi_1\,g(\xi_2,\xi_3)+\xi_2\,g(\xi_3,\xi_1)-\xi_3\,g(\xi_1,\xi_2) =\\
&\quad= g(\nabla_{\xi_1}\xi_2+\nabla_{\xi_2}\xi_1,\xi_3)+g(\nabla_{\xi_1}\xi_3-\nabla_{\xi_3}\xi_1,\xi_2)+g(\nabla_{\xi_2}\xi_3-\nabla_{\xi_3}\xi_2,\xi_1)\\
&\quad= g(2\nabla_{\xi_1}\xi_2-[\xi_1,\xi_2],\xi_3)-g([\xi_3,\xi_1],\xi_2)+g([\xi_2,\xi_3],\xi_1).
\end{aligned}$$

Und somit

$$\begin{aligned}
2\,g(\nabla_{\xi_1}\xi_2,\xi_3) &= \xi_1\,g(\xi_2,\xi_3)+\xi_2\,g(\xi_3,\xi_1)-\xi_3\,g(\xi_1,\xi_2)\\
&\qquad + g([\xi_1,\xi_2],\xi_3)-g([\xi_2,\xi_3],\xi_1)+g([\xi_3,\xi_1],\xi_2).
\end{aligned}$$

Da die rechte Seite linear in ξ_3 ist, ist $\nabla_{\xi_1}\xi_2$ durch diese implizite Gleichung wohldefiniert. Da die rechte Seite auch bilinear in (ξ_1,ξ_2) ist, hat ∇ die Eigenschaft (1).

Nun zur Eigenschaft (2):

$$
\begin{aligned}
2\,g(\nabla_{f\xi_1}\xi_2,\xi_3) &= f\xi_1\,g(\xi_2,\xi_3)+\xi_2\,g(\xi_3,f\xi_1)-\xi_3\,g(f\xi_1,\xi_2)\\
&\qquad+g([f\xi_1,\xi_2],\xi_3)-g([\xi_2,\xi_3],f\xi_1)+g([\xi_3,f\xi_1],\xi_2)\\
&= f\xi_1\,g(\xi_2,\xi_3)+f\xi_2\,g(\xi_3,\xi_1)+\xi_2(f)g(\xi_3,\xi_1)\\
&\qquad-f\xi_3\,g(\xi_1,\xi_2)-\xi_3(f)g(\xi_1,\xi_2)\\
&\qquad+g(f[\xi_1,\xi_2]-\xi_2(f)\xi_1,\xi_3)-f\,g([\xi_2,\xi_3],\xi_1)\\
&\qquad+g(f[\xi_3,\xi_1]+\xi_3(f)\xi_1,\xi_2)\\
&= f\xi_1\,g(\xi_2,\xi_3)+f\xi_2\,g(\xi_3,\xi_1)+\xi_2(f)g(\xi_3,\xi_1)\\
&\qquad-f\xi_3\,g(\xi_1,\xi_2)-\xi_3(f)g(\xi_1,\xi_2)\\
&\qquad+f\,g([\xi_1,\xi_2],\xi_3)-\xi_2(f)g(\xi_1,\xi_3)-f\,g([\xi_2,\xi_3],\xi_1)\\
&\qquad+f\,g([\xi_3,\xi_1],\xi_2)+\xi_3(f)g(\xi_1,\xi_2)\\
&= f\big(\xi_1\,g(\xi_2,\xi_3)+\xi_2\,g(\xi_3,\xi_1)-\xi_3\,g(\xi_1,\xi_2)\\
&\qquad+g([\xi_1,\xi_2],\xi_3)-g([\xi_2,\xi_3],\xi_1)+g([\xi_3,\xi_1],\xi_2)\big)\\
&= 2\,f\,g(\nabla_{\xi_1}\xi_2,\xi_3).
\end{aligned}
$$

Eine sehr ähnliche Rechnung zeigt die Eigenschaft (3).
Weiter zu Eigenschaft (4):

$$
\begin{aligned}
&2\,g(\nabla_{\xi_1}\xi_2-\nabla_{\xi_2}\xi_1,\xi_3)=\\
&\quad=\xi_1\,g(\xi_2,\xi_3)+\xi_2\,g(\xi_3,\xi_1)-\xi_3\,g(\xi_1,\xi_2)\\
&\qquad+g([\xi_1,\xi_2],\xi_3)-g([\xi_2,\xi_3],\xi_1)+g([\xi_3,\xi_1],\xi_2)\\
&\qquad-\xi_2\,g(\xi_1,\xi_3)-\xi_1\,g(\xi_3,\xi_2)+\xi_3\,g(\xi_2,\xi_1)\\
&\qquad-g([\xi_2,\xi_1],\xi_3)+g([\xi_1,\xi_3],\xi_2)-g([\xi_3,\xi_2],\xi_1)\\
&\quad=2\,g([\xi_1,\xi_2],\xi_3).
\end{aligned}
$$

Schlußendlich Eigenschaft (5):

$$
\begin{aligned}
&2\langle\nabla_{\xi_1}\xi_2,\xi_3\rangle+2\langle\xi_2,\nabla_{\xi_1}\xi_3\rangle=\\
&\quad=\xi_1\,g(\xi_2,\xi_3)+\xi_2\,g(\xi_3,\xi_1)-\xi_3\,g(\xi_1,\xi_2)\\
&\qquad+g([\xi_1,\xi_2],\xi_3)-g([\xi_2,\xi_3],\xi_1)+g([\xi_3,\xi_1],\xi_2)\\
&\qquad+\xi_1\,g(\xi_3,\xi_2)+\xi_3\,g(\xi_2,\xi_1)-\xi_2\,g(\xi_1,\xi_3)\\
&\qquad+g([\xi_1,\xi_3],\xi_2)-g([\xi_3,\xi_2],\xi_1)+g([\xi_2,\xi_1],\xi_3)\\
&\quad=2\,\xi_1\,g(\xi_2,\xi_3). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Koordinatenbeweis. Es ist zu zeigen, daß der lokale Ausdruck für ∇ unabhängig von den gewählten Koordinaten ist.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u^i} &:= \varphi_i \\
\frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}} &= \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
g_{i,j} &:= \langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \rangle := g(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}) \\
\bar g_{\bar i,\bar j} &= \Big\langle \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \frac{\partial}{\partial u^i}, \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial}{\partial u^j} \Big\rangle = \sum_{i,j} \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}} g_{i,j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{i,j,k} &:= \frac{1}{2}\Big(\partial_i(g_{j,k}) + \partial_j(g_{i,k}) - \partial_k(g_{i,j})\Big) \\
\frac{\partial \bar g_{\bar j,\bar k}}{\partial \bar u^{\bar i}} &= \frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}} \Big(\sum_{j,k} \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}} g_{j,k} \Big) \\
&= \sum_{j,k} \Big(\frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}} \Big(\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\Big) \frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}} g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}} \Big(\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\Big) g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}} \frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}}(g_{j,k}) \Big) \\
&= \sum_{j,k} \Big(\frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar u^{\bar i} \partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}} g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial^2 u^k}{\partial \bar u^{\bar i} \partial \bar u^{\bar k}} g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}} \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \frac{\partial g_{j,k}}{\partial u^i} \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar\Gamma_{\bar i,\bar j,\bar k} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}}(g_{\bar j,\bar k}) + \frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar j}}(g_{\bar i,\bar k}) - \frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar k}}(g_{\bar i,\bar j}) \Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sum_{j,k} \Big(\underbrace{\frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar u^{\bar i} \partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}} g_{j,k}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial^2 u^k}{\partial \bar u^{\bar i} \partial \bar u^{\bar k}} g_{j,k}}_{(2)} + \underbrace{\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}} \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \frac{\partial g_{j,k}}{\partial u^i}}_{(3)} \Big) \\
&\quad + \sum_{i,k} \Big(\underbrace{\frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar u^{\bar j} \partial \bar u^{\bar i}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}} g_{i,k}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \frac{\partial^2 u^k}{\partial \bar u^{\bar j} \partial \bar u^{\bar k}} g_{i,k}}_{(4)} + \underbrace{\frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}} \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial g_{i,k}}{\partial u^j}}_{(3)} \Big) \\
&\quad - \sum_{j,i} \Big(\underbrace{\frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar u^{\bar k} \partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} g_{j,i}}_{(4)} + \underbrace{\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar u^{\bar k} \partial \bar u^{\bar i}} g_{j,i}}_{(2)} + \underbrace{\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \sum_k \frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}} \frac{\partial g_{j,i}}{\partial u^k}}_{(3)} \Big)\Big) \\
&= \sum_{j,k} \underbrace{\frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar u^{\bar i} \partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}} g_{j,k}}_{(1)} + \sum_{i,j,k} \underbrace{\frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}} \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{j,k}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i,k}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{j,i}}{\partial u^k} \Big)}_{(3)} \\
&= \sum_{j,k} \frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar u^{\bar i} \partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}} g_{j,k} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}} \Gamma_{i,j,k}
\end{aligned}
$$

$$\delta_i^j = \sum_{\bar{i}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i}$$
$$\delta_k^i =: \sum_j g^{i,j}\, g_{j,k}$$

$$\bar{g}^{\bar{i},\bar{j}} = \sum_{i,j} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j}\; g^{i,j}, \text{ denn}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\bar{j}} \bar{g}^{\bar{i},\bar{j}}\, \bar{g}_{\bar{j},\bar{k}} &= \sum_{\bar{j}} \sum_{i,j} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j}\, g^{i,j} \;\sum_{l,k} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}\, g_{l,k} \\
&= \underbrace{\sum_{i,k} \underbrace{\sum_{j,l} \underbrace{\sum_{\bar{j}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}}_{\delta_j^l}\, g^{i,j}\, g_{l,k}}_{\delta_k^i}\; \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}}_{\delta_{\bar{k}}^{\bar{i}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i,j}^k &:= \sum_l \Gamma_{i,j,l}\, g^{l,k} \\
\bar{\Gamma}_{\bar{i},\bar{j}}^{\bar{l}} &= \sum_{\bar{k}} \bar{\Gamma}_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}}\, \bar{g}^{\bar{k},\bar{l}} \\
&= \sum_{\bar{k}} \Big(\sum_{j,k} \frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}\, g_{j,k} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}\, \Gamma_{i,j,k} \Big) \sum_{p,q} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^p} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^q}\, g^{p,q} \\
&= \sum_{j,q} \frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^q}\; \underbrace{\sum_{k,p} \underbrace{\sum_{\bar{k}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^p}}_{=\delta_p^k}\, g_{j,k} g^{p,q}}_{=\delta_j^q} \\
&\quad + \sum_{i,j,q} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^q}\; \underbrace{\sum_{p,k} \underbrace{\sum_{\bar{k}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^p}}_{=\delta_p^k}\, \Gamma_{i,j,k} g^{p,q}}_{=\Gamma_{i,j}^q} \\
&= \sum_{i,j,l} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l}\, \Gamma_{i,j}^l + \sum_l \frac{\partial^2 u^l}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\delta^i_j &= \sum_{\bar i} \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^j} \qquad \Rightarrow \\
0 &= \frac{\partial}{\partial u^k}\delta^i_j \\
&= \sum_{\bar i} \Big(\frac{\partial}{\partial u^k}\Big(\frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}}\Big) \frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^j} + \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \frac{\partial^2 \bar u^{\bar i}}{\partial u^j \partial u^k}\Big) \\
&= \sum_{\bar i,\bar k} \frac{\partial \bar u^{\bar k}}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar k}}\Big(\frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}}\Big) \frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^j} + \sum_{\bar i} \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \frac{\partial^2 \bar u^{\bar i}}{\partial u^j \partial u^k} \\
&= \sum_{\bar i,\bar k} \frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar u^{\bar i}\partial \bar u^{\bar k}} \frac{\partial \bar u^{\bar k}}{\partial u^k} \frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^j} + \sum_{\bar i} \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \frac{\partial^2 \bar u^{\bar i}}{\partial u^j \partial u^k} \qquad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\bar\Gamma^{\bar k}_{\bar i,\bar j} = \sum_{i,j,k} \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}} \frac{\partial \bar u^{\bar k}}{\partial u^k} \,\Gamma^k_{i,j} - \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \bar u^{\bar k}}{\partial u^i \partial u^j} \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}
$$

Sei nun eine Kurve $c : \mathbb{R} \to M$ gegeben in lokalen Koordinaten durch

$$
c(t) = \varphi(u^1(t), \dots, u^m(t)) = \bar\varphi(\bar u^1(t), \dots, \bar u^m(t))
$$

und $w : \mathbb{R} \to TM$ ein Vektorfeld längs c, d.h. $w(t) \in T_{c(t)}M$. In lokalen Koordinaten ist

$$
w(t) = \sum_i w^i(t) \, \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_{\bar i} \bar w^{\bar i}(t) \, \frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}} = \sum_{\bar i, i} \bar w^{\bar i}(t) \, \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}} \frac{\partial}{\partial u^i}
$$

und Koeffizientenvergleich liefert

$$
w^i(t) = \sum_{\bar i} \bar w^{\bar i}(t) \, \frac{\partial u^i}{\partial \bar u^{\bar i}}.
$$

Die Normalprojektion der Ableitung von w auf den Tangentialraums ist in den lokalen Koordinaten $(u^1, \dots, u^m)$ durch

$$
\sum_i \left(\frac{dw^i(t)}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k}(u(t)) w^j(t) \frac{du^k(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^i}
$$

gegeben. In den Koordinaten $(\bar u^1,\dots,\bar u^m)$ ist

$$\sum_{\bar i}\left(\frac{d\bar w^{\bar i}(t)}{dt}+\sum_{\bar j,\bar k}\Gamma^{\bar i}_{\bar j,\bar k}(u(t))\bar w^{\bar j}(t)\frac{d\bar u^{\bar k}(t)}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}}=$$

$$\begin{aligned}
&=\sum_{\bar i}\Bigg(\frac{d}{dt}\sum_i\frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^i}(u(t))\,w^i(t)+\\
&\quad+\sum_{\bar j,\bar k}\Bigg(\sum_{j,k,i}\Gamma^i_{j,k}(u(t))\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\,\frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^i}-\sum_{j,k}\frac{\partial^2\bar u^{\bar i}}{\partial u^j\partial u^k}\,\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\Bigg)\cdot\\
&\quad\cdot\sum_l\frac{\partial \bar u^{\bar j}}{\partial u^l}\,w^l(t)\frac{d\bar u^{\bar k}(t)}{dt}\Bigg)\frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\sum_{\bar i}\Bigg(\sum_{i,j}\frac{\partial^2\bar u^{\bar i}}{\partial u^i\partial u^j}(u(t))\,\frac{du^j(t)}{dt}\,w^i(t)+\sum_i\frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^i}(u(t))\,\frac{dw^i(t)}{dt}+\\
&\quad+\sum_{\bar j,\bar k}\Bigg(\sum_{j,k,i}\Gamma^i_{j,k}(u(t))\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\,\frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^i}-\sum_{j,k}\frac{\partial^2\bar u^{\bar i}}{\partial u^j\partial u^k}\,\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\Bigg)\cdot\\
&\quad\cdot\sum_l\frac{\partial \bar u^{\bar j}}{\partial u^l}\,w^l(t)\frac{d\bar u^{\bar k}(t)}{dt}\Bigg)\frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\sum_{\bar i}\Bigg(\sum_{i,j}\frac{\partial^2\bar u^{\bar i}}{\partial u^i\partial u^j}\,\frac{du^j}{dt}\,w^i+\sum_i\frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^i}(u(t))\,\frac{dw^i(t)}{dt}\\
&\quad+\sum_{k,i}\sum_{l,j}\Gamma^i_{j,k}\underbrace{\sum_{\bar j}\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial \bar u^{\bar j}}{\partial u^l}}_{\delta^j_l}\,w^l\,\underbrace{\sum_{\bar k}\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\,\frac{d\bar u^{\bar k}}{dt}}_{\frac{du^k}{dt}}\,\frac{\partial \bar u^{\bar i}}{\partial u^i}\\
&\quad-\sum_k\underbrace{\sum_{\bar k}\frac{\partial u^k}{\partial \bar u^{\bar k}}\,\frac{d\bar u^{\bar k}}{dt}}_{\frac{du^k}{dt}}\,\sum_{j,l}\frac{\partial^2\bar u^{\bar i}}{\partial u^j\partial u^k}\,\underbrace{\sum_{\bar j}\frac{\partial u^j}{\partial \bar u^{\bar j}}\,\frac{\partial \bar u^{\bar j}}{\partial u^l}}_{\delta^j_l}\,w^l\Bigg)\frac{\partial}{\partial \bar u^{\bar i}}
\end{aligned}$$

$$=\sum_i\left(\frac{dw^i(t)}{dt}+\sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}(u(t))w^j(t)\frac{du^k(t)}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial u^i}$$

also ist dieser Ausdruck auch für eine abstrakte Riemann-Mannigfaltigkeit wohldefiniert. Wir nennen diesen Ausdruck die kovariante Ableitung ∇w eines Vektorfelds w längs einer Kurve c, d.h.

$$\nabla w(t):=\sum_i\left(\frac{dw^i(t)}{dt}+\sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}(u(t))w^j(t)\frac{du^k(t)}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial u^i}(u(t)).$$

Für Vektorfelder X und Y auf M können wir nun ein Vektorfeld $\nabla_X Y$ durch

$$(\nabla_X Y)_x := \nabla(Y \circ c),$$

wobei c die Integralkurve von X durch x ist. Es ist somit $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ eine wohldefinierte bilineare Abbildung. In Koordinaten haben wir

$$\nabla_X Y = \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Y^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Y^j X^k \right) \frac{\partial}{\partial u^i}. \quad \square$$

62.6 Lokale Formeln für ∇

Wählen wir für ξ_1, ξ_2 und ξ_3 Basisvektorfelder $g_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$, $g_j := \frac{\partial}{\partial u^j}$ und $g_k := \frac{\partial}{\partial u^k}$, so erhalten wir eine lokale Formel für ∇:

$$2g(\nabla_{g_i} g_j, g_k) = \tfrac{\partial}{\partial u^i} g_{j,k} + \tfrac{\partial}{\partial u^j} g_{k,i} - \tfrac{\partial}{\partial u^k} g_{i,j} + 0 =: 2\Gamma_{i,j,k}$$

Das ist gerade die Formel für die Christoffelsymbole der 1.ten Art.
Bezeichnen wir die Koeffizienten von $\nabla_{g_i} g_j$ bezüglich der Basis (g_l) mit $\Gamma^l_{i,j}$, also

$$\nabla_{g_i} g_j = \sum_{k=1}^m \Gamma^k_{i,j} g_k,$$

so erhalten wir:

$$\Gamma_{i,j,k} = g(\nabla_{g_i} g_j, g_k) = g\left(\sum_l \Gamma^l_{i,j} g_l, g_k \right) = \sum_l \Gamma^l_{i,j} g_{l,k}.$$

D.h. die $\Gamma^l_{i,j}$ sind die Christoffel-Symbole der 2.ten Art (siehe (58.2)).
Man beachte noch, daß aus der Symmetrie von $g_{i,j}$ folgende Umkehrformel für die partiellen Ableitungen der Koeffizienten der Riemann-Metrik folgt:

$$\tfrac{\partial}{\partial u^i} g_{j,k} = \Gamma_{i,j,k} + \Gamma_{i,k,j}.$$

Wegen Eigenschaft (62.4.2) ist $\nabla_X Y$ tensoriell in Y, d.h. $(\nabla_X Y)(p)$ hängt nur von X_p und Y ab. Sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine Kurve mit $c'(0) = X_p$. Dann ist $(\nabla_{c'(0)} Y)(p)$ wohldefiniert und in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$\begin{aligned}
(\nabla_{c'(0)} Y)(p) &= \nabla_{\sum_j \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial u^j}(p)} \Big(\sum_{i=1}^m Y^i \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big)(p) = \\
&= \sum_{j,i} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) \cdot \Big(\frac{\partial}{\partial u^j}\Big|_p Y^i \cdot \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_p + Y^i(p) \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}(p)} \frac{\partial}{\partial u^i}(p) \Big) \\
&= \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial}{\partial u^j}\Big|_p Y^i \cdot \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_p \\
&\quad + \sum_{i,j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0)\, Y^i(p)\, \Gamma^k_{j,i}|_p \, \frac{\partial}{\partial u^k}\Big|_p
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck macht aber sogar für ein Vektorfeld Y längs c Sinn, d.h. $Y(t) \in T_{c(t)}M$ für alle $t \in \mathbb{R}$, denn dann ist nach der Kettenregel

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial u^j}\Big|_{c(t)} Y^i \cdot \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t) = \frac{dY^i}{dt}(t)$$

und somit ist

$$(\nabla_{c'(t)}Y)(t) = \sum_i \Big(\frac{dY^i}{dt}(t) + \sum_{j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t)\, Y^k(t)\, \Gamma^i_{j,k}|_{c(t)} \Big) \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_{c(t)}.$$

62.7 Bemerkung

Wenn wir die entsprechenden Differentialgleichungen $0 = \nabla_{c'}X$ für parallele Vektorfelder X längs Kurven c und $0 = \nabla_{c'}c'$ für Geodäten c in lokalen Koordinaten aufschreiben, so erhalten wir

$$0 = \frac{dX^i}{dt}(t) + \sum_{j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t)\, X^k(t)\, \Gamma^i_{j,k}|_{c(t)}$$
$$0 = \frac{d^2(u^i \circ c)}{dt^2}(t) + \sum_{j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t)\, \frac{d(u^k \circ c)}{dt}(t)\, \Gamma^i_{j,k}|_{c(t)}.$$

Das zeigt, daß die Exponentialabbildung $\exp : TM \to M$ und der Paralleltransport $\mathrm{ptp} : C^\infty(\mathbb{R}, M) \times_M TM \to TM$ auch für abstrakte Riemann-Mannigfaltigkeiten existieren und die entsprechenden Eigenschaften besitzen.

62.8 Lemma. *Die Abbildung $(\pi, \exp) : TM \to M \times M$ ist ein Diffeomorphismus einer Umgebung U des Nullschnitts $M \subseteq TM$ auf eine Umgebung der Diagonale $\{(x, x) : x \in M\} \subseteq M \times M$.*

Beweis. Man beachte zuerst, daß der Tangentialraum von TM in einem Punkt 0_x des Nullschnitts gerade $T_xM \oplus T_xM$ ist. Dabei ist der erste Faktor durch die Tangentialvektoren an Kurven in $M \subseteq TM$ gegeben. Der zweite durch Geschwindigkeitsvektoren von Kurven im Vektorraum $T_xM \subseteq TM$. Diese beiden Teilräume haben trivialen Durchschnitt, und ergeben zusammen die richtige Dimension. Nun berechnen wir die partiellen Ableitungen von $(\pi, \exp)$. Auf dem Nullschnitt ist $(\pi, \exp) : TM \supset M \to M \times M$ gerade die Diagonal-Abbildung $x \mapsto (x, x)$ und auf der Faser T_xM ist $(\pi, \exp) : TM \supset T_xM \to M \times M$ die Abbildung $(\mathrm{konst}_x, \exp_x)$. Also sieht die Tangentialabbildung von $(\pi, \exp)$ in 0_x wie folgt aus:

$$T_{0_x}(\pi, \exp) = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ \mathrm{id} & T_0 \exp_x \end{pmatrix} : T_xM \times T_xM \to T_xM \times T_xM.$$

Wegen $T_0 \exp_x = \mathrm{id}_{T_xM}$ ist also $(\pi, \exp)$ ein lokaler Diffeomorphismus für Punkte nahe dem Nullschnitt.

Wir wählen für jedes $x \in M$ eine offene 0-Umgebung U_x in TM, so daß $(\pi, \exp) : U_x \to (\pi, \exp)(U_x)$ ein Diffeomorphismus ist, und die Fasern $U_x \cap T_yM$ Kugeln um 0 sind. Die Vereinigung $U := \bigcup_{x \in M} U_x$ ist dann eine offene Umgebung des Nullschnitts in TM. Und $(\pi, \exp) : U \to V := (\pi, \exp)(U)$ ist ein lokaler Diffeomorphismus.

Bleibt nur noch die Injektivität zu zeigen: Aber falls zwei Tangentialvektoren verschiedene Fußpunkte besitzen, so können wir sie durch die erste Komponente $\pi : TM \to M$ trennen, und falls sie den gleichen Fußpunkt $x \in M$ haben, so trennt sie die zweite Komponente $\exp_x$, da sie in einer der Kugeln $U_y \cap T_xM$ enthalten sind. □

62.9 Tubuläre Umgebung. *Sei $M \subseteq N$ eine Teilmannigfaltigkeit der Riemann-Mannigfaltigkeit N. Mit $TM^\perp$ bezeichnen wir das Normalbündel von M in N, d.h. jenes Vektorbündel über M, welches als Faser über $x \in M$ das orthogonale Komplement $(T_xM)^\perp$ von T_xM in T_xN bezüglich der Riemann-Metrik von N hat. Dann ist $\exp_N$ ein Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung des Nullschnitts $M \subseteq TM^\perp$ auf eine offene Umgebung von M in N. Die Bilder von Schnitten konstanter Länge schneiden die radialen Geodäten orthogonal.*

Beweis. Analog zum Beweis von Satz (62.8) können wir den Tangentialraum von $TM^\perp$ in einem Punkt x des Nullschnitts als $T_xM \oplus T_xM^\perp$ schreiben. Und die Tangential-Abbildung von $\exp_N$ hat die Gestalt

$$(\mathrm{id}_{T_xM}, T_0 \exp_x|_{(T_xM)^\perp}) = \mathrm{id}_{T_xN}\,.$$

Also ist exp genauso ein lokaler Diffeomorphismus, und auch die Injektivität kann wie im Beweis von Satz (62.8) erhalten werden.

Sei nun $X : \mathbb{R} \to TM^\perp$ ein Vektorfeld längs einer Kurve $c = \pi \circ X : \mathbb{R} \to M$ von konstanter Länge, so schneidet $\exp \circ X$ die radiale Geodäte $s \mapsto \exp_{c(t)}(sX(t))$ normal in t, wie der Beweis von (58.6) zeigt. □

Wählt man für M einen Punkt und in T_xM eine Orthonormalbasis, dann sind das gerade die Riemannschen-Normalkoordinaten. Ein anderer Spezialfall ist der einer -nach der Bogenlänge parametrisierten- dopppelpunktfreien Kurve $c : \mathbb{R} \to M$.

In (60.2) haben wir eine Riemann-Mannigfaltigkeit (M, g) als geodätisch vollständig bezeichnet, wenn jede Geodäte unendliche Länge hat, oder äquivalent, auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Der folgende Satz liefert nun den Zusammenhang mit der Vollständigkeit im Sinne der Metrik, wie wir ihm in (33.2) verwendet haben.

62.10 Satz von Hopf-Rinow.
Für eine Riemann-Mannigfaltigkeit sind die ersten 3 Aussagen äquivalent und die 4.te folgt aus den anderen:

1. *M ist geodätisch vollständig.*
2. *M ist als metrischer Raum vollständig, d.h. Cauchyfolgen konvergieren.*
3. *Jede in der Metrik beschränkte und abgeschlossene Menge ist kompakt.*
4. *Je zwei Punkte lassen sich durch eine Geodäte minimaler Länge verbinden.*

Beweis. ($3 \Rightarrow 2$) Dies ist ein allgemeiner Satz aus der Topologie.

($2 \Rightarrow 1$) Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte und $]a, b[$ ihr maximaler Definitionsbereich. Sei z.B. $b < +\infty$, und betrachten wir eine Folge $b_n \nearrow b$, dann ist $c(b_n)$ eine Cauchyfolge, denn

$$d(c(t_1) - c(t_2)) < L(c|_{[t_1,t_2]}) = |t_2 - t_1|.$$

Nach (2) existiert also $\lim_{n\to\infty} c(b_n) =: c(b)$. Aus (62.8) wissen wir, daß eine Umgebung U von $c(b)$ existiert und ein $\rho > 0$, sodaß $\exp_x$ für alle $x \in U$ und alle Vektoren der Länge kleiner als ρ definiert ist. Wählen wir nun n so groß, daß $b - b_n < \frac{\rho}{2}$ und

$c(b_n) \in U$. Dann ist die Geodäte mit Anfangsrichtung $c'(b_n)$ für $|t| < \frac{\varrho}{2}$ definiert, also über b hinaus, Widerspruch.

($1 \Rightarrow 4$) Es sei $r := d(x,y) > 0$. Wir wählen ein $0 < \rho < r$, so daß $\exp_x : B_\rho(0) \to M$ injektiv ist. Sei $0 < \rho_1 < \rho$ und $S := \exp_x(\partial B_{\rho_1}(0))$. Da S kompakt ist, existiert ein $x_1 \in S$ mit $d(x_1, y)$ minimal. Sei $v \in T_xM$ mit $|v| = 1$ und $x_1 := \exp_x(\rho_1 v)$, Wir behaupten, daß $\exp_x(rv) = y$, also $c(t) := \exp_x(tv)$ eine minimale Geodäte von x nach y ist.

Zuerst zeigen wir: $d(c(t), y) = r - t$ für $0 \leq t \leq r$. Offensichtlich stimmt diese Gleichung für $t = \rho_1$, denn da jede Kurve von x nach y die Menge S trifft, gilt:

$$r = d(x,y) = \min_{s \in S}(d(x,s) + d(s,y)) = \rho_1 + d(x_1, y) = \rho_1 + d(c(\rho_1), y).$$

Sei nun t_0 das Infimum jener t, für welche die Gleichung nicht stimmt. Da die Bedingung abgeschlossen ist, gilt für t_0 die Gleichung. Inbesondere ist also $t_0 < r$. Sei S_0 ein geodätischer Kreis um $c(t_0)$ mit Radius $\rho_0 < r - t_0$, sei weiters x_0 ein Punkt auf S_0 mit minimalem Abstand von y, und sei c_0 eine Geodäte minimaler Länge von $c(t_0)$ nach x_0. Dann gilt:

$$d(c(t_0), y) = \min_{s \in S_0}(d(c(t_0), s) + d(s, y)) = \rho_0 + d(x_0, y)$$

und somit $d(x_0, y) = (r - t_0) - \rho_0$. Weiters ist

$$d(x, x_0) \geq d(x,y) - d(x_0, y) = r - (r - t_0) + \rho_0 = t_0 + \rho_0,$$

also hat die Kurve $c|_{[0,t_0]}$ gefolgt von c' die Länge $t_0 + \rho_0 \leq d(x, x_0)$ und somit gilt $d(x, x_0) = t_0 + \rho_0$. Und somit gilt die Gleichung auch noch für $t_0 + \rho_0$ für alle kleinen ρ. Das ist ein Widerspruch dazu, daß t_0 das Infimum jener t ist, für die die Gleichung falsch ist.

($1 \Rightarrow 3$) Sei $A \subseteq M$ abgeschlossen und beschränkt, i.e.

$$\sup\{d(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in A\} =: r < \infty.$$

Dann gilt nach (4): $B := \exp_x\{B_r(0)\} \supseteq A$, und B ist als stetiges Bild der kompakten Menge $B_r(0)$ kompakt, also auch A. □

62.11 Satz. *Sei (M, g) eine vollständige Riemann-Mannigfaltigkeit, und sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein bezüglich g beschränktes Vektorfeld. Dann ist X vollständig, d.h. hat einen globalen Fluß.*

Beweis. Sei $|X(x)|_g \leq R$ für alle $x \in M$ und sei c eine Lösungskurve von X, dann gilt:

$$L(c|_{[a,b]}) = \int_a^b |c'(t)|_g \, dt = \int_a^b |X(c(t))|_g \, dt \leq |b - a| \, R$$

Also bleibt c auf endlichen Intervallen innerhalb einer beschränkten, und wegen der Vollständigkeit innerhalb einer kompakten Menge. Dies ist ein Widerspruch zu (28.3). □

62.12 Satz von Nomitzu-Ozeki. *Zu jeder Riemann-Metrik gibt es immer eine konform äquivalente, die geodätisch vollständig ist.*

Beweis. Sei (M,g) eine Riemann-Mannigfaltigkeit und d die assoziierte Metrik zu g. Sei $B_r(X) := \{y \in M : d(x,y) < r\}$. Dann setzen wir

$$r(x) := \sup\{\rho > 0 : B_\rho(x) \text{ ist kompakt }\}.$$

Aus der Dreiecksungleichung für d folgt sofort $|r(x_1) - r(x_2)| < d(x_1,x_2)$. Also ist r stetig, und falls $r(x) = +\infty$ für ein x, so auch für alle anderen $x \in M$, und damit jede abgeschlossene beschränkte Menge kompakt, also ist M nach (62.10) vollständig. Wir dürfen also annehmen, daß $r : M \to \mathbb{R}$. Nun wählen wir mittels Partition der 1 eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $f(x) > \frac{1}{r(x)}$ für alle $x \in M$. Und betrachten die konform äquivalente Metrik $d_f := f^2\, g$.

Bleibt zu zeigen, daß g_f vollständig ist. Dafür genügt es die Inklusion $B^{g_f}_{1/3}(x) \subseteq B^g_{r(x)/2}(x)$ zu beweisen, denn dann hat jede Geodäte mindestens Länge $\frac{1}{3}$, und somit durch aneinanderstückeln unendliche Länge. D.h. g_f ist vollständig.

Sei also $y \in B^g_{r(x)/2}(x)$ und $c : [a,b] \to M$ eine glatte Kurve von x nach y dann gilt: $L^g(c) = \int_a^b |c'(t)|_g\, dt \geq d(x,y) > \frac{r(x)}{2}$ und

$$\begin{aligned}
L^{g_f}(c) &= \int_a^b |c'(t)|_{g_f}\, dt \\
&= \int_a^b f(c(t))\, |c'(t)|_g\, dt = && \text{(nach dem Mittelwertsatz)} \\
&= f(c(\tau)) \int_a^b |c'(t)|_g\, dt \\
&= f(c(\tau))\, L^g(c) > \frac{L(c)}{r(c(\tau))}.
\end{aligned}$$

Wegen $|r(x) - r(c(\tau))| \leq d(x, c(\tau)) \leq L^g(c)$ gilt $r(c(\tau)) \leq r(x) + L^g(c)$ und somit

$$L^{g_f}(c) > \frac{L^g(c)}{r(c(\tau))} \geq \frac{L^g(c)}{r(x) + L^g(c)} > \frac{L^g(c)}{2L^g(c) + L^g(c)} = \frac{1}{3} \qquad \square$$

62.13 Lemma (Divergenz via kovarianter Ableitung). *Sei ξ ein Vektorfeld auf der orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M so gilt:*

$$\operatorname{div} \xi = \operatorname{Spur}(\eta \mapsto \nabla_\eta \xi).$$

Beweis. Für die Divergenz, die wir aus der äußeren Ableitung durch Anwendung des Hodge-Stern-Operators gewonnen haben, und die wir auch mittels Lie-Ableitung der Volumsform beschrieben haben, gilt folgende lokale Formel:

$$\operatorname{div} \xi = \tfrac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^m \tfrac{\partial}{\partial u^i}\Big(\sqrt{G}\xi^i\Big) = \sum_{i=1}^m \Big(\tfrac{\partial}{\partial u^i}\xi^i + \xi^i \tfrac{1}{2G}\tfrac{\partial}{\partial u^i} G\Big).$$

Für ∇_ξ haben wir die lokale Formel:

$$\begin{aligned}\nabla_{g_i}\xi &= \sum_{j=1}^m \big(\xi^j \nabla_{g_i} g_j + \tfrac{\partial}{\partial u^i}(\xi^j) g_j\big)\\ &= \sum_{j=1}^m \left(\xi^j \sum_{k=1}^m \Gamma^k_{i,j} g_k + \tfrac{\partial}{\partial u^i}(\xi^j) g_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \xi^k \Gamma^j_{i,k} + \tfrac{\partial}{\partial u^i}\xi^j\right) g_j.\end{aligned}$$

Für die Spur von $\eta \mapsto \nabla_\eta \xi$ erhalten wir also

$$\operatorname{Spur}(\nabla_{.}\xi) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \xi^k \Gamma^i_{i,k} + \tfrac{\partial}{\partial u^i}\xi^i\right).$$

Wegen $\det'(A)(B) = \det(A)\cdot \operatorname{Spur}(A^{-1}B)$ gilt schließlich:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2G}\tfrac{\partial}{\partial u^k} G &= \tfrac{1}{2G} G \operatorname{Spur}((g^{i,j})(\tfrac{\partial}{\partial u^k} g_{i,j}))\\ &= \tfrac12 \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m g^{j,i}(\Gamma_{k,i,j} + \Gamma_{k,j,i}) = \sum_{i=1}^m \Gamma^i_{k,i} = \sum_{i=1}^m \Gamma^i_{i,k}. \qquad \square\end{aligned}$$

63. Jacobi-Felder

63.1 Bemerkung

Sei $c : [0,a] \to M$ eine Geodäte in einer Riemannschen Fläche. Diese läßt sich als radiale Geodäte der Form $c(t) = \exp_{c(0)}(t\,c'(0))$ schreiben. Sei dazu $x := c(0)$ und $v := c'(0)$. Wir wollen benachbarte radiale Geodäten diskutieren. Es gibt eine Umgebung um $[0,a]\times\{v\} \subset \mathbb{R}\times T_xM$, auf welcher exp wohldefiniert ist. Damit existieren auf dem Intervall $[0,a]$ die radialen Geodäten, welche bei x in eine Richtung nahe v starten. Betrachten wir nun die Variation $(t,w) \mapsto \exp_x(t(v+w))$ mit $w \perp v$. Die Richtungsableitung $\xi(t) := (T_{tv}\exp_x)(tw)$ an der Stelle $(t,0)$ in Richtung $(0,w)$ definiert ein Vektorfeld ξ längs c.

Wir wollen nun zeigen, daß das Vektorfeld ξ die Jacobi-Gleichung

$$\nabla^2\xi(t) + K(c(t))\,\xi(t) = 0$$

mit den Anfangswerten $\xi(0) = 0$ und $\nabla\xi(0) = w$ erfüllt.

Da

$$\varphi : (r,\theta) \mapsto \exp_x(r(\cos\theta v + \sin\theta w)) \text{ für } |w| = 1 = |v|$$

geodätische Parallelkoordinaten sind, also $E = 1$, $F = 0$, $G > 0$ erfüllen, gilt die Jacobi-Gleichung $K = -\big(\frac{\partial}{\partial r}\big)^2\sqrt{G}$ aus (53.9).

$$\begin{aligned}\text{Für } \xi(t) :&= \tfrac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \exp_x(t(v+sw))\\ &= \tfrac{\partial}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0} \exp_x(t\cos\theta v + t\sin\theta w) = \partial_2\varphi(t,0)\end{aligned}$$

ist $|\xi|^2 = |\partial_2\varphi|^2 = G$.

Das Vektorfeld ξ steht normal auf c', da die radialen Geodäten die geodätischen Sphären orthogonal schneiden, also läßt sich ξ als $\lambda(t)\nu(t)$ schreiben, wobei ν das Einheitsnormalenfeld zu c' in TM ist. Folglich gilt $\lambda'' + (K \circ c)\lambda = 0$. Da c eine Geodäte ist, ist c' ein paralleles Vektorfeld (siehe (61.1)) längs c und ebenso ν. Also gilt für die kovariante Ableitung von ξ:

$$\nabla\xi = \nabla(\lambda\,\nu) = \lambda\,\nabla\nu + \lambda'\,\nu = \lambda'\,\nu \quad \Rightarrow\Rightarrow \quad \nabla^2\xi = \lambda''\,\nu \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \nabla^2\xi + K\,\xi = \lambda''\,\nu + K\,\lambda\,\nu = (\lambda'' + k\,\lambda)\nu = 0$$

63.2 Definition (Jacobi-Felder)

Wir nennen ein Vektorfeld ξ längs einer Geodäte c ein Jacobi-Feld falls es die Jacobi-Gleichung

$$\nabla^2\xi + (K \circ c)\,\xi = 0$$

erfüllt und orthonormal auf die Geodäte steht.

63.3 Lemma. *Die Jacobi-Felder ξ längs einer Geodäte c mit Anfangsbedingung $\xi(0) = 0$ sind genau jene Vektorfelder, welche sich als $\xi(t) := (T_{tc'(0)} \exp_{c(0)})(tw)$ mit $w \in c'(0)^\perp \subset T_{c(0)}M$ schreiben lassen.*

Beweis. Wir haben gerade gezeigt, daß so darstellbare Vektorfelder Jacobi-Felder sind. Berechnen wir nun noch deren Anfangswerte. Klarerweise ist

$$\xi(0) = (T_{0c'(0)} \exp_{c(0)})(0w) = 0.$$

Bezüglich der Koordinaten $(u^1, u^2) \mapsto \exp_x(u^1\,v + u^2\,w)$ gilt $u^1(t) = t$, $u^2(t) = 0$, $\xi^1(t) = 0$ und $\xi^2(t) = t$. Also ist

$$\nabla\xi(0) = \sum_{k=1}^{2} \left(\tfrac{\partial}{\partial u^2} + \Gamma^k_{2,1} \cdot t \cdot 1 \cdot \tfrac{\partial}{\partial u^k}\right) = \tfrac{\partial}{\partial u^2} = w.$$

Da die lineare Differentialgleichung 2.ter Ordnung $\lambda'' + (K \circ c)\,\lambda = 0$ aber zu jedem Anfangswert eine eindeutige Lösung hat, muß diese obige Gestalt besitzen. □

Sei nun M eine vollständige Riemann-Mannigfaltigkeit und c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte in M. Wir haben gesehen, daß Kurven die in geodätischen Parallelkoordinaten nahe an c liegen, keine kürzere Bogenlänge haben können. Wir untersuchen nun die Frage, wann wir geodätische Polarkoordinaten um $c(0)$ finden können, welche bis zu $c(t)$ reichen. Dazu folgende

63.4 Definition (Konjugierte Punkte)

Es sei $c(t) = \exp_{c(0)}(tc'(0))$ eine Geodäte in M. Ein Punkt $c(t)$ heißt konjugiert zu $c(0)$ falls das Differential $T_{tc'(0)}(exp_{c(t)})$ der Exponentialabbildung bei $tc'(0) \in T_{c(0)}M$ kein Isomorphismus von $T_{c(0)}M = T_{tc'(0)}T_{c(0)}M$ nach $T_{c(t)}M$ ist.

63.5 Satz (Konjugierte Punkte). *Für eine Geodäte c in einer vollständigen Riemannschen Fläche sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *$c(t)$ ist konjugiert zu $c(0)$ längs c.*

2. *Es existiert ein nicht-verschwindendes Jacobi-Vektorfeld ξ längs c mit $\xi(t) = 0 = \xi(0)$.*

Beweis. Nach (63.3) können wir ein nichttriviales Jacobi-Feld mit Anfangsbedingung $\xi(0) = 0$ und $\nabla\xi(0) = \xi_0 \perp c'(0)$ finden, dieses ist gegeben durch:

$$\xi(t) := (T_{tc'(0)} \exp_{c(0)})(t\xi(0)).$$

Also ist $\xi(t) = 0$ genau dann, wenn $t\xi(0)$ im Kern von $T_{tc'(0)} \exp_x$ liegt. Nun brauchen wir nur noch zu beachten, daß $(T_{tv} \exp_x)(v) = c'(t) \neq 0$ und $(T_{tv} \exp_x)(w) \perp c'(t)$ für alle $w \perp v$ gilt. Also ist der Kern von $(T_{tv} \exp_x)(w)$ die Menge $\{\xi(t) : \xi \text{ ist ein Jacobi-Feld längs } c\}$. Da $\exp_x : T_xM \to M$ eine Abbildung zwischen gleichdimensionalen Räumen ist, ist die Aussage $\operatorname{Ker}(T_{tv} \exp_x) = 0$ damit äquivalent, daß $T_{tv} \exp_x$ ein Isomorphismus ist. □

63.6 Folgerung. *Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte. Falls c im Inneren eines Parameterintervalls $[t_1, t_2]$ keine konjugierte Punkte enthält, so gilt $L(c_1) \geq L(c)$ für jede nahe c gelegene Kurve c_1.*

Es gilt auch die Umkehrung, siehe [**70**].

Beweis. Wie im Beweis von (63.3) betrachten wir eine Abbildung φ nach geodätischen Polarkoordinaten um $c(0)$. Wegen (63.5) ist diese Abbildung ein lokaler Diffeomorphismus in jedem Punkt von $]t_1, t_0[\times \{0\}$. Also haben wir, abgesehen von den Randpunkten, geodätische Parallelkoordinaten längs c. Nach (58.7) ist dann die Länge jeder nahe c gelegenen Kurve mindestens so groß wie jene von c. □

Durch Abschätzen der Lösungen der linearen Jacobi-Gleichung erhält man:

63.7 Folgerung. *Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte, so daß $K_0 \leq K(c(t)) \leq K_1$. Dann liegt in jedem offenen Intervall der Länge $\frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$ kein Paar konjugierter Punkte. In jedem abgeschlossenen Intervall der Länge $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ hingegen liegt ein Paar konjugierter Punkte.*

Ohne Beweis, siehe [**83**, S.118].

63.8 Theorem von Bonnet. *Ist M eine vollständige Riemannsche Fläche und $K \geq K_0 > 0$, so ist der geodätischen Abstand je zweier Punkte höchstens $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$. Insbesondere ist M kompakt.*

Beweis. Wegen (63.7) enthält jeder geodätische Bogen, dessen Länge größer als $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ ist, konjugierte Punkte, und somit kann er nicht die kürzeste Verbindung darstellen. Damit sind seine Endpunkte aber höchstens $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ entfernt. Insbesondere ist der Durchmesser

$$d(M) := \inf\{d(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in M\} \leq \frac{\pi}{\sqrt{K_0}},$$

und somit ist M nach (62.10) M kompakt. □

63.9 Theorem [**32**]. *Die Exponential-Abbildung jeder vollständigen Riemann-Fläche mit $K \leq 0$ ist für jedes $x \in M$ eine Überlagerung $\exp_x : T_xM \to M$. Ist also M zusätzlich einfachzusammenhängend, so ist $\exp_x : T_xM \to M$ ein Diffeomorphismus.*

Ohne Beweis, siehe [**83**, 6.6.4].

Auf allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten sieht die Jacobi-Gleichung wie folgt aus:

$$\nabla^2\xi + R(\xi, c')c' = 0$$

Ihre Lösungen heißen wieder Jacobi-Felder, die genau die Richtungsableitung von 1-Parameter-Variationen der Geodäte c sind. Die Darstellung für Jacobi-Felder ξ mit $\xi(0) = 0$ via der Ableitung von $\exp_{c(0)}$ gilt genau wie im 2-Dimensionalen. Der Randwert dieser Jacobi-Felder beschreibt den Kern der Exponentialabbildung, und somit konjugierte Punkte. Ebenso gilt dann (63.6) und (63.8) [Myres1935] und (63.9) [ECartan1928]. Für Beweise dieser Resultate siehe z.B. [**60**].

64. Riemann-, Ricci- und Schnittkrümmung

Seien 2 Vektorfelder ξ und η im $\mathbb{R}^n$ gegeben. Dann gilt für die übliche Ableitung des Vektorfelds ξ in Richtung η, die wir hier auch mit $D_\eta\xi : x \mapsto \xi'(x)(\eta(x))$ bezeichnen wollen:

$$[D_\xi, D_\eta] := D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi = D_{[\xi,\eta]},$$

denn

$$\begin{aligned}(D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi)\Big((\zeta^i)_{i=1}^m\Big) &= \big(\xi(\eta(\zeta^i)) - \eta(\xi(\zeta^i))\big)_{i=1}^m \\ &= [\xi, \eta](\zeta^i)_{i=1}^m = D_{[\xi,\eta]}\big((\zeta^i)_{i=1}^m\big)\end{aligned}$$

64.1 Satz (Godazzi-Mainardi-Gleichung).
Sei M eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ und seien ξ, η, ζ Vektorfelder im $\mathbb{R}^n$, welche längs M tangential an M sind. Dann ist

1. $\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta - \nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \nabla_{[\xi,\eta]}\zeta = \langle L\,\eta, \zeta\rangle L\,\xi - \langle L\,\xi, \zeta\rangle L\,\eta,$
2. $\nabla_\xi L\,\eta - \nabla_\eta L\,\xi = L[\xi, \eta].$

Die erste Gleichung wird auch als Gauss-Gleichung *und die zweite als* Godazzi-Mainardi-Gleichung *bezeichnet.*

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}0 &= D_\xi D_\eta\zeta - D_\eta D_\xi\zeta - D_{[\xi,\eta]}\zeta \overset{(62.2)}{=\!=} \\ &= D_\xi\Big(\nabla_\eta\zeta - \langle L\,\eta, \zeta\rangle\nu\Big) - D_\eta\Big(\nabla_\xi\zeta - \langle L\,\xi, \zeta\rangle\nu\Big) - D_{[\xi,\eta]}\zeta \\ &= D_\xi\nabla_\eta\zeta - \xi(\langle L\,\eta, \zeta\rangle)\nu - \langle L\eta, \zeta\rangle D_\xi\nu \\ &\quad - D_\eta\nabla_\xi\zeta + \eta(\langle L\,\xi, \zeta\rangle)\nu + \langle L\xi, \zeta\rangle D_\eta\nu \\ &\quad - \nabla_{[\xi,\eta]}\zeta + \langle L\,[\xi, \eta], \zeta\rangle\nu \\ &= \nabla_\xi\nabla_\eta\zeta - \langle L\,\xi, \nabla_\eta\zeta\rangle\nu - \xi(\langle L\,\eta, \zeta\rangle)\nu - \langle L\,\eta, \zeta\rangle L\,\xi \\ &\quad - \nabla_\eta\nabla_\xi\zeta + \langle L\,\eta, \nabla_\xi\zeta\rangle\nu + \eta(\langle L\,\xi, \zeta\rangle)\nu + \langle L\,\xi, \zeta\rangle L\,\eta \\ &\quad - \nabla_{[\xi,\eta]}\zeta + \langle L\,[\xi, \eta], \zeta\rangle\nu.\end{aligned}$$

Der Tangentialanteil hiervon ist:

$$0 = \nabla_\xi\nabla_\eta\zeta - \nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \nabla_{[\xi,\eta]} - \langle L\,\eta, \zeta\rangle L\,\xi + \langle L\,\xi, \zeta\rangle L\,\eta$$

Und der Normalanteil ist:

$$\begin{aligned}0 &= -\langle \nabla_\eta \zeta, L\,\xi\rangle - \xi\langle L\,\eta, \zeta\rangle + \langle \nabla_\xi \zeta, L\,\eta\rangle + \eta\langle L\,\xi, \zeta\rangle + \langle L\,[\xi,\eta], \zeta\rangle \\ &= \Big\langle -\nabla_\xi(L\,\eta) + \nabla_\eta(L\,\xi) + L\,[\xi,\eta], \zeta\Big\rangle. \qquad \square\end{aligned}$$

64.2 Definition (Riemann-Krümmung)

Die Riemann-Krümmung $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to L(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$ einer Riemann-Mannigfaltigkeit ist definiert durch die linke Seite der Gauß-Gleichung:

$$R(\xi,\eta) := [\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi,\eta]}.$$

Die Motivation hierfür ist, daß die rechte Seite auf η angewandt und ins innner Produkt mit ξ genommen für orthonormale Vektoren ξ und η gerade die Gaußkrümmung liefert:

$$\begin{aligned}&\langle\langle L\,\eta, \eta\rangle L\,\xi - \langle L\,\xi, \eta\rangle L\,\eta, \xi\rangle = \\ &\qquad = \langle L\,\eta, \eta\rangle\langle L\,\xi, \xi\rangle - \langle L\,\xi, \eta\rangle\langle L\,\eta, \xi\rangle = \det(L) = K.\end{aligned}$$

64.3 Lemma (Die Riemann-Krümmung ist Tensorfeld).

Die Riemann-Krümmung ist ein 3-fach ko- und 1-fach kontravariantes Tensorfeld auf M, d.h. $R \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes TM$.

(Koordinatenfreier) Beweis. Dazu muß man nur zeigen, daß die Abbildung $(\xi,\eta,\zeta) \mapsto R(\xi,\eta)(\zeta)$ in allen Variablen $C^\infty(M,\mathbb{R})$-homogen ist.

$$\begin{aligned}R(f\xi,\eta) &= [\nabla_{f\xi}, \nabla_\eta] - \nabla_{[f\xi,\eta]} \\ &= [f\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{f[\xi,\eta]-\eta(f)\xi} \\ \\ &= (f\nabla_\xi)\nabla_\eta - \nabla_\eta(f\nabla_\xi) - f\nabla_{[\xi,\eta]} + \eta(f)\nabla_\xi \\ &= f\nabla_\xi\nabla_\eta - f\nabla_\eta\nabla_\xi - \eta(f)\nabla_\xi - f\nabla_{[\xi,\eta]} + \eta(f)\nabla_\xi \\ &= f\left([\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi,\eta]}\right) + 0 \\ &= f\,R(\xi,\eta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(\xi,\eta)(f\zeta) &= \left([\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi,\eta]}\right)(f\zeta) \\ &= \nabla_\xi(f\nabla_\eta\zeta + \eta(f)\zeta) - \nabla_\eta(f\nabla_\xi\zeta + \xi(f)\zeta) \\ &\qquad - f\nabla_{[\xi,\eta]}\zeta - [\xi,\eta](f)\zeta \\ &= f\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta + \xi(f)\nabla_\eta\zeta + \eta(f)\nabla_\xi\zeta + \xi(\eta(f))\zeta \\ &\qquad - f\nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \eta(f)\nabla_\xi\zeta - \xi(f)\nabla_\eta\zeta - \eta(\xi(f))\zeta \\ &\qquad - f\nabla_{[\xi,\eta]}\zeta - \xi(\eta(f))\zeta + \eta(\xi(f))\zeta \\ &= f\left(\nabla_\xi\nabla_\eta - \nabla_\eta\nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]}\right)\zeta \\ &= f\,R(\xi,\eta)(\zeta). \qquad \square\end{aligned}$$

Koordinatenbeweis.

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= \nabla_X\left(\sum_i\left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}Y^k + \sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}Z^jY^k\right)\frac{\partial}{\partial u^i}\right) \\
&\quad - \nabla_Y\left(\sum_i\left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}X^k + \sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}Z^jX^k\right)\frac{\partial}{\partial u^i}\right) \\
&\quad - \nabla_{\sum_{i,j}\left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial u^i}\right)\frac{\partial}{\partial u^j}}Z \\
&= \sum_i\left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}Y^k + \sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}Z^jY^k\right)\nabla_X\frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad + X\left(\sum_i\left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}Y^k + \sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}Z^jY^k\right)\right)\frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_i\left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}X^k + \sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}Z^jX^k\right)\nabla_Y\frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - Y\left(\sum_i\left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}X^k + \sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}Z^jX^k\right)\right)\frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_{i,j}\left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial u^i}\right)\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}Z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i \Big(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, Y^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Z^j Y^k \Big) \; \sum_l X^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^l}} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad + \sum_i \Big(\sum_k X(\frac{\partial Z^i}{\partial u^k})\, Y^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, X(Y^k) \\
&\quad + \sum_{j,k} X(\Gamma^i_{j,k}) Z^j Y^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} X(Z^j) Y^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Z^j X(Y^k) \Big) \; \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_i \Big(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, X^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Z^j X^k \Big) \; \sum_l Y^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^l}} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_i \Big(\sum_k Y(\frac{\partial Z^i}{\partial u^k})\, X^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, Y(X^k) \\
&\quad + \sum_{j,k} Y(\Gamma^i_{j,k}) Z^j X^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Y(Z^j) X^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Z^j Y(X^k) \Big) \; \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_{i,j} \Big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \Big) \; \sum_l \Big(Z^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^l} + \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i \Big(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, Y^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Z^j Y^k \Big) \; \sum_l X^l \sum_p \Gamma^p_{l,i} \; \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&\quad + \sum_i \Big(\sum_k \sum_p X^p \frac{\partial \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}}{\partial u^p}\, Y^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \; \sum_p X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \\
&\quad + \sum_{j,k} \sum_p X^p \frac{\partial \Gamma^i_{j,k}}{\partial u^p} Z^j Y^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} \sum_p X^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} Y^k \\
&\quad + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Z^j \sum_p X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \Big) \; \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_i \Big(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, X^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Z^j X^k \Big) \; \sum_l Y^l \sum_p \Gamma^p_{i,l} \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&\quad - \sum_i \Big(\sum_k \sum_p Y^p \frac{\partial \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}}{\partial u^p}\, X^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \; \sum_p Y^p \frac{\partial X^k}{\partial u^p} \\
&\quad + \sum_{j,k} \sum_p Y^p \frac{\partial \Gamma^i_{j,k}}{\partial u^p} Z^j X^k + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} \sum_p Y^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} X^k \\
&\quad + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} Z^j \sum_p Y^p \frac{\partial X^k}{\partial u^p} \Big) \; \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_{i,j} \Big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \Big) \; \sum_l \Big(Z^l \sum_p \Gamma^p_{j,l} \frac{\partial}{\partial u^p} + \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,k,l,p} X^l\, Y^k\, \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, \Gamma^p_{l,i}\, \frac{\partial}{\partial u^p} + \sum_{i,j,k,l,p} X^l\, Y^k\, Z^j\, \Gamma^i_{j,k}\, \Gamma^p_{l,i}\, \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&\quad + \sum_{i,k,p} X^p\, Y^k\, \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p}\, \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,k,p} X^p\, \frac{\partial Y^k}{\partial u^p}\, \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad + \sum_{i,j,k,p} X^p\, Y^k\, Z^j\, \frac{\partial \Gamma^i_{j,k}}{\partial u^p}\, \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,k,p} X^p\, Y^k\, \frac{\partial Z^j}{\partial u^p}\, \Gamma^i_{j,k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad + \sum_{i,j,k,p} X^p\, \frac{\partial Y^k}{\partial u^p}\, Z^j\, \Gamma^i_{j,k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_{i,k,l,p} X^k\, Y^l\, \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, \Gamma^p_{i,l}\, \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,l,p} X^k\, Y^l\, Z^j\, \Gamma^i_{j,k}\, \Gamma^p_{i,l}\, \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&\quad - \sum_{i,k,p} X^k\, Y^p\, \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p}\, \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p}\, Y^p\, \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_{i,j,k,p} X^k\, Y^p\, Z^j\, \frac{\partial \Gamma^i_{j,k}}{\partial u^p}\, \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,k,p} X^k\, Y^p\, \frac{\partial Z^j}{\partial u^p}\, \Gamma^i_{j,k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_{i,j,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p}\, Y^p\, Z^j\, \Gamma^i_{j,k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_{i,j,l,p} X^i\, \frac{\partial Y^j}{\partial u^i}\, Z^l\, \Gamma^p_{j,l}\, \frac{\partial}{\partial u^p} + \sum_{i,j,l,p} \frac{\partial X^j}{\partial u^i}\, Y^i\, Z^l\, \Gamma^p_{j,l}\, \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&\quad - \sum_{i,j,l} X^i\, \frac{\partial Y^j}{\partial u^i}\, \frac{\partial Z^l}{\partial u^j}\, \frac{\partial}{\partial u^l} + \sum_{i,j,l} \frac{\partial X^j}{\partial u^i}\, Y^i\, \frac{\partial Z^l}{\partial u^j}\, \frac{\partial}{\partial u^l}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j,k,p} X^p\, Y^k\, Z^j\, \frac{\partial \Gamma^i_{j,k}}{\partial u^p}\, \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,k,p} X^k\, Y^p\, Z^j\, \frac{\partial \Gamma^i_{j,k}}{\partial u^p}\, \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad + \sum_{i,j,k,l,p} X^l\, Y^k\, Z^j\, \Gamma^i_{j,k}\, \Gamma^p_{l,i}\, \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,l,p} X^k\, Y^l\, Z^j\, \Gamma^i_{j,k}\, \Gamma^p_{i,l}\, \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&\quad + \sum_{i,k,l,p} X^l\, Y^k\, \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, \Gamma^p_{l,i}\, \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,p} X^k\, Y^p\, \frac{\partial Z^j}{\partial u^p}\, \Gamma^i_{j,k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad + \sum_{i,j,k,p} X^p\, Y^k\, \frac{\partial Z^j}{\partial u^p}\, \Gamma^i_{j,k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,l,p} X^k\, Y^l\, \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, \Gamma^p_{i,l}\, \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&\quad + \sum_{i,j,k,p} X^p\, \frac{\partial Y^k}{\partial u^p}\, Z^j\, \Gamma^i_{j,k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,l,p} X^i\, \frac{\partial Y^j}{\partial u^i}\, Z^l\, \Gamma^p_{j,l}\, \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&\quad - \sum_{i,j,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p}\, Y^p\, Z^j\, \Gamma^i_{j,k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,l,p} \frac{\partial X^j}{\partial u^i}\, Y^i\, Z^l\, \Gamma^p_{j,l}\, \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&\quad + \sum_{i,k,p} X^p\, \frac{\partial Y^k}{\partial u^p}\, \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,l} X^i\, \frac{\partial Y^j}{\partial u^i}\, \frac{\partial Z^l}{\partial u^j}\, \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&\quad - \sum_{i,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p}\, Y^p\, \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\, \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,l} \frac{\partial X^j}{\partial u^i}\, Y^i\, \frac{\partial Z^l}{\partial u^j}\, \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&\quad + \sum_{i,k,p} X^p\, Y^k\, \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p}\, \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,p} X^k\, Y^p\, \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p}\, \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&= \sum_p \sum_{i,j,k} X^i\, Y^j\, Z^k\, \underbrace{\left(\frac{\partial \Gamma^p_{k,j}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^p_{k,i}}{\partial u^j} + \sum_l \Big(\Gamma^l_{k,j}\, \Gamma^p_{i,l} - \Gamma^l_{k,i}\, \Gamma^p_{l,j} \Big) \right)}_{=:R^p_{i,j,k}}\, \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&= \sum_p \sum_{i,j,k} X^i\, Y^j\, Z^k\, R^p_{i,j,k}\, \frac{\partial}{\partial u^p} \qquad \square
\end{aligned}
$$

64.4 Bemerkung

In lokalen Koordinaten haben wir von

$$R = \sum_{i,j,k,l} R^l_{i,j,k}\, du^i \otimes du^j \otimes du^k \otimes \tfrac{\partial}{\partial u^l}$$

$$\text{mit} \quad R^l_{i,j,k} = \tfrac{\partial}{\partial u^i} \Gamma^l_{j,k} - \tfrac{\partial}{\partial u^j} \Gamma^l_{i,k} + \sum_{p=1}^m (\Gamma^p_{j,k} \Gamma^l_{i,p} - \Gamma^p_{i,k} \Gamma^l_{j,p})$$

Beziehungsweise für $R(\xi,\eta,\zeta,\chi) := \langle R(\xi,\eta)\zeta,\chi\rangle$

$$R = \sum_{i,j,k,l} R_{i,j,k,l}\; du^i \otimes du^j \otimes du^k \otimes du^l$$

$$\text{mit}\quad R_{i,j,k,l} = \sum_{p=1}^m R^p_{i,j,k} g_{p,l}$$

$$\begin{aligned} &= \tfrac12\left(\tfrac{\partial^2}{\partial u^i\partial u^k} g_{l,j} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^i\partial u^l} g_{j,k} + \tfrac{\partial^2}{\partial u^j\partial u^l} g_{i,k} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^j\partial u^k} g_{l,i}\right)\\ &\quad + \sum_{p=1}^m\sum_{q=1}^m g^{p,q}(\Gamma_{i,k,q}\Gamma_{j,p,l} - \Gamma_{j,k,q}\Gamma_{i,l,p}).\end{aligned}$$

Beweis. Wir rechnen wie folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^m R^l_{i,j,k}\tfrac{\partial}{\partial u^l} &= R(\tfrac{\partial}{\partial u^i},\tfrac{\partial}{\partial u^j})\tfrac{\partial}{\partial u^k} = \left(\left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}},\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\right] - \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right]}\right)\tfrac{\partial}{\partial u^k}\\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\left(\sum_{l=1}^m \Gamma^l_{j,k}\tfrac{\partial}{\partial u^l}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\left(\sum_{l=1}^m \Gamma^l_{i,k}\tfrac{\partial}{\partial u^l}\right) + 0\\
&= \sum_{l=1}^m\left(\Gamma^l_{j,k}\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\tfrac{\partial}{\partial u^l} + \tfrac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma^l_{j,k})\tfrac{\partial}{\partial u^l}\right)\\
&\qquad - \sum_{l=1}^m\left(\Gamma^l_{i,k}\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\tfrac{\partial}{\partial u^l} + \tfrac{\partial}{\partial u^j}(\Gamma^l_{i,k})\tfrac{\partial}{\partial u^l}\right)\\
&= \sum_{l=1}^m\left(\Gamma^l_{j,k}\sum_{p=1}^m\Gamma^p_{i,l}\tfrac{\partial}{\partial u^p} + \tfrac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma^l_{j,k})\tfrac{\partial}{\partial u^l}\right)\\
&\qquad - \sum_{l=1}^m\left(\Gamma^l_{i,k}\sum_{p=1}^m\Gamma^p_{j,l}\tfrac{\partial}{\partial u^p} + \tfrac{\partial}{\partial u^j}(\Gamma^l_{i,k})\tfrac{\partial}{\partial u^l}\right)\\
&= \sum_{l=1}^m\sum_{p=1}^m\left(\Gamma^p_{j,k}\Gamma^l_{i,p} - \Gamma^p_{i,k}\Gamma^l_{j,p}\right)\tfrac{\partial}{\partial u^l}\\
&\qquad + \sum_{l=1}^m\left(\tfrac{\partial}{\partial u^i}\Gamma^l_{j,k} - \tfrac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^l_{i,k}\right)\tfrac{\partial}{\partial u^l}.
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$R^l_{i,j,k} = \tfrac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma^l_{j,k}) - \tfrac{\partial}{\partial u^j}(\Gamma^l_{i,k}) + \sum_{p=1}^m(\Gamma^p_{j,k}\Gamma^l_{i,p} - \Gamma^p_{i,k}\Gamma^l_{j,p}).$$

Nun berechnen wir $R_{i,j,k,l} := \sum_{p=1}^m R^p_{i,j,k} g_{p,l}$:

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^m \tfrac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma^p_{j,k})g_{p,l} &= \tfrac{\partial}{\partial u^i}\left(\sum_{p=1}^m \Gamma^p_{j,k} g_{p,l}\right) - \sum_{p=1}^m \Gamma^p_{j,k}\tfrac{\partial}{\partial u^i}(g_{p,l})\\ &= \tfrac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma_{j,k,l}) - \sum_{p=1}^m \Gamma^p_{j,k}(\Gamma_{i,p,l}+\Gamma_{i,l,p}).\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}R_{i,j,k,l} &:= \langle R(\tfrac{\partial}{\partial u^i},\tfrac{\partial}{\partial u^j})\tfrac{\partial}{\partial u^k},\tfrac{\partial}{\partial u^l}\rangle = \langle \textstyle\sum_{p=1}^m R^p_{i,j,k}\tfrac{\partial}{\partial u^p},\tfrac{\partial}{\partial u^l}\rangle = \textstyle\sum_{p=1}^m R^p_{i,j,k} g_{p,l}\\ &= \textstyle\sum_{p=1}^m \Big(\tfrac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma^p_{j,k}) - \tfrac{\partial}{\partial u^j}(\Gamma^p_{i,k}) + \textstyle\sum_{q=1}^m(\Gamma^q_{j,k}\Gamma^p_{i,q} - \Gamma^q_{i,k}\Gamma^p_{j,q})\Big) g_{p,l}\\ &= \tfrac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma_{j,k,l}) - \textstyle\sum_{p=1}^m \Gamma^p_{j,k}(\underbrace{\Gamma_{i,p,l}}_{(1)} + \underbrace{\Gamma_{i,l,p}}_{(2)})\\ &\quad - \tfrac{\partial}{\partial u^j}(\Gamma_{i,k,l}) + \textstyle\sum_{p=1}^m \Gamma^p_{i,k}(\underbrace{\Gamma_{j,p,l}}_{(3)} + \underbrace{\Gamma_{j,l,p}}_{(4)})\\ &\quad + \textstyle\sum_{q=1}^m(\underbrace{\Gamma^q_{j,k}\Gamma_{i,q,l}}_{(1)} - \underbrace{\Gamma^q_{i,k}\Gamma_{j,q,l}}_{(3)})\\ &= \tfrac12\tfrac{\partial}{\partial u^i}(\tfrac{\partial}{\partial u^j}g_{k,l} + \tfrac{\partial}{\partial u^k}g_{l,j} - \tfrac{\partial}{\partial u^l}g_{j,k}) - \tfrac12\tfrac{\partial}{\partial u^j}(\tfrac{\partial}{\partial u^i}g_{k,l} + \tfrac{\partial}{\partial u^k}g_{l,i} - \tfrac{\partial}{\partial u^l}g_{i,k})\\ &\quad + \textstyle\sum_{p=1}^m(\underbrace{\Gamma^p_{i,k}\Gamma_{j,l,p}}_{(4)} - \underbrace{\Gamma^p_{j,k}\Gamma_{i,l,p}}_{(2)})\\ &= \tfrac12\Big(\tfrac{\partial^2}{\partial u^i\partial u^k}g_{l,j} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^i\partial u^l}g_{j,k} + \tfrac{\partial^2}{\partial u^j\partial u^l}g_{i,k} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^j\partial u^k}g_{l,i}\Big)\\ &\quad + \textstyle\sum_{p=1}^m\sum_{q=1}^m g^{p,q}(\Gamma_{i,k,q}\Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k,q}\Gamma_{i,l,p}). \qquad\square\end{aligned}$$

64.5 Lemma (Symmetrie der Riemann-Krümmung).
Die Riemann-Krümmung erfüllt folgende Identitäten:

1. $R(X,Y)Z + R(Y,X)Z = 0$
2. $\langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle R(X,Y)W,Z\rangle = 0$
3. $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,W)X,Y\rangle$
4. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$
5. $(\nabla_Z R)(X,Y,W) + (\nabla_X R)(Y,Z,W) + (\nabla_Y R)(Z,X,W) = 0.$

Die Gleichungen (4) und (5) heißen 1.te und 2.te BIANCHI IDENTITÄT.

Beweis.
(1) ist klar wegen der Definition $R(X,Y) := \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$.

(2) ist äquivalent zu $\langle R(X,Y)Z,Z\rangle = 0$ für alle X,Y,Z. Es ist:

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,Z) = {} & \underbrace{\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z\rangle}_{X\langle \nabla_Y Z,Z\rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle} - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle - \langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle \\
&= X(\frac{1}{2}Y(\langle Z,Z\rangle)) - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle - Y(\frac{1}{2}X(\langle Z,Z\rangle)) + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle \\
&\quad - \langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle \\
&= \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle - \langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

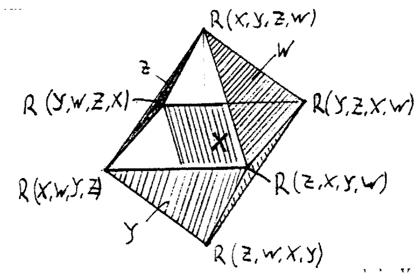
(4) Da der Levi-Civita Zusammenhang ∇ torsionsfrei ist, gilt $\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y,Z]$ und durch Anwenden von ∇_X erhalten wir:

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Y,Z]} X = \nabla_X [Y,Z] - \nabla_{[Y,Z]} X = [X,[Y,Z]]$$

Der zyklische Ausdruck läßt sich nun wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = {} & \\
= {} & \underbrace{\nabla_X \nabla_Y Z}_{(1)} - \underbrace{\nabla_Y \nabla_X Z}_{(2)} - \underbrace{\nabla_{[X,Y]} Z}_{(3)} \\
& + \underbrace{\nabla_Y \nabla_Z X}_{(2)} - \underbrace{\nabla_Z \nabla_Y X}_{(3)} - \underbrace{\nabla_{[Y,Z]} X}_{(1)} \\
& + \underbrace{\nabla_Z \nabla_X Y}_{(3)} - \underbrace{\nabla_X \nabla_Z Y}_{(1)} - \underbrace{\nabla_{[Z,X]} Y}_{(2)} \\
= {} & \underbrace{[X,[Y,Z]]}_{(1)} + \underbrace{[Y,[Z,X]]}_{(2)} + \underbrace{[Z,[X,Y]]}_{(3)} \\
= {} & 0 \qquad \text{(wegen der Jacobi-Identität).}
\end{aligned}$$

(3) folgt rein algebraisch aus (1), (2) und (4):
Man setzt $R(X,Y,Z,W) := \langle R(X,Y)Z,W\rangle$. Nun betrachtet man einen Oktaeder und bezeichne 4 der Seitenflächen (die sich nur in Ecken schneiden) mit X, Y, Z, W. Die Ecken des Oktaeders, welche z.B. der Schnitt der Flächen X und Y ist, wird mit $R(Z,W,X,Y)$ bezeichnet, da von dieser Ecke aus betrachtet die Flächen X, W, Y, Z aufeinander folgen. Wegen (1) und (2) ist es egal, ob man von X oder von Y aus zu zählen beginnt. Nun beachte man, daß die Summen der Ecken der Dreiecke X, Y, Z, W wegen (4) Null sind. Zählt man diese Summen für die Dreiecke Z und W zusammen und zieht jene für X und Y ab, so erhält man, daß das Doppelte von der Differenz aus der Ecke $W \cap Z$ und der Ecke $X \cap Y$ Null ist, d.h. (3) gilt.



In Detail bedeutet dies:

$$
\begin{aligned}
(+)\quad & \underbrace{R(X,Y,Z,W)}_{(1)} + \underbrace{R(Y,Z,X,W)}_{(2)} + \underbrace{R(Z,X,Y,W)}_{(3)} = 0\\
(-)\quad & \underbrace{R(W,X,Y,Z)}_{(4)} + \underbrace{R(X,Y,W,Z)}_{(1)} + \underbrace{R(Y,W,X,Z)}_{(5)} = 0\\
(-)\quad & \underbrace{R(Z,W,X,Y)}_{(6)} + \underbrace{R(W,X,Z,Y)}_{(4)} + \underbrace{R(X,Z,W,Y)}_{(3)} = 0\\
(+)\quad & \underbrace{R(Y,Z,W,X)}_{(2)} + \underbrace{R(Z,W,Y,X)}_{(6)} + \underbrace{R(W,Y,X,Z)}_{(5)} = 0\\
\Rightarrow\quad & 2\,\underbrace{R(X,Y,Z,W)}_{(1)} - 2\,\underbrace{R(Z,W,X,Y)}_{(6)} = 0
\end{aligned}
$$

(5) Um diesem Punkt überhaupt Sinn zu geben, muß man ∇_Z auf Tensorfelder ausdehnen. Das geht mittels Produkt-Regel, i.e.

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_Z R)(X,Y,W) :=\\
&\quad = \nabla_Z(R(X,Y)W) - R(\nabla_Z X,Y)W - R(X,\nabla_Z Y)W - R(X,Y)\nabla_Z W\\
&\quad = \nabla_Z(R(X,Y)W) + R(Y,\nabla_Z X)W - R(X,\nabla_Y Z + [Z,Y])W - R(X,Y)\nabla_Z W.
\end{aligned}
$$

Mit $\sum_{\text{zykl.}}$ bezeichnen wir die zyklische Summe bezüglich der Variablen X, Y und Z. Dann gilt

$$
\sum_{\text{zykl.}} (\nabla_Z R)(X,Y,W) =
$$

$$
= -\sum_{\text{zykl.}} \nabla_Z(R(X,Y)W) - \sum_{\text{zykl.}} R(X,-[Y,Z])W - \sum_{\text{zykl.}} R(X,Y)\nabla_Z W
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\text{zykl.}} \nabla_Z \Big([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]} \Big) W \\
&\quad + \sum_{\text{zykl.}} \Big([\nabla_X, \nabla_{[Y,Z]}] W - \nabla_{[X,[Y,Z]]} W \Big) \\
&\quad - \sum_{\text{zykl.}} \Big([\nabla_X, \nabla_Y] \nabla_Z W - \nabla_{[X,Y]} \nabla_Z W \Big) \\
&= -\nabla_{\sum_{\text{zykl.}} [X,[Y,Z]]} W \\
&\quad + \sum_{\text{zykl.}} \Big(\nabla_Z [\nabla_X, \nabla_Y] W - [\nabla_X, \nabla_Y] \nabla_Z W \Big) + 0 \\
&= 0 + \left(\sum_{\text{zykl.}} \big[[\nabla_X, \nabla_Y], \nabla_Z \big] \right) W \\
&= 0 \qquad \text{wegen der Jacobi-Identität.} \qquad \square
\end{aligned}
$$

64.6 Folgerung (Polarisierungsformel. *Für die Riemannkrümmung gilt:*

$$
\begin{aligned}
4!\, & R(X,Y,Z,W) = \\
&= -R(Z+X, Y+W, Y+W, Z+X) + R(Z+X, Y-W, Y-W, Z+X) \\
&\quad + R(Z-X, Y+W, Y+W, Z-X) - R(Z-X, Y-W, Y-W, Z-X) \\
&\quad + R(Z+Y, X+W, X+W, Z+Y) - R(Z+Y, X-W, X-W, Z+Y) \\
&\quad - R(Z-Y, X+W, X+W, Z-Y) + R(Z-Y, X-W, X-W, Z-Y)
\end{aligned}
$$

Beweis. Es ist

$$
\begin{aligned}
R(X, Y+Z, Y+Z, X) - R(X, Y-Z, Y-Z, X) &= \\
&= 2(R(X,Y,Z,X) + R(X,Z,Y,X)) \\
&\overset{(1,2)}{=} 2\,(R(X,Y,Z,X) + R(Z,X,X,Y)) \\
&\overset{(3)}{=} 4\, R(X,Y,Z,X)
\end{aligned}
$$

und weiters

$$
\begin{aligned}
R(X+W, Y, Z, X+W) - R(X-W, Y, Z, X-W) &= \\
&= 2\,(R(X,Y,Z,W) + R(W,Y,Z,X))
\end{aligned}
$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
&R(Y,Z,X,W) = \\
&\quad\overset{(1,2)}{=} R(Z,Y,W,X) \\
&\quad\overset{(7)}{=} -R(X,Y,W,Z) + \frac{1}{2}\big(R(Z{+}X,Y,W,Z{+}X) - R(Z{-}X,Y,W,Z{-}X)\big) \\
&\quad\overset{(2,6)}{=} R(X,Y,Z,W) \\
&\qquad\quad + \frac{1}{8}\big(R(Z{+}X,Y{+}W,Y{+}W,Z{+}X) - R(Z{+}X,Y{-}W,Y{-}W,Z{+}X) \\
&\qquad\qquad - R(Z{-}X,Y{+}W,Y{+}W,Z{-}X) + R(Z{-}X,Y{-}W,Y{-}W,Z{-}X)\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&R(Z,X,Y,W) = \\
&\quad\overset{(2)}{=} -R(Z,X,W,Y) \\
&\quad\overset{(7)}{=} R(Y,X,W,Z) - \frac{1}{2}\big(R(Z{+}Y,X,W,Z{+}Y) - R(Z{-}Y,X,W,Z{-}Y)\big) \\
&\quad\overset{(1,2,6)}{=} R(X,Y,Z,W) \\
&\qquad\quad - \frac{1}{8}\big(R(Z{+}Y,X{+}W,X{+}W,Z{+}Y) - R(Z{+}Y,X{-}W,X{-}W,Z{+}Y) \\
&\qquad\qquad - R(Z{-}Y,X{+}W,X{+}W,Z{-}Y) + R(Z{-}Y,X{-}W,X{-}W,Z{-}Y)\big)
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{(4)}{=} R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) \\
&= R(X,Y,Z,W) \\
&\quad + R(X,Y,Z,W) \\
&\qquad + \frac{1}{8}\big(R(Z{+}X,Y{+}W,Y{+}W,Z{+}X) - R(Z{+}X,Y{-}W,Y{-}W,Z{+}X) \\
&\qquad\quad - R(Z{-}X,Y{+}W,Y{+}W,Z{-}X) + R(Z{-}X,Y{-}W,Y{-}W,Z{-}X)\big) \\
&\quad + R(X,Y,Z,W) \\
&\qquad - \frac{1}{8}\big(R(Z{+}Y,X{+}W,X{+}W,Z{+}Y) - R(Z{+}Y,X{-}W,X{-}W,Z{+}Y) \\
&\qquad\quad - R(Z{-}Y,X{+}W,X{+}W,Z{-}Y) + R(Z{-}Y,X{-}W,X{-}W,Z{-}Y)\big)
\end{aligned}
$$

und schließlich

$$
\begin{aligned}
&4!\,R(X,Y,Z,W) = \\
&\quad = -R(Z{+}X,Y{+}W,Y{+}W,Z{+}X) + R(Z{+}X,Y{-}W,Y{-}W,Z{+}X) \\
&\qquad + R(Z{-}X,Y{+}W,Y{+}W,Z{-}X) - R(Z{-}X,Y{-}W,Y{-}W,Z{-}X) \\
&\qquad + R(Z{+}Y,X{+}W,X{+}W,Z{+}Y) - R(Z{+}Y,X{-}W,X{-}W,Z{+}Y) \\
&\qquad - R(Z{-}Y,X{+}W,X{+}W,Z{-}Y) + R(Z{-}Y,X{-}W,X{-}W,Z{-}Y) \quad \square
\end{aligned}
$$

64.7 Bemerkung. Wir wollen nun die Ausdrücke der Form $R(X,Y,Y,X)$ in der Polarisierungsformel (64.6) weiter untersuchen. Sei dazu

$$\begin{aligned} X' &= a\,X + b\,Y \\ X'' &= c\,X + d\,Y \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Wegen der Schiefsymmetrie (1) und (2) in (64.5) ist

$$R(X',Y',Y',X') = \det(A)\,R(X,Y,Y',X') = \det(A)^2\,R(X,Y,Y,X).$$

Das gleiche Transformationsverhalten hat auch $|X|^2\,|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2$, da dies das Quadrat der Fläche des von X und Y erzeugten Parallelogramms ist, siehe dazu (53.4). Folglich ist der Ausdruck

$$\frac{R(X,Y,Y,X)}{|X|^2\,|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}$$

unabhängig von der Wahl eines Erzeugendensystems des von X und Y erzeugten 2-dimensionalen Teilraums F von T_pM. Wir nennen diese Zahl die Schnittkrümmung von F und bezeichnen sie mit $K(F)$. Die Polarisierungsformel zeigt, daß die Riemannkrümmung sich aus der Schnittkrümmung berechnen läßt.

64.8 Satz (Gauß-Krümmung versus Schnitt-Krümmung).
Für jede Riemann-Fläche M ist die Gaußkrümmung ident mit der Schnittkrümmung (des ganzen 2-dimensionalen Tangentialraums).

Beweis für Hyperflächen im $\mathbb{R}^3$. Sei (ξ,η) eine Orthonormalbasis von T_xM. Dann ist

$$\begin{aligned} K(T_xM) &\overset{(64.1)}{=\!=\!=} \langle R_x(\xi_x,\eta_x)\eta_x,\xi_x\rangle \\ &\overset{(64.1)}{=} \langle\langle L_x\eta_x,\eta_x\rangle L_x\xi_x - \langle L_x\xi_x,\eta_x\rangle L_x\eta_x,\xi_x\rangle \\ &= \langle L_x\eta_x,\eta_x\rangle\langle L_x\xi_x,\xi_x\rangle - \langle L_x\xi_x,\eta_x\rangle\langle L_x\eta_x,\xi_x\rangle \\ &= det(L_x) = K_x \end{aligned}$$

Beweis für abstrakte Riemann-Flächen.
Es seien (u^1,u^2) lokale Koordinaten auf M. Dann ist nach (64.4)

$$\begin{aligned} D^2\,K(T_xM) = D^2\,&\frac{R\left(\frac{\partial}{\partial u^1},\frac{\partial}{\partial u^2},\frac{\partial}{\partial u^2},\frac{\partial}{\partial u^1}\right)}{|\frac{\partial}{\partial u^1}|^2|\frac{\partial}{\partial u^1}|^2 - |\langle\frac{\partial}{\partial u^1},\frac{\partial}{\partial u^2}\rangle|^2} = R_{1,2,2,1} \\ &= \frac{1}{2}\,\left(\tfrac{\partial^2}{\partial u^1\partial u^2}g_{1,2} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^1\partial u^1}g_{2,2} + \tfrac{\partial^2}{\partial u^2\partial u^1}g_{1,2} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^2\partial u^2}g_{1,1}\right) \\ &\quad + g^{1,1}\,(\Gamma_{1,2,1}\Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2,1}\Gamma_{1,1,1}) \\ &\quad + g^{1,2}\,(\Gamma_{1,2,2}\Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2,2}\Gamma_{1,1,1}) \\ &\quad + g^{2,1}\,(\Gamma_{1,2,1}\Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2,1}\Gamma_{1,1,2}) \\ &\quad + g^{2,2}\,(\Gamma_{1,2,2}\Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2,2}\Gamma_{1,1,2}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\,(F_{s,\theta} - G_{s,s} + F_{\theta,s} - E_{\theta,\theta})\\
&\quad + \frac{G}{D^2}\,(E_\theta E_\theta - (2F_\theta - G_s)E_s)\\
&\quad - \frac{F}{D^2}\,(G_s E_\theta - G_\theta E_s)\\
&\quad - \frac{F}{D^2}\,(E_\theta G_s - (2F_\theta - G_s)(2F_s - E_\theta))\\
&\quad + \frac{E}{D^2}\,(G_s G_s - G_\theta(2F_s - E_\theta))\\
&= \frac{E}{4D^2}\,(E_\theta G_\theta - 2F_s G_\theta + {G_s}^2)\\
&\quad + \frac{F}{4D^2}\,(E_s G_\theta - E_\theta G_s - 2E_\theta F_\theta + 4F_s F_\theta - 2F_s G_s)\\
&\quad + \frac{G}{4D^2}\,(E_s G_s - 2E_s F_\theta + {E_\theta}^2)\\
&\quad - \frac{1}{2}\,(E_{\theta,\theta} - 2F_{s,\theta} + G_{s,s})\\
&\overset{(53.7)}{=} D^2\,K
\end{aligned}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
R_{i,j,k,l} &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{l,j} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} + \tfrac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{l,i}\right)\\
&\quad + \sum_{p=1}^{m} (\Gamma^p_{i,k}\Gamma_{j,l,p} - \Gamma^p_{j,k}\Gamma_{i,l,p})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{1,2,2,1} &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} g_{1,2} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^1} g_{2,2} + \tfrac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^1} g_{1,2} - \tfrac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^2} g_{1,1}\right)\\
&\quad + (\Gamma^1_{1,2}\Gamma_{2,1,1} - \Gamma^1_{2,2}\Gamma_{1,1,1})\\
&\quad + (\Gamma^2_{1,2}\Gamma_{2,1,2} - \Gamma^2_{2,2}\Gamma_{1,1,2})\\
&= \tfrac{1}{2}\,(F_{s,\theta} - G_{s,s} + F_{\theta,s} - E_{\theta,\theta})\\
&\quad + \frac{E_\theta\;G - G_s\;F}{2D^2}\cdot\frac{E_\theta}{2}\\
&\quad - \frac{2\;F_\theta\;G - G_s\;G - G_\theta\;F}{2D^2}\cdot\frac{E_s}{2}\\
&\quad + \frac{-E_\theta\;F + G_s\;E}{2D^2}\cdot\frac{G_s}{2}\\
&\quad - \frac{-2\;F_\theta\;F + G_s\;F + G_\theta\;E}{2D^2}\cdot\frac{2\;F_s - E_\theta}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{E}{4D^2}\left(E_\theta G_\theta - 2F_s G_\theta + {G_s}^2\right)\\
&\quad + \frac{F}{D^2}\left(E_s G_\theta - E_\theta G_s - 2E_\theta F_\theta + 4F_s F_\theta - 2F_s G_s\right)\\
&\quad + \frac{G}{D^2}\left(E_s G_s - 2E_s F_\theta + {E_\theta}^2\right)\\
&\quad - \frac{1}{2}(E_{\theta,\theta} - 2F_{s,\theta} + G_{s,s})\\
&\overset{(53.7)}{=} D^2\, K. \quad \square
\end{aligned}
$$

64.9 Definition (Normalkoordinaten)

Unter Riemannschen Normalkoordinaten versteht man die Parametrisierung

$$\varphi : (u^1, \dots, u^m) \mapsto \exp_p\Bigl(\sum_{i=1}^m u^i X_i\Bigr)$$

für eine Orthonormalbasis $(X_1, \dots, X_m)$ von T_pM.

64.10 Lemma (Christoffelsymbole in Normalkoordinaten). *In Riemannschen Normalkoordinaten verschwinden alle Christoffelsymbole bei p.*

Beweis. Offensichtlich gilt

$$g_{i,j}(p) := \bigl\langle \tfrac{\partial}{\partial u^i}, \tfrac{\partial}{\partial u^j}\bigr\rangle(p) = \langle X_i, X_j\rangle = \delta_{i,j}.$$

Die radialen Geodäten $t \mapsto \exp_p(tX)$ erfüllen die Geodäten-Gleichung

$$\tfrac{d^2u^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^m \Gamma^k_{i,j} \tfrac{du^i}{dt}\tfrac{du^j}{dt} = 0.$$

Für $u(t) := tX_j$ gilt wegen $u^k(t) = \delta^k_j\, t$ somit $\Gamma^k_{j,j}(p) = 0$. Und da $\Gamma^k_{i,j}$ symmetrisch in (i,j) ist, ist $\Gamma_p = 0$ $\square$

64.11 Lemma. *Sei M eine Riemann-Mannigfaltigkeit und $F < T_xM$ ein 2-dimensionaler Teilraum. Dann ist die Schnittkrümmung $K(F)$ genau die Gauß-Krümmung der Fläche die lokal durch $\exp(F)$ gegeben ist.*

Beweis. Wegen (64.8) genügt es zu zeigen, daß die Riemann-Krümmung R_N der Fläche N mit der Riemann-Krümmung R_M auf M übereinstimmt. Wobei N durch $(t,s) \mapsto \exp_p(tX_p + sY_p)$ parametrisiert wird und die von M induzierte Metrik trägt. Dazu wählt man Riemann-Normalkoordinaten, d.h. die Parametrisierung $\varphi : (u^1, \dots, u^m) \mapsto \exp_p(\sum_{i=1}^m u^i X_i)$ für eine Orthonormalbasis $(X_1, \dots, X_m)$ des Tangentialraums T_pM. Dann verschwinden nach (64.10) alle Christoffelsymbole bei p. Da die Koeffizientenfunktionen $g_{i,j}$ für M und N übereinstimmen, gilt das auch für

$$R_{i,j,k,l} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial^2}{\partial^j\partial^l} g_{i,k} + \tfrac{\partial^2}{\partial^i\partial^k} g_{j,l} - \tfrac{\partial^2}{\partial^j\partial^k} g_{i,l} - \tfrac{\partial^2}{\partial^i\partial^l} g_{j,k}\right) + 0. \qquad \square$$

64.12 Satz (Ungekrümmte Räume). *Für eine Riemann-Mannigfaltigkeit sind äquivalent:*

1. $R = 0$.
2. *M ist lokal isometrisch zum Euklidischen Raum.*
3. *Der Paralleltransport ist lokal wegunabhängig.*

Der Punkt (3) ist global nicht allgemein gültig wie das Möbiusband mit flacher Metrik zeigt.

Beweis. ($1 \Rightarrow 3$) Indem wir eine Karte verwenden, können wir annehmen, daß M eine offene Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^m$ ist, allerdings mit einer allgemeinen Riemann-Metrik g. Wir wollen zu gegebenem Anfangswert X_0 ein Vektorfeld X finden, welches längs jeder Kurve parallel ist. Dazu genügt es, daß $\nabla_{\partial_i} X = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ ist. Zuerst finden wir ein längs der u^1-Achse paralleles Vektorfeld $u^1 \mapsto X(u^1, 0, \dots, 0)$. Zu jedem u^1 finden wir längs der Kurve $u^2 \mapsto (u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ ein paralleles Vektorfeld $u^2 \mapsto X(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ mit Anfangswert $X(u^1, 0, \dots, 0)$. Und somit erhalten wir ein Vektorfeld $(u^1, u^2) \mapsto X(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ längs der 2-Fläche $\psi : (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, 0, \dots, 0)$. Dieses erfüllt: $\nabla_{\partial_2} X = 0$ längs ψ und $\nabla_{\partial_1} X = 0$ längs $u^1 \mapsto \psi(u^1, 0)$. Es gilt $\nabla_{\partial_1} \nabla_{\partial_2} X - \nabla_{\partial_2} \nabla_{\partial_1} X = R(\partial_1, \partial_2)X = 0$, da $[\partial_s, \partial_t] = 0$ ist, weil die Flüsse $t \mapsto (t, s)$ und $s \mapsto (t, s)$ miteinander kommutieren.

Somit ist $\nabla_{\partial_2} \nabla_{\partial_1} X = 0$, d.h. $\nabla_{\partial_1} X$ ist parallel längs $u^2 \mapsto \psi(u^1, u^2)$. Aus $\nabla_{\partial_1} X = 0$ längs $u^1 \mapsto \psi(u^1, 0)$ folgt $\nabla_{\partial_1} X = 0$ längs ψ. Es ist also X parallel längs aller Kurven in der 2-Fläche ψ.

Nun kann man obigen Prozeß fortsetzen, um das gewünschte parallele Vektorfeld X zu erhalten. Dies zeigt, daß der Paralleltransport wegunabhängig ist.

($3 \Rightarrow 2$) Wählt man als Anfangswert die Vektoren einer Basis von $T_0\mathbb{R}^m$, so erhält man parallele Vektorfelder X_i, welche punktweise eine Basis bilden. Für diese gilt $[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0$. Diese können integriert werden, um eine Karte φ zu erhalten, welche $\varphi_i = X_i$ erfüllt, siehe (29.12). In dieser Karte hat die Riemann-Metrik dann aber Koeffizienten $\delta_{i,j}$, d.h. φ ist eine lokale Isometrie zwischen dem flachen $\mathbb{R}^m$ und M.

($2 \Rightarrow 1$) Da die kovariante Ableitung und somit die Riemann-Krümmung eine intrinsische Größe ist, also nur von der Riemann-Metrik abhängt, genügt es R für den Euklidischen Raum zu berechnen, dort ist aber $R = 0$. □

64.13 Definition (Krümmungen)

Unter der Ricci-Krümmung einer Riemann-Mannigfaltigkeit versteht man

$$\mathrm{Ricci}(\xi, \eta) = \mathrm{Spur}(\zeta \mapsto R(\xi, \zeta)(\eta)).$$

In lokalen Koordinaten gilt:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ricci}\Big(\sum_i X^i \tfrac{\partial}{\partial u^i}, \sum_j Y^j \tfrac{\partial}{\partial u^j}\Big) &= \\
&= \sum_{i,j} X^i Y^j \operatorname{Ricci}\Big(\tfrac{\partial}{\partial u^i}, \tfrac{\partial}{\partial u^j}\Big) \\
&= \sum_{i,j} X^i Y^j \sum_k \underbrace{\Big\langle R\Big(\tfrac{\partial}{\partial u^i}, \tfrac{\partial}{\partial u^k}\Big)\tfrac{\partial}{\partial u^j}, \tfrac{\partial}{\partial u^k}\Big\rangle}_{R_{i,k,j,k}} \\
&= \sum_{i,j,k} X^i Y^j \Bigg(\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} g_{k,k} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{k,j} + \frac{\partial^2}{\partial u^k \partial u^k} g_{i,j} - \frac{\partial^2}{\partial u^k \partial u^j} g_{k,i}\Big) \\
&\qquad + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m g^{p,q}(\Gamma_{i,j,q}\Gamma_{k,p,k} - \Gamma_{k,j,q}\Gamma_{i,k,p})\Bigg).
\end{aligned}
$$

Unter der Skalarkrümmung versteht man $\operatorname{Spur}_g(\xi \mapsto (\operatorname{Ricci}(\xi, .))^\flat)$, wobei

$$T_xM \xrightarrow[\operatorname{Ricci}_x]{} (T_xM)^* \xrightarrow[\flat]{\cong} T_xM.$$

Beachte, daß dies wegen der Symmetrieeigenschaften (64.6) alle nicht trivialen Spuren sind, welche man aus der Riemannkrümmung bilden kann.

65. Rückblick auf Krümmungen

Bei ebenen Kurven, haben wir die Krümmung als die Kraft interpretiert, die notwendig ist, um einen Massenpunkt mit konstanter skalarer Geschwindigkeit auf einer Kurve zu halten.

Bei Hyperflächen im $\mathbb{R}^3$ haben wir zuerst die Normalkrümmung einer Fläche in Richtung ξ als Krümmung der Schnittkurve mit der, von der Flächennormale und ξ aufgespannten Ebene kennengelernt. Dies ist gleichzeitig die Krümmung der Geodäte in Richtung ξ, siehe (52.4). Die kritische Punkte der Normalkrümmung sind die Hauptkrümmungen, deren Produkt die Gauss-Krümmung ist.

Bei einer allgemeinen Riemann-Mannigfaltigkeit kann die Schnittkrümmung als die Gauß-Krümmung einer 2-dimensionalen Fläche, welche durch die Exponentialabbildung parametrisiert wird, aufgefaßt werden. Die Riemann-Krümmung ist schließlich das zur Schnittkrümmung gehörige Tensorfeld (i.e. 4-lineare Abbildung).

IX. Lie-Gruppen

In diesem Kapitel soll abschließend noch eine kurze Einführung in die auf Sophus Lie zurückgehende Theorie der Lie-Gruppen gegeben werden.

66. Lokale versus globale Struktur

66.1 Definition (Lie-Gruppe)

Eine Lie-Gruppe G ist eine Gruppe, die zugleich C^∞-MF ist und deren Gruppenmultiplikation $\mathrm{mult} : G \times G \to G$ glatt ist.

66.2 Bemerkungen

(1) Die durch $L_g : h \mapsto g \cdot h$, $R_g : h \mapsto h \cdot g$ und durch $\mathrm{mult}(g, \mathrm{inv}(g)) := e$ definierten Abbildungen L_g (Linkstranslation), R_g (Rechtstranslation) und inv (Inversenbildung) sind Diffeomorphismen von G: Klarerweise sind sie bijektiv und haben als Umkehrabbildungen $L_{g^{-1}}$, $R_{g^{-1}}$ und inv. Die beiden ersten sowie ihre Umkehrabbildungen sind als Einschränkungen der glatten Multiplikation selbst wieder glatt. Da bei festem h die Identität

$$\mathrm{inv}(g) = h^{-1} \cdot h \cdot \mathrm{inv}(g) = h^{-1} \cdot \mathrm{inv}(g \cdot h^{-1}) = L_{h^{-1}} \circ \mathrm{inv} \circ R_{h^{-1}}(g)$$

gilt, genügt es, die Differenzierbarkeit von inv beim neutralen Element e nachzuweisen. O.B.d.A. rechnen wir lokal im $\mathbb{R}^n$. Dort ist inv die Lösung der impliziten Gleichung $\mathrm{mult}(g, \mathrm{inv} \cdot g) = e$. Wegen $\mathrm{mult}(e, g) = g$ ist die zweite partielle Ableitung von mult bei e die Identität und nach dem Satz über implizite Funktionen ist inv in einer Umgebung von e glatt.

(2) Jede Lie-Gruppe G ist automatisch Hausdorff:
Die Zusammenhangskomponente G_0 von e ist Normalteiler von G: Sei $a \neq b$, dann gibt es Umgebungen U und V von a und b mit $e \notin \mathrm{mult}(U, \mathrm{inv}(V))$, also ist $U \cap V = \emptyset$ und G Hausdorff.
Jede Lieg-Gruppe G ist auch parakompakt:
Die Zusammenhangskomponente G_0 ist Untergruppe: Die Bilder von G_0 unter L_g (bzw. R_g) sind zusammenhängend. Da $e \in G_0$, gilt für $g \in G_0$ auch $g \in L_g G_0$ und also $L_g G_0 \subseteq G_0$. Das gleiche Argument, angewandt auf die inneren Automorphismen $g \mapsto h \cdot g \cdot h^{-1}$, liefert die Normalteiler-Eigenschaft. Sei G_g die Zusammenhangskomponente um g, dann sieht man wegen der Stetigkeit der Linkstranslation leicht ein, daß $G_g = G_0 \cdot g$. Sei U eine zusammenhängende, relativ kompakte Umgebung von e, ohne

Beschränkung der Allgemeinheit sei $U = U^{-1}$. Dann ist $H := \bigcup_n U^n$ eine offene zusammenhängende Untergruppe von G. Die Teilmenge H ist auch abgeschlossen, denn die offene Vereinigung der Nebenklassen gH mit $g \notin H$ ist das Komplement von H. Also muß H die Komponente G_0 umfassen, somit ist die Zusammenhangskomponente G_0 parakompakt. (Jede andere Komponente ist von der Gestalt $g \cdot G_0$.)

(3) Von [MontgomeryZippin] und [Gleason] wurde das 5. Hilbert-Problem 1952 positiv beantwortet: Jede lokalkompakte, lokal zusammenhängende, endlich-dimensionale topologische Gruppe läßt sich auf eindeutige Weise zu einer Lie-Gruppe machen.

66.3 Definition (Lie-Gruppenhomomorphismus)

Seien H und G zwei Lie-Gruppen. Eine Abbildung $f : H \to G$ heißt Lie(Gruppen)-Homomorphismus, falls f glatter Gruppen-Homomorphismus ist. Ein lokal definiertes f heißt lokaler Lie(Gruppen)-Homomorphismus, falls es im Definitionsbereich (einer offenen Umgebung von e) ein Gruppen-Homomorphismus ist.

66.4 Lemma. *Seien H und G Lie-Gruppen und H zusammenhängend. Stimmen zwei Lie-Homomorphismen von H nach G lokal überein, so sind sie gleich.*

Beweis. Durch die Umgebung, auf der die Homomorphismen übereinstimmen, wird H als Gruppe erzeugt. Da Lie-Homomorphismen insbesonders Gruppen-Homomorphismen sind, stimmen sie überall überein. □

66.5 Lemma (Fortsetzen von Homomorphismen). *Seien H und G wie oben, zusätzlich sei H einfach zusammenhängend. Dann läßt sich jeder lokale Lie-Homomorphismus $f : \mathrm{Dom}(f) \to G$ mit $\mathrm{Dom}(f) \subseteq H$ zu einem Lie-Homomorphismus F auf ganz H fortsetzen.*

Beweis. Wir werden den lokalen Lie-Homomorphismus f längs Kurven fortsetzen, die von e ausgehen. Sei $U = U^{-1}$ eine Umgebung, sodaß $U^2 \subseteq \mathrm{Dom}(f)$; zu jeder Kurve c gibt es eine Folge $(t_i)_{i=1}^n$, $t_n = 1$, sodaß $c(t)^{-1} \cdot c(s) \in U$ für $t, s \in [t_i, t_{i+1}]$. Wir definieren

$$F(c) := f(c(o)^{-1} \cdot c(t_1)) \cdot \dots \cdot f(c(t_{n-1})^{-1} \cdot c(1)).$$

Sind c und d zwei Kurven mit gleichen Endpunkten und mit $c(t) \in d(t) \cdot U$, dann gilt: $F(c) = F(d)$. Um dies zu beweisen, betrachten wir eine Folge $(a_i)_{i=0}^n$, $a_i \in U$, $a_0 = a_n = e$, mit $c(t_i) = d(t_i) \cdot a_i$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
F(c) &:= f(c(0)^{-1}c(t_1)) \dots f(c(t_n)^{-1}c(1)) \\
&= f((d(0)a_0)^{-1}(d(t_1)a_1)) \dots f((d(t_{n-1})a_{n-1})^{-1}(d(1)a_n)) \\
&= f(a_0^{-1}d(0)^{-1}d(t_1)a_1) \dots f(a_{n-1}^{-1}d(t_{n-1})^{-1}d(1)a_n) \\
&= f(a_0^{-1})f(d(0)^{-1} \cdot d(t_1))f(a_1)f(a_1)^{-1} \dots \\
&\qquad \dots f(a_{n-1})f(a_{n-1})^{-1}f(d(t_{n-1})^{-1}d(1))f(a_n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(d(0)^{-1} \cdot d(t_1)) \cdot \dots \cdot f(d(t_n)^{-1} \cdot d(1)) \\
&= F(d)
\end{aligned}
$$

Somit nimmt F auf homotopen Kurven mit gleichen Endpunkten gleiche Werte an. Da H einfachzusammenhängend ist, hängt F nur von den Endpunkten der Kurven ab. Setzt man also $F(g) := F(c)$, wobei c eine e mit g verbindende Kurve ist, dann ist F wohldefiniert und glatt. Nun müssen wir noch nachweisen, daß F ein Homomorphismus ist. Ist c eine Kurve von e nach g, d eine von e nach h, so verbindet cd den Punkt e mit $g \cdot h$,

$$
cd(t) := \begin{cases} c(2t) & \text{für } t \le 1/2 \\ g \cdot d(2t-1) & \text{sonst} \end{cases}
$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
F(g \cdot h) &= F(cd) = F(c) \cdot F(g \cdot d) \\
&= F(c) \cdot F(d) = F(g) \cdot F(h) \\
F(g \cdot d) &= F(d) \\
&\Leftarrow \quad f((g \cdot d(t_i))^{-1}(g \cdot d(t_{i+1}))) = \\
&= f(d(t_i)^{-1} g^{-1} g d(t_{i+1})) = f(d(t_i)^{-1} \cdot d(t_{i+1}) \qquad \square
\end{aligned}
$$

66.6 Lemma (Universelle Überlagerung einer Gruppe).
Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe, dann ist die universelle Überlagerung $\tilde{G}$ der Mannigfaltigkeit G selbst eine Lie-Gruppe. Der Kern der Überlagerungsabbildung ist ein diskreter, zentraler Normalteiler.

Beweis. Es ist $\tilde{G}$ eine Lie-Gruppe, da die Lifte der Gruppenoperationen glatte Abbildungen sind (Überlagerung, einfacher Zusammenhang). Da $p : \tilde{G} \to G$ eine Überlagerung ist, ist $\operatorname{Ker}(p)$ Normalteiler und diskret. Sei $g \in \operatorname{Ker}(p)$, h beliebig, dann ist $h \cdot g \cdot h^{-1} \in \operatorname{Ker}(p)$. Also gilt für "kleine" h, daß $h \cdot g \cdot h^{-1} = g$ ist. Diese erzeugen aber ganz $\tilde{G}$ (zusammenhängende Lie-Gruppe), also gilt $h \cdot g = g \cdot h$ für alle h. $\square$

(Diese Tatsachen lassen sich am Beispiel $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ recht schön überprüfen).

66.7 Bemerkung

Zwei zusammenhängende Lie-Gruppen sind also genau dann als Lie-Gruppen lokal isomorph, wenn ihre universellen Überlagerungen isomorph sind. Alle lokal isomorphen zusammenhängenden Lie-Gruppen erhält man aus ihren einfachzusammenhängenden Repräsentanten durch Herausfaktorisieren diskreter Normalteiler.

67. Infinitesimale Struktur

Von besonderer Bedeutung in der Theorie ist folgender Teilvektorraum aller Vektorfelder:

67.1 Definition (Lie-Algebra einer Lie-Gruppe)

Der Vektorraum $\mathcal{L}(G)$ ist definiert durch

$$\mathcal{L}(G) := \Big\{\xi \in \mathfrak{X}(G) : \xi \text{ ist } L_g\text{-invariant für alle } g, \text{ d.h. } TL_g \circ \xi = \xi \circ L_g\Big\}.$$

Also ist $\xi \in \mathcal{L}(G)$ genau dann, wenn $TL_g(\xi_h) = \xi_{gh} \,\forall\, g, h \in G$. Es genügt diese Gleichung für $h = e$ zu haben, denn aus $\xi_g = TL_g(\xi_e)$ folgt:

$$TL_g(\xi_h) = TL_g(TL_h(\xi_e)) = T(L_g \circ L_h)(\xi_e) = TL_{gh}(\xi_e) = \xi_{gh} = \xi(L_g(h)).$$

Diese Vektorfelder heißen LINKSINVARIANT.

67.2 Lemma. *Der Tangentialraum TG einer Lie-Gruppe G ist isomorph zu $G \times \mathcal{L}(G)$, also ist jede Lie-Gruppe parallelisierbar. Der Vektorraum T_eG ist isomorph zu $\mathcal{L}G$, das ist eine Teil-Lie-Algebra von $\mathfrak{X}(G)$.*

Beweis. Dies haben wir bereits in (27.9) skizziert. Mit L_g ist natürlich auch $TL_g : T_eG \to T_gG$ ein Diffeomorphismus. Also ist $(g, \xi) \mapsto TL_g \cdot \xi$ eine Bijektion $G \times T_eG \to TG$ mit inverser Abbildung $\xi \mapsto (\pi(\xi), TL_{\pi(\xi)^{-1}} \cdot \xi)$. Der Isomorphismus zwischen T_eG und $\mathcal{L}G$ ist durch $v \mapsto (\mathrm{g} \mapsto TL_g \cdot v)$ und $\xi \mapsto \xi_e$ gegeben. Schließlich ist $\mathcal{L}G$ eine Teilalgebra, da für L_g-verwandte Vektorfelder auch deren Summe bzw. Lieklammer L_g-verwandt ist (letzteres folgt aus (29.7)). □

67.3 Folgerung (Lie-Algebra einer Lie-Gruppe).
$\mathcal{L}$ definiert einen Funktor von der Kategorie der lokalen Lie-Homomorphismen zwischen Lie-Gruppen in die Kategorie der Homomorphismen zwischen endlich dimensionalen Lie-Algebren.

Beweis. Sei $f : G \to H$ ein lokaler Lie-Homomorphismus, dann wird $\mathcal{L}f : \mathcal{L}G \to \mathcal{L}H$ definiert durch $(\mathcal{L}f \cdot \xi)(h) := \mathcal{L}f(\xi(h)) = \mathcal{L}f(TL_h(\xi(h)) := TL_h \cdot T_ef \cdot \xi(e)$, also durch folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}(G) \supseteq & \mathcal{L}G \arrow[r, dotted, "\mathcal{L}f"] & \mathcal{L}H & \subseteq \mathfrak{X}(H) \\
& T_eG \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "T_ef"] & T_eH \arrow[u, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Es ist ξ f-verwandt mit $\mathcal{L}f \cdot \xi \in \mathcal{L}(H)$, d.h. folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
TG \arrow[r, "Tf"] & TH \\
G \arrow[u, "\xi"] \arrow[r, "f"] & H, \arrow[u, "\mathcal{L}f(\xi)"']
\end{tikzcd}$$

denn

$$(\mathcal{L}f \cdot \xi)_{f(p)} = TL_{f(p)} \cdot T_ef \cdot \xi_e = T_pf \cdot T_eL_p \cdot \xi_e = T_pf \cdot \xi_p, \text{ da } L_{f(p)} \circ f = fL_p.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß ist und $\mathcal{L}f \cdot \xi$ eindeutig durch diese Eigenschaft bestimmt ist. Daraus folgt mittels (29.7) die Homomorphie-Eigenschaft von $\mathcal{L}f$. □

67.4 Lemma. *Jedes $\xi \in \mathcal{L}G$ induziert einen eindeutigen Lie-Homomorphismus*

$$\exp_\xi : \mathbb{R} \to G \textit{ mit } \exp'_\xi = \xi \circ \exp_\xi .$$

Beweis. Lokal um 0 existiert $c = \exp_\xi$ als Lösung dieser Differentialgleichung zum Anfangswert $\exp_\xi(0) = e$ und ist ein lokaler Lie-Homomorphismus: Sei $d(t) := c(s)^{-1}c(s{+}t)$, dann ist leicht nachzurechnen, daß $d(t)$ ebenfalls Lösung dieser Differentialgleichung ist, also $c(t) = d(t) = c(s)^{-1}c(s+t)$. Weil $\mathbb{R}$ einfachzusammenhängend ist, setzt sich c zu einem globalen Lie-Homomorphismen fort. Dieser muß die Lösung auf einer offen und abgeschlossenen Menge – also auf $\mathbb{R}$ – sein. □

67.5 Folgerung (1-Parameter Untergruppen).
$\mathcal{L}G$ ist isomorph zur Menge der 1-PARAMETER UNTERGRUPPEN *von G, d.h. der Lie-Homomorphismen von $\mathbb{R}$ nach G. Der Fluß zu $\xi \in \mathcal{L}G$ ist $Fl^\xi(t, g) = g \cdot \exp_\xi t$.*

Beweis. Die Abbildung $\xi \mapsto \exp_\xi$ ist auf $\mathcal{L}G$ injektiv, denn $\exp'_\xi(o) = \xi_e$. Sie ist surjektiv: Sei $c : \mathbb{R} \to G$ ein Lie-Homomorphismus, dann ist c Lösung der Differentialgleichung:

$$c'(s) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} c(t+s) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} c(s)\cdot c(t) = TL_{c(s)} \cdot c'(o) = \xi_{c(s)},$$

wobei ξ das linksinvariante Vektorfeld zu $c'(o)$ ist. Es gilt auch die behauptete Formel für den Fluß zu ξ, denn

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} g \cdot c(t) &= TL_g \cdot c'(t) = TL_g \cdot \xi_{c(t)} \\ &= TL_g \cdot TL_{c(t)} \cdot \xi_e = TL_{g\cdot c(t)} \cdot \xi_e = \xi_{g\cdot c(t)}. \qquad \square\end{aligned}$$

67.6 Definition (Exponentialabbildung)

Unter der EXPONENTIALABBILDUNG $\exp_G$ einer Liegruppe G versteht man die Abbildung $\exp_G : \mathcal{L}G \to G$, $\xi \mapsto \exp_\xi(1) = \mathrm{Fl}^\xi(1, e)$.

67.7 Lemma. *Die Exponentialabbildung $\exp_G$ einer Liegruppe G ist glatt und erfüllt $T_0 \exp_G = \mathrm{id}_{T_eG}$.*

Beweis. Sei $\psi(g, \xi) := (\xi_g, 0)$, dann ist $\psi \in \mathfrak{X}(G \times \mathcal{L}G)$ und $(t, \xi) \mapsto (\exp(t\xi), \xi)$ ist die Lösung der zu ψ gehörigen Differentialgleichung, also glatt. Somit ist auch exp glatt, und es gilt: $T_0 \exp \cdot \xi = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\xi) = \exp'_\xi(0) = \xi_e$. □

Die Exponentialabbildung der $SL_{\mathbb{C}}(2)$. Die Liealgebra der speziellen linearen Gruppe $SL_{\mathbb{C}}(2)$ ist

$$\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2) = \{T \in L_{\mathbb{C}}(2) : \mathrm{Spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\},$$

d.h.

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2) \Leftrightarrow d = -a.$$

Für solche T gilt

$$T^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix}^2 = -\det(T) \cdot \mathrm{id}$$

und somit ist

$$\begin{aligned}
\exp(T) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\det T)^k}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\det T)^k}{(2k+1)!} \cdot T \\
&= \cosh(\sqrt{-\det T}) + \frac{\sinh(\sqrt{-\det T})}{\sqrt{-\det T}}\, T \\
&= \cos(\sqrt{\det T}) + \frac{\sin(\sqrt{\det T})}{\sqrt{\det T}}\, T.
\end{aligned}$$

Man beachte, daß keiner der beiden Faktoren $\cosh x := \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ und $\frac{\sinh x}{x} = \frac{e^x-e^{-x}}{2x}$ von der Auswahl des Vorzeichens von $x := \sqrt{-\det T}$ abhängt.
Ist $\det T$ reell (was z.B. für die Untergruppe $SL(2) \subseteq SL_{\mathbb{C}}(2)$ der Fall ist), dann gilt:
Ist $\det T = 0$, so ist $t \mapsto \exp(tT) = 1 + tT$ eine Gerade.
Ist $\Delta^2 := \det T > 0$, so parametrisiert $t \mapsto \exp(tT) = \cos(t\Delta) + \sin(t\Delta)\frac{1}{\Delta}T$ eine Ellipse mit Achsen id und $\frac{1}{\Delta}T$. Insbesonders ist also exp nicht injektiv.
Ist $-\Delta^2 := \det T < 0$, so parametrisiert $t \mapsto \exp(tT) = \cosh(t\Delta) + \sinh(t\Delta)\frac{1}{\Delta}T$ eine Hyperbel mit Achsen id und $\frac{1}{\Delta}T$.

67.8 Folgerung. *Es sei $f : G \to H$ ein Liegruppen-Homomorphismus, dann kommutiert folgendes Diagramm:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}G \arrow[r, "\mathcal{L}f"] \arrow[d, "\exp_G"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "\exp_H"] \\
G \arrow[r, "f"'] & G
\end{tikzcd}$$

Ist insbesonders G eine Lie-Untergruppe von H, so ist $\exp_G$ die Einschränkung von $\exp_H$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $t \mapsto f(\exp_G(t\xi_e))$ die Differentialgleichung für $t \mapsto \exp_H(t \cdot (\mathcal{L}f)(\xi_e))$ löst. In der Tat gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} f(\exp_G(t\xi_e)) &= Tf \cdot \frac{\partial}{\partial t} \exp_G(t\xi_e) \\
&= Tf \cdot TL_{\exp_G(t\xi_e)} \cdot \xi_e = TL_{f(\exp_G(t\xi))} \cdot Tf \cdot \xi_e \\
&= TL_{f(\exp_G(t\xi))} \cdot \mathcal{L}f \cdot \xi_e \quad \square
\end{aligned}$$

67.9 Beispiel. Es sei G die abelsche Liegruppe $\mathbb{R}^n$, d.h. $\mu : G \times G \to G$ ist die Addition $(g,h) \mapsto g+h$ und $T_0L_g \cdot v = \partial_2\mu(g,0) \cdot v = v$. Also sind die linksinvarianten Vektorfelder gerade die Konstanten Vektorfelder, und die Lieklammer von solchen ist 0, d.h. die Liealgebra $\mathcal{L}G = \mathbb{R}^m$ mit der 0-Klammer.
Die Differentialgleichung für $c : t \mapsto \exp_G(t \cdot \xi_e)$ ist $\frac{\partial}{\partial t}c(t) = \xi_{c(t)} = TL_{c(t)} \cdot \xi_e = \xi_e$ mit Anfangswert $c(0) = 0$, also ist $c(t) = t \cdot \xi_e$ und somit $\exp_G(\xi_e) = \xi_e$ die Identität.
Sei nun G die Liegruppe $GL(n)$. Da G offen in $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ist, ist $T_gG = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ für alle $g \in G$. Die Multiplikation ist $\mu : G \times G \to G$ ist die Komposition $(g,h) \mapsto g \circ h$

und hat als Ableitung $\mu'(g,h)\cdot(u,v) = g\circ v + u\circ h$. Die linksinvarianten Vektorfelder sind also jene der Form

$$g \mapsto v_g := TL_g \cdot v = \partial_2\mu(g,0)\cdot v = g\circ v \text{ mit } v \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n).$$

Die Lieklammer ist

$$[u,v]_g := v'(g)\cdot u_g - u'(g)\cdot v_g = u_g\circ v - v_g\circ u = g\circ(u\circ v - v\circ u),$$

Also ist die Liealgebra von G gerade $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ mit dem Kommutator.
Die Differentialgleichung für $c : t\mapsto \exp_G(t\cdot\xi_e)$ ist $\frac{\partial}{\partial t}c(t) = \xi_{c(t)} = TL_{c(t)}\cdot\xi_e = c(t)\circ\xi_e$ mit Anfangswert $c(0) = \mathrm{id}$, also ist $c(t) = e^{t\cdot\xi_e}$ und somit $\exp_G(\xi_e) = e^{\xi_e}$. Das rechtfertigt die Bezeichnung Exponentialfunktion auf einer allgemeinen Gruppe.

67.10 Folgerung. *Sind f und g zwei (lokale) Lie-Homomorphismen mit $\mathcal{L}f = \mathcal{L}g$, dann ist $f = g$ lokal um e.*

Beweis. $(f\circ\exp)(t\xi)$ ist lokale 1-Parameter Gruppe zum linksinvarianten Vektorfeld $\mathcal{L}f\cdot\xi$, also ist: $f\circ\exp = \exp\circ\mathcal{L}f = \exp\circ\mathcal{L}g = g\circ\exp$. Da exp ein lokaler Diffeomorphismus ist, stimmen also f und g lokal überein. □

67.11 Folgerung. *Jeder stetige Gruppenhomomorphismus zwischen Lie-Gruppen ist bereits glatt.*

Beweis. Sei $f : G\to H$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Zuerst betrachten wir den Fall $G = \mathbb{R}$. Es gibt ein radiales $U\subseteq \mathcal{L}H$ offen um 0, sodaß $\exp|2U$ ein Diffeomorphismus ist. Sei $t_0\in\mathbb{R}$, sodaß für $t_0\ge |t|$ $f(t)\in\exp(U)$. Es gibt $\xi_0,\xi'\in U$ mit $f(t_0) = \exp(\xi_0)$ und $f(t_0/2) = \exp(\xi')$. Dann gilt

$$\exp(2\xi') = \exp(\xi')^2 = f(t_0/2)^2 = f(t_0) = \exp(\xi_0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\xi' = \xi_0 \Rightarrow f(t_0/2) = \exp(\xi_0/2).$$

Durch Induktion bekommt man: $f(rt_0) = \exp(r\xi)$ für alle $r = k/2^m$ mit $2^m > |k|$. Da f stetig ist, gilt das für alle r mit $1 > |r|$. Also ist f glatt. Sei nun G beliebig, (ξ_i) eine Basis von $\mathcal{L}G$. Wir betrachten die glatte Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^m \to G,\ (t_1,\dots,t_m)\mapsto \exp(t_1\xi_1)\cdot\dots\cdot\exp(t_m\xi_m).$$

Ihre i-te partielle Ableitung bei 0 ist ξ_i, somit ist φ ein lokaler Diffeomorphismus. Es ist

$$(f\circ\varphi)(t_1,\dots,t_m) = f(\exp(t_1\xi_1))\cdot\dots\cdot f(\exp(t_m\xi_m))$$

glatt, also lokal auch f. Weil $f = L_h\circ f\circ L_{g^{-1}}$ ist mit $h = f(g)$, ist f überall glatt. □

67.12 Folgerung. *Sind zwei Lie-Gruppen als topologische Gruppen isomorph, so sind sie sogar als Lie-Gruppen isomorph. D.h. die C^∞-Mannigfaltigkeitsstruktur ist bereits eindeutig durch die Topologie festgelegt.*

68. Infinitesimaler versus lokale Struktur

68.1 Definition (Unter-Lie-Gruppe)

Sei G eine Lie-Gruppe. Eine Teilmenge H heißt Unter-Lie-Gruppe von G falls H Untergruppe von G ist, H eine Lie-Gruppe ist und die Inklusion von H in G glatt ist. Letztere ist dann sogar eine Immersion: Angenommen $T_e \operatorname{incl} \cdot \xi = 0$, dann ist $\operatorname{incl}(\exp(t\xi)) = \exp(t \cdot T \operatorname{incl} \xi) = e$, daher ist incl nicht injektiv (Widerspruch).

Bemerkung: Mit dieser Definition wird etwa $(\mathbb{R}, +)$ mit der diskreten Topologie zu einer Unter-Lie-Gruppe von $(\mathbb{R}, +)$ mit der Standardtopologie.

68.2 Satz (Untergruppe zu einer Unteralgebra).
Sei G eine Lie-Gruppe und $\mathcal{H}$ Unter-Lie-Algebra von $\mathcal{L}G$. Dann existiert eine eindeutige zusammenhängende Unter-Lie-Gruppe H von G mit $\mathcal{L}H = \mathcal{H}$.

Beweis. Sei $\Delta_g := \{\xi_g : \xi \in \mathcal{H}\}$. Dann ist Δ ein integrables Teilbündel von TG: Sei $\xi, \eta \in \Gamma(\Delta)$. Bezüglich einer Basis von $\mathcal{H}$ haben wir:

$$\xi = \sum f_i \xi_i, \quad \eta = \sum g_i \xi_i \text{ und somit}$$
$$[\xi, \eta] = \sum_{ij} (f_i g_j [\xi_i, \xi_j]) + \sum_{ij} (f_i \xi_i(g_j) \xi_j) - \sum_{ij} (g_j \xi_j(f_i) \xi_i).$$

Nach dem Satz von Frobenius existiert eine eindeutige maximale zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit H durch e mit $TH = \Delta|_H$. Wir zeigen noch, daß H Untergruppe ist: Sei $h \in H$, dann folgt $e \in L_{h^{-1}}(H)$ ist zusammenhängende Teilmannigfaltigkeit. Da die Vektorfelder in $\mathcal{H}$ linksinvariant sind gilt: $L_{h^{-1}}(H) \subseteq H$. □

68.3 Satz (Lie-Gruppe zu einer Liealgebra). *Sei $\mathcal{G}$ eine endlich dimensionale Lie-Algebra. Dann existiert eine (einfachzusammenhängende) Lie-Gruppe G mit $\mathcal{L}G \cong \mathcal{G}$.*

Ein Beweis könnte folgendermaßen geführt werden: Jede endlich dimensionale Lie-Algebra hat nach einem Satz von Ado eine treue Darstellung auf einem $\mathbb{R}^n$, d.h. $\mathcal{G}$ kann als Teilalgebra von $L(n) \cong \mathcal{L}(GL(n))$ aufgefaßt werden. Nach obigem Satz existiert eine zusammenhängende Unter-Lie-Gruppe G von $GL(n)$ mit $\mathcal{L}G = \mathcal{G}$.

68.4 Folgerung. *Seien G und H zwei Lie-Gruppen, $f : \mathcal{L}G \to \mathcal{L}H$ ein Lie-Algebra-Homomorphismus. Dann existiert ein lokaler Lie-Gruppen- Homomorphismus φ mit $\mathcal{L}\varphi = f$. Ist zusätzlich G einfachzusammenhängend, dann kann φ global gewählt werden.*

Beweis. Sei $\mathcal{K} := graph(f)$. Nach obigem Satz existiert zu dieser Teilalgebra von $\mathcal{L}G \times \mathcal{L}H = \mathcal{L}(G \times H)$ eine Unter-Lie-Gruppe K von $G \times H$ mit $\mathcal{L}K = \mathcal{K}$. Sei $j := \operatorname{pr}_1 \circ \operatorname{incl} : K \to G \times H \to G$, dann ist

$$\mathcal{L}j(\xi, f(\xi)) = \mathcal{L}\operatorname{pr}_1(T \operatorname{incl}(\xi, f(\xi))) = \mathcal{L}\operatorname{pr}_1(\xi, f(\xi)) = \xi.$$

Also ist $\mathcal{L}j$ ein Isomorphismus und j ein lokaler Diffeomorphismus. Sei schließlich $\varphi := \operatorname{pr}_2 \cdot \operatorname{incl} \cdot j^{-1}$, dann ist φ ein lokaler Lie-Gruppen-Homomorphismus und $\mathcal{L}\varphi : \xi \mapsto \mathcal{L}\operatorname{pr}_2(\mathcal{L}\operatorname{incl}(\xi, f(\xi))) = f(\xi)$. □

Zusammenfassung

Somit stellt $\mathcal{L}$ eine bis auf lokale (globale) Isomorphien bijektive Zuordnung zwischen (einfachzusammenhängenden) Lie-Gruppen und endlich dimensionalen Lie-Algebren dar.

Die obigen Sätze lassen sich verallgemeinern, wenn man G durch die unendlich dimensionale Gruppe $\mathrm{Diff}(M)$ der Diffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit M ersetzt und als deren Lie-Algebra den Raum der Vektorfelder $\mathfrak{X}(M)$ verwendet. Für eine 1-Parameter Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$ ist die Untergruppen-Eigenschaft äquivalent zur Fluß-Eigenschaft der assoziierten Abbildung ($\mathbb{R} \times M \to M$). Solche Abbildungen entsprechen den Vektorfeldern auf M (Differenzieren).

68.5 Definition (Gruppen-Wirkung)

Unter einer LOKALEN LIE-GRUPPEN-WIRKUNG φ der Lie-Gruppe G auf der Mannigfaltigkeit M versteht man eine Abbildung $\varphi : D \to \mathrm{Diff}(M)$, definiert auf einer offenen Umgebung D von e in G, für die gilt: $\varphi(g \cdot h)(m) = \varphi(g)(\varphi(h)(m))$ und $\varphi(e)(m) = m$. Solch eine Lie-Gruppen-Wirkung definiert einen Lie-Homomorphismus $\mathcal{L}\varphi : \mathcal{L}G \to \mathfrak{X}(M)$ durch $\xi \mapsto \mathcal{L}\varphi \cdot \xi$. Es gilt auch wieder die Umkehrung:

68.6 Satz. (Siehe [**81**, 2.16.8])
Sei $f : \mathcal{L}G \to \mathfrak{X}(M)$ ein Lie-Algebra-Homomorphismus, dann existiert eine lokale Liegruppen-Wirkung φ von G auf M mit $\mathcal{L}\varphi = f$. Ist zusätzlich G einfachzusammenhängend und $f(\xi)$ vollständig für alle ξ (z.B. wenn M kompakt ist), dann läßt sich φ global wählen.

Man überlege sich, wie man daraus die oben bewiesenen Sätze folgern kann.

68.7 Integration auf Lie-Gruppen

Sei Δ eine Determinantenfunktion auf $\mathcal{L}G \cong T_eG$, dann definiert $\Delta_g(\xi_1, \dots) := \Delta(TL_{g^{-1}} \cdot \xi_1, \dots)$ eine linksinvariante nirgends verschwindende Differentialform auf G, welche verwendet werden kann, um Funktionen zu integrieren. Es gilt dann:

$$\begin{aligned}\int (f \circ L_g) \cdot \Delta &= \int L_g^*(f) \cdot \Delta = \int L_g^*(f \cdot (L_{g^{-1}})^*(\Delta)) \\ &= \int f \cdot (L_{g^{-1}})^*(\Delta) = \int f \cdot \Delta.\end{aligned}$$

Also ist das zugehörige Integral ebenfalls linksinvariant. Wann ist es zusätzlich rechtsinvariant? Eine einfache Rechnung zeigt, daß $R_g^*\Delta$ linksinvariant ist. Also ist $R_g^*\Delta = \lambda(g) \cdot \Delta$ für ein $\lambda : G \to \mathbb{R}$. Damit gilt: $\int (f \circ R_g)\Delta = |\lambda(g)|^{-1} \cdot \int f\Delta$.

G heißt UNIMODULAR, falls $|\lambda(g)| = 1$ für alle g. Ist G kompakt, so existiert $\int 1\Delta$ und es gilt: $\int 1\Delta = \int (1 \circ R_g)\Delta = |\lambda(g)|^{-1} \cdot \int 1\Delta$, also ist G unimodular.

69. Untergruppen

69.1 Lemma. *Sei H eine separable Unter-Lie-Gruppe von G, dann ist H initial in G.*

Beweis. Da $\mathcal{L}H$ Unter-Lie-Algebra von $\mathcal{L}G$ ist, existiert eine eindeutige zusammenhängende Unter-Lie-Gruppe K von G mit $\mathcal{L}K = \mathcal{L}H$. Diese ist als maximale Integralmannigfaltigkeit initial in G. Da die Lie-Algebren gleich sind, muß die Zusammenhangskomponente H_0 von H offen in K sein, somit als Untergruppe auch abgeschlossen und daher mit der zusammenhängenden Gruppe K übereinstimmen. H besitzt als separable Mannigfaltigkeit aber nur abzählbar viele Zusammenhangskomponenten, die diffeomorph zur initialen Teilmannigfaltigkeit K sind. Also ist H selbst initiale Teilmannigfaltigkeit. □

69.2 Bemerkung

Die Separabilität von H ist essentiell: $\mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie ist nicht initial in $\mathbb{R}$.

69.3 Satz. *Sei H eine separable Unter-Lie-Gruppe von G. Dann ist H genau dann reguläre Teilmannigfaltigkeit von G, wenn H abgeschlossen in G ist.*

Beweisskizze. Dies ist in Wirklichkeit ein Satz über lokalkompakte Gruppen.

($\Leftarrow$) Wir verwenden den Satz über offene Abbildungen: Jeder stetige surjektive Gruppen-Homomorphismus zwischen lokalkompakten Gruppen ist offen, falls seine Domäne Lindelöf ist. Nun betrachten wir die Identität von H mit der Lie-Gruppen-Topologie nach H mit der Spurtopologie; die ist lokalkompakt, wenn H in G abgeschlossen ist.

($\Rightarrow$) Das ist eine direkte Konsequenz eines Satzes über abgeschlossene Abbildungen: Jeder stetige Gruppen-Homomorphismus zwischen lokalkompakten Gruppen, der ein Homöomorphismus auf sein Bild ist, hat ein abgeschlossenes Bild. Man könnte auch so vorgehen: Als reguläre Teilmannigfaltigkeit ist H lokal abgeschlossen in G, demnach ist H offen abgeschlossen in $H^\sim$, also $H = H^\sim$. □

69.4 Satz (Abgeschlossen Untergruppen).
Jede abgeschlossene Untergruppe einer Lie-Gruppe ist selbst eine Lie-Gruppe.

Beweis. Sei H eine abgeschlossene Untergruppe der Lie-Gruppe G. Wir setzten $\mathcal{H} := \{c'(0) : c \in c^\infty(\mathbb{R}, H), c(0) = e\}$. Dann ist $\mathcal{H}$ ein Teilvektorraum von $\mathcal{L}G$: Seien $c_i'(0) \in \mathcal{H}$ und $t_i \in \mathbb{R}$, definiere $c(t) := c_1(t_1 t) \cdot c_2(t_2 t)$, dann gilt $c'(0) = t_1 \cdot c_1'(0) + t_2 \cdot c_2'(0)$.

Behauptung: $\mathcal{H} = \{\xi | \exp(t \cdot \xi) \in H \text{ für alle } t\}$

($\supseteq$) ist klar.

($\subseteq$) $\xi := c'(0)$, sei $v : \mathbb{R} \to \mathcal{L}G$, sodaß $v(0) = 0$ und $\exp(v(t)) = c(t)$. Es gilt:

$$\xi = c'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(v(t)) = T_0 \exp(v'(0)) = v'(0) = \lim_{n\to\infty} n \cdot v(\tfrac{1}{n})$$

Setzen wir $t_n := 1/n$ und $h_n := n \cdot v(t_n)$, so ist $t_n h_n = v(1/n)$ und $\exp(t_n h_n) = \exp(v(1/n)) = c(1/n) \in H$. Aus der nachfolgenden Behauptung ergibt sich dann $\exp(t\xi) \in H$.

Behauptung: Seien $h_k \in \mathcal{G}$, $0 \neq t_k \to 0$, $h_k \to h$, $\exp(t_k h_k) \in H$. Dann ist $\exp(th) \in H$ für alle t.

Da $\exp(t_k h_k)^{-1} = \exp(-t_k h_k)$ ist, können wir uns auf positive t_k beschränken. Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig und $n_k \in [t/t_{k-1}, t/t_k]$ gewählt, dann gilt: $t_k n_k \to t$, weil $t_k \to 0$. Also $n_k t_k h_k \to th$ und $\exp(th) \leftarrow \exp(n_k t_k h_k) = \exp(t_k h_k)^{nk} \in H$

Behauptung: Ein U' offen in $\mathcal{H}^\perp$ existiert mit $\exp(U') \cap H = \{0\}$.

Anderenfalls existieren $h_k \in \mathcal{H}^\perp$, $h_k \to o$, $\exp(h_k) \in H$. Setzen $t_k := 1/|h_k|$, o.B.d.A. konvergiert $t_k h_k \to h \in \mathcal{H}^\perp$. Dann ist $\exp(t_k h_k/t_k) = \exp(h_k) \in H$ und $1/t_k \to 0$. Mit der vorigen Behauptung folgt $\exp(th) \in H$ und $h \in \mathcal{H}$, ein Widerspruch.

Behauptung: Ein U offen in $\mathcal{L}G$ existiert mit $\exp(U \cap \mathcal{H}) = \exp U \cap H$:

($\subseteq$) klar.

($\supseteq$) Sei $a \in H \cap \exp(U)$. Dann ist $a = \exp\xi \cdot \exp\eta$ mit $\xi \in \mathcal{H}$ und $\eta \in \mathcal{H}^\perp$ für U genügend klein ($(\xi,\eta) \mapsto \exp\xi \cdot \exp\eta$ ist lokaler Diffeomorphismus). Es gilt $\exp\eta \in H (a, \exp\xi \in H$ Untergruppe), und nach dem obigen $\eta = 0$, also $a = \exp\xi$ mit $\xi \in \mathcal{H} \cap U$. Wir zeigen H ist Unter-Lie-Gruppe von G: $\exp : \mathcal{H} \to H$ ist lokaler Diffeomorphismus, also bildet $\{L_h \circ \exp|\mathcal{H} : h \in H\}$ einen Atlas für H. Die Kartenwechsel

$$(L_h \circ \exp)^{-1} \circ L_t \circ \exp = \exp^{-1} \circ L_{h-t} \circ \exp$$

sind dort glatt, wo sie definiert sind, und bilden wegen obiger Eigenschaft einen Teilmannigfaltigkeits-Atlas. □

Bemerkung

Dieser Satz wurde zuerst durch [VonNeumann] für $G = GL(n)$ und dann von [Cartan] für beliebiges G bewiesen. Es gibt noch ein zweites wichtiges Kriterium, um Untergruppen als Lie-Gruppen zu erkennen: Jede bogenzusammenhängende Untergruppe einer Lie-Gruppe ist selbst Lie-Gruppe. [**26**].

70. Homogene Räume

70.1 Satz (Homogene Räume). *Sei H eine abgeschlossene Unter-Lie-Gruppe von G. Dann existiert auf der Menge der rechten Nebenklassen $G/H := \{gH : g \in G\}$ eine eindeutige Mannigfaltigkeitsstruktur, für die $G \to G/H$ eine Submersion ist. Es ist dann $G \to G/H$ sogar ein Hauptfaserbündel.*

Beweis. Wir beweisen dies in zwei Teilen:

$$G \to G/H_0 \to (G/H_0)/(H/H_0) \cong G/H$$

Im ersten Schritt bilden wir die Faktorgruppe nach der Zusammenhangs-komponente von e, H_0, im zweiten faktorisieren wir die diskrete Wirkung von H/H_0 heraus. Durch $\Delta_g := TL_g(T_e H)$ wird ein integrables reguläres Teilvektorbündel definiert. Die maximalen zusammenhängenden Integralmannigfaltigkeiten zu Δ sind gerade gH_0. Im Anschluß an den Satz von Frobenius haben wir gezeigt, daß in solch einer Situation G/H_0 eine eindeutige Mannigfaltigkeitsstruktur trägt, sodaß $G \to G/H_0$ eine Submersion ist. Da H_0 ein Normalteiler von H ist, ist H/H_0 selbst eine (diskrete) Gruppe, und diese wirkt diskontinuierlich auf der Mannigfaltigkeit G/H_0 durch $(hH_0) \cdot (gH_0) := gh^{-1}H_0$: Sei nämlich U offen in G mit $U^{-1} \cdot U \cap H = H_0$ und $h \notin H_0$. Dann ist $(hH_0) \cdot \pi(U) \cap \pi(U) = \emptyset$, andernfalls wäre $\emptyset \neq uh^{-1}H_0 \cap u'H_0$ und somit $(u')^{-1} \cdot u = h' \cdot h \in H$, also $h' \cdot h \in H_0$ und $h \in H_0$. Aus (24.19) folgt nun, daß $G/H = (G/H_0)/(H/H_0)$ eine Mannigfaltigkeit und $G/H_0 \to G/H = (G/H_0)/(H/H_0)$ eine Überlagerung ist. Es bleibt die Faserbündelstruktur zu beweisen: Da $\pi : G \to G/H$ eine Submersion ist, finden wir einen lokalen Schnitt $s : U \to G$ (Satz über implizite Funktionen). Dann ist $U \times H \to p^{-1}U$, $(u,h) \mapsto s(u) \cdot h$ eine Trivialisierung mit inverser Abbildung $g \mapsto (pg, s(pg)^{-1}g)$. □

70.2 Bemerkungen

1. Ist H zusätzlich normal in G, dann ist G/H eine Lie-Gruppe und $G \to G/H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus.
2. Die Gruppe G wirkt transitiv auf $M := G/H$ und die Fixgruppen $G_{\dot g} = \{k \in G : k \cdot \dot g = \dot g\}$ sind konjugiert zu H, denn

$$p(g) = \dot g = k \cdot \dot g = k \cdot pg = p(kg) \Leftrightarrow \exists\, h \in H : kg = gh \Leftrightarrow k \in gHg^{-1}$$

70.3 Satz. *Wirkt umgekehrt eine Lie-Gruppe G transitiv auf einer Mannigfaltigkeit M, und sei $G_p := \{g \in G : g \cdot p = p\}$ für ein beliebiges $p \in M$, dann gilt: G_p ist eine abgeschlossene Untergruppe von G und G/G_p ist diffeomorph zu M vermöge $gG_p \mapsto gp$. Der Wirkung auf M entspricht die Linksmultiplikation auf G/G_p.*

Beweis. Klarerweise ist $gG_p \mapsto gp$ eine bijektive glatte Immersion, denn sei $Tev_p \cdot \xi = 0$, dann ist $\exp t\xi \cdot p = p$, i.e. $\exp t\xi \in G_p$, und somit $\xi = 0$ in $T(G/G_p)$. Eine solche ist aber bereits ein Diffeomorphismus, siehe [**42**, S.50]: Es genügt die Submersivität nachzuweisen. Angenommen, die Dimension des Bildes ist größer, dann gibt es auf Grund des Rang-Satzes zu jedem Punkt eine Umgebung, deren Bild nirgends dicht ist. Abzählbar viele dieser Bilder überdecken dann das Bild, was ein Widerspruch zur Baire'schen Eigenschaft ist. □

Eine sehr wichtige Klasse von Faserbündeln, die sogenannten Hauptfaserbündel, erhält man durch folgende Konstruktion:

70.4 Satz (Raum der Orbits). *Die Lie-Gruppe G wirke frei auf der Mannigfaltigkeit M, (d.h. $G_p = \{e\}$ für alle $p \in M$). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *M/G besitzt eine (eindeutige) Mannigfaltigkeitsstruktur, sodaß $\pi : M \to M/G$ eine Submersion ist. Dies ist dann sogar ein Faserbündel mit typischer Faser G. Diese heißt* Strukturgruppe des Hauptfaserbündels.
2. *Die Abbildung $G \times M \to M \times M$ mit $(g,p) \mapsto (gp,p)$ ist eine topologische Einbettung (oder äquivalent: folgende Abbildung ist stetig: $\{(gp,p) : g \in G, p \in M\} \to G$, $(q,p) \mapsto g$, falls $q = gp$)*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß die Submersivität von $\pi : M \to G/M$ bereits die Faserbündel-Eigenschaft impliziert: Sei dazu $s : U \to M$ ein lokaler Schnitt für U offen in M/G. Dann ist $U \times G \to \pi^{-1}U$, $(u,g) \mapsto g \cdot su$ eine Trivialisierung mit inverser Abbildung $m \mapsto (\pi m, g)$, wobei g definiert durch $g \cdot s(\pi m) = m$ ist.

$(1 \Rightarrow 2)$ Es konvergiere $p_i \to p$ und $g_i p_i \to gp$. Es genügt dann zu zeigen, daß $g_i \to g$. O.B.d.A. sei $g = e$, ersetze $g_i := g^{-1} g_i$. Sei s ein lokaler Schnitt der Submersion $M \to M/G$ bei p. Dann ist $(M/G) \times G \to M$ mit $(x,g) \mapsto gs(x)$, ein lokaler Diffeomorphismus und $p_i = h_i s(x_i)$ für gewisse x_i und h_i, also $g_i h_i = g_i h_i s(x_i)$. Nach dem Grenzübergang erhalten wir $h_i \to e$ und $h_i g_i \to e$, also $g_i \to e$.

($1 \Leftarrow 2$) Wir stellen π als Zusammensetzung dar:

$$M \to M/G_0 \to (M/G_0)/(G/G_0) = M/G.$$

Für den ersten Teil definieren wir $\Delta_p := Tev_p(T_eG) \subseteq T_pM$, wobei $ev_p : G \to M$ durch $g \mapsto g \cdot p$ definiert ist. Dies ist ein integrables Teilvektorbündel mit maximaler zusammenhängender Integralmannigfaltigkeit $G_0 \cdot p$ durch $p \in M$. Es ist Δ regulär, da $G_0 \cdot p$ nach Voraussetzung (2) reguläre Teilmannigfaltigkeit von M ist. Also können wir wieder die Folgerung aus dem Satz von Frobenius anwenden und erhalten, daß $M \to M/G_0$ eine Submersion ist. Beim zweiten Teil beachten wir, daß G/G_0 auf M/G_0 vermöge $gG_0 \cdot G_0p := G_0gp$ frei wirkt. Die Wirkung dieser diskreten Gruppe ist diskontinuierlich: Sei $(gG_0 \cdot G_0U) \cap G_0U \neq \{e\}$, dann ist gu $= g'u'$ mit $g' \in G_0$ und $u, u' \in U$. Es folgt $u = g^{-1}g'u'$ und somit $g^{-1}g' \in G_0$ für hinreichend kleines U, also $g \in G_0$. □

70.5 Bemerkung

Ist für ein Faserbündel $p : E \to M$ sowohl die Basis M als auch die typische Faser F zusammenhängend, so auch der Totalraum E. Denn seien U und V nicht leer und offen in E mit $U \cup V = E$, dann ist $p(U)$ und $p(V)$ nicht leer und offen in M mit $p(U) \cup p(V) = M$. Weil M zusammenhängend ist, gilt $p(U) \cap p(V) \neq \emptyset$, also gibt es einen Punkt $m \in p(U) \cap p(V)$, und $U \cap F$ und $V \cap F$ überdecken die Faser F über m mit nicht-leeren Mengen. Da F zusammenhängend ist, haben U und V nicht-leeren Durchschnitt in F über m. Also ist E zusammenhängend. Daraus folgen Teile von

Lemma. *Es sei $M \to N$ ein Faserbündel mit typischer Faser F. Falls N und F zusammenhängend sind, dann ist es auch M. Falls N und F einfach zusammenhängend ist, so auch M. Allgemeiner hat man die lange exakte Homotopiesequenz einer Faserung (siehe* [**?**, p.187, IV.8.6]*)*

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_k(F) \to \pi_k(M) \to \pi_k(N) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(F) \to \ldots.$$

Dies kann verwendet werden, um mehrere der folgenden Lie-Gruppen als zusammenhängend zu erkennen.

70.6 Beispiele

1. $O(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ mit $(T, v) \mapsto Tv$ ist transitive Wirkung mit Fixgruppe $O(n)_{en} = O(n-1)$. Also ist $O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}$ und analog $SO(n)/SO(n-1) \cong S^{n-1}$.
$$SO(n-1) \hookrightarrow SO(n) \twoheadrightarrow S^{n-1}, \quad SO(1) = \{1\}, \quad SO(2) = S^1,$$
2. $U(n) \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ mit $(T, v) \mapsto Tv$ ist transitive Wirkung mit Fixgruppe $U(n)_{en} = U(n-1)$. Also ist $U(n)/U(n-1) \cong S^{2n-1}$ und analog $SU(n)/SU(n-1) \cong S^{2n-1}$.
3. $Sp(n) \times S^{4n-1} \to S^{4n-1}$ mit $(T, v) \mapsto Tv$ ist transitive Wirkung mit Fixgruppe $Sp(n)_{en} = Sp(n-1)$. Also ist $Sp(n)/Sp(n-1) \cong S^{4n-1}$.
4. Die Homotopiegruppe der $SL_{\mathbb{C}}(n)$ läßt sich rekursiv aus
$$SL_{\mathbb{C}}(n-1) \rtimes \mathbb{C}^{n-1} \hookrightarrow SL_{\mathbb{C}}(n) \twoheadrightarrow \mathbb{C}^n_*, \quad SL_{\mathbb{C}}(1) = \{1\}, \ \ldots$$

berechnen.

5. $V(k,n)$ bezeichnet die Stiefel-Mannigfaltigkeit der orthonormalen k-Beine im $\mathbb{R}^n$, das ist der Raum der k-Tupel orthonormaler Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Die $O(n)$ wirkt auf $V(k,n)$ durch Anwenden auf die einzelnen Vektoren. Diese Wirkung ist transitiv: Seien nämlich $(a_1,\dots,a_k)$ und $(b_1,\dots,b_k)$ zwei k-Beine, dann ergänzt man diese zu Orthonormalbasen $(a_1,\dots,a_n)$ und $(b_1,\dots,b_n)$ und definiert eine orthogonale Transformation A durch $A(a_i) := b_i$. Die Fixgruppe von $O(n)$ beim k-Bein der ersten k Vektoren der Standardbasis sind die orthogonalen Transformationen am orthogonalen Komplement des vom k-Bein aufgespannten Teilraums und somit isomorph zu $O(n-k)$. Also ist $V(k,n) = O(n)/O(n-k)$ eine Mannigfaltigkeit.
$$\text{“}O(n-k)\text{”} \hookrightarrow O(n) \twoheadrightarrow V(k,n) \ \dots \text{ Stiefelmannigfaltigkeit}$$
6. $G(k,n)$ bezeichnet die Grassmann-Mannigfaltigkeit der k-Ebenen im $\mathbb{R}^n$, das sind die k-dimensionalen Teilräume. Wieder wirkt $O(n)$ auf $G(k,n)$ transitiv (man wähle passende Basen wie in 4.). Die Fixgruppe eines Teilraums $\mathbb{R}^k$ sind jene (orthogonalen) Transformationen, die diesen - also auch sein orthogonales Komplement - invariant lassen; die sind gerade $O(k)\times O(n-k)$. Also ist $G(k,n) = O(n)/(O(k)\times O(n-k))$ eine Mannigfaltigkeit.
$$O(k)\times \text{“}O(n-k)\text{”} \hookrightarrow O(n) \twoheadrightarrow G(k,n) \ \dots \text{ Grassmannmannigfaltigkeit}$$
Für $k=1$ erhält man natürlich gerade den projektiven Raum P^{n-1} der Geraden im $\mathbb{R}^n$, vgl. Aufgabe (72.58).
7. Auf $V(k,n)$ wirkt auch die $O(k)$, indem man ein orthonormales k-Bein $(a_1,\dots,a_k)$ als isometrische Abbildung $A:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$, $e_i\mapsto a_i$ auffaßt und ein $T\in O(k)$ auf A vermöge $A\circ T$ wirken läßt. Diese Wirkung ist klarerweise frei, und zwei k-Beine liegen im selben Orbit, wenn sie den gleichen Teilraum aufspannen, also ist $G(k,n) = V(k,n)/O(k) \leftarrow V(k,n)$ ein Hauptfaserbündel mit typischer Faser $O(k)$, vgl. Aufgabe (72.59).
$$O(k)\hookrightarrow V(k,n)\twoheadrightarrow G(k,n) \ \dots \text{ Universelles } O(k)\text{-Hauptfaserbündel}$$
Vergleiche das auch mit
$$\mathbb{R}^k \hookrightarrow \{(F,x) : x\in F < \mathbb{R}^n, \dim F = k\} \twoheadrightarrow G(k,n) \ \dots \text{ Universelle Vektorbündel}$$
8. Hauptfaserbündel kann man auch ausgehend von Vektorbündeln $E\to M$ konstruieren: dazu bemerke man, daß die Transitionsfunktionen φ_{UV} des Vektorbündels Werte in der $GL(k)$ haben, wobei k die Faserdimension des Vektorbündels ist. Da die $GL(k)$ aber auch als Teilgruppe der Diffeomorphismen von $GL(k)$ aufgefaßt werden kann (Linksmultiplikation), können die Transitionsfunktionen auch als Kartenwechsel eines Faserbündels $E^\sim$ mit typischer Faser $GL(k)$ interpretiert werden. Die $GL(k)$ wirkt nun frei auf diesem Faserbündel durch Linksmultiplikation, und $E^\sim \to E^\sim/GL(k) = M$ heißt das zu E assoziierte Hauptfaserbündel.

71. Strukturtheorie

71.1 Algebraischen Struktur von G versus jener von $\mathcal{L}(G)$

Wir wollen hier nur eine kurze Übersicht über einige der wichtigsten Resultate der Strukturtheorie von Lie-Gruppen geben. Die Beweise werden wir fast durchwegs auslassen.

Im Folgenden sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe, $\mathcal{G} := \mathcal{L}G$ die zugehörige Lie-Algebra und $\exp : \mathcal{G} \to G$ die Exponentialabbildung. Wir wissen bereits, daß die Unter-Lie-Gruppen von G via $\mathcal{L}$ den Teil-Lie-Algebren von $\mathcal{G}$ entsprechen. Es stellt sich natürlich die Frage nach dem genauen Zusammenhang zwischen der Multiplikation in G und der algebraischer Struktur von $\mathcal{G}$. Eine direkte Rechnung zeigt:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\xi)\cdot\exp(t\eta) = \xi + \eta = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\xi + t\eta).$$

Wenn G Abelsch ist, dann sind $\exp(t(\xi+\eta))$ und $\exp(t\xi)\cdot\exp(t\eta)$ 1-Parameter Untergruppen und stimmen also überein. Das heißt, die Multiplikation in G entspricht vermittels der Exponentialabbildung der Addition in $\mathcal{G}$. Im allgemeinen Fall kann das natürlich nicht stimmen. Ein weiterer Zusammenhang ergibt sich aus dem in (29.13) bewiesenen: $[\xi,\eta] = \left(\frac{d}{dt}\right)^2|_{t=0}(F_{-t}\circ G_{-t}\circ F_t\circ G_t)$, wobei F und G die Flüsse zu ξ und η sind. Im Falle linksinvarianter Vektorfelder ergibt sich weiter:

$$[\xi,\eta] = \left(\frac{d}{dt}\right)^2|_{t=0} \exp(-t\xi)\exp(-t\eta)\exp(t\xi)\exp(t\eta).$$

Definiert man den Kommutator in G als $[a,b] := a^{-1}b^{-1}ab$, dann ist

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2|_{t=0}[\exp(t\xi),\exp(t\eta)] = [\xi,\eta] = \left[\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(t\xi), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(t\eta)\right].$$

Der vollständige Zusammenhang zwischen Gruppenmultiplikation und Lie-Algebrastruktur wird durch die CAMPBELL-BAKER-HAUSDORFF FORMEL geliefert, die wir im folgenden Abschnitt herleiten:

71.2 Definition. Es sei G eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$. Dann definieren wir folgende Abbildungen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{konj} &: G \to \mathrm{Aut}(G), \quad g \mapsto (h \mapsto g\cdot h\cdot g^{-1})\\
\mathrm{Ad} &: G \to GL(\mathfrak{g}), \quad g \mapsto \mathcal{L}(\mathrm{konj}_g) = T_e\,\mathrm{konj}_g = TL_g\cdot TR_{g^{-1}} = TR_{g^{-1}}\cdot TL_g\\
\mathrm{ad} &: \mathfrak{g} \to L(\mathfrak{g}), \quad X \mapsto (Y \mapsto [X,Y])
\end{aligned}$$

71.3 Proposition. *Für jede Liegruppe G mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ sind* $\mathrm{konj} : G \to \mathrm{Aut}(G)$ *und* $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subseteq GL(\mathfrak{g})$ *Gruppen-Homomorphismen,* $\mathrm{ad} : \mathfrak{k} \to \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \subseteq (\mathfrak{g})$ *ist ein Liegalgebra-Homomorphismus und es gilt*

$$\mathcal{L}(\mathrm{Ad}) = \mathrm{ad} \ \textit{und}\ \mathrm{Ad}\circ\exp_G = \exp_{GL(\mathfrak{g})}\circ\,\mathrm{ad},$$

d.h.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{ad}"] \arrow[d, "\exp_G"'] & L(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) \arrow[d, "\exp_{GL(\mathfrak{g})}"] \\
G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"'] & GL(\mathfrak{g})
\end{tikzcd}$$

Beweis. Offensichtlich ist ad ein Liealgebra-Homomorphismus und konj ein Gruppen-Homomorphismus und weil $\mathcal{L}$ funktoriell ist auch $\mathrm{Ad}\, G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subseteq GL(\mathfrak{g})$ ein Gruppen-Homomorphismus. Wegen (67.8) bleibt nur noch $\mathcal{L}(\mathrm{Ad}) = \mathrm{ad}$ zu zeigen. Seien dazu $X, Y \mathfrak{g}$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann ist nach (2) in (29.10) und nach

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(X)(Y) = [X,Y] &\overset{(29.8)}{=\!=} \mathcal{L}_X(Y) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} (\mathrm{Fl}^X_t)^*(Y)_e \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} T\,\mathrm{Fl}^X_{-t} \cdot Y_{\mathrm{Fl}^X_t(e)} \\
&\overset{(67.5)}{=\!=} \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} TR_{\exp(-tX)} \cdot TL_{\exp(tX)} \cdot Y \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(tX))(Y) \\
&= T_e\,\mathrm{Ad}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \exp(tX)\Big)(Y) = T_e\,\mathrm{Ad}(X)(Y). \quad \square
\end{aligned}$$

71.4 Lemma. *Es sei $f : E \to G$ eine glatte Funktion auf einen Vektorraum E mit Werten in einer Liegruppe G mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann ist die linkslogarithmische Ableitung $\delta f : E \to L(E,\mathfrak{g})$ definiert durch $\delta f(x) := TL_{f(x)^{-1}} \circ T_x f$. Falls $g : E \to G$ eine zweite solche Funktion ist, dann gilt die Produktregel:*

$$\delta(f\cdot g)(x) = \delta g(x) + \mathrm{Ad}(g(x)^{-1}) \circ \delta f(x).$$

Beweis. Wir rechnen wie folgt:

$$\begin{aligned}
\delta(f\cdot g)(x) &= TL_{(f(x)\cdot g(x))^{-1}} \circ T_x(f\cdot g) \\
&= TL_{g(x)^{-1}} \circ TL_{f(x)^{-1}} \circ T_{(f(x),g(x))}\mu \circ (T_x f, T_x g) \\
&= TL_{g(x)^{-1}} \circ TL_{f(x)^{-1}} \circ (TR_{g(x)} \circ T_x f + TL_{f(x)}\, T_x g) \\
&= TL_{g(x)^{-1}} \circ TL_{f(x)^{-1}} \circ TR_{g(x)} \circ T_x f \\
&\quad + TL_{g(x)^{-1}} \circ TL_{f(x)^{-1}} \circ TL_{f(x)}\, T_x g \\
&= \mathrm{Ad}(g(x)^{-1}) \cdot \delta f(x) + \delta g(x) \quad \square
\end{aligned}$$

71.5 Proposition. *Die linkslogarithmische Ableitung $\delta \exp$ der Exponentialfunktion* exp *einer Liegruppe G hat folgende Gestalt:*

$$\delta \exp(X) = TL_{\exp(-X)} \cdot T_X \exp = g(\mathrm{ad}(X)),$$

wobei die analytische Funktion $g : L(\mathfrak{g}) \to L(\mathfrak{g})$ durch $g(z) = (1 - e^{-z})/z$ gegeben ist.

Beweis. Für $X, Y \in \mathfrak{g}$ definieren wir eine glatte Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$ durch $c(t) := t\,\delta\exp(tX)(Y)$. Es gilt $c(0) = 0$ und

$$\begin{aligned} c(t+s) &= (t+s)\delta\exp((t+s)X)(Y) = \delta(\exp((t+s)\_))(X)(Y) \\ &= \delta(\exp(t\_)\cdot\exp(s\_))(X)(Y) \\ &= \delta(\exp(s\_))(X)(Y) + \Big(\mathrm{Ad}(\exp(sX)^{-1})\circ\delta(\exp(t\_)(X))\Big)(Y) \\ &= s\,\delta\exp(sX)(Y) + \mathrm{Ad}(\exp(-sX))(t\,\delta\exp(tX)(Y)) \\ &= c(s) + \mathrm{Ad}(\exp(-sX))(c(t)) \end{aligned}$$

Es ist

$$c'(0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} t\,\delta\exp(tX)(Y) = \delta\exp(0X)(Y) + 0\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\delta\exp(tX)(Y) = Y,$$

und durch Differenzieren obiger Gleichung nach s bei $s = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} c'(t) &= c'(0) + \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\mathrm{Ad}(\exp(-sX))\cdot c(t) \\ &\overset{(71.3)}{=\!=} c'(0) + \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} e^{s\,\mathrm{ad}(-X)}\cdot c(t) \\ &= c'(0) + \mathrm{ad}(-X)\cdot c(t) \\ &= c'(0) - [X, c(t)]. \end{aligned}$$

Dies ist eine inhomogenen linearen Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$c'(s) = -[X, c(s)]$$

ist $c(s) = \mathrm{Ad}(\exp(-sX))\cdot c_0$, denn

$$c'(s) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\mathrm{Ad}(\exp(-tX))\ \mathrm{Ad}(\exp(-sX))\ c_0 = \mathrm{ad}(X)(c(s)) = -[X, c(s)].$$

Mittels einem Ansatz $s \mapsto \mathrm{Ad}(\exp(-sX))\cdot c(s)$ durch Variation der Konstanten erhalten wir die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung als

$$c(s) = \mathrm{Ad}(\exp(-sX))\int_0^s \mathrm{Ad}(\exp(tX))(Y)\,dt.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \delta\exp(X)(Y) = c(1) &= \mathrm{Ad}(\exp(-X))\int_0^1 \mathrm{Ad}(\exp(tX))(Y)\,dt \\ &= e^{-\,\mathrm{ad}(X)}\int_0^1 e^{t\,\mathrm{ad}(X)}\,dt\,(Y) = g(\mathrm{ad}(X))(Y), \end{aligned}$$

denn

$$e^{-z}\int_0^1 e^{tz} = e^{-z}\,\frac{e^z-1}{z} = \frac{1-e^{-z}}{z}. \quad \square$$

71.6 Theorem, Die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel. *Es sei G eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$. Dann ist*

$$\exp X\cdot\exp Y = \exp\Big(X + \int_0^1 f(e^{\mathrm{ad}\,X}\cdot e^{t\ \mathrm{ad}\,Y})\cdot Y\ dt\Big),$$

wobei $f : L(\mathfrak{g}) \to L(\mathfrak{g})$ *gegeben ist durch* $f(z) := \frac{z\ln(z)}{z-1}$.

Beweis. Für fixes $X, Y \in \mathfrak{g}$ sei $c(t) := \exp^{-1}(\exp(X)\cdot\exp(tY)) \in \mathfrak{g}$. Dann ist $\delta(\exp\circ c)(t) = \delta\exp(c(t))\cdot c'(t) = g(\mathrm{ad}(c(t)))\cdot c'(t)$ nach (71.5). Andererseits ergibt sich wegen $\exp(-c(t)) = \exp(c(t))^{-1} = \exp(tY)^{-1}\cdot\exp(X)^{-1}$ folgendes:

$$\begin{aligned}
\delta(\exp\circ c)(t) &= TL_{\exp(c(t))^{-1}}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\exp(c(t)) \\
&= TL_{\exp(tY)^{-1}\cdot\exp(X)^{-1}}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Big(\exp(X)\cdot\exp(tY)\Big) \\
&= TL_{\exp(tY)^{-1}}\cdot TL_{\exp(X)^{-1}}\cdot TL_{\exp(X)}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\exp(tY) \\
&\overset{(67.5)}{=\!=} TL_{\exp(tY)^{-1}}\cdot TL_{\exp(tY)}\cdot Y = Y,
\end{aligned}$$

und somit $Y = \delta(\exp\circ c)(t) = g(\mathrm{ad}(c(t)))\cdot c'(t)$. Es ist

$$\begin{aligned}
e^{\mathrm{ad}(c(t))} = \mathrm{Ad}(\exp(c(t))) = \mathrm{Ad}(\exp(X)\cdot\exp(tY)) &= \\
= \mathrm{Ad}(\exp(X))\circ\mathrm{Ad}(\exp(tY)) &= e^{\mathrm{ad}(X)}\circ e^{\mathrm{ad}(tY)}
\end{aligned}$$

und somit ist $\mathrm{ad}(c(t)) = \ln(e^{\mathrm{ad}(X)}\circ e^{\mathrm{ad}(tY)})$ und

$$Y = g(\mathrm{ad}(c(t)))\cdot c'(t) = g(\ln(e^{\mathrm{ad}(X)}\circ e^{\mathrm{ad}(tY)}))\cdot c'(t).$$

Es sei $f : GL(\mathfrak{g}) \to L(\mathfrak{g})$ durch $f(z) := \frac{z\ln(z)}{z-1}$ definiert. Dann ist $f(e^z)\cdot g(z) = 1$ und somit $f(e^{\mathrm{ad}(c(t))})\cdot Y = f(e^{\mathrm{ad}(c(t))})\,g(\mathrm{ad}(c(t)))\cdot c'(t) = c'(t)$, also ist

$$\begin{aligned}
\exp^{-1}(\exp X\cdot\exp Y) = c(1) = c(0) + \int_0^1 c'(t)\,dt& \\
= X + \int_0^1 f(e^{\mathrm{ad}\,X}\cdot e^{t\ \mathrm{ad}\,Y})(Y)\,dt.& \quad\square
\end{aligned}$$

Wenn man sukzessive die auftretenden Funktionen in Potenzreihen entwickelt, so erhält man

$$\begin{aligned}
g(z) &= \frac{1-e^{-z}}{z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{(k+1)!} \quad \text{sowie von} \\
\ln(z) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(z-1)^k}{k} \quad \text{und} \\
f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z-1)^k}{k+1}\,z
\end{aligned}$$

so erhält man

$$\int_0^1 f(e^{\operatorname{ad} X}\cdot e^{t\operatorname{ad} Y})(Y)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k(e^{\operatorname{ad} X}\cdot e^{t\operatorname{ad} Y}-1)^k}{k+1}\, e^{\operatorname{ad} X}\cdot e^{t\operatorname{ad} Y}\, Y\,dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k+1}\Big(\sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j\geq 1}} \frac{t^j}{i!\,j!}\operatorname{ad}(X)^i\operatorname{ad}(Y)^j\Big)^k e^{\operatorname{ad} X}\cdot Y$$

$$= Y + \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k+1}\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k\geq 0\\ j_1,\dots,j_k\geq 0\\ i_l+j_l\geq 1\\ m\geq 0}} \frac{(\operatorname{ad} X)^{i_1}(\operatorname{ad} Y)^{j_1}\dots(\operatorname{ad} X)^{i_k}(\operatorname{ad} Y)^{j_k}}{i_1!\dots i_k!j_1!\dots j_k!(1+i_1+\dots+i_k)}\,(\operatorname{ad} X)^m\cdot Y$$

Sortieren nach der Gesamtzahl von ad's liefert die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe

$$\exp X\cdot\exp Y = \exp\Big(X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}\big([X,[X,Y]]+[Y,[Y,X]]\big)+\dots\Big)$$

71.7 Definition

Für das Weitere noch einige gemeinsame Definitionen für Lie-Gruppen und Lie-Algebren: Sei dazu X eine Lie-Gruppe oder eine Lie-Algebra und sei Y_i entsprechend eine Untergruppe oder Teilalgebra. Mit $[Y_1,Y_2]$ bezeichnen wir die von allen Kommutatoren aus Y_1 und Y_2 aufgespannte Untergruppe oder Teilalgebra. Mit $Z(X) := \{y : [x,y]=0 \text{ für alle } x\}$ bezeichnet man das ZENTRUM von X. Es ist $Z(G)$ eine Abelsche Untergruppe und $\mathcal{L}(ZG)=Z(\mathcal{L}G)$. Die ABSTEIGENDE ZENTRALREIHE ist induktiv definiert durch $X^{r+1} := [X,X^r]$ und $X^0 := X$, die DERIVIERTE REIHE durch $X(r+1) := [X(r),X(r)]$ und $X(0) := X$. Klarerweise gilt: X ist Abelsch $\Leftrightarrow X(1)=X^2=0 \Leftrightarrow Z(X)=X$.

71.8 Abelsche Lie-Gruppen

Sei G Abelsch, dann ist klarerweise $\mathcal{L}G=\mathcal{G}$ Abelsch, also als Lie-Algebra isomorph zum $\mathbb{R}^n$ mit der 0-Multiplikation (d.h. $[a,b]=0$ für alle $a,b\in\mathcal{G}$). Diese Lie-Algebra hat als einfachzusammenhängende Lie-Gruppe den $\mathbb{R}^n$ mit der Addition. Somit ist G isomorph zu $\mathbb{R}^n$ modulo einer diskreten Untergruppe. Jede solche ist von gewissen linear unabhängigen Vektoren (o.B.d.A. durch $e_1,\dots,e_k$) erzeugt. Der Quotient ist dann $G=S^1\times\dots\times S^1\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}=\mathbb{T}^k\times\mathbb{R}^{n-k}$.

Wie kann man nun auf einfache Weise neue Lie-Gruppen konstruieren? Dazu betrachtet man kurze exakte Sequenzen von Lie-Gruppen oder Lie-Algebren: $0\to X\xrightarrow{i} Z\xrightarrow{p} Y\to 0$ (d.h. i injektiv, p surjektiv und $\operatorname{Bild}(i)=\operatorname{Ker}(p)$). In solch einer Situation sagt man, daß Z eine ERWEITERUNG von X mit Y ist. Man sagt, die Erweiterung SPALTET AUF, falls p ein rechtsinverses s besitzt. Genau in dieser Situation ist Z semidirektes Produkt von X und Y. Der Raum X heißt AUFLÖSBAR, falls es durch endlich viele Erweiterungen aus Abelschen Objekten gewonnen werden kann. Er heißt NILPOTENT, falls es durch endlich viele zentrale Erweiterungen (d.h. $\operatorname{Bild}(i)\subseteq\operatorname{Zentrum}(Z)$) aus den Abelschen Objekten gewonnen werden kann.

71.9 Satz.

1. *X ist nilpotent $\Leftrightarrow X^n = 0$ für ein n.*
2. *X ist auflösbar $\Leftrightarrow X(n) = 0$ für ein $n \Leftrightarrow X(1)$ ist nilpotent.*
3. *G ist nilpotent bzw. auflösbar $\Leftrightarrow \mathcal{L}G$ ist nilpotent bzw. auflösbar.*

71.10 Folgerung (Struktur auflösbarer Lie-Gruppen).
Sei G auflösbar, dann ist G als Mannigfaltigkeit diffeomorph zu $(S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Ist G zusätzlich einfachzusammenhängend, dann ist $k = 0$. Sei G nilpotent, dann ist $\mathcal{L}G \xrightarrow{\exp} G$ eine Überlagerung mit $\operatorname{Ker}(\exp) = Z(\mathcal{L}G)$.

Nun zur Struktur allgemeiner endlichdimensionaler Lie-Algebren $\mathcal{G}$. Für jede solche existiert ein eindeutiges maximales auflösbares Ideal, das Radikal $rad(\mathcal{G})$ von $\mathcal{G}$. Eine Lie-Algebra heißt HALBEINFACH, falls $rad(\mathcal{G}) = 0$. Allgemein hat $\mathcal{G}/rad(\mathcal{G})$ keine nichttrivialen auflösbaren und damit auch keine nichttrivialen Abelschen Ideale mehr, ist also halbeinfach. Eine Algebra $\mathcal{G}$ heißt EINFACH falls $\dim \mathcal{G} > 1$ und die einzigen Ideale 0 und $\mathcal{G}$ sind.

71.11 Satz (Levi-Zerlegung).
Die kurze exakte Sequenz $rad(\mathcal{G}) \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}/rad(\mathcal{G})$ spaltet auf. Also ist $\mathcal{G} \cong rad(\mathcal{G}) \oplus \mathcal{G}/rad(\mathcal{G})$, die Summanden heißen LEVI-TEILALGEBREN.

71.12 Satz (Struktur halbeinfacher Lie-Algebren).
$\mathcal{G}$ ist halbeinfach $\Leftrightarrow \mathcal{G}$ ist endliches Produkt einfacher Lie-Algebren.

71.13 Die einfachen Lie-Algebren

Also beinhaltet die folgende vollständige Klassifikation der einfachen Lie-Algebren schon eine Klassifikation der halbeinfachen.

Zuerst die komplexen einfachen Lie-Algebren, das sind Lie-Algebren, die sogar komplexe Vektorräume mit komplex-bilinearer Lieklammer sind und keine nichttrivialen komplexen Ideale besitzen:

In der folgenden Tabelle steht in der ersten Spalte die eingebürgerte Abkürzung für die entsprechende einfache komplexe Lie-Algebra, ihre Dimension ist dim, eine zugehörige Lie-Gruppe ist G und ihre kompakte Form ist K (siehe weiter unten), das Zentrum der universellen Überlagerung ist $Z(\tilde{G})$.

Typ	$\dim d$	G	K	$Z(\tilde{G})$
$A_n\ (n>0)$	$n(n+2)$	$SL_{\mathbb{C}}(n+1)$	$SU(n+1)$	$\mathbb{Z}_{n+1}$
$B_n\ (n>1)$	$n(2n+1)$	$SO_{\mathbb{C}}(2n+1)$	$SO(2n+1)$	$\mathbb{Z}_2$
$C_n\ (n>2)$	$n(2n+1)$	$Sp_{\mathbb{C}}(2n)$	$Q(n)$	$\mathbb{Z}_2$
$D_n\ (n>3)$	$n(2n-1)$	$SO_{\mathbb{C}}(2n)$	$SO(2n)$	$\begin{cases}\mathbb{Z}_4 & \text{für } n\equiv 0(2)\\ \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 & \text{für } n\equiv 1(2)\end{cases}$
E_6	78			$\mathbb{Z}_3$
E_7	133			$\mathbb{Z}_2$
E_8	248			0
F_4	52	$\mathrm{Aut}(\mathbb{J}_{\mathbb{C}})$		0
G_2	14	$\mathrm{Aut}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$		0

Dabei ist $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ die Algebra der Oktaven mit komplexen Koeffizienten, d.h. ein komplex 8-dimensionaler Vektorraum, mit folgender Multiplikation für die Basis $(1, e_1, \dots, e_7)$:

$$1\cdot 1 = 1,\ 1\cdot e_i = e_i = e_i\cdot 1,\ e_i^2 = -1,\ e_i\cdot e_j = -e_j\cdot e_i \text{ für } i\neq j,$$
$$e_1 = e_2\cdot e_6 = e_3\cdot e_4 = e_5\cdot e_7,\ \text{sowie zyklische Vertauschungen davon.}$$

Daraus lassen sich dann alle reellen einfachen Lie-Algebren erhalten: Und zwar ist die Komplexifizierung jeder (halb)einfachen reellen Lie-Algebra eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra. Erstere heißt dann reelle Form der letzteren. A. Weil hat gezeigt: wenn von zwei lokal isomorphen, zusammenhängenden, reellen, halbeinfachen Lie-Gruppen eine kompakt ist, dann auch die andere. Kompaktheit ist also eine lokale Eigenschaft halbeinfacher Lie-Algebren, und es kann gezeigt werden, daß zu jeder komplexen halbeinfachen Lie-Algebra genau eine kompakte reelle Form existiert.

	G	Typ
$n>1$	$SL(n)$	A_{n-1}
$n>1,\ 2k\le n$	$SU(n,k)$	A_{n-1}
$n>0$	$SL_{\mathbb{H}}(n)$	A_{2n-1}
$n>1$	$SL_{\mathbb{C}}(n)$	$A_{n-1}\times A_{n-1}$
$n>1,\ k\le n$	$SO(2n+1,k)$	B_n
$n>1$	$SO_{\mathbb{C}}(2n+1)$	$B_n\times B_n$
$n>2$	$Sp(2n)$	C_n
$n>2,\ 2k\le n$	$Q(n,k)$	C_n
$n>2$	$Sp_{\mathbb{C}}(2n)$	$C_n\times C_n$
$n>3,\ k\le n$	$SO(2n,k)$	D_n
$n>3$	$Q_-(n)$	D_n
$n>3$	$SO_{\mathbb{C}}(2n)$	$D_n\times D_n$
$k=1,\dots,6$		E_6
$k=1,\dots,5$		E_7
$k=1,\dots,4$		E_8
$k=1,\dots,4$		F_4
$k=1,\dots,3$		G_2

Dabei wurde wieder folgende Bezeichnungsweise verwendet:

$$\begin{aligned}
SO_{\mathbb{C}}(n) &:= \{A \in GL_{\mathbb{C}}(n) : A^t A = 1, A^t J A = J\} \\
Sp(2n) &:= \{A \in GL(2n) : A^t J A = J\} \\
Sp_{\mathbb{C}}(2n) &:= \{A \in GL_{\mathbb{C}}(2n) : A^t J A = J\} \\
SO(n,k) &:= \{A \in SL(n) : A^t J_k A = J_k\} \\
SU(n,k) &:= \{A \in SL_{\mathbb{C}}(n) : A^t J_k \bar{A} = J_k\} \\
Q(n,k) &:= \{A \in GL_{\mathbb{H}}(n) : A^t J_k \bar{A} = J_k\} \\
Q_-(n) &:= \{A \in GL_{\mathbb{H}}(n) : A^t \alpha \bar{A} = \alpha\}
\end{aligned}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ -\mathrm{id} & 0 \end{pmatrix}; \quad J_k = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{n-k} & 0 \\ 0 & -\mathrm{id}_k \end{pmatrix}; \quad \alpha = i \cdot \mathrm{id}$$

Zur weiterführenden Literatur über Lie-Algebren und Lie-Gruppen seien die folgende Bücher empfohlen: [**42**], [**38**], [**81**] und [**68**].

72. Aufgaben

72.1. Krümmung in Polarkoordinaten Sei $r = r(\varphi)$ die Polarkoordinatendarstellung einer Kurve und sei $r' := \frac{dr}{d\varphi}$. Zeige, daß:

(a). Die Bogenlänge gegeben ist durch: $\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi$.

(b). Die Krümmung gegeben ist durch: $\frac{r^2+2(r')^2-rr''}{(r^2+(r')^2)^{3/2}}$.

72.2. Krümmung für implizite Funktionen Sei $f(x, y) = 0$ eine implizite Darstellung einer Kurve und sei $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_{xy} := \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, etc.. Zeige, daß die Krümmung von c gegeben ist durch

$$\frac{f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

(Hinweis: Impliziter Funktionensatz (10.3))

Ad (72.3)-(72.14):

Diskutiere die folgenden klassischen Kurven. Skizziere sie, und berechne insbesondere neben der Krümmung falls möglich die Bogenlänge und bestimme etwaige Scheitel. Falls mehrere Darstellungen angegeben sind, zeige daß sie die gleiche Kurve beschreiben:

72.3. Kegelschnittlinien
Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ und Parabel $y^2 = 2px$.

72.4. Trochoiden (verlängerte und verkürzte Zykloiden):

$$x = a(t - \lambda \sin t),\ y = a(1 - \lambda \cos t).$$

Insbesondere die Zykloiden ($\lambda = 1$), explizit gegeben durch:

$$x = a \arccos \tfrac{a-y}{a} - \sqrt{y(2a - y)}.$$

72.5. Zykloiden Die Epi- ($a > 0$) und Hypo- ($a < 0$) Zykloiden:

$$x = (A + a)\cos\varphi - a\cos(\tfrac{A+a}{a}\varphi),$$
$$y = (A + a)\sin\varphi - a\sin(\tfrac{A+a}{a}\varphi).$$

Insbesondere die Astroide $A = -4a$, explizit gegeben durch:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

72.6. Cassinische Kurven $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$,
bzw. in Polardarstellung $r^2 = c^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4 \cos^2 2\varphi + (a^4 - c^4)}$.
Insbesondere die Lemniskate ($a = c$).

72.7. Spiralen Die Archimedische Spirale $r = a\varphi$, die hyperbolische Spirale $r = \frac{a}{\varphi}$ und die logarithmische Spirale $r = ae^{k\varphi}$.

72.8. Kettenlinie $y = a \cosh \frac{x}{a} = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$.

72.9. Traktrix oder Schleppkurve $x = a \operatorname{Arcosh} \frac{a}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$.

72.10. Kartesisches Blatt $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, oder implizit $x^3 + y^3 = 3axy$, oder in Polarkoordinaten $r = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}$.

72.11. Zissoide $x = \frac{at^2}{1+t^2}$, $y = \frac{at^3}{1+t^2}$, oder implizit $y^2(a-x) = x^3$, oder in Polarkoordinaten $r = \frac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$.

72.12. Strophoide $x = a\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $y = at\frac{t^2-1}{t^2+1}$, oder
implizit $y^2(a-x) = x^2(a+x)$, oder in Polarkoordinaten $r = -a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$.

72.13. Konchoide des Nikomedes $x = a + l\cos\varphi$, $y = a\tan\varphi + l\sin\varphi$, oder
implizit $(x-a)^2(x^2+y^2) - l^2x^2 = 0$,
oder in Polarkoordinaten $r = \frac{a}{\cos\varphi} \pm l$
Ebenso die **Konchoide des Kreises** (**Pascalsche Schnecke**)
$x = a\cos^2\varphi + l\cos\varphi$, $y = a\cos\varphi\sin\varphi + l\sin\varphi$, oder implizit
$(x^2+y^2-ax)^2 = l^2(x^2+y^2)$, oder in Polarkoordinaten $r = a\cos\varphi + l$.
Speziell die Kardioide (Herzkurve) $(a = l)$. Sie ist auch eine Epizykloide für $(A = a)$.

72.14. Die Versiera der Agnesi $y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$.
Ebenso die Neilsche (semikubische) Parabel: $x = t^2$, $y = at^3$,
oder implizit $y^2 = a^2x^3$.

72.15. Frenetsche Ableitungsgleichungen Unter dem Begleitbein an die nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve c versteht man die Kurven τ und ν, gegeben durch Einheitstangentialvektor und Einheitsnormalvektor. Zeige die Frenetschen Ableitungsgleichungen: $\tau' = K \cdot \nu$, $\nu' = -K \cdot \tau$.

72.16. Evolute Unter welchen Bedingungen an eine Bogenlängen-parametrisierte Kurve c definiert die Evolute $e_c(s) := c(s) + \frac{1}{K(s)}\nu(s)$ wieder eine (geometrische) Kurve. Zeige, daß die Krümmung der Evolute gegeben ist durch $\frac{K^3(s)}{|K'(s)|}$.

72.17. Involute Unter welchen Bedingungen an eine Bogenlängen-parametrisierte Kurve c definiert die Involute $i_c(s) := c(s) - s\tau(s)$ wieder eine (geometrische) Kurve. Zeige, daß die Krümmung der Evolute gegeben ist durch $\operatorname{sign}(sK(s))\frac{1}{s}$.

72.18. [ChristianHuygens1673]. Zeige, daß für eine Bogenlängen-parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ folgendes gilt:

(a). Unter den in Beispiel (72.16) behandelten Bedingungen ist die Evolute der Involute von c wieder c.
(b). Unter den in Beispiel (72.17) behandelten Bedingungen existiert eine Bogenlängenparametrisierung der Evolute von c, so daß deren Involute wieder c ist.

72.19. "Dog Walk Theorem" Beweise: Gilt für zwei geschlossene Kurven c_0 und c_1 die Ungleichung $|c_0(t) - a| > |c_0(t) - c_1(t)|$ so ist $W_a(c_0) = W_a(c_1)$. (Hinweis: Homotopie)

72.20. Sei $c : S^1 \to S^1$ eine geschlossene Kurve mit $W_0(c) \neq 0$, so ist c surjektiv.

72.21. Sei $c : S^1 \to S^1$ eine injektive geschlossene Kurve, so ist $W_0(c) = \pm 1$.

72.22. Zeige, daß die in der Vorlesung angegebenen Beschreibungen der Äquivalenz geschlossener Kurven wirklich äquivalent sind.

72.23. Wie ändern sich die Krümmungen K_i bei einen Orientierungswechsel des $\mathbb{R}^{n+1}$ bzw. des Parameterintervalls.

72.24. Zeige, eine Kurve parametrisiert genau dann eine Gerade, wenn ihre Tangenten einen Punkt gemeinsam haben.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf Kurven im $\mathbb{R}^3$, die hinreichend regulär sind:

72.25. Zeige, daß Krümmung und Torsion einer beliebig parametrisierte Kurve c gegeben sind durch: $K = |c' \times c''|/|c'|^3$ und $T = \det(c', c'', c''')/|c' \times c''|^2$.

72.26. Sei c nach der Bogenlänge parametrisiert.

(a). Für den Winkel $\varphi(s_1, s_2)$ von $\tau(s_1)$ nach $\tau(s_2)$ gilt: $\frac{\varphi(s_1,s_2)}{s_2-s_1} \to K(s)$ für $s_1, s_2 \to s$, $s_2 > s_1$. (Hinweis: $\varphi \sim 2\sin\frac{\varphi}{2} = |\tau(s_1) - \tau(s_2)|$.)

(b). Für den Winkel $\varphi(s_1, s_2)$ von $\beta(s_1)$ nach $\beta(s_2)$ gilt: $\frac{\varphi(s_1,s_2)}{s_2-s_1} \to |T(s)|$ für $s_1, s_2 \to s$, $s_2 > s_1$.

(c). Wogegen konvergiert $\frac{\varphi(s_2,s_1)}{s_1-s_2}$ für $s_1, s_2 \to s$, $s_2 > s_1$, wenn $\varphi(s_1, s_2)$ der Winkel von $\nu(s_1)$ nach $\nu(s_2)$ ist?

72.27. [Darboux] Finde eine Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\nu_i' = v \times \nu_i$ für $i = 0, 1, 2$ (Setze $v := T\tau + K\beta$).

72.28. Zeige, eine Kurve ist genau dann eine Gerade, wenn $K = 0$. Eine Kurve mit $K \neq 0$ liegt genau dann in einer Ebene, wenn $T = 0$.

72.29. Zeige, daß eine Kurve, deren Schmiegebenen einen Punkt gemeinsam haben, eine ebene Kurve ist.

72.30. Zeige, daß eine Kurve, deren Hauptnormalen einen Punkt gemeinsam haben, auf einem Kreis liegt.

72.31. Zeige, daß eine Kurve genau dann auf einer Sphäre liegt, wenn ihre Normalebenen einen Punkt gemeinsam haben.

72.32. Berührsphäre Zeige, daß die Sphäre welche eine Kurve c von Ordnung 3 bei s berührt $(c + \frac{1}{K}\nu + \frac{1}{T}(\frac{1}{K})'\beta)(s)$ als Mittelpunkt M und $R^2 = (\frac{1}{K^2} + (\frac{1}{T}(\frac{1}{K})')^2)(s)$ als Radius R hat (Hinweis: man differenziere $g(s) := |c(s) - M|^2$).

72.33. Sphärische Kurven Zeige, daß eine Kurve genau dann auf einer Sphäre mit Radius R liegt, falls $(\frac{1}{K^2} + (\frac{1}{T}(\frac{1}{K})')^2)(s) = R^2$. Sie liegt genau dann auf irgendeiner Sphäre, wenn $\frac{T}{K} + \left(\left(\frac{1}{K}\right)' \frac{1}{T}\right)' = 0$ ist.

72.34. Helix Zeige, daß folgende Aussagen für eine Kurve äquivalent sind:

1. τ schließt mit einen festen Vektor einen fixen Winkel ein.
2. β schließt mit einen festen Vektor einen fixen Winkel ein.
3. ν liegt immer in einer fixen Ebene.
4. K und T sind proportional.
5. c läßt sich schreiben als $c(t) = c_0(t) + tv$, wobei c_0 eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in einer Ebene ist, und v ein fixer Vektor (welcher normal auf diese Ebene gewählt werden kann).

So eine Kurve c heißt Helix. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Krümmung und Torsion von c und c_0.
(Hinweis: $K = T\tan\alpha \Rightarrow \tau\cos\alpha + \beta\sin\alpha$ ist konstant).

72.35. Zeige: eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve ist genau dann eine Helix falls $\det(c'', c''', c'''') = 0$.

72.36. Zeige, daß $t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt)$ eine Helix ist und berechne K und T.

72.37. Zeige, daß die Kurve $t \mapsto (at, bt^2, t^3)$ genau dann eine Helix ist, wenn $4\, b^4 = 9\, a^2$ ist.

72.38. Bertrand Kurven Zeige, daß es zu einer Kurve eine zweite gibt, welche die gleiche Hautnormale (als Gerade im $\mathbb{R}^3$) besitzt, genau dann wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt mit $aK + bT = 1$.
(Hinweis: Sei c eine Bogenlängenparametrisierte Kurve mit Begleitbein τ, ν, β. Daß eine Kurve $\bar{c}$ die gleiche Hauptnormale besitzt bedeutet $\bar{c}(s) = c(s) + a(s)\nu(s)$. Schließe aus $\bar{c}' \perp \nu$, daß a konstant ist. Daß $\bar{c}''$ im Erzeugnis von $\bar{\tau}$ und ν liegt, liefert eine Differentialgleichung für K und T deren Lösung $1 = aK + bT$ erfüllt).

72.39. Zeige: falls es mehr als 2 Kurven mit gleicher Hauptnormalen gibt, so gibt es unendlich viele (und diese sind Helixen).

72.40. Konformität der stereographischen Projektion Zeige, daß die stereographische Projektion $S^n \to \mathbb{R}^n$ Winkel erhält. (Hinweis: zeige, daß die Umkehrabbildung $h : \mathbb{R}^n \to S^n$ konform ist)

72.41. Zeige, daß die stereographische Projektion $S^n \to \mathbb{R}^n$ alle $(n-1)$-Sphären auf $(n-1)$-Sphären und Hyperebenen im $\mathbb{R}^n$ abbildet. (Hinweis: Die Gleichung einer $(n-1)$-Sphäre bzw. Hyperebene ist

$$\alpha(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n + \gamma = 0$$

mit $4\alpha\gamma < \beta_1^2 + \cdots + \beta_n^2$ und die stereographische Projektion bildet $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ auf $(x_1, \ldots, x_n)$ ab mit $x_i = \frac{y_i}{1 - y_{n+1}}$.)

72.42. Kugelprojektionen Berechne für die folgenden Projektionen der Sphäre auf einen Kegel mit Basiswinkel α den Abstand des Bildpunktes vom Berührkreis:

(a). Die Zentralprojektion vom Kugelmittelpunkt.
(b). Die Normalprojektion auf die Kegelerzeugende.
(c). Eine Winkelerhaltende Projektion.
(d). Eine Flächenerhaltende Projektion.

Beschreibe soweit existent (c) und (d) in den degenerierten Fällen des Kegels (Tangential-Ebene und Zylinder).

72.43. Zeige, daß die Hopffaserung $S^3 \to S^2$ glatt ist.

72.44. Zeige, daß für die folgenden Lie-Gruppen G die Komposition $G \times G \to G$ glatt ist (Hinweis: $Komp : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ist bilinear). $G = GL(\mathbb{R}^n), SL(\mathbb{R}^n), O(\mathbb{R}^n)$ und $SO(\mathbb{R}^n)$

72.45. Zeige, daß für die Gruppen in (72.44) die Inversion $G \to G$ glatt ist (Hinweis: Impliziter Funktionensatz angewendet auf $\mathrm{inv}(x) \cdot x = e$).

72.46. Quadrik Sei $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilinear und symmetrisch und sei $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear. Finde Bedingungen unter welchen die Quadrik $M := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x, x) + a(x) = 1\}$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$ ist. Identifiziere Ellipsoid, Hyperboloid und Paraboloid als Spezialfall.

72.47. Zeige, daß das Tangentialbündel $T(N\times M)$ eines Produkts zweier Mannigfaltigkeiten isomorph zum Produkt $TN\times TM$ der Tangentialbündel ist. (Hinweis: Der Isomorphismus ist $(T\,\mathrm{pr}_N, T\,\mathrm{pr}_M) : T(N\times M)\to TN\times TM$).

72.48. Zeige, daß das Tangentialbündel jeder Lie-Gruppe G trivial ist.
(Die partielle Ableitung $T_eG\times G\hookrightarrow TG\times TG\cong T(G\times G)\xrightarrow{T(mult)} TG$ der Multiplikation $G\times G\to G$ liefert eine globale Vektorbündelkarte.)

72.49. Transformationsverhalten von Vektorfeldern und 1-Formen
Seinen $(u^i)_{i=1}^m$ und $(v^i)_{i=1}^m$ lokale Koordinaten um x auf M. Die Jacobimatrix des Kartenwechsels $v\circ u^{-1}$ im Punkt $v(x)$ ist dann $(\frac{\partial v^i}{\partial u^j})$.

1. Sei $\xi=\sum_{i=1}^m \xi^i\frac{\partial}{\partial u^i}=\sum_{i=1}^m \eta^i\frac{\partial}{\partial v^i}\in T_xM$. Wie lassen sich die Koordinaten ξ^i von w bezüglich der Basis $(\frac{\partial}{\partial u^i})$ aus den Koordinaten η^i bezüglich $(\frac{\partial}{\partial v^i})$ ausrechnen?
2. Sei $w=\sum_{i=1}^m \xi_i du^i=\sum_{i=1}^m \eta_i dv^i\in (T_xM)^*$. Wie lassen sich die Koordinaten ξ_i von w bezüglich der Basis (du^i) aus den Koordinaten η_i bezüglich (dv^i) ausrechnen.

72.50. Exponentialabbildung Für fixes $A\in L(\mathbb{R}^n):=L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ betrachte auf dem Vektorraum $L(\mathbb{R}^n)$ das Vektorfeld $\xi_A : B\mapsto A\circ B$. Zeige: sein Fluß Fl^{ξ_A} ist gegeben durch $(t,B)\mapsto \exp(tA)\circ B$, wobei $\exp(A):=\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}A^k$. Berechne den Kommutator $[\xi_{A_1},\xi_{A_2}]$. Zeige, daß $\det(\exp(A))=e^{\mathrm{Spur}(A)}$ und $\exp(A_1)\exp(A_2)=\exp(A_1+A_2)$ falls A_1 und A_2 kommutieren. Folgere daraus, daß $\exp: L(\mathbb{R}^n)\to GL(\mathbb{R}^n)$ ein lokaler Diffeomorphismus um 0 ist und seine Einschränkung lokale Diffeomorphismen von $\{A\in L(\mathbb{R}^n):\mathrm{Spur}(A)=0\}$ nach $SL(\mathbb{R}^n)$ und von $\{A\in L(\mathbb{R}^n): A^t+A=0\}$ nach $O(\mathbb{R}^n)$ liefert.

72.51. Universelle Überlagerung Zeige, daß zu jeder zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M eine einfachzusammenhängende Mannigfaltigkeit $\tilde M$, die sogenannte universelle Überlagerung, konstruiert werden kann, welche M überlagert.

(Hinweis: Man wähle einen fixen Punkt x_0 in M und definiere $\tilde M$ als die Menge aller Homotopieklassen von Kurven $c:[0,1]\to X$, mit $c(0)=x_0$, wobei die Homotopie die Randpunkte festhalten soll. Die Überlagerungsabbildung ist dann durch $[c]\mapsto c(1)$ gegeben. Für jede einfach zusammenhängende offene Menge $U\subset M$ (z.B. Karte $\varphi: V\to U$ der Mannigfaltigkeit M mit V einer offenen Kugel um 0 in $\mathbb{R}^m$) und jede Kurve c von x nach $\varphi(0)$ erhält man eine Karte $\varphi_{c,U}: U\to\tilde M$, $x\mapsto[c_x\bullet c]$, wobei c_x eine Kurve in U ist die $c(1)$ und x verbindet und "$\bullet$" das Aneinanderhängen von Wegen bezeichnet. Es gilt $p\circ\varphi_{c,U}=\mathrm{id}$ und der Kartenwechsel ist definiert auf einer offene Teilmenge und dort die Identität. Außerdem zerfällt $p^{-1}U$ in die Bilder der Karten $\varphi_{U,c}$, wobei c alle Homotopieklassen von Kurven, die x_0 mit einen fixen Punkt $x_1\in U$ verbinden, durchläuft.)

72.52. Orbitraum Zeige, wenn eine Gruppe G von Diffeomorphismen auf M diskontinuierlich wirkt, daß der Raum der Orbits M/G zu einer Mannigfaltigkeit gemacht werden kann, so daß $M\to M/G$ eine Überlagerung wird und G die Gruppe der Decktransformationen wird. Dabei sagt man, daß die Gruppe G diskontinuierlich auf M wirkt, falls für jedes $x\in M$ eine Umgebung $U_x\subset M$ existiert mit $U_x\cap g(U_x)=\emptyset$ für alle $g\neq e$ in G. Unter dem Orbit von $x\in M$ versteht man die Menge $\{g(x): g\in G\}$.

(Hinweis: Sei $p : M \to M/G$ die Abbildung, welche jedem $x \in M$ seinen Orbit zuordnet. Auf U_x ist p injektiv, kann also als Karte von M/G verwendet werden. Zeige der Kartenwechsel ist durch Anwenden eines $g \in G$ gegeben.)

72.53. Projektive Räume Verwende (72.52) um zu zeigen, daß der projektive Raum $\mathbb{P}^n$ aller Geraden im $\mathbb{R}^{n+1}$ eine Mannigfaltigkeit ist (Hinweis: $\mathbb{P}^n = S^n/\mathbb{Z}_2$, wobei $\mathbb{Z}_2 = \{\mathrm{id}, \text{Antipodalabbildung}\}$). Was ist die universelle Überlagerung von $\mathbb{P}^n$?

72.54. Zeige, daß der Raum $\mathbb{P}^n$ der Geraden im $\mathbb{R}^{n+1}$ in den $\mathbb{R}^{2n}$ einbettbar ist. (Sei $h : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ gegeben durch

$$(x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_n) \mapsto \Big(\sum_{i+j=0}^{k} x_i y_j\Big)_{k=0}^{n} =$$

$$= \Big(x_0y_0, x_0y_1 + x_1y_0, \dots, \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}, \dots, x_{n-1}y_n + x_n y_{n-1}, x_n y_n\Big)$$

und sei $g : S^n \to S^{2n}$ gegeben durch $g(x) = \frac{h(x,x)}{|h(x,x)|}$. Dann gilt $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1 = \pm x_2$ (falls $h(x,x) = \lambda h(y,y)$ so betrachte $h(x+\lambda y, x+\lambda y)$) und liefert also eine injektive Abbildung $\mathbb{P}^n \to S^{2n}$.)

72.55. Blow-up=Explosion Zeige, die Menge

$$M := \{(x, [y]) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1} : \forall\, i, j : x_i y_j = x_j y_i\}$$

ist eine Teilmannigfaltigkeit, $\mathrm{pr}_1 : M \to \mathbb{R}^n$ ist glatt und einerseits ist pr_1 ein Diffeomorphismus von $\mathrm{pr}_1^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ auf $\mathbb{R}^n$ aber andererseits ist $\mathrm{pr}_1^{-1}(0) = \mathbb{P}^{n-1}$.

72.56. Sei G die Untergruppe von $Aut(\mathbb{C})$, welche durch die beiden Translationen $z \mapsto z + 2\pi i$ und $z \mapsto z + 2\pi$ erzeugt wird. Welche Mannigfaltigkeit ist M/G ? (Hinweis: Betrachte $\{(x, y) : 0 \le x, y \le 2\pi\}$)

72.57. Sei G die Untergruppe der Diffeomorphismen von $\mathbb{R}^2$, welche durch die Translationen $z \mapsto z + 2\pi i$ und die Abbildung $z \mapsto \bar{z} + 2\pi$ erzeugt wird. Welche Mannigfaltigkeit ist M/G ? (Hinweis: Betrachte $\{(x, y) : |x| \le \pi, 0 \le y \le 2\pi\}$)

72.58. Stiefel-Mannigfaltigkeit Zeige, daß für $k \le n$ der Raum aller orthonormalen k-Beine im $\mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit, die sogenannte Stiefel-Mannigfaltigkeit $V(k, n)$. (Hinweis: Ein orthonormales k-Bein ist ein k-Tupel orthonormaler Vektoren im $\mathbb{R}^n$, und kann als Abbildung $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ aufgefaßt werden, welche $A^t \circ A = \mathrm{id} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ erfüllt. Zeige, daß diese Gleichung regulär ist).

72.59. Grassmann-Mannigfaltigkeit Zeige, daß für $k \le n$ der Raum der k-dimensionalen Teilräume des $\mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit ist, die sogenannte Grassmann-Mannigfaltigkeit $G(k, n)$. (Hinweis: Für einen fixen k-dimensionalen Teilraum $E < \mathbb{R}^n$ sei U_E die Menge aller solchen Teilräume welche sich als Graph einer Abbildung $E \to E^\perp$ darstellen lassen, und sei eine Karte $L(E, E^\perp) \to U_E \subset G(k, n)$ gegeben durch $T \mapsto Graph(T)$. Berechne den Kartenwechsel.)

72.60. Zeige, daß die Abbildung $E \mapsto E^\perp$ von $G(k, n) \to G(n - k, n)$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesonders ist $G(n - 1, n) \cong G(1, n) = \mathbb{P}^{n-1}$

72.61. Zeige, daß die Abbildung, die jedem k-Bein im $\mathbb{R}^n$ den davon erzeugten Teilraum zuordnet, glatt ist von $V(k, n) \to G(k, n)$ (siehe (72.58) und (72.59)).

72.62. Die Poincaré'sche Halbebene Zeige, daß die Möbiustransformation $h : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ ein Diffeomorphismus mit Inversen $h^{-1} : z \mapsto \frac{1}{i}\frac{z+1}{z-1}$ von der oberen Halbebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ auf $\mathbb{D}$ ist. Bestimme eine Riemann-Metrik (die Poincaré-Metrik) auf der Halbebene, sodaß h eine Isometrie auf die hyperbolische Scheibe wird. Nun bestimme die Gruppe der konformen Diffeomorphismen und die der isometrischen Diffeomorphismen. (Hinweis: Jene der hyperbolischen Scheibe wurden in der Vorlesung angegeben)

72.63. Die Isometrien des $\mathbb{R}^n$ In den ersten Vorlesungsstunden haben wir gezeigt, daß jede Isometrie (Bewegung) des $\mathbb{R}^n$ gegeben ist durch $z \mapsto Rz + b$ mit $R \in O(\mathbb{R}^n)$ und $z \in \mathbb{R}^n$. Zeige, daß die Lie-Gruppe der Isometrien $O(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ ist, wobei die Gruppenmultiplikation durch $(R_1, b_1) \cdot (R_2, b_2) = (R_1 \circ R_2, R_1(b_2) + b_1)$ gegeben ist.

72.64. Die Isometrien der S^n Verwende, daß die Distanz bezüglich der üblichen Riemannschen Metrik auf S^n gegeben ist durch den Winkel den die Radiusvektoren der Punkte einschließen, um zu zeigen, daß die Gruppe der Isometrien der S^n gerade die $O(\mathbb{R}^{n+1})$ ist. (Hinweis: Sei $g : S^n \to S^n$ eine Isometrie, so ist $\tilde{g} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $x \mapsto |x| g(\frac{x}{|x|})$ eine Isometrie des $\mathbb{R}^{n+1}$. Nun verwende (72.63))

72.65. Quaternionen Man zeige: Die Menge $\left\{\left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) : a, b \in \mathbb{C}\right\}$ ist Teilring der komplexen 2×2-Matrizen und sogar ein Körper. Identifiziert man $\mathbb{C}^2$ mit diesen Körper, vermöge der linearen Abbildung $(a, b) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)$, so wird auch $\mathbb{C}^2$ ein Schiefkörper, der Körper $\mathbb{H}$ der Quaternionen. Die Norm von (a, b) ist die Determinante von $\left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)$. Somit gilt für die Multiplikation $|(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)| = |(a_1, b_1)| \cdot |(a_2, b_2)|$ und die Menge der Einheitsquaternionen S^3 ist eine Untergruppe von $\mathbb{H}$. Identifiziert man $\mathbb{C}^2$ mit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, so nimmt die Multiplikation die folgende Gestalt an: $(t, x) \cdot (s, y) = (ts - \langle x, y\rangle, ty + sx + x \times y)$ für $(t, x), (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Zeige weiters, daß $(\forall\, x \in \{0\} \times \mathbb{R}^3 : xy = yx) \Rightarrow y \in \mathbb{R} \times \{0\}$ und $(\forall\, x \in \mathbb{H} : xy = zx) \Rightarrow y = z \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Durch Differenzieren der Gleichung $xx^{-1} = 1$ berechne die Ableitung der Abbildung $\mathrm{inv} : x \mapsto x^{-1}$.

72.66. Universelle Überlagerung der $SO(\mathbb{R}^3)$ Man fasse S^3 auf als Gruppe der Einheitsquaternion und $\mathbb{R}^3$ als Teilraum $\{0\} \times \mathbb{R}^3$ von $\mathbb{H}$. Zeige, die Abbildung $p : S^3 \ni x \mapsto p(x) \in SO(\mathbb{R}^3)$ definiert durch $p(x)(y) = xyx^{-1}$ ein glatter Gruppenhomomorphismus, und hat als Kern $\{x : p(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\} = \{1, -1\}$. Berechne auch die Tangentialabbildung $T_1 p$, und zeige daß sie bijektiv ist. p ist dann die gewünschte universelle Überlagerung. Folgere, daß $\mathbb{P}^3 \cong SO(3)$ (benütze (72.65)).

72.67. Universelle Überlagerung der $SO(\mathbb{R}^4)$
In Analogie zu (72.66) betrachte man den Gruppenhomomorphismus $p : S^3 \times S^3 \to SO(4)$ definiert durch $p(x, y)(z) := xzy^{-1}$. Zeige, daß der Kern von p gerade $\{(1, 1), (-1, -1)\}$ ist und daß $T_{(1,1)} p$ bijektiv ist.

72.68. Jacobi-Identität Beweise für die Lieklammer von Vektorfeldern:

$$[\xi_1, [\xi_2, \xi_3]] + [\xi_2, [\xi_3, \xi_1]] + [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]] = 0 \text{ für alle } \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathcal{X}(M)$$

72.69. Produktregeln Zeige für Riemann-Mannigfaltigkeiten:

$$\begin{aligned} \operatorname{Grad}(f\cdot g) &= f\cdot \operatorname{Grad} g + g\cdot \operatorname{Grad} f\\ \operatorname{div}(f\cdot \xi) &= f\cdot \operatorname{div}\xi + \xi\cdot f = f\cdot \operatorname{div}\xi + \langle \operatorname{Grad} f, \xi\rangle\\ \Delta(f\cdot g) &= \Delta f\cdot g + f\cdot \Delta g + 2\langle \operatorname{Grad} f, \operatorname{Grad} g\rangle \end{aligned}$$

72.70. Hodge-Stern-Operator Zeige:

$$* \circ * = (-1)^{k(m-k)}\,\mathrm{id} \qquad \text{auf } \Omega^k(M).$$

(Hinweis: Dies kann punktweise in $\bigwedge^k T_x^* M$ nachgerechnet werden, dort verwende man eine Orthonormalbasis $(e^1,\dots,e^m)$)

72.71. Kommutatoren Zeige folgende Formeln für Kommutatoren von graduierten Derivationen:

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta] &= \mathcal{L}_{[\xi,\eta]}\\ [\mathcal{L}_\xi, d] &= 0\\ [\mathcal{L}_\xi, i_\eta] &= i_{[\xi,\eta]} \end{aligned}$$

72.72. Divergenz Zeige die Formel für die Divergenz in lokalen Koordinaten:

$$\operatorname{div}\xi = \frac{1}{\sqrt{G}}\sum_{i=1}^m \frac{\partial(\sqrt{G}\xi^i)}{\partial u^i}.$$

72.73. Laplace-Operator Zeige die Formel für den Laplace-Operator angewandt auf eine Funktion f in lokalen Koordinaten:

$$\begin{aligned} -\Delta f &= \frac{1}{\sqrt{G}}\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial u^i}(\sqrt{G}\frac{\partial f}{\partial u^j} g^{i,j})\\ &= \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} g^{i,j} + \frac{\partial f}{\partial u^j}\left(g^{i,j}\frac{\partial G}{\partial u^i}\frac{1}{\sqrt{G}} + \frac{\partial g^{i,j}}{\partial u^i}\right)\right). \end{aligned}$$

72.74. Euler-Formel Zeige folgende Formel für die Normalkrümmung in Termen der Hauptkrümmungen sowie der Hauptkrümmungsrichtungen (Euler). Seien dazu K_i die Hauptkrümmungen und ξ_i eine Orthonormalbasis von zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen. Dann gilt

$$K(\xi) = \sum_{i=1}^m K_i \langle \xi_i, \xi\rangle^2.$$

72.75. Nabelpunkte Zeige, daß auf einer 2-dimensionalen Fläche ein Nabelpunkt vorliegt genau dann, wenn $H^2 = K$.

72.76. Bewegungsinvarianz Sei M eine Fläche und B eine Bewegung des $\mathbb{R}^3$. Zeige, daß M die bewegte Fläche $B(M)$ in entsprechenden Punkten die gleiche 1.te und 2.te Fundamentalform besitzen.

72.77. Torus Berechne die Krümmungen des Torus (Drehfläche !)

72.78. Isometrien Zeige, daß jede konforme Flächenerhaltende Abbildung eine Isometrie ist.

72.79. Regeflächen Zeige, daß folgende Flächen Regelflächen sind und berechne wenn möglich ihre Gauß-Krümmung.

1. hyperbolisches Paraboloid: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
2. einblättriges Hyperboloid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
3. Sattelfläche: $z = xy$
4. Möbiusband: $\varphi(t,s) := ((2 - s\sin\frac{t}{2})\sin t, (2 - s\sin\frac{t}{2})\cos t, \cos\frac{t}{2})$

72.80. Torsen Zeige, daß folgende Flächen Torsen sind und berechne wenn möglich ihre Gauß-Krümmung.

1. allgem. Kegel, parametrisiert durch $\varphi(t,s) := c_0 + s\,v(t)$
2. allgem. Zylinder, parametrisiert durch $\varphi(t,s) := c(t) + s\,v_0$
3. Tangentialfläche, einer Kurve c parametrisiert durch $\varphi(t,s) := c(t) + sc'(t)$

72.81. Ist die Regelfläche $\varphi(t,s) := (t^2 + 2ts, t + s, t^3 + 3t^2 s)$ eine Torse?

72.82. Schmiegtorse Sei c Kurve auf M, Y tangentiales Vektorfeld längs c, sodaß $II(Y, c') = 0$ und c', Y linear unabhängig sind. Dann ist $\varphi(t,s) = c(t) + s\,Y(t)$ eine Torse.

72.83. Minimalflächen Zeige, daß folgende Flächen Minimalflächen sind und berechne wenn möglich ihre Gauß-Krümmung.

1. Katenoid: $\varphi(t,s) = (a\cosh s\cos t, a\cosh s\sin t, bs)$
2. Scherk's Fläche: $e^z = \frac{\cos y}{\cos x}$
3. Enneper's Fläche: $(u,v) \mapsto (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2)$
4. Wendelfläche: $\varphi(t,s) = (s\cos t, s\sin t, at)$
5. die Fläche
   $\varphi(t,s) = (at + \sin t\cosh s, s + a\cos t\sinh s, 1 - a^2\cos t\cosh s)$

72.84. Hyperbolische Scheibe Berechne die Gaußkrümmung der hyperbolischen Scheibe (äquivalent der Poincaré Ebene).

72.85. Geodäten der projektiven Ebene Man verwende, daß die projektive Ebene $\mathbb{P}^2$ der Orbitraum der Sphäre S^2 bezüglich der Antipodalabbildung ist um die Geodäten auf $\mathbb{P}^2$ zu bestimmen. Als Karten verwende man entweder die Zentralprojektion vom Mittelpunkt der Sphäre auf eine Tangentialebene (Geodäten sind Geraden), oder die stereographische Projektion auf die Einheitsscheibe in einer Tangentialebene (Geodäten sind Geraden durch 0 sowie Kreise die durch antipodale Punkte am Einheitskreis gehen). Welche Länge haben alle diese periodischen Geodäten.

72.86. Geodäten der Poincaréschen Halbebene Zeige, daß die Geodäten der Poincaréschen Halbebene die Geraden parallel zur y-Achse sind und die Halbkreise, welche die x-Achse orthogonal treffen, siehe [**83**, 5.1.7].

72.87. Geodäten der hyperbolischen Scheibe Zeige, daß die Geodäten der Einheitsscheibe mit der hyperbolischen Metrik Geraden durch 0 sind oder Kreise, die den Rand orthogonal schneiden.

Literaturverzeichnis

[1] Kervaire Michel A. A manifold which doesn't admit a differentiable structure. *Comm. Math. Helv.*, 35:1–14, 1961.

[2] Beardon A.F. *A primer on Riemann Surfaces.* Cambridge Univ.Press, London, 1984. 257

[3] Morin B. and Petit J-P. Let retournement de la sphére. *CRAS.*, 287:767–770, 791–794, 879–882, 1978. 35

[4] Brown. Smooth n-manifolds immerse in $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$. *Contemp. Math*, 12:73–79, 1982. 158

[5] Bankwitz C. über die Fundamentalgruppe des inversen Knotens und des gerichteten Knotens. *Ann.of Math*, 31:129–130, 1930. 59

[6] Fefferman C. The Bergman kernel of biholomorphic mappings of pseudo convex domains. *Inv. Math.*, 26:1–65, 1974. 39

[7] Gordon C. and Wilson E. Isospektral deformations of compact solvmanifolds. *J. Diff. Geom.*, 19:241–256, 1984. 336

[8] Carathéodory. über die gegenseitigen Beziehungen der Ränder bei konformen Abbildungen des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis. *Math. Annal.*, 73:305–320, 1913. 39

[9] Catalan. *Jornal de Mathém.*, 7:203, 1842. 379

[10] Papakyriakopoulos C.D. On Dehn's lemma and the asphericity of knots. *Ann. of Math.*, 66:1–26, 1957. 58, 59

[11] Hsiung Chuan-Chih. *A First Course in Differential Geometry.* John Wiley &Sons, New York, 1981.

[12] Cohen. A proof of the immersion conjecture. *Proced. Math. Acad. Soc.*, 79:3390–3392, 1982. 158

[13] Hilbert D. über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung. *Trans.AMS.*, 2:87–99, 1901. . 397

[14] Gompf Robert E. Three exotic $\mathbb{R}^4$'s and other anomalies. *Journal of Differential Geom. 18.2*, pages 317–328, 1983.

[15] Peschl E. *Funktionentheorie.* Bibliographisches Inst., Mannheim, 1967. 39, 253

[16] Xavier F. The Gauss map of a complete, non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere. *Annals of Math.*, 113:211–214, 1981. 379

[17] Herglotz G. über die Starrheit der Eilflächen. *Abh. Math.Sem.Univ.Hamburg*, 15:127–129, 1943. 397

[18] Gauß. Disquisitiones generales circa superficies curvas. *Comm. Soc. Regiae Sci. Gottingensis Rec.*, 6, 1828. 357

[19] Gleason. Groups without small subgroups. *Ann. of Math.*, 56:193–212, 1952.

[20] Fischer G.M. On the group of all homeomorphisms of a manifold. *Trans. AMS*, 97:193–212, 1960. 56

[21] Federer H. *Geometric Measure Theory.* Springer, Berlin, 1969. 50

[22] Hopf H. and Rinow W. über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Flächen. *Math. Ann.*, 116:749–766, 1938.

[23] Jarchow H. *Locally convex spaces.* Teubner, Stuttgart, 1981. 332

[24] Liebmann H. Eine neue Eigenschaft der Kugel. *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math. Phys.*, pages 44–55, 1899. 397

[25] Whitney H. The selfintersections of a smooth n-manifold in $2n$-space. *Annals of Math.*, 45:220–446, 1944. 158, 159

[26] Yamabe H. On an arcwise connected subgroup of a Liegroup. *Osaka M.J.*, 2:14–15, 1950. 443

[27] Haeflinger and Reeb. Varietés a une dimension et structures feulletés de plan. *l'Enseignement Math*, 2:107–125, 1957. 133
[28] Scherk H.F. Bermerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen. *Crellés Journal f. reine und angew. Math.*, 13:185–208, 1835. 379
[29] Guggenheimer H.W. *Differential Geometry.* Dover Publ., New York, 1963.
[30] James I.M. Whitehead products and vector fields on spheres. *Proc. Cambridge*, 53:817–820, 1957. 213
[31] Dieudonné J. *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press, New York, 1960. 39, 98, 215
[32] Hadamard J. Les surfaces á corbures opposées. *J.Math.Pures Appl.*, 4:27–73, 1889. 415
[33] Milnor J. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math.*, 64:399–405, 1956. 121
[34] Milnor J. Differentiable Structures on Spheres. *Ann. of Math.*, 81:962–972, 1959.
[35] Milnor J. Eigenvalues of the Laplace operator on certain mf's. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 51:542, 1964. 335
[36] Nash J. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. of Math.*, 63:20–64, 1956. 249
[37] Stallings J. The piecewise-linear structure of euclidean space. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 58:481–488, 1962. 121
[38] Tits J. *Liesche Gruppen und Algebren.* Springer Hochschultext, Berlin, 1983. 454
[39] Barosa J.L.M. and Colares A.G. *Minimal Surfaces in* $\mathbb{R}^3$. Springer Lecture Notes 1195, 1986. 379
[40] Joris. Une c^∞-application non-immersive qui possede la propriete universelle des immersions. *Archiv Math.*, 39:267–277, 1982. 155
[41] Alexander J.W. An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected. *Proc.Nat.Acad.Sci. USA.*, 10:8–10, 1924. 40
[42] Warner J.W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Scott Foresman and Company, Illinois, 1971. 302, 331, 444, 454
[43] Zindler K. über konvexe Gebilde I. *Monatsh. Math. Phys.*, 31:87–102, 1921. 42
[44] Vietoris L. Ein einfacher Beweis des Vierscheitelsatzes der ebenen Kurven. *Arch. Math.*, 3:304–306, 1952. 43
[45] Lagrange. *Œvres Vol. 1.* Gauthier-Villars, Paris, 1868.
[46] Berger M. *Geometry 1.* Springer, Berlin, 1987. 380, 393, 397
[47] Berger M. and Gostiaux B. *Differential Geometry, Manifolds, Curves, and Surfaces.* Springer, New York, 1987. 33, 38, 50
[48] Dehn M. über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. *Math. Ann.*, 69:137–168, 1910. 58
[49] Kac M. Can one hear the shape of a drum? *Amer.Math.Monthly*, 73:1–23, 1966. 334
[50] Kervaire M. A manifold which doesn't admit any differentiable structure. *Comm. Math. Helv.*, 34:257–270, 1960. 120
[51] Spivak M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry 1-4.* Publish or Perish, Berkeley, 1979. 135, 205, 232, 254, 263, 338, 339
[52] Gordon C. McA. and Luecke J. Konts are determined by their complements. *J.AMS.*, 2:371, 1989. 57
[53] Meusnier. Mémoire sur la curbure des surfaces. *Mémoires des savans étrangers*, 10:477–510, 1776. 346, 377, 379
[54] Vignéras M.F. Variétés Riemanniennes isospektrales et non isométriques. *Ann. Math*, 112:21–32, 1980. 335
[55] Montgomery and Zippin. Small subgroups of finite dimensional groups. *Ann. of. Math.*, 56:213–241, 1952. .
[56] Munkres. Obstruction to the smoothing of piecewise differentiable homeomorphism. *Ann.of Math.*, 72:521–554, 1960. 121
[57] Hirsch M.W. *Differential Topology.* Springer, New York, 1976. 31, 62, 64, 157, 158, 159, 163, 304
[58] Nomitzu and Ozeki. The existence of complete Riemannian metrics. *Proc. AMS.*, 12:889–891, 1961. .
[59] Bonnet O. Mémoire sur la théorie générale des surfaces. *Journ. de l'Ecole Polytechn.*, 19:1–146, 1848.
[60] Michor P. *Riemannsche Differentialgeometrie.* Vorlesung WS, Wien, 1988/89. 416
[61] Painlevé P. Sur la theorie de la Représentation conforme. *CRAS.*, 112:653–657, 1891. 39

[62] Engelking R. *Outline of General Topology*. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1968. 136
[63] Osserman R. Global Properties of minimal surfaces in e^3 and e^n. *Ann. of Math.*, 80:340–364, 1964. 380
[64] Osserman R. *A Survey of Minimal Surfaces*. Van Nostrand, NewYork, 1969.
[65] Osserman R. A proof of regularity everywhere of the classical solution to Plateaus's problem. *Ann.of Math*, 91:550–569, 1970. 378
[66] Walter R. *Differentialgeometry*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1978.
[67] Bernstein S. Sur un théorème de Géométrie et ses applications aux équations aux déivées partielles du type elliptique. *Comm.de la Soc.M. Kharkov*, 15:38–45, 1915. 379
[68] Helgason S. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Acad. Press, New York, 1978. 454
[69] Hildebrandt S. Boundary behaviour of minimal surfaces. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 35:47–82, 1969. 378
[70] Kobayashi S. *on conjugate and cut loci*. The Mathem. Assoc. Am., Englewood Cliffs, N.J., 1967. . 415
[71] Kobayashi S. *Tansformation groups in Differential Geometry*. Springer, Ergebnisse der Math. 70, Berlin, 1972. . 249, 250
[72] Kobayashi S. and Nomitzu K. *Foundations of Differential Geometry*. Interscience, New York, 1969.
[73] Lang S. *Differentiable Manifolds*. Addison-Wesley, 1962.
[74] Mukhopadhyaya S. New methods in the geometry of a plane arc. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 1:31–37, 1909. 43
[75] Warschawski S. über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformen Abbildungen. *Math.Z.*, 35:321–456, 1932. 39
[76] Chern S.S. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proc. AMS.*, 6:771–782, 1955. 254
[77] Chern S.S. *Complex manifolds without potential theory*. Van Nostrand, Princeton, 1967. 320
[78] Taubes. Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. *J.Diffgeom.*, 25:363–430, 1987. 121
[79] Bröcker Th. and Jänich K. *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer, Heidelberg, 1973. 157, 159, 160, 163
[80] Trotter. Non-inverible knots exist. *Topology*, 2:341–358, 1964. 56
[81] Varadarajan V.S. *Lie Groups, Lie Algebras and their Representation*. Springer Graduate Text, Berlin, 1984. 441, 454
[82] Gröbner W. *Matrizenrechnung*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1966.
[83] Klingenberg W. *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie*. Springer, Heidelberg, 1973. 354, 373, 397, 415, 463
[84] Weierstrass. *Monatsber. der Berlin. Akad.*, 1866. 379
[85] Greub Werner. *Multilinear Algebra*. Springer, 263
[86] Greub Werner, Halperin Stephen, and Vanstone Ray. *Connections, Curvature and Cohomology I-III*. Academic Press 773, 76, New York, 1972.

Index