TOPOLOGIE I, WS 1999/2000

Andreas Kriegl

Dies ist der erste Teil einer zweisemestrigen Vorlesung. Zum Verständnis dieses Skriptums ist die Kenntnis der grundlegenden Konzepte der Mengenlehre und zur Motivation mindestens die Grundvorlesungen über Analysis empfehlenswert. Die Topologie ist ein Hilfsmittel, daß in weiten Gebieten der Mathematik benötigt wird und somit finden sich die Motivationen vielerorts (Funktional-Analysis, komplexe Analysis, Differential-Geometrie, u.v.a.).

Da es sich hier um die erste Auflage handelt, werden der aufmerksamen LeserIn sicherlich viele Ecken und Unklarheiten auffallen. Natürlich können auch Fehler nicht ausgeschlossen werden. Wie immer bin ich jeder LeserIn dankbar, die sich der Mühe unterzieht mir ein Feedback (seien es Fehlerlisten oder in welcher anderen Form auch immer) zukommen zu lassen. Ich werde die Vorschläge in der nächsten Auflage gerne berücksichtigen.

Eine elektronisch verfügbare Version dieses Skriptums zusammen mit Korrekturen wird über “http://radon.mat.univie.ac.at/People/AndreasKriegl.html” verfügbar sein.

Das Ende eines Beweises ist wie üblich durch $\square$ gekennzeichnet und Aussagen die leicht zu ergänzende Beweis-Details benötigen durch Ⓤ.

Somit bleibt mir nur noch eine hoffentlich aufschlußreiche Lektüre zu wünschen.

Wien, 2000.1.30 Andreas Kriegl

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Grundbegriffe

1.1 Bestandsaufnahme, Motivation und grundlegende Definitionen

Bemerkung. In der Topologie geht es darum den passenden Rahmen für die in der Analysis zentralen Begriffe der Stetigkeit, der Konvergenz und damit verwandter, zu schaffen. Es soll damit möglich werden möglichst viele Räume neben den in den Grundvorlesungen zentralen Euklidischen Räumen zu behandeln.

Rufen wir uns also die grundlegenden Definitionen aus der Differential und Integralrechnung in Erinnerung.

(1) Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *stetig* bei $\xi \in \mathbb{R}^n$
$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n : |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow \lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$, i.e. $\forall x_n \to \xi : f(x_n) \to f(\xi)$.

(2) Dabei heißt eine Folge $(x_n)_n \in \mathbb{R}^n$ *konvergent* gegen ξ
$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |x_n - \xi| < \varepsilon$.

(3) Wenn man die ε-Umgebung $U_\varepsilon(\xi)$ von ξ wie folgt definiert $U_\varepsilon(\xi) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \xi| < \varepsilon\}$, dann kann man die Definition der Konvergenz auch wie folgt beschreiben: In jeder ε-Umgebung von ξ liegt die Folge schließlich (d.h. ab einem gewissen Index). Entsprechend bedeutet die Stetigkeit einer Funktion, daß das Urbild jeder ε-Umgebung von $f(\xi)$ ein gewisse δ-Umgebung von ξ enthält.

(4) Außerdem kann man damit auch den Begriff der offenen Teilmenge definieren: $O \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *offen* $:\Leftrightarrow \forall x \in O \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subseteq O$. Die Stetigkeit einer Funktion (in allen Punkten ihres Definitionsbereichs) ist dann äquivalent dazu, daß das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

Welche Strukturen haben wir nun für obige Definitionen verwendet:

(1) Die Differenz $x - \xi$ bzw. $f(x) - f(\xi)$ zweier Punkte, d.h. die Struktur die $\mathbb{R}^n$ zu einer Abel'schen Gruppe, bzw. sogar zu einem (endlich dimensionalen) Vektorraum macht.

(2) Weiters den Betrag $|v| \in \mathbb{R}$ eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$, die diesen Vektorraum zu einen normierten Raum (den sogenannten euklidische Raum) macht.

Viele Räume die uns wichtig sind (z.B. der in dem wir leben) haben aber bestenfalls lokal eine euklidische Struktur. Man denke nur an die Oberfläche der Sphäre (Erdballs) oder das Raum-Zeit-Kontinuum. Daher betrachten wir die Distanzfunktion d auf $X := \mathbb{R}^n$ gegeben durch $d(x_0, x_1) := |x_1 - x_0|$ als grundlegendes Objekt. Sie hat folgende Eigenschaften:

(M0) "Separiertheit": $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
(M1) "Symmetrie": $d(x, y) = d(y, x)$.
(M2) "Dreiecksungleichung": $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Allgemeiner nennen wir so eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine *Metrik* auf einer Menge X und X zusammen mit d heißt dann *metrischer Raum*. Falls in (M0) nur $(\Leftarrow)$ gilt, so nennt man d eine *Pseudo-Metrik*.

Aus $2\,d(x, y) = d(x, y) + d(y, x) \geq d(x, x) \geq 0$ folgt $d \geq 0$

Beispiele metrischer Räume:

(1) Der $\mathbb{R}^n$ mit der *euklidischen Metrik*

$$d_2 : (x, y) \mapsto \|x - y\|_2 := \sqrt{\sum_k (x^k - y^k)^2}.$$

(2) Die Sphäre (oder andere Riemann-Mannigfaltigkeiten, wie das Raum-Zeit-Kontinuum, siehe DifferenenΦΦΦentialgeometrie) durch die *geodätische Distanz* (d.h. dem Infimum der Bogenlängen von verbindenden Kurven).

(3) Der Raum ℓ^1 der absolut summierbaren Folgen (Reihen) $\sum_k x^k$ mit der Metrik $d_1(x, y) := \|x - y\|_1$, wobei die 1-Norm gegeben ist durch $\|x\|_1 := \sum_k |x^k|$.

(4) Allgemeiner für $1 \le p < \infty$ die p-integrierbaren Funktionen (modulo Gleichheit fast überall) mit der Metrik $d_p(f, g) := \|f - g\|_p$, wobei die p-Norm durch

$$\|f\|_p := \Bigl(\int |f(t)|^p \, dt\Bigr)^{1/p}$$

gegeben ist.

(5) Der Raum $B(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ aller beschränkten Funktionen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit der Metrik $d_\infty(f, g) := \|f - g\|_\infty$, wobei die ∞-Norm durch $\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}^m\}$ gegeben ist.

Für metrische Räume können wir dann wie für euklidische Räume die Begriffe ε-Umgebung, Konvergenz, Stetigkeit und Offenheit definieren:
Unter der ε-Umgebung von x verstehen wir $U_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$.
Eine Folge x_n konvergiert gegen x_∞ wenn sie schließlich in jeder ε-Umgebung von x_∞ liegt.
Eine Abbildung f ist stetig bei x_0, falls das Urbild jeder ε-Umgebung von $f(x_0)$ eine δ-Umgebung von x_0 enthält; äquivalent, wenn zu jeder ε-Umgebung von $f(x_0)$ eine δ-Umgebung von x_0 existiert, welche durch f in die gegeben abgebildet wird.
Schließlich heißt eine Menge $O \subseteq X$ offen falls jeder Punkt $x \in O$ eine ε-Umgebung besitzt, welche ganz in O enthalten ist.

Aber in wichtigen Beispielen drängt sich uns mehr als eine Distanzfunktion auf:

(1) Am Räumen differenzierbarer Funktionen sollten wir nicht nur den Abstand der Funktionen sondern auch ihrer Ableitungen berücksichtigen (Man denke an Aussagen über die Differenzierbarkeit der Grenzfunktion). Eine Folge von solchen Funktionen f^n sollte also genau dann konvergieren, wenn die Funktion und die betrachteten Ableitungen gleichmäßig konvergieren. D.h. am Raum $C^m([0, 1], \mathbb{R})$ aller m-fach stetig differenzierbarer Funktionen, sollten wir die (Pseudo-)Metriken $d_k : (f, g) \mapsto \|(f - g)^{(k)}\|_\infty$ für $0 \le k \le m$ betrachten.

Im Falle endlich vieler Pseudo-Metriken $d_1, \dots, d_n$ können wir aber getrost zu $d := \max\{d_1, \dots, d_n\}$ übergehen. Dies ist wieder eine Pseudo-Metrik und falls die gegebenen Pseudo-Metriken d_k *Punkte-trennend* sind (d.h. $\forall x, y : x \ne y \Rightarrow \exists k : d_k(x, y) \ne 0$) sogar eine Metrik, siehe Aufgabe (.)

Für $X = \mathbb{R}^n$ und $d_k : (x, y) \mapsto |x^k - y^k|$ beschreibt d gerade den Maximums-Abstand.

(2) Auf Räumen beliebig oft differenzierbarer Funktionen gehen wir wie folgt vor. Da wir ein (Pseudo-)Metrik d durch $\min\{1, d\}$ oder auch $\frac{d}{1+d}$ ersetzen können, ohne die Definition von Konvergenz und Stetigkeit (wohl aber von ε-Umgebung) zu ändern (siehe Aufgabe (Ü), dürfen wir annehmen, daß $d \leq 1$ gilt und für solche Metriken $d_1, d_2, \ldots$ können wir auch zu $d := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} d_k$ übergehen, d.h. statt maximal abzählbar vieler Pseudo-Metriken können wir uns immer auf eine einzelne Beschränken. Wieder ist d eine Metrik, falls die d_k Punkte-trennend sind.

(3) Am Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen haben wir die Punkte-trennende Familie von Metriken $d_k : (x, y) \mapsto |x^k - y^k|$ mit $k \in \mathbb{N}$. Die nach dem vorigen Punkt zugehörige Metrik $d(x, y) := \sum_k \frac{1}{2^k} \min\{1, |x^k - y^k|\}$ beschreibt gerade die *Koordinaten-weise* (oder auch *punktweise*) Konvergenz, d.h. eine Folge von $x_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $x_\infty \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, wenn jede Komponente ${x_n}^k$ gegen ${x_\infty}^k$ konvergiert, siehe Aufgabe (Ü.

(4) Ein kontinuierliches Pendant zum letzten Beispiel ist der Raum aller Funktionen $[0, 1] \to \mathbb{R}$. Die *punktweise Konvergenz* wird durch die überabzählbar vielen Pseudo-Metriken $d_t : (f, g) \mapsto |f(t) - g(t)|$ mit $t \in [0, 1]$ beschrieben. Wir können nun keine Konstruktion wie in (2) durchführen, denn eine Reihe $\sum_{t \in [0,1]} a_t$ kann nur dann absolut konvergieren, wenn alle bis auch höchstens abzählbar viele a_t gleich 0 sind: Wären nämlich überabzählbar viele ungleich 0, so wäre die Menge $I_k := \{t \in [0, 1] : |a_t| > \frac{1}{k}\}$ nach dem Schubfachprinzip für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ unendlich (sogar Überabzählbar) und damit $\sum_t |a_t| \geq \sum_{t \in I_k} |a_t| \geq \sum_{t \in I_k} \frac{1}{k} = \infty$. Es gibt auch keine andere Metrik die die punktweise Konvergenz beschreibt.

(5) Ein anderes Beispiel ist der Raum X aller Polynome $\sum_k a_k t^k$ mit reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$. Diese sind durch ihre Koeffizienten eindeutig festgelegt, d.h. X kann mit dem Raum aller endlichen Folgen, oder besser aller Folgen die schließlich gleich 0 sind identifiziert werden. Der Grenzwert einer konvergenten Folge von Polynomen sollte wieder ein Polynom sein. Beachte, daß selbst bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz auf $[0, 1]$ jede beliebige stetige Funktion als Grenzwert nach dem Satz (2.4.3) von Stone-Weierstraß auftritt. Um sicherzustellen, daß uns der Grad der Polynome nicht davonwächst, betrachten wir folgende Metriken $d_\varepsilon(a, b) := \sup\{\frac{|a_k - b_k|}{\varepsilon_k} : k \in \mathbb{N}\}$, wobei $\varepsilon = (\varepsilon_k)_k$ eine beliebige positive Folge ist. Dann konvergiert jedes $d_\varepsilon(f_n, f_\infty) \to 0$ für $n \to \infty$ genau dann, wenn der Grad der Polynome beschränkt bleibt, und ihre Koeffizienten konvergieren, siehe Aufgabe (Ü. Wieder gibt es keine einzelne Metrik die diese Konvergenz beschreibt, siehe Aufgabe (.)

(6) Ein kontinuierliches Pendant ist der Raum $C_c$der Test-Funktionen, wie er für das Lösen partieller linearer Differential-Gleichung benötigt wird: $C_c := \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \exists N : f(t) = 0 \text{ für } |t| > N\}$. Als Metriken verwenden wir $d_\varepsilon(f, g) := \sup\{\frac{|f(t) - g(t)|}{\varepsilon(t)}\}$ mit stetigen $\varepsilon : \mathbb{R} \to \{s \in \mathbb{R} : s > 0\} =: \mathbb{R}^+$. Man kann ebenso zeigen, daß genau dann für alle ε die Folge $d_\varepsilon(f_n, f_\infty) \to$ für $n \to \infty$, wenn wir ein gemeinsames N finden mit $f_n(t) = 0$ für alle n und alle $|t| > N$ und $f_n \to f_\infty$ gleichmäßig konvergiert.Ü Wieder gibt es keine einzelne Metrik die diese Konvergenz beschreibt.Ü

Ein *uniformer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Punkte-trennenden

Menge $\mathcal{D}$ von pseudo-Metriken. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß $\mathcal{D}$ nach oben gerichtet ist, d.h. $\forall d_1, d_2 \in \mathcal{D} \exists d \in \mathcal{D} : d \geq d_1, d_2$. Wenn wir eine beliebig Familie $\mathcal{D}$ von Pseudo-Metriken durch $\mathcal{D}' = \{\max\{d_1, \dots, d_n\} : d_i \in \mathcal{D}\}$ ersetzen so ist diese Bedingung erfüllt. Ein metrischer Raum ist somit ein uniformer Raum dessen Menge $\mathcal{D}$ von Pseudo-Metriken aus nur einer einzigen Metrik d besteht.

Wir können für uniforme Räume $(X, \mathcal{D})$ genau wie für metrische Räume die grundlegenden Definitionen geben:
Unter einer *Umgebung* von $x_0 \in X$ verstehen wir eine Menge der Form $\{y : d(y, x) < \varepsilon\}$ mit $\varepsilon > 0$ und $d \in D$. Die Umgebungen von x_0 sind also durch Paare $(\varepsilon, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}$ indiziert.
Eine Folge x_n konvergiert gegen x_∞ wenn sie schließlich in jeder Umgebung von x_∞ liegt.
Eine Abbildung f ist stetig bei x_0, falls das Urbild jeder Umgebung von $f(x_0)$ eine Umgebung von x_0 enthält; äquivalent, wenn zu jeder Umgebung von $f(x_0)$ eine Umgebung von x_0 existiert, welche durch f in die gegebene abgebildet wird.
Schließlich heißt eine Menge $O \subseteq X$ offen falls jeder Punkt $x \in O$ eine Umgebung besitzt, welche ganz in O enthalten ist.

Beachte, daß $d : X \times X \to \mathbb{R}$ stetig ist, wenn man das Produkt $X \times Y$ uniformer Räume mit den Pseudo-Metriken $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$ wobei d_X die Pseudo-Metriken von X und d_Y jene von Y durchläuft, siehe Aufgabe (38).

Wir sollten uns aus folgenden Gründen nicht zu sehr auf den Begriff Abstand kaprizieren:

(1) Konvergenz und Stetigkeit hängt nicht wirklich von den Pseudo-Metriken ab, denn verschiedene Metriken können durchaus das selbe Konvergenz-Verhalten besitzen, siehe Aufgabe (.)
(2) Das Konzept von überabzählbar vielen Pseudo-Metriken ist unübersichtlich und benutzt den keineswegs elementaren Begriff der reellen Zahlen.

Statt dessen versuchen wir nun den Begriff offene Menge abstrakt einzufangen: Die Menge $\mathcal{O}$ aller offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ oder eines metrischen oder sogar von uniformen Räumen hat folgende Eigenschaften:

(1) $\forall \mathcal{O}_0 \subseteq \mathcal{O} : \bigcup \mathcal{O}_0 := \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O \in \mathcal{O}$.
(2) $\forall \mathcal{O}_0 \subseteq \mathcal{O}$ mit $\mathcal{O}_o$ endlich $: \bigcap \mathcal{O}_0 := \bigcap_{O \in \mathcal{O}} O \in \mathcal{O}$.

Man rufe sich dazu die Definitionen

$$\bigcup \mathcal{O} := \{x : \exists O \in \mathcal{O} : x \in O\} = \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O; \qquad O_1 \cup O_2 := \bigcup \{O_1, O_2\}$$
$$\bigcap \mathcal{O} := \{x : \forall O \in \mathcal{O} : x \in O\} = \bigcap_{O \in \mathcal{O}} O; \qquad O_1 \cap O_2 := \bigcap \{O_1, O_2\}$$

in Erinnerung. Insbesonders ist $\emptyset = \bigcup \emptyset \in \mathcal{O}$. Hingegen dürfen wir $\bigcap \emptyset$ nicht uneingeschränkt bilden, denn dies liefert die Klasse (Unmenge) aller Mengen. Da wir aber hier nur Teilmenge einer fixen Menge $X = \mathbb{R}^n$ betrachten, könnte man $\bigcap \emptyset$ als X definieren (Dies ist nicht ganz sauber, da wir $\emptyset$ nicht ansehen können für welches X wir $\bigcap \emptyset$ betrachten).

Weiters wird es vor allem in der Topologie wichtig sein exakt zwischen '$\in$' und '$\subseteq$' zu unterscheiden. Beachte, daß $0 \in \mathbb{N}$, $1 \in \mathbb{N}$, ... , aber je nach Definition auch

$0 \subset \mathbb{N}, 1 \subset \mathbb{N}, 2 \subset \mathbb{N}, \dots$. Denn am einfachsten definiert man rekursive $0 := \emptyset$ und $n+1 := \{n, \{n\}\} = \{0, \dots, n\}$.

1.1.1 Definition (Topologie).
Allgemein nennt man nun eine Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen einer Menge X (d.h. $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$, wobei $\mathcal{P}(X) := \{A : A \subseteq X\}$ die Potenzmenge von X ist) eine *Topologie* (und ihre Elemente heißen die offenen Mengen der Topologie) falls sie die folgenden Axiome erfüllt:

(O0) $X \in \mathcal{O}$ (und $\emptyset \in \mathcal{O}$).
(O1) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O} : O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.
(O2) $\forall \mathcal{O}_0 \subseteq \mathcal{O} : \bigcup \mathcal{O}_0 := \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O \in \mathcal{O}$.

Eine Menge X zusammen mit einer Topologie $\mathcal{O}$ auf ihr heißt topologischer Raum.

Beispiele

(1) Die offenen Mengen eines metrischen Raums bilden eine Topologie, siehe Aufgabe (Ü.
(2) Es sei $\mathcal{O} := \{Y : Y \subseteq X\} =: \mathcal{P}(X)$. Dies ist die *diskrete Topologie*. Sie kann auch durch die Metrik

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben werden.
(3) Es sei $\mathcal{O} := \{\emptyset, X\}$. Dies ist die *indiskrete Topologie*.

1.1.2 Definition (Umgebung).
In topologischen Räumen können wir nun Umgebungen wie folgt definieren: Eine Menge $U \subseteq X$ heißt *Umgebung* von $x \in X :\Leftrightarrow \exists O \in \mathcal{O} : x \in O \subseteq U$. Beachte, daß wir nicht (wie viele) voraussetzen, daß Umgebungen offen sind (wir wollen ja auch abgeschlossene ε-Umgebungen betrachten können). Jede Obermenge einer Umgebung ist somit selbst Umgebung.

Die Familie der $\mathcal{U}(x) := \{U \subseteq X : U \text{ ist Umgebung von } x\}$ besitzt offensichtlich folgende Eigenschaften:

(U0) $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$; $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow x \in U$; $U \in \mathcal{U}(x)$, $U_1 \supseteq U \Rightarrow U_1 \in \mathcal{U}(x)$.
(U1) $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$.
(U2) $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \exists U_0$: $x \in U_0 \subseteq U$ und $\forall y \in U_0 : U_0 \in \mathcal{U}(y)$.

Durch die Familie $\{\mathcal{U}(x) : x \in X\}$ sind die offenen Mengen bereits eindeutig festgelegt, denn eine Menge $O \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn sie Umgebung all ihrer Punkte ist: ($\Rightarrow$) Sie ist nach Definition eine Umgebung. ($\Leftarrow$) Es existiert also zu jeden $x \in O$ ein offenes O_x mit $x \in O_x \subseteq O$. Also ist $O = \bigcup_{x \in O} O_x$ offen nach (O2). Achtung wenn wir $\{O_x : x \in X\}$ betrachten so haben wir das Auswahlaxiom (siehe (1.3.9)) auf die Familie der nicht-leeren Mengen $\{O_1 \in \mathcal{O} : x \in O_1 \subseteq O\}$ für $x \in O$ angewendet. Wenn wir dieses vermeiden wollen, so können wir ebensogut zeigen, daß $O = \bigcup \{O_1 \in \bigcup_x \mathcal{U}(x) : O_1 \subseteq O\}$ ist.

1.1.3 Lemma (Topologie via Umgebungen).
Jede Familie $\{\mathcal{U}(x) : x \in X\}$ von Mengen $\mathcal{U}(x)$ bestehend aus Teilmengen von

X, die (U0), (U1) und (U2) erfüllt, ist gerade die Familie der Umgebungen einer eindeutig bestimmten Topologie.

Beweis. Falls dies die Familie der Umgebungen einer Topologie ist, so müssen nach dem zuvor Gesagtem die offenen Mengen gerade jene sein, die Umgebung all ihrer Punkte sind. D.h. $O \subseteq X$ ist offen $\Leftrightarrow \forall x \in O : O \in \mathcal{U}(x)$. Dies als Definition der offenen Mengen liefert eine Topologie:

(O0) folgt aus $X \in \mathcal{U}(x)$ wegen (U0).
(O1) O_1, O_2 offen $\Rightarrow \forall x \in O_1 \cap O_2$: $O_i \in \mathcal{U}(x)$. Folglich ist $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{U}(x)$ nach (U1), also $O_1 \cap O_2$ offen.
(O2) O_i offen $\Rightarrow \forall x \in \bigcup_i O_i \exists i : x \in O_i$, also $O_i \in \mathcal{U}(x)$. Folglich ist $\bigcup_j O_j \supseteq O_i$ in $\mathcal{U}(x)$ nach (U0), also $\bigcup_i O_i$ offen.

Die Mengen in $\mathcal{U}(x)$ sind gerade die Umgebungen von x in dieser Topologie:
($\Rightarrow$) $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \exists U_0 \in \mathcal{U}(x)$ mit $U_0 \subseteq U$ und $\forall y \in U_0 : U_0 \in \mathcal{U}(y)$ nach (U2). Also ist U_0 nach Definition offen und $U \supseteq U_0 \ni x$ eine Umgebung von x.
($\Leftarrow$) Es sei U eine Umgebung von x, dann existiert ein offenes O mit $x \in O \subseteq U$. Also ist $O \in \mathcal{U}(x)$ und damit auch $U \in \mathcal{U}(x)$ nach (U0). □

1.1.4 Definition (Basis einer Topologie).
Da man üblicherweise nicht alle offenen Mengen explizit angeben kann oder will, und es ja für Konvergenz nur auf die "kleinen" offenen Mengen ankommt, definiert man eine *Basis* $\mathcal{B}$ einer Topologie $\mathcal{O}$ als eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$, sodaß für jedes $x \in O \in \mathcal{O}$ ein $O_0 \in \mathcal{B}$ existiert mit $x \in O_0 \subseteq O$.

Solch eine Basis $\mathcal{B}$ hat offensichtlich die beiden Eigenschaften:

(B0) $\forall x \in X \exists U \in \mathcal{B} : x \in U$, d.h. $\bigcup \mathcal{B} = X$
(B1) $x \in U_i \in \mathcal{B}$ für $i \in \{1, 2\} \Rightarrow \exists U \in \mathcal{B} : x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Beachte, daß eine Menge $O \subseteq X$ genau dann offen ist, wenn $\forall x \in O \exists O_x \in \mathcal{B} : x \in O_x \subseteq O$, d.h. $\mathcal{O} := \bigcup\{O_0 \in \mathcal{B} : O_0 \subseteq O\}$.
($\Rightarrow$) offensichtlich, da $\mathcal{B}$ eine Basis ist.
($\Leftarrow$) Es ist $O = \bigcup_x O_x \in \mathcal{O}$ wegen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ und (O2).

Man sagt der topologische Raum erfüllt das 2. *Abzählbarkeitsaxiom* falls er eine abzählbare Basis seiner Topologie besitzt.

1.1.5 Lemma (Topologie via Basis).
Jede Menge $\mathcal{B}$ von Teilmengen von X mit den Eigenschaften (B0) und (B1) ist Basis einer eindeutig bestimmten Topologie.

Beweis. Die einzig mögliche Topologie die $\mathcal{B}$ als Basis besitzt hat nach dem zuvor gesagten gerade jene $O \subseteq X$ als offene Mengen, für die $\forall x \in O \exists O_x \in \mathcal{B}$ mit $O_x \subseteq O$. Also genau jene O die Vereinigung aller ihrer Teilmenge aus $\mathcal{B}$ sind.

(O0) folgt aus (B0).
(O1) O_1, O_2 offen $\Rightarrow \forall x \in O_1 \cap O_2 \exists U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ mit $U_i \subseteq O_i$. Nach (B1) existiert ein $U \in \mathcal{B}$ mit $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2 \subseteq O_1 \cap O_2$, d.h. $O_1 \cap O_2$ ist offen.
(O3) Es seien alle O_i offen, d.h. $O_i = \bigcup\{U \in \mathcal{B} : U \subseteq O_i\}$. Dann ist $\bigcup_i O_i$ ebenfalls eine Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ und somit offen.

Schließlich ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{O}$, denn $\forall x \in O \in \mathcal{O}$ existiert nach Konstruktion von $\mathcal{O}$ ein $O_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in O_x \subseteq O$. □

Beispiele.

(1) Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann bildet die Menge $\{U_\varepsilon(x) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ aller offenen Bälle eine Basis einer Topologie, die *metrische Topologie*. Man erhält dieselbe Topologie, wenn man z.B. nur die Bälle mit Radius $\frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ verwendet. Auf $\mathbb{R}^m$ genügt es sogar die Mittelpunkte x auf alle $x \in \mathbb{Q}^m$ einzuschränken, d.h. $\mathbb{R}^m$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

(2) Es sei $(X, \prec)$ eine linear geordnete Menge, d.h. $\prec$ ist eine transitive Relation ($x \prec y$ und $y \prec z \Rightarrow x \prec z$) und für $x, y \in X$ tritt genau einer der 3 Fälle $x = y$, $x \prec y$ oder $y \prec x$ ein. Dann bilden die offenen Intervalle $(a, b) := \{x \in X : a \prec x \prec b\}$ mit $a \in X \cup \{-\infty\}$ und $b \in X \cup \{+\infty\}$ die Basis einer Topologie, der sogenannten *Ordnungstopologie*. Wobei $(-\infty, b) := \{x \in X : x \prec b\}$, $(a, +\infty) := \{x \in X : a \prec x\}$ und $(-\infty, +\infty) := X$ sei.

(3) Die Ordnungstopologie von $(\mathbb{R}, <)$ ist gerade die übliche Topologie.

(4) Wenn wir auf $X := \mathbb{R} \bigcup \{\pm\infty\}$ die übliche Ordnung, d.h. $\forall t \in \mathbb{R} : -\infty \prec t \prec +\infty$ betrachten, so erhalten nach (2) eine Topologie. Diese kann auch durch die Metrik $d(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$ beschrieben werden.Ⓤ

(5) Insbesonders kann man die Ordnungstopologie aus Beispiel (2) auf (Mengen von) Ordinalzahlen betrachten. Beachte dazu, daß eine *Ordinalzahl* nach Definition eine bzgl. '$\in$' *wohlgeordnete Menge* ist (d.h. linear geordnet und jede nicht-leere Teilmenge besitzt ein Minimum).

(6) *Sorgenfrey-Gerade*: $X := \mathbb{R}$, $\mathcal{B} := \{[x, y) : x < y\}$ ist Basis eine Topologie ohne zweites Abzählbarkeitsaxiom: Wenn $\mathcal{B}_0$ irgendeine Basis dieser Topologie ist, so gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $U_x \in \mathcal{B}_0$ mit $x \in U_x \subseteq [x, x + 1)$. Folglich ist $U_x \neq U_y$ für $x < y$, denn $x \in U_x \notin [y, y + 1)$. Da es aber überabzählbar viele $x \in \mathbb{R}$ gibt, muß auch $\mathcal{B}_0$ überabzählbar sein.

1.1.6 Definition (Subbasis einer Topologie).
Unter einer *Subbasis einer Topologie* $\mathcal{O}$ versteht man eine Teilmenge $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$, deren sämtlichen endlichen Durchschnitte eine Basis der Topologie bilden.

Jede beliebige Menge $\mathcal{S}$ von Teilmengen von X ist Subbasis einer eindeutigen Topologie $\mathcal{O}$, denn die Menge $\mathcal{B} := \{S_1 \cap \dots \cap S_n : S_i \in \mathcal{S}\}$ aller endlichen Durchschnitte (inklusive des Durchschnitts X der leeren Familie) erfüllt die Eigenschaften (B0) und (B1):

(B0) Es ist $x \in X \in \mathcal{B}$.

(B1) Es sei $O_1, O_2 \in \mathcal{B}$ also Durchschnitte endlich vieler Mengen in $\mathcal{S}$, so ist auch $O_1 \cap O_2$ ein solcher.

1.1.7 Definition (Umgebungsbasis).
Unter einer *Umgebungsbasis* $\mathcal{U}_x$ eines Punktes $x \in X$ versteht man eine Menge $\mathcal{U}_x$ von Umgebungen von x, sodaß jede Umgebung von x ein Element $U \in \mathcal{U}_x$ enthält.

Ein topologischer Raum erfüllt das 1. *Abzählbarkeitsaxiom*, wenn jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Wenn $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{O}$ ist, dann ist offensichtlich $\mathcal{U}_x := \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ eine Umgebungsbasis von x. Folglich folgt erste Abzählbarkeitsaxiom aus dem zweiten.

Unter einen *Umgebungsbasis* $(\mathcal{U}_x)_{x \in X}$ eines topologischen Raumes verstehen wir eine Familie bestehend aus je einer Umgebungsbasis $\mathcal{U}_x$ für jeden Punkt $x \in X$.

Solch ein System hat die folgenden Eigenschaften:

(UB0) $\forall x \in X$: $\mathcal{U}_x \neq \emptyset$; $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow x \in U$.
(UB1) $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}_x : U \subseteq U_1 \cap U_2$.
(UB2) $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \exists U_0 : x \in U_0 \subseteq U\ \forall y \in U_0 \exists U_y \in \mathcal{U}_y : U_y \subseteq U_0$.

Zu (UB2): Es sei $U_0 \subseteq U$ offen mit $x \in U_0$. Dann ist U_0 Umgebung aller $y \in U_0$, also existieren U_y mit $y \in U_y \subseteq U_0$.

Jede Umgebungsbasis $(\mathcal{U}_x)_{x\in X}$ eines topologischen Raums definiert eine Basis $\mathcal{B} := \bigcup_{x\in X} \mathcal{U})x$ der Topologie.

1.1.8 Lemma (Topologie via Umgebungsbasis).
Jede Familie $(\mathcal{U}_x)_{x\in X}$ von Mengen $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$, die die Eigenschaften (UB0), (UB1) und (UB3) besitzt, ist Umgebungsbasis einer eindeutig bestimmte Topologie auf X.

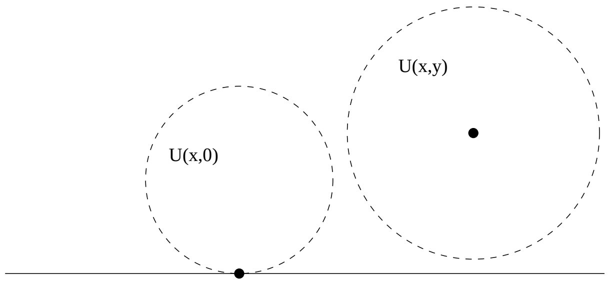
Beweis. Nach Definition einer Umgebungsbasis einer Topologie, sind die Umgebungen von x gerade die Obermengen von Mengen in $\mathcal{U}_x$. Wir definieren also $\mathcal{U}(x) := \{U \subseteq X : \exists V \in \mathcal{U}_x : U \supseteq V\}$. Dann gilt:

(U0) $X \in \mathcal{U}(x)$; Nach (UB0) ist $x \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$; $U \supseteq V \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U \in \mathcal{U}(x)$ ist offensichtlich.
(U1) Es sei $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$. Also existieren $V_1, V_2 \in \mathcal{U}_x$ mit $V_i \subseteq U_i$. Nach (UB1) existiert ein $V \in \mathcal{U}_x$ mit $V \subseteq V_1 \cap V_2$, also ist $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$.
(U2) $U \in \mathcal{U}(x)$, also existiert ein $U' \in \mathcal{U}_x$ mit $U \supseteq U'$. Nach (UB3) existiert ein U_0 mit $x \in U_0 \subseteq U'$ und $\forall y \in U_0 \exists V \in \mathcal{U}_y : V \subseteq U_0$, also $U_0 \in \mathcal{U}(y)$. $\square$

1.1.9 Beispiele.

(1) Für eine metrischen Raum (X, d) bilden die Bälle $U_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$ eine Umgebungsbasis. Aber ebenso auch die abgeschlossenen Bälle $A_\varepsilon(x) : \{y \in X : d(y, x) \leq \varepsilon\}$ für $\varepsilon > 0$ und zwar derselben Topologie.
(2) Für jeden uniformen Raum bilden die Umgebungen $\{y : d(y, x) < \varepsilon\}$ mit $\varepsilon > 0$ und $d \in \mathcal{D}$ eine Umgebungsbasis.
(3) Die *Niemytzki-Ebene* $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Es sei

$$U_\varepsilon(x_0, y_0) := \begin{cases} \{(x, y) : |(x, y) - (x_0, y_0)| < \varepsilon\} & \text{für } y_0 \neq 0 \\ \{(x_0, 0)\} \cup \{(x, y) : |(x, y) - (x_0, \varepsilon)| < \varepsilon\} & \text{für } y_0 = 0 \end{cases}$$



1.1.10 Definition (Abgeschlossene Menge). Eine Menge $A \subseteq X$ eines topologischen Raumes heißt *abgeschlossen* $:\Leftrightarrow \tilde{A} := X \setminus A$ ist offen. Wegen der De'Morgan'schen Gesetze ($\sim\bigcup\mathcal{A} = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \sim A$, $\sim\bigcap\mathcal{A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \sim A$) erfüllt die Menge $\mathcal{A}$ aller abgeschlossenen Teilmengen von X folgende 3 Eigenschaften:

(A0) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(A1) $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$;
(A2) $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap \mathcal{A}_0 \in \mathcal{A}$.

Und aus den gleichen Grund und $\sim\sim A = A$ ist jedes Mengensystem $\mathcal{A}$ mit diesen Eigenschaften die Menge aller abgeschlossenen Mengen einer eindeutig bestimmten Topologie $\mathcal{O} := \{\sim A : A \in \mathcal{A}\}$.

Beispiele.

(1) Die Menge der endlichen Teilmengen einer Menge X ist zusammen mit X selbst erfüllt (A0)-(A2), beschreibt also eine eindeutige Topologie auf X.

(2) Die *Zariski-Topologie*: Es sei *Poly* die Menge aller Polynome (in 1 bzw. mehreren Variablen und mit reellen bzw. komplexen Koeffizienten). Für jede Teilmenge $I \subseteq \text{Poly}$ sei $Z(I) := \bigcap_{f\in I} f^{-1}(0) := \{x : \forall f \in I : f(x) = 0\}$ die gemeinsame Nullstellenmenge. Dann erfüllt $\{Z(I) : I \subseteq \text{Poly}\}$ ebenfalls die Eigenschaften (A0)-(A2) und definiert somit eine Topologie, die sogenannte Zariski-Topologie, die in der algebraischen Geometrie von großer Bedeutung ist: Es ist $Z(I_1) \cup Z(I_2) = \bigcap_{f\in I_1} f^{-1}(0) \cup \bigcap_{g\in I_2} g^{-1}(0) = \bigcap_{f\in I_1, g\in I_2} (f\cdot g)^{-1}(0) = Z(I)$, wobei $I := \{f\cdot g : f \in I_1, g \in I_2\}$, und weiters ist $\bigcap_j Z(I_j) = Z(\bigcup_j) I_j)$.

1.1.11 Definition (Abschluß). Der *Abschluß* $\overline{Y}$ einer Teilmenge $Y \subseteq X$ ist als

$$\overline{Y} := \bigcap \{A : Y \subseteq A \subseteq X, A \text{ ist abgeschlossen}\}$$

definiert, d.h. $\overline{Y}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge die Y enthält. Weiters gilt:

Lemma (Beschreibung des Abschlusses).
$x \in \overline{Y} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap Y \neq \emptyset$.

Beweis. ($\Rightarrow$) Indirekt: Angenommen $\exists U \in \mathcal{U}(x) : U \cap Y = \emptyset$. Es sei O offen mit $x \in O \subseteq U$ und $A := \sim O$. Dann ist A abgeschlossen und $A \supseteq Y$, da $O \subseteq U \subseteq \sim Y$, also $x \notin A \supseteq \overline{Y}$, ein Widerspruch.

($\Leftarrow$) Indirekt: Angenommen $y \notin \overline{Y}$, d.h. es gibt ein abgeschlossenes $A \supseteq Y$ mit $y \notin A$, also $y \in U := \sim A \subseteq \sim Y$ und somit ist $U \cap Y = \emptyset$ ein Widerspruch. □

Offensichtlich ist eine Menge Y genau dann abgeschlossen, wenn $\overline{Y} = Y$ ist.

Die Abschluß-Bildung $Y \mapsto \overline{Y}$ hat folgende Eigenschaften:

(CL0) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
(CL1) $\overline{Y \cup Z} = \overline{Y} \cup \overline{Z}$.
(CL2) $Y \subseteq \overline{Y} = \overline{\overline{Y}}$.

Beachte, daß aus (CL1) die Monotonie folgt, denn $Y \subseteq Z \Rightarrow Y \cup Z = Z \Rightarrow \overline{Z} = \overline{Y \cup Z} = \overline{Y} \cup \overline{Z} \Rightarrow \overline{Y} \subseteq \overline{Z}$.

Es gilt nicht immer $\overline{Y \cap Z} = \overline{Y} \cap \overline{Z}$, siehe Aufgabe (.)

Man kann in der Tat leicht zeigen, daß jede Abbildung $Y \mapsto \overline{Y}$, $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ die (CL0)-(CL2) erfüllt die Abschluß-Bildung einer eindeutig bestimmten Topologie ist, deren abgeschlossene Mengen gerade die Fixpunkte $A = \overline{A}$ dieser Abbildung sind.

Dual dazu definiert man das *Innere* Y^o von Y als

$$Y^o := X \setminus \overline{(X \setminus Y)} = \bigcup \{U : U \subseteq Y, U \text{ ist offen}\} = \{x \in X : \exists U \in \mathcal{U}_x : U \subseteq Y\}$$

.

Das Innere-nehmen hat folgende duale charakterisierende Eigenschaften:

(1) $X^o = X$.
(2) $(Y \cap Z)^o = Y^o \cap Z^o$.
(3) $Y \supseteq Y^o = (Y^o)^o$.

Definition (Häufungspunkt und Verwandtes).
Der *Rand* ∂Y von Y ist definiert durch $\partial Y := \overline{Y} \setminus Y^o = \overline{Y} \cap \overline{X \setminus Y}$ und somit ist $x \in \partial Y \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x : U \cap Y \neq \emptyset$ und $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$. Es ist $\overline{Y} = Y \cup \partial Y$ und $Y^o = Y \setminus \partial Y$.Für $Y \subseteq X := \mathbb{R}$ in der üblichen Topologie ist $\partial Y = \emptyset \Leftrightarrow Y \in \{\emptyset, X\}$. Ein topologischer Raum mit dieser Eigenschaft heißt *zusammenhängend* und $\partial Y = \emptyset$ bedeutet, daß Y sowohl offen als auch abgeschlossen ist (engl.: "clopen").

Es ist $(X, \mathcal{P}(X))$ selbstverständlich nicht zusammenhängend (falls X mindestens 2 Punkt besitzt).

Ein Punkt x heißt *Häufungspunkt* (engl.: accumulation point) von $A :\Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$, d.h. $\forall U \in \mathcal{U}_x : U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. $A^d := \{x : x$ ist Häufungspunkt von $A\}$. Ein Punkt $x \in A$ heißt *isolierter Punkt* von $A :\Leftrightarrow x \in A \setminus A^d$, d.h. $\exists U \in \mathcal{U}_x : U \cap A = \{x\}$.

Eine Folge $(x_n)_n$ heißt *konvergent* gegen $x_\infty \in X$ (man schreibt $x_n \to x_\infty$) $:\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x_\infty) \exists N \forall n \geq N : x_n \in U$.

Eine Menge $Y \subseteq X$ heißt *dicht* in $X :\Leftrightarrow \overline{Y} = X$, äquivalent $U \cap Y = \emptyset, U$ offen $\Rightarrow U = \emptyset$.

Ein topologischer Raum heißt *separabel* $:\Leftrightarrow \exists X_0 \subseteq X$, dicht und abzählbar. Aus dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom folgt die Separabilität, denn dazu genügt es aus jeder offenen Menge $U \neq \emptyset$ einer Basis einen Punkt auszuwählen.

Bemerkung. Es sei $x_n \in A \subseteq X$ mit $x_n \to x_\infty$ in X. Dann ist $x_\infty \in \overline{A}$, denn $\forall U \in \mathcal{U}(x_\infty) \exists N x_n \in A \cap U$.

Die Umkehrung, daß jeder Punkt $x_\infty \in A$ Limes einer Folge $(x_n)_n$ in A ist, gilt für topologische Räume, die das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllen: Sei nämlich $x_\infty \in \overline{A}$ und $\mathcal{U}(x_\infty) = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis. Indem man U_n durch $\bigcap_{k \leq n} U_k$ ersetzt darf man annehmen, daß $U_n \supseteq U_{n+1}$. Für jedes n wählen wir nun ein $x_n \in A \cap U_n$. Dann ist (x_n) eine Folge in A die gegen x_∞ konvergiert.

1.2 Stetigkeit

1.2.1 Definition (Stetigkeit).
Es seien X und Y topologische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ *stetig* bei $x \in X :\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{U}(f(x)) : f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$.

Sie heißt *stetig* (auf X) $:\Leftrightarrow f$ ist stetig bei jedem $x \in X$.

Offensichtlich ist die Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig, denn $(f \circ g)^{-1}(W) = g^{-1}(f^{-1}(W))$.

1.2.2 Lemma (Stetigkeit via Umgebungsbasen).
Es seien X und Y topologische Räume, $x \in X$, $\mathcal{U}_x$ eine Umgebungsbasis von x in X und $\mathcal{U}_{f(x)}$ eine solche von $f(x)$ in Y. Dann ist f genau dann stetig bei x, wenn $\forall V \in \mathcal{U}_{f(x)} \exists U \in \mathcal{U}_x : f(U) \subseteq V$.

Beweis. $(\Rightarrow)$ $\forall V \in \mathcal{U}_{f(x)} \subseteq \mathcal{U}(f(x))$ ist $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$, also $\exists U \in \mathcal{U}_x : U \subseteq f^{-1}(V)$, oder äquivalent $f(U) \subseteq V$ wegen dem folgenden Lemma. $\square$

1.2.3 Lemma (Bilder und Urbilder).
Es sei $f : X \to Y$, $A \subseteq X$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $B \subseteq Y$ und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$. Dann ist

(1) $A \subseteq f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(A) \subseteq B$.
(2) $f^{-1}(\sim B) = \sim f^{-1}(B)$.
(3) $f^{-1}(\bigcup \mathcal{B}) = \bigcup\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$.
(4) $f^{-1}(\bigcap \mathcal{B}) = \bigcap\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$.
(5) $f(\bigcup \mathcal{A}) = \bigcup\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$.
(6) $f(\bigcap \mathcal{A}) \subseteq \bigcap\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$.
(7) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ *und* $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

Beweis. (1) Es ist $A \subseteq f^{-1}(B) \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow \forall x \in A : f(x) \in B \Leftrightarrow f(A) \subseteq B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\sim B)$.

(2) Es ist $x \in \sim f^{-1}(B) \Leftrightarrow \neg(x \in f^{-1}(B)) \Leftrightarrow \neg(f(x) \in B) \Leftrightarrow f(x) \in \sim B$.

(3) Es ist $x \in f^{-1}(\bigcup \mathcal{B}) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup \mathcal{B} \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B} : f(x) \in B \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B} : x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B)$.

(4) Es ist $x \in f^{-1}(\bigcap \mathcal{B}) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap \mathcal{B} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B} : f(x) \in B \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B} : x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B)$.

(5) Es ist $y \in f(\bigcup \mathcal{A}) \Leftrightarrow \exists x \in \bigcup \mathcal{A} : y = f(x) \Leftrightarrow \exists x \exists A \in \mathcal{A} : x \in A$ und $y = f(x)$ $\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A} : y \in f(A) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} f(A)$.

(6) Es ist $y \in f(\bigcap \mathcal{A}) \Leftrightarrow \exists x \in \bigcap \mathcal{A} : y = f(x) \Leftrightarrow \exists x \forall A \in \mathcal{A} : x \in A$ und $y = f(x)$ $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{A} \exists x \in A : y = f(x) \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A} : y \in f(A) \Leftrightarrow y \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} f(A)$.

(7) ist offensichtlich. $\square$

Beachte, daß die Bezeichnungen $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ und $f^{-1}(B) := \{x : f(x) \in B\}$ Mehrdeutig sind: z.B. für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist jedes $N \in \mathbb{N}$ auch Teilmenge von $\mathbb{N}$ und somit muß $f(N)$ nicht $\{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ sein. Es wäre also besser – aber allgemein unüblich – Bild und Urbild mit $f[A]$ und $f^{-1}[B]$ zu bezeichnen.

1.2.4 Lemma (Charakterisierung der Stetigkeit).
Es seien X und Y topologische Räume und $\mathcal{S}$ eine Subbasis von Y. Für eine Abbildung $f : X \to Y$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f ist stetig auf X;*
2. *$f^{-1}(V)$ ist offen für alle offenen $V \subseteq Y$;*
3. *$f^{-1}(V)$ ist offen für alle $V \in \mathcal{S}$;*
4. *$f^{-1}(B)$ ist abgeschlossen für alle abgeschlossenen $B \subseteq Y$;*
5. *$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ für alle $A \subseteq X$;*
6. *$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ für alle $B \subseteq Y$;*
7. *$f^{-1}(B^o) \subseteq f^{-1}(B)^o$ für alle $B \subseteq Y$.*

Beachte, daß zwischen $f(A^o)$ und $f(A)^o$ keine allgemein gültige Relation besteht.

Beweis. ($1 \Rightarrow 2$) Es sei $V \subseteq Y$ offen. Für jedes $x \in f^{-1}(V)$ ist $f(x) \in V$ und somit V eine Umgebung von $f(x)$ und nach (1) ist $f^{-1}(V)$ eine solche von x, d.h. $f^{-1}(V)$ ist offen.

($2 \Rightarrow 3$) ist offensichtlich.

($3 \Rightarrow 4$) Es sei $B \subseteq Y$ abgeschlossen. Wir zeigen, daß $f^{-1}(B)$ abgeschlossen ist, d.h. $\sim f^{-1}(B) = f^{-1}(\sim B)$ offen ist. Sei dazu $x \notin f^{-1}(B)$ beliebig. Da $f(x) \notin B$ existieren endlich viele $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{S}$ mit $f(x) \in V_1 \cap \dots \cap V_n \subseteq \sim B$. Die Menge $U := \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(V_i)$ ist eine offene Umgebung von x mit $U \subseteq \sim f^{-1}(B) = f^{-1}(\sim B)$, da $f(U) = f(\bigcap f^{-1}(V_i)) \subseteq \bigcap f(f^{-1}(V_i)) \subseteq \bigcap V_i \subseteq \sim B$. Also ist x ein innerer Punkt von $f^{-1}(\sim B)$ und somit $\sim f^{-1}(B)$ offen.

($4 \Rightarrow 5$) Nach (4) ist $f^{-1}(\overline{f(A)}) \supseteq A$ abgeschlossen, also $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ oder äquivalent $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

($5 \Rightarrow 6$) Es sei $A := f^{-1}(B)$. Nach (5) ist $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, also $\overline{f^{-1}(B)} = \overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) = f^{-1}(\overline{f(f^{-1}(B))}) \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

($6 \Rightarrow 7$) $f^{-1}(B^o) = f^{-1}(\sim\overline{\sim B}) = \sim f^{-1}(\overline{\sim B}) \supseteq \sim\overline{f^{-1}(\sim B)} = \sim\overline{\sim f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)^o$.

($7 \Rightarrow 1$) Es sei $x \in X$ und $V \in \mathcal{U}(f(x))$. Also ist $f(x) \in V^o$ und somit $x \in f^{-1}(V^o) \subseteq f^{-1}(V)^o$, d.h. $f^{-1}(V)$ ist eine Umgebung von x. $\square$

1.2.5 Proposition (Gleichmäßige Konvergenz).
Es sei X eine Menge und $(Y, \mathcal{D})$ ein uniformer Raum (z.B. $(\mathbb{R}, d_2)$). Dann betrachten wir am Raum Y^X aller Abbildungen von $X \to Y$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz mit der Umgebungsbasis $\{U_{\varepsilon,d}(f) : \varepsilon > 0, d \in \mathcal{D}\}$ für $f \in Y^X$ wobei $U_{\varepsilon,d}(f) := \{g \in Y^X : \forall x \in X : d(g(x), f(x)) \leq \varepsilon\}$. Eine Folge $(f_n)_n$ in konvergiert genau dann in Y^X gegen f_∞, wenn sie gleichmäßig konvergiert, d.h. $\forall d \in \mathcal{D} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in X : d(f_n(x), f_\infty(x)) < \varepsilon$.

Falls X zusätzlich ein topologischer Raum ist, so ist der Raum $C(X, Y)$ der stetigen Abbildungen $X \to Y$ abgeschlossen in Y^X.

Beweis. Wir zeigen hier, daß der Grenzwerte einer Folge stetiger Funktionen wieder stetig ist. Die allgemeine Aussage über die Abgeschlossenheit zeigen wir in Aufgabe (31). Es sei $\varepsilon > 0$, $d \in \mathcal{D}$ und $x_0 \in X$. Aus $f_n \to f_\infty$ glm. folgt $\exists N \forall n \geq N \forall x \in X : d(f_n(x), f_\infty(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Da f_N stetig bei x_0 ist $\exists U_{x_0} \forall x \in$

$U_{x_0} : d(f_N(x), f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Somit gilt $\forall x \in U_{x_0}$:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\le d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f_\infty(x_0)) \\ &< \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

1.2.6 Definition (Spezielle Abbildungen).
Es seien X und Y topologische Räume.
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *abgeschlossen*, falls $f(A) \subseteq Y$ abgeschlossen ist für alle abgeschlossenen $A \subseteq X$.
Sie heißt *offen*, falls $f(O) \subseteq Y$ offen ist für alle offenen $O \subseteq X$.
Sie heißt *Homöomorphismus*, falls sie bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind. Man nennt zwei topologische Räume X und Y *homöomorph*, falls ein Homöomorphismus $f : X \to Y$ existiert.

Eines der zentralen Probleme der Topologie ist es zu bestimmen ob zwei vorgegebene Räume homöomorph sind oder nicht. Positiv wird die Frage am einfachsten dadurch beantwortet, daß man einen Hömomorphismus angibt, z.B. ist $\mathbb{R}$ und $(-1, 1)$ vermöge $t \mapsto \frac{2}{\pi} \arctan(t)$ homöomorph. Eine negative Antwort ist allgemein viel schwieriger zu beweisen. Üblicherweise wird man dabei so vorgehen eine topologische Eigenschaft zu suchen die nur einer der beiden vorliegenden Räume besitzt. Z.B. ist $\mathbb{R}$ mit der standard Topologie nicht homöomorph zu der Sorgenfrey-Gerade, denn nur der erstere ist Zusammenhängend. S^1 und $[0, 2\pi)$ ist nicht homöomorph, denn entfernt man von S^1 einen Punkt, so bleibt der Raum zusammenhängend dies in $[0, 2\pi)$ nur für den Punkt 0 stimmt.

1.2.7 Proposition (Charakterisierung von Homöomorphismus).
Für eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen sind äquivalent:

(0) *f ist ein Homöomorphismus;*
(1) *f ist stetig und offen;*
(2) *$f(A) \subseteq Y$ ist genau dann offen, wenn $A \subseteq X$ es ist;*
(3) *$f^{-1}(B) \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn $B \subseteq Y$ es ist.* $\square$
(4) *f ist stetig und abgeschlossen;*
(5) *$f(A) \subseteq Y$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $A \subseteq X$ es ist;*
(6) *$f^{-1}(B) \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $B \subseteq Y$ es ist;*

1.2.8 Definition (Initiale Topologie).
Die Menge aller Topologien auf einer Menge X ist bezüglich '$\subseteq$' partiell geordnet (d.h. reflexiv ($x \preceq x$), antisymmetrisch ($x \preceq y$, $y \preceq x \Rightarrow x = y$) und transitiv). Falls $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$, so sagt man $\mathcal{O}_1$ ist gröber als $\mathcal{O}_2$ oder auch $\mathcal{O}_2$ ist feiner als $\mathcal{O}_1$. Die kleinste (gröbste) Topologie ist die indiskrete und die größte (feinste) Topologie ist die diskrete.

Jede Menge $\{\mathcal{O}_j : j \in \mathcal{J}\}$ von Topologien besitzt ein Infimum $\inf\{\mathcal{O}_j : j \in J\} = \bigcap_j CalO_j$ und somit auch ein Supremum (das Infimum der oberen Schranken), letzteres besitzt als Subbasis die Vereinigung $\bigcup_j \mathcal{O}_j$ der gegebenen Topologie und somit als Basis $\{O_{j_1} \cap \cdots \cap O_{j_n} : n \in \mathbb{N}, \{j_1, \ldots, j_n\} \subseteq J, O_{j_i} \in \mathcal{O}_{j_i} \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$ die Menge der endlichen Durchschnitte.

Wenn $f : X \to Y$ eine Abbildung ist und $(Y, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, so ist ist f sicher stetig bezüglich der diskreten Topologie auf X (Jede Abbildung ist also stetig nach Wahl der Topologie). Interessanter ist die sogenannte bzgl. f *initiale Topologie* $\{f^{-1}(O) : O \in \mathcal{O}\}$. Dies ist die gröbste Topologie, sodaß f stetig ist. Wenn X mit der bzgl. f initialen Topologie versehen ist, so sagt man auch f sei *initial*.

Allgemeiner: Wenn eine Familie von Abbildungen $f_j : X \to X_j$ in topologische Räume $(X_j, \mathcal{O}_j)$ mit $j \in J$ gegeben ist, so existiert eine gröbste Topologie, s.d. alle f_j stetig sind. Diese heißt die bzgl. $\{f_j : j \in J\}$ *initiale Topologie*. Eine Subbasis dieser Topologie ist nach dem zuvor Gesagten durch $\bigcup_{j\in J}\{f_j^{-1}(O_j) : O_j \in \mathcal{O}_j\}$ gegeben und eine Basis durch die endlichen Durchschnitte $f_{j_1}^{-1}(O_{j_1})\cap\dots\cap f_{j_n}^{-1}(O_{j_n})$ für $\{j_1,\dots,j_n\} \subseteq J$ und offene $O_{j_i} \subseteq X_{j_i}$.

Falls X die bzgl. $\{f_j : j \in J\}$ initiale Topologie trägt, so nennt man die Familie $\{f_j : j \in J\}$ eine *initiale Familie* oder auch eine *initiale Quelle* oder einen *initialen Kegel*.

Lemma (Universelle Eigenschaft initialer Familien).
Es seien $(X_j, \mathcal{O}_j)$ topologische Räume und $f_j : X \to X_j$ Abbildungen. Dann hat die bzgl. $\{f_j : j \in J\}$ initiale Topologie folgende universelle Eigenschaft: Eine Abbildung $f : Y \to X$ von einem topologischen Raum nach X ist genau dann stetig, wenn es alle Zusammensetzungen $f_j \circ f : Y \to X \to X_j$ es sind.

Eine Folge x_n konvergiert genau dann gegen in x_∞ in X bzgl. der initialen Topologie, wenn $f_j(x_n) \to f_j(x_\infty)$ für alle $j \in J$.

Beweis. Es ist $f^{-1}(U)$ offen für jedes Element $U \in \bigcup_j\{f_j^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{O}_j\}$ der Subbasis von X genau dann, wenn $f^{-1}(U) = f^{-1}(f_j^{-1}(U_j)) = (f_j \circ f)^{-1}(U_j)$ offen ist für alle j und alle $U_j \in \mathcal{O}_j$, d.h. alle $f_j \circ f$ stetig sind.

($\Rightarrow$) klar, da f stetig ist.

($\Leftarrow$) Sei U ein Element der Subbasis der initialen Topologie welches x_∞ enthält, d.h. $U := f_j^{-1}(U_j)$ für ein $j \in J$ und offenes $U_j \subseteq X_j$. Da $f_j(x_n) \to f_j(x_\infty)$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $f(x_n) \in U_j$ für alle $n \geq N$, also $x_n \in f_j^{-1}(U_j) = U$. Also $x_n \to x_\infty$. □

Folgerung (Initialität bei Zusammensetzungen).
Die Zusammensetzung initialer Familien ist initial, genauer: wenn sowohl $(f_j : X \to X_j)_{j\in J}$ initial ist als auch $(f_{j,k} : X_j \to X_{j,k})_{k\in J_j}$ für alle $j \in J$, so auch $(f_{j,k} \circ f_j : X \to X_j \to X_{j,k})_{j\in J, k\in J_j}$.

Ist andererseits die Zusammensetzung von Familien stetiger Abbildungen initial, so auch die erste Familie $(f_j : X \to X_j)_{j\in J}$.

Beweis. (1) Wegen dem obigen Lemma genügt die universelle Eigenschaft zu überprüfen. Sei also $f : Y \to X$ eine Abbildung. Dann ist f genau dann stetig, wenn $f_j \circ f : Y \to X \to X_j$ es für alle $j \in J$ ist, und das ist wiederum genau dann der Fall, wenn $f_{j,k} \circ f_j \circ f : Y \to X \to X_j \to X_{j,k}$ es ist für alle $k \in J_j$.

(2) geht analog, siehe Aufgabe (34). □

Spezialfälle:

1.2.9 Proposition (Teilraum-Topologie).
Es sei Y eine Teilmenge eines topologischen Raums $(X, \mathcal{O})$. Dann nennt man die

bzgl. der Inklusion $\mathrm{inj} : Y \to X$ *initiale Topologie auch die Teilraum- oder Spur-Topologie.*

Die universelle Eigenschaft der Spurtopologie besagt, daß eine Abbildung $f : Z \to Y$ *von einem topologischem Raum* Z *nach* Y *genau dann stetig ist, wenn sie es als Abbildung* $Z \to Y \subseteq X$ *nach* X *ist.*

Die offenen (resp. abgeschlossenen) Teilmengen von Y *sind genau die Spuren* $B \cap Y$ *der offenen (resp. abgeschlossenen) Teilmengen von* X.

Der Abschluß $\overline{B}^Y$ *einer Teilmenge* $B \subseteq Y$ *in* Y *ist gerade die Spur* $\overline{B}^X \cap Y$ *des Abschlusses* $\overline{B}^X$ *in* X.

Eine Folge $x_n \in Y$ *konvergiert genau dann in der Spurtopologie gegen* $x_\infty \in Y$, *wenn sie dies in* X *tut.*

Die Inklusion inj *ist genau dann eine offene (resp. abgeschlossene) Abbildung, wenn* Y *in* X *offen (resp. abgeschlossen) ist.*

Analoges gilt nicht für das Innere, siehe Aufgabe (35).

Beachte, daß bei der Aussage über Konvergenz $x_\infty \in Y$ vorausgesetzt ist. Andernfalls stimmt die Aussage nicht (betrachte z.B. ein offenes Intervall Y in $X = \mathbb{R}$).

Beachte weiters, daß eine in Y bzgl. der Spurtopologie offene Menge nicht in X offen zu sein braucht. Z.B. ist immer Y in Y offen aber keinesfalls immer in X.

Beweis. Für die offenen Menge gilt die angegebene Beschreibung für die initiale Topologie. Da $\mathrm{inj} : Y \to X$ stetig ist, ist auch $B \cap Y := \mathrm{inj}^{-1}(B)$ abgeschlossen für jedes abgeschlossene $B \subseteq X$. Umgekehrt sei $A \subseteq Y$ abgeschlossen im Teilraum Y. Dann ist $Y \setminus A$ offen in Y, also existiert ein offenes $O \subseteq X$ mit $O \cap Y = Y \setminus A$. Folglich ist $(X \setminus O) \cap Y = A$.

Da $\mathrm{inj} : X \to Y$ stetig ist, ist $\overline{B}^X \cap Y = \mathrm{inj}^{-1}(\overline{B}) \supseteq \overline{\mathrm{inj}^{-1}(B)} = \overline{B}^Y$ und umgekehrt ist $\overline{B}^Y$ abgeschlossen in Y also existiert nach dem zuvor Gesagten eine in X abgeschlossene Menge A mit $A \cap Y = \overline{B}^Y \supseteq B$. Also ist $B \subseteq A$ und somit auch $\overline{B}^X \subseteq A$, d.h. $\overline{B}^Y = A \cap Y \supseteq \overline{B}^X \cap Y$.

Die Offenheit/Abgeschlossenheit der Abbildung inj ist offensichtlich äquivalent zu jener der Teilmenge Y in X, denn letzteres impliziert, daß jede offene/abgeschlossene Menge $A \subseteq Y$ die Spur $B \cap Y$ einer solchen Menge B in X ist, also auch in X offen/abgeschlossen ist. $\square$

Definition (Einbettung).
Eine Abbildung $f : Y \to X$ heißt *Einbettung*, wenn sie einen Homöomorphismus $Y \to f(Y)$ induziert, wobei $f(Y)$ mit der von X ererbten Spurtopologie versehen wird, d.h. salopp formuliert, daß sie bis auf Homöomorphie die Inklusion eines Teilraums ist.

Lemma (Charakterisierung von Einbettungen).
Eine Abbildung ist genau dann eine Einbettung, wenn sie eine injektive initiale (d.h. X *trägt die bzgl.* f *initiale Topologie) Abbildung ist:*
($\Rightarrow$) *Jeder Homöomorphismus ist injektiv und initial und die Inklusion jedes Teilraums ist es ebenfalls, also auch deren Zusammensetzung* $f : Y \to f(Y) \to X$.

($\Leftarrow$) *Umgekehrt ist mit der Zusammensetzung $f : Y \to f(Y) \to X$ auch die Abbildung $f : Y \to f(Y)$ injektiv und initial. Sie ist stetig nach der universellen Eigenschaft der Spurtopologie und surjektiv nach Konstruktion, also ein Homöomorphismus.*

1.2.10 Produkte. Zu zwei topologischen Räume $(X_1, \mathcal{O}_1)$ und $(X_2, \mathcal{O}_2)$ betrachten wir das kartesische Produkt $X_1 \times X_2 := \{(x^1, x^2) : x^1 \in X_1, x^2 \in X_2\}$. Dann bilden die Rechtecke $U_1 \times U_2$ mit offenen $U_1 \subseteq X_1$ und offenen $U_2 \subseteq X_2$ die Basis einer Topologie (siehe Aufgabe (23)), der sogenannten Produkt-Topologie. Dies ist gerade die initiale Topologie bzgl. der Familie $(\mathrm{pr}_i : X_1 \times X_2 \to X_i)_{i \in \{1,2\}}$, wobei $\mathrm{pr}_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ die Abbildung $(x^1, x^2) \mapsto x^i$ ist. Konvergenz in dieser Topologie ist gerade die Koordinaten- (oder auch Komponenten-)weise.Ü

Allgemeiner gilt:

Proposition (Produkt-Topologie).
Es seien $(X_j, \mathcal{O}_j)$ topologische Räume und $X := \prod_{j \in J} X_j := \{f : J \to \bigcup_j X_j : f(j) \in X_j\}$ das kartesische Produkt der zugrunde liegenden Mengen X_j. Die bzgl. der Familie der Projektionen $\mathrm{pr}_j' : \prod_{j \in J} X_j$ für $j' \in J$ initiale Topologie heißt Produkt-Topologie.

Die universelle das Produkt charakterisierende Eigenschaft besagt, daß zu jeder Familie stetiger Abbildungen $f_j : Y \to X_j$ von einem topologischen Raum Y in die Faktoren X_j eine eindeutige stetige Abbildung $f = (f_j)_j : Y \to \prod_{j \in J} X_j$ existiert, die $\mathrm{pr}_j \circ f = f_j$ erfüllt.

Eine Basis der Produkt-Topologie wird durch die Mengen $\prod_{j \in J} U_j$ mit $U_j \in \mathcal{O}_j$ und $U_j = X_j$ für fast alle $j \in J$ gegeben.

Die Konvergenz in $\prod_j X_j$ ist gerade die Komponenten- oder auch Koordinatenweise.

Ein Produkt $\prod_j A_j \neq \emptyset$ ist genau dann abgeschlossen, wenn es alle $A_j \subseteq X_j$ sind.

Der Abschluß von $\prod_j A_j$ ist gerade $\prod_j \overline{A_j}$.

Produkte vertauschen mit Teilräumen, d.h. wenn Teilräume Y_j von X_j gegeben sind, so ist $\prod_{j \in J} Y_j$ ein Teilraum von $\prod_{j \in J} X_j$.

Die Projektionen pr_j sind offene aber nicht abgeschlossene Abbildungen.

Beachte, daß das das Auswahlaxiom gerade besagt, daß jedes Produkt nicht-leerer Mengen nicht leer ist.

Beweis. Es ist

$$\mathrm{pr}_{j_1}^{-1}(U_{j_1}) \cap \dots \cap \mathrm{pr}_{j_n}^{-1}(U_{j_n}) = \Big\{x = (x_j)_j : x_{j_1} \in U_{j_1}, \dots, x_{j_n} \in U_{j_n}\Big\} = \prod_j U_j,$$

wobei

$$U_j = \begin{cases} U_{j_k} & \text{falls } j = j_k \\ X_j & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Allgemein gilt für initiale Topologien, daß $x_n \to x_\infty$ genau dann, wenn $f_j(x_n) \to f_j(x_\infty)$ für alle j gilt.

Es ist $x = (x_j)_j \in \overline{\prod_j A_j}$ genau dann, wenn jedes Element $\prod_j U_j$ der Basis welches x enthält die Menge $\prod_j A_j$ trifft, d.h. aus $x_j \in U_j$ folgt $U_j \cap A_j \neq \emptyset$, i.e. $x_j \in \overline{A_j}$. Die Projektionen sind offen, denn die Bilder der Basis sind es. $\square$

Bemerkung. Falls $Y_j = Y$ für alle $j \in J$ so ist $\prod_{j\in J} Y = Y^J$, siehe auch Aufgabe (6) und (24) für $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Die Punktweise Konvergenz ist also nichts anderes als die Koordinaten-weise Konvergenz.

Proposition (Initiale Familie liefern Einbettungen).
Jede Raum X mit der initialen Topologie bzgl. einer Punkte-trennenden Familie von Abbildungen $f_j : X \to X_j$ kann eingebettet werden in $\prod_j X_j$ vermöge $f := (f_j)_j$.

Die uniformisierbaren Räume sind genau die topologischen Räume, die in ein Produkts von $\mathbb{R}$ einbettbar sind.

Jedes Produkt von metrisierbaren oder sogar uniformer Räume ist uniformisierbar.

Beweis. In der Tat ist nach der universellen Eigenschaft die Abbildung f stetig. Sie ist injektiv, da die Familie Punkte-trennend ist. Und f ist initial, da die Familie $\{f_j : j \in J\}$ es ist und $f_j = \mathrm{pr}_j \circ f$ gilt.

($\Rightarrow$) Sei also $(X, \mathcal{D})$ ein uniformer Raum. Für $y \in X$ und $d \in \mathcal{D}$ ist die Abbildung $d_y : x \mapsto d(x, y)$ (glm.) stetig. Offensichtlich ist die Familie $\{d_y : y \in X, d \in \mathcal{D}\}$ initial und Punkte-trennend, also ist $(d_y)_{y\in X, d\in\mathcal{D}}$ eine Einbettung von X in $\mathbb{R}^{X\times\mathcal{D}}$.

Umgekehrt ist jeder Teilraum von X^J uniformisierbar bzgl. der Pseudo-Metriken $d_{J_0}(x, y) := \max\{|x^j - y^j| : j \in J_0\}$ wobei J_0 die endlichen Teilmengen von J durchläuft. $\square$

1.2.11 Definition (Finale Topologie).
Dual zur initialen Topologie verstehen wir unter der bzgl. einer Familie von Abbildungen $X_j \to X$ *finalen Topologie* die feinste Topologie auf X, sodaß alle Abbildungen $f_j : X_j \to X$ stetig sind. Eine Menge $U \subseteq X$ ist in dieser Topologie genau dann offen (resp. abgeschlossen), wenn alle Urbilder $f_j^{-1}(U) \subseteq X_j$ es sind. Eine Menge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn alle Urbilder $f_j^{-1}(A) \subseteq X_j$ es sind, denn $f_j^{-1}(\sim A) = \sim f_j^{-1}(A)$ nach Sublemma (1.2.2). Aus Basen von X_j läßt sich jedoch im allgemeinen eine (Sub-)basis von X nicht explizit angeben.

Die finale Topologie hat folgende sie charakterisierende universelle Eigenschaft: Eine Abbildung $f : X \to Y$ in einen topologischen Raum Y ist genau dann stetig, wenn es alle Zusammensetzungen $f \circ f_j : X_j \to X \to Y$ sind.

Die Zusammensetzung finaler Kegel ist wieder final, und ebenso ist der zweite einer finalen Komposition ebenso final.

1.2.12 Proposition (Quotienten-Topologie).
Es sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X (d.h. symmetrisch, reflexiv und transitiv). Weiters sei $Y := X/\sim$ die Menge der $\sim$-Äquivalenzklassen und $\pi : X \to Y$ die surjektive Abbildung $x \mapsto [x]_\sim := \{x' \in X : x' \sim x\}$. Die bzgl. π finale Topologie auf Y heißt Quotienten-Topologie und Y heißt Quotienten-Raum.

Sie besitzt folgende universelle Eigenschaft: Eine Abbildung $f : Y \to Z$ in einen topologischen Raum Z ist genau dann stetig, wenn es die Zusammensetzung $f \circ \pi : X \to Y \to Z$ ist.

Die offenen (resp. abgeschlossenen) Mengen $B \subseteq Y$ sind genau jene, für welche $\pi^{-1}(B) \subseteq X$ es ist. $\square$

Spezialfälle. Es sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann versteht man unter X/A den Raum $X/\sim_A$, wobei $x \sim_A y$ genau dann wenn $x = y$ oder $x, y \in A$.

Z.B. ist $\mathbb{D}^n/\partial\mathbb{D}^n \cong S^n$, wobei $\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Der Kegel CX über einen topologischen Raum X ist $(X \times I)/(X \times \{0\})$. Fr ein grundlegendes Beispiel siehe Aufgabe (47).

Es erfüllt $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom: Eine Umgebungsbasis von $\{\mathbb{Z}\}$ ist durch die Bilder der Mengen $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k - \varepsilon_k, k + \varepsilon_k)$ mit $\varepsilon_k > 0$ gegeben. Achtung $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ hat auch noch eine andere Bedeutung. Sei nämlich allgemein G eine topologische Gruppe (d.h. eine Gruppe die eine Topologie trägt für welche Multiplikation und Inversion stetig sind) und H eine (abgeschlossene) Untergruppe. Dann versteht man unter G/H den Raum $G/\sim_H$ der Nebenklassen, wobei $x \sim_H y :\Leftrightarrow \exists h \in H : y = h \cdot x$. In diesen Sinn ist $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$.

Ein allgemeinere Konstruktion erhält man, wenn eine Gruppe G (z.B. $\mathbb{R}$) auf einem topologischen X operiert, d.h. wir einen Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Iso}(X) := \{f : X \to X : f \text{ ist Homömorphismus}\}$ gegeben haben. Wir schreiben $g \cdot x$ für das Bild von x unter den zu g gehörenden Homöomorphismus. Dann versteht man unter X/G den Raum $X/\sim_G$ der Orbits, wobei $x \sim_G y :\Leftrightarrow \exists g \in G : y = g \cdot x$. Insbesonders liegt diese Situation vor, wenn wir eine gewöhnliche Differential-Gleichung vorliegen haben. Diese liefert eine Wirkung von $\mathbb{R}$.

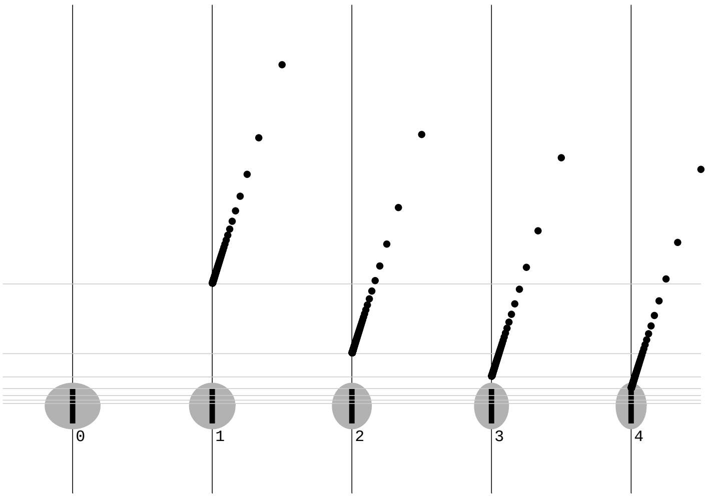
Definition (Quotienten-Abbildung).
Unter einer *Quotienten-Abbildung* $f : X \to Y$ versteht man eine Abbildung, die einen Homöomorphismus $\tilde{f} : X/\sim_f \to Y$ induziert, wobei die Äquivalenzrelation $\sim_f$ durch $x \sim_f x' :\Leftrightarrow f(x) = f(x')$ gegeben ist, und $\tilde{f} : X/\sim_f \to Y$ durch $\tilde{f}([x]_{\sim_f}) := f(x)$.

Eine Abbildung ist genau dann eine Quotienten-Abbildung, wenn sie surjektiv und final ist. Letzteres heißt, daß Y die finale Topologie bzgl. f trägt.

Jede abgeschlossene oder offene surjektive stetige Abbildung ist eine Quotienten-Abbildung ($f(f^{-1}B) = B$), nicht aber umgekehrt, d.h. Quotienten-Abbildungen sind nicht notwendig offen ($(\cos, \sin) : [0, 2\pi] \to S^1$) oder abgeschlossen ($\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$).

Einschränkungen von Quotienten-Abbildungen sind nicht immer Quotientenabbildungen.
BSP: $\exp : [0, 2\pi] \to S^1$ ist Quotienten-Abbildung, nicht aber die Einschränkung $f_1 := \exp|_{[0,2\pi)} \to S^1$ (betrachte die offene Menge $[0, \pi)$).

Produkte von Quotienten-Abbildungen sind nicht immer Quotienten-Abbildungen.
BSP: Es sei $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{N}$ und $X := \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} : 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $f := \pi \times X : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}/\mathbb{N} \times X$ keine Quotienten-Abbildung, denn $A := \{(i + \frac{1}{j}, \frac{1}{i} + \frac{\pi}{j}) : i \geq 1, j \geq 2\}$ ist (Folgen-)abgeschlossen in $\mathbb{R} \times X$ also wäre auch $f(A)$ abgeschlossen wegen $A = f^{-1}(f(A))$, aber $([1]_\sim, 0) \in \overline{f(A)} \setminus f(A)$: Sein nämlich W eine offene Umgebung von $([1]_\sim, 0)$ in $\mathbb{R}/\mathbb{N} \times X$. Also existiert ein $\delta > 0$ und $\delta_n > 0$ mit $\{(\pi(x), y) : |x - n| < \delta_n, |y - 0| < \delta\} \subseteq f^{-1}(W)$. Wir wählen $\frac{1}{i} < \delta$ und danach $j \geq 2$ mit $\frac{1}{i} + \frac{\pi}{j} < \delta$ und $\frac{1}{j} < \delta_i$. Dann ist $(i + \frac{1}{j}, \frac{1}{i} + \frac{\pi}{j}) \in A \cap f^{-1}(W)$ und somit ist $f(A) \cap W \neq \emptyset$.



1.2.13 Proposition (Summe, Koprodukt oder disjunkte Vereinigung).
Es seien $(X_j, \mathcal{O}_j)$ *topologische Räume. Wir betrachten die disjunkt(-gemacht)e Vereinigung* $\bigsqcup_{j\in J} X_j := \bigcup\{j\} \times X_j$ *und die Abbildungen* $\mathrm{inj}_{j'} : X_{j'} \to \bigsqcup_j X_j$, $x \mapsto (j', x)$. *Die finale Topologie auf* $\bigsqcup_j X_j$ *heißt die Summen-Topologie und* $\bigsqcup_j X_j$ *mit dieser Topologie wird als Koprodukt oder auch direkte Summe der* X_j *bezeichnet.*

Eine Teilmenge $A \subseteq \bigsqcup_j X_j$ *ist genau dann offen (resp. abgeschlossen), wenn es die Spuren '*$A \cap X_j$*':=* $\mathrm{inj}_j^{-1}(A) \subseteq X_j$ *sind.*

Insbesonders sind die X_j *eingebettet als offen-abgeschlossenen Mengen* $\{j\} \times X_j$.

Die universelle Eigenschaft besagt, daß zu jeder Familie $f_j : X_j \to Y$ *stetiger Abbildungen in einen topologischen Raum* Y *eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung* $f = \bigsqcup_j f_j : \bigsqcup_j X_j \to Y$ *existiert, die* $f \circ \mathrm{inj}_j = f_j$ *erfüllt.* $\square$

1.2.14 Bemerkungen.

(1) *Jede finale Familie* $(f_j : X_j \to X)_{j\in J}$ *deren Bilder* X *überdecken kann als Quotient des entsprechenden Koprodukts* $\coprod_{j\in J} X_j$ *geschrieben werden:* Die Abbildungen $f_i : X_i \to X$ induzieren eine Quotienten-Abbildung $\bigsqcup_j f_j : \bigsqcup_j X_j \to X$.

(2) *Es sei* $\mathcal{U}$ *eine offene Überdeckung des topologischen Raumes* $(X, \mathcal{O})$, *d.h.* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$ *und* $\bigcup \mathcal{U} = X$. *Dann trägt* X *die finale Topologie bzgl. aller Inklusionen* $\mathrm{inj}_U : U \to X$ *mit* $U \in \mathcal{U}$ *versehen mit der Spurtopologie.* In der Tat ist $O \subseteq X$ genau dann offen wenn $O \cap U \subseteq U$ es ist für alle $U \in \mathcal{U}$, denn $O = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} O \cap U$. Insbesonders ist eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn $f|_U : U \to Y$ es ist. Umgekehrt liefert jede Familie $f_U : U \to Y$ von stetigen Abbildungen genau dann eine stetige Abbildung $f := \bigcup_U f_U$, wenn $f_{U_1}|_{U_1\cap U_2} = f_{U_2}|_{U_2\cap U_1}$ für alle $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$.

(3) *Sei andererseits* $\mathcal{A}$ *eine lokal-endliche (d.h. Jeder Punkt* $x \in X$ *besitzt eine Umgebung, die nur endlich viele der* $A \in \mathcal{A}$ *trifft) abgeschlossene Überdeckung von* X. *Dann trägt* X *die finale Topologie bzgl. aller Inklusionen* $\mathrm{inj}_A : A \to X$ *mit* $A \in \mathcal{A}$*:* Sei nämlich $B \subseteq X$ mit $B_A := B \cap A$ in A und somit auch in X abgeschlossen für alle $A \in \mathcal{A}$. Dann ist $B = \bigcup \mathcal{B}$ mit

$\mathcal{B} = \{B_A : A \in \mathcal{A}\}$ und somit als lokal endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen: In der Tat gilt $\overline{\bigcup \mathcal{B}} = \bigcup \{\overline{B_A} : A \in \mathcal{A}\}$, denn offensichtlich ist $\bigcup_{A \in \mathcal{B}} \overline{A} \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{B}}$ und für jedes $x \in \overline{\bigcup \mathcal{B}}$ existiert eine Umgebung U, s.d. $\mathcal{B}_0 := \{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}$ endlich ist, also ist $x \notin \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0} A}$ und da $x \in \overline{\bigcup \mathcal{B}} = \overline{\bigcup \mathcal{B}_0} \cup \overline{\bigcup (\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0)}$ ist $x \in \overline{\bigcup \mathcal{B}_0} = \bigcup_{A \in \mathcal{B}_0} \overline{A} \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{B}} \overline{A}$.

Beispiele. Es sei f eine Abbildung einer (abgeschlossenen) Teilmenge $A \subseteq X$ nach Y. Dann versteht man unter $X \cup_f Y$ den wie folgt durch Verkleben erhaltenen Raum $(X \sqcup Y)/{\sim_f}$, wobei $\sim_f$ die Äquivalenzrelation bezeichnet die von $x \sim_f f(x)$ erzeugt wird.

Der *Abbildungszylinder* ist $Z_f := (X \times [0,1]) \cup_f Y$, wobei f als Abbildung $X \times \{1\} \cong X \to Y$ aufgefaßt wird. Dadurch faktorisiert f zu einer abgeschlossenen Einbettung $X \cong X \times \{0\} \hookrightarrow Z_f$ gefolgt von einen Deformationsretrakt $Z_f \to Y$, $(x,t) \mapsto f(x)$, $y \mapsto y$.

Beispiele aus der algebraischen Topologie.

(1) Die *Sphären* $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq 1\}$; $S^n \cong \mathbb{D}^n/S^{n-1} \cong CS^{n-1}/S^{n-1}$; $S^n \cong \{0,1\} \times \mathbb{D}^n/{\sim}$, wobei $(0,x) \sim (1,x)$ für $x \in S^{n-1} \subseteq \mathbb{D}^n$.

(2) Der *Zylinder* $S^1 \times I \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, allgemeiner $X \times I$; $S^1 \times I \cong [0,1]/0,1 \times I = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times I$.

(3) Das *Möbiusband* $(I \times I)/{\sim}$, wobei $(0,x) \sim (1, 1-x)$ für $x \in I$; Ist nicht homöomorph zu Zylinder, da nicht orientierbar und auch weil der "Rand" homöomorph zu S^1 ist.

(4) Das aufgeschnittene Möbiusband ist in $\mathbb{R}^4$ aufdrehbar zu einen Zylinder.

(5) Der *Torus* $\mathbb{R}^4 \supseteq S^1 \times S^1 \cong I^2/{\sim} \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$; Ist in $\mathbb{R}^3$ einbettbar!

(6) Die Sphäre S^2 als $I^2/\sim$, wobei $(j,x) \sim (x,j)$ für $j \in \{0,1\}$ und $x \in [0,1]$.

(7) Die *Klein'sche Flasche* als $I^2/{\sim}$, wobei $(x,0) \sim (x,1)$ und $(0,x) \sim (1,1-x)$ für $x \in I$; oder zwei verklebte Möbiusbänder. Im $\mathbb{R}^3$ nur mit Selbstdurchdringung realisierbar. In den $\mathbb{R}^4$ einbettbar.

(8) Die *projektive Ebene* als $I^2/{\sim}$, wobei $(x,0) \sim (1-x,1)$ und $(0,x) \sim (1,1-x)$ für $x \in I$; oder als ein Möbiusband an dem eine Scheibe klebt, oder eine Scheibe an der eine *Kreuzhaube* klebt; oder als *Boy's surface*; oder als Raum der Geraden in $\mathbb{R}^3$ durch 0; oder als $S^2/\mathbb{Z}^2$; Im $\mathbb{R}^4$ einbettbar, in den $\mathbb{R}^3$ aber nur mit Selbstdurchdringungen.

(9) Orientierte Flächen vom Geschlecht $g \in \mathbb{N}$ als Sphäre mit g-Henkeln, oder als $4m$-Eck mit Verklebung des Randes. Ein Loch-Ness Monster oder eine Bowling-Kugel mit raffinierten Löchern.

(10) Nicht orientierbare Flächen vom Geschlecht $g > 0$ als Sphäre mit g Kreuzhauben, oder als $2m$-Eck mit Verklebung des Randes.

(11) Allgemeiner ist eine *m-dimensionale Mannigfaltigkeit* ein metrischer Raum der lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^m$ ist, d.h. jeder Punkt besitzt eine Umgebung(sbasis) die homöomorph zu $\mathbb{R}^m$ ist.

(12) Jede m-dimensionale zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist in der $\mathbb{R}^{2m}$ einbettbar.

(13) Jede kompakte zusammenhängende 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu einer orientierbaren oder nicht-orientierbaren Fläche vom Geschlecht $g \in \mathbb{N}$. Beweisidee mittels Chirurgie. Insbesonders ist es egal ob man 3 Möbiusbänder oder ein Möbiusband und einen Zylinder anklebt.

(14) Die *Hopffaserung* $S^1 \hookrightarrow S^3 \to S^2$ via $(z,w) \mapsto \frac{z}{w}$.
(15) Gruppen: $\mathbb{R}^n$, $GL(n)$, $SL(n)$, $SO(n)$. $SO(2) \cong S^1$, $SL(2) \cong S^1 \times \mathbb{C}$, $SO(3) \cong S^3/\mathbb{Z}_2$ (Drehachse und Drehwinkel), $SO(4) \cong (S^3 \times S^3)/\mathbb{Z}_2$
(16) Gruppenwirkungen: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}/\mathbb{R} \setminus \{0\} \cong S^{n-1}/\mathbb{Z}_2$. $SO(n)$ wirkt am $\mathbb{R}^n$ durch Drehungen $\Rightarrow SO(n)/SO(n-1) \cong S^{n-1}$. *Stiefel-Mannigfaltigkeit* der orthogonalen k-Beine im $\mathbb{R}^n$ ist $V(k,n) \cong O(n)/O(n-k)$. *Grassmann-Mannigfaltigkeit* der k-Ebenen im $\mathbb{R}^n$ ist $G(k,n) \cong O(n)/(O(k) \times O(n-k))$. Allgemein falls Gruppe G auf Raum X transitiv wirkt und $G_{x_0} := \{g \in G : g \cdot x_0 = x_0\}$ die Fixgruppe bezeichnet, so ist $G/G_{x_0} \cong X$. Flüsse als Wirkungen von $\mathbb{R}$ auf X.

1.2.15 Stabilität oder Erblichkeit.

	Teilraum	Produkt	Summe	Quotient
metrisierbar	+✓	abz.✓, -$^{1)}$	+$^{2)}$	-$^{3)}$
uniformisierbar	+✓	+✓	+$^{2)}$	-$^{4)}$
1.Abz.Axiom	+✓	abz.✓, -$^{1)}$	+✓	-$^{3)}$
2.Abz.Axiom	+✓	abz.✓, -$^{1)}$	abz.$^{5)}$, -$^{6)}$	-$^{3)}$
separabel	offene✓, -$^{7)}$	$\mathbb{R}$ viele $^{8)}$, -$^{9)}$	abz.✓, -$^{10)}$	stet.Bilder$^{11)}$
Flg.erzeugt	off./abg $^{12)}$, -$^{13)}$	-$^{14)}$	+$^{15)}$	+$^{15)}$
zus.hängend	-✓	+$^{16)}$	-✓	stet.Bilder$^{17)}$

1) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2)
$$d(x,y) := \begin{cases} d_j(x,y) & \text{für } x,y \in X_j \\ 1 & \text{andernfalls} \end{cases}$$
wobei $d_j \leq 1$ eine (Pseudo)-Metrik auf X_j sei.
3) $\mathbb{R}/\mathbb{N}$.
4) $[0,1]/(0,1)$.
5) $\bigcup_j \mathcal{B}_j$ ist Basis.
6) $\bigcup_{j\in J}\{*\} = J$ diskrete.
7) Die Niemytzki-Ebene (siehe (1.1.9)) hat $\mathbb{R} \times \{0\}$ als diskreten Teilraum.
8) **Proposition von Hewitt-Marczewski-Pondiczery.** *Produkte von höchstens $2^{\mathbb{N}}$-vielen separablen Räumen sind separabel.*
Beweis. O.B.d.A. sei die Indexmenge $\mathbb{R}$. Für $s \in \mathbb{R}$ sei $f_s : \mathbb{N} \to X_s$ eine stetige Abbildung mit dichten Bild. Es genügt zu zeigen, daß $\prod_{\mathbb{R}} \mathbb{N}$ separabel ist, denn das Bild der dichten Teilmenge ist dann in $\prod_{s\in\mathbb{R}} X_s$ dicht. Sei dazu D die Menge aller Treppenfunktionen $\sum_{k=1}^n f_k \chi_{I_k} : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, wobei I_k Intervalle mit rationalen Endpunkten seien. Diese Menge ist abzählbar. Jede offene Menge $\prod_s O_s \neq \emptyset$ enthält eine Funktion $f \in D$, denn seien die Intervalle I_s und $f_s \in \mathbb{N}$ für die endlich vielen $O_s \neq \mathbb{N}$ so gewählt, daß die I_s disjunkt sind $f_s \in O_s$ ist, dann ist $\sum_{O_s\neq\mathbb{N}} f_s \chi_{I_s} \in D \cap \prod_s O_s$. □
9) 2^X ist nicht separabel!
10) $\bigcup_X \{*\} = X$ diskret.
11) $f(D)$ ist dicht in $f(X)$, falls D dicht ist in X.
12) Sei $Y \subseteq X$ abgeschlossen und $A \subseteq Y$ in Y Flg-abg.. Dann ist A in X Flg-abg. und somit abg. also auch in Y.
13) Es sei $X = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ der Raum der endlichen Folgen (Polynome) mit der finalen Topologie bzgl. der Inklusionen $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Nach 15) ist X somit Flg-

erz.. Es sei $A := \{\frac{1}{n}e_0 + \frac{1}{m}e_n : n, m \geq 1\}$. Dann ist $0 \in \overline{A} \setminus A$, denn $\frac{1}{n}e_0 + \frac{1}{m}e_n \overset{m\to\infty}{\to} \frac{1}{n}e_0 + 0 \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Es gibt aber keine Folge in A die gegen 0 konvergiert, denn aus der Konvergenz der 2-ten Komponente folgt, daß n beschränkt (also o.B.d.A. konstant) ist und damit die 1-te Komponente des Limes nicht 0 ist.

Dies ist also ein Beispiel eines Flg-erz. Raumes der nicht sequentiell ist, d.h. der Abschluß stimmt nicht mit der Folgenadhärenz (der Menge der Limites von Folgen in A) überein.

Sei nun $Y := A \cup \{0\}$. Dann ist $A \subseteq Y$ Folgen-abgeschlossen aber nicht abgeschlossen.

14) Es sei $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $Y = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ und $A := \{(n\, e_k, \frac{1}{n}\, e_k) : n, k \geq 1\}$. Dann ist A Flg-abg., denn aus der Konvergenz der 2-ten Koordinate folgt die Beschränktheit von k und aus der Konvergenz der 1-ten die Beschränktheit von n. Es ist aber $0 \in \overline{A} \setminus A$, denn sei $U \times V$ eine Umgebung von 0, so existiert ein k_0 mit $n\, e_{k_0} \in U \forall n$ und ein n_0 mit $\frac{1}{n_0}e_{k_0} \in V$, also ist $A \cap U \times V \neq \emptyset$.

15) Es sei $f_j : X_j \to X$ final und $A \subseteq X$ Flg-abg. $\Rightarrow f_j^{-1}(A)$ ist Flg-abg. $\Rightarrow$ $f_j^{-1}(A)$ ist abg. $\Rightarrow A$ ist abg..

16) *Lemma. Es sei $X = \bigcup \mathcal{B}$, wobei $\mathcal{B}$ eine Menge von zusammenhängenden Teilräumen von X ist mit $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Dann ist auch X zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $x_0 \in \bigcap \mathcal{B}$ und $A \subseteq X$ eine offen-abgeschlossene Menge mit O.B.d.A. $x_0 \in A$. Dann ist $A \cap B \ni x_0$ in B offen und abgeschlossen, also $A \cap B = B$ und somit ist $A = A \cap X = A \cap \bigcup \mathcal{B} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} A \cap B = \bigcup \mathcal{B} = X$. $\square$

Produkte zusammenhängender Räume sind zusammenhängend: $X \times Y$ ist zusammenhängend wenn X und Y es sind. Denn wähle $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$. Dann läßt sich $X \times Y$ als Vereinigung der zusammenhängenden Mengen $X \times \{y_0\} \cup \{x\} \times Y \ni (x_0, y_0)$ schreiben, ist also zusammenhängend. Mit Induktion folgt, daß endliche Produkte zusammenhängender Räume zusammenhängend sind. Sei nun $x_0 \in \prod_j X_j$ mit zusammenhängenden X_j. Dann ist der Teilraum $\{x \in \prod_j X_j : x^j = x_0^j$ für fast alle $j\}$ eine Vereinigung der endlichen Produkte und somit zusammenhängend. Er ist aber dicht in $\prod_j X_j$ und somit ist das Produkt selbst zusammenhängend, denn eine nichtleere offen-abgeschlossenen Teilmenge hat eine offen-abgeschlossene nichtleere Spur auf den Teilraum, ist also der ganze Teilraum und da dieser dicht ist und die Teilmenge abgeschlossen ist, ist die Teilmenge der ganze Raum.

17) Stetige Bilder zusammenhängender Räume sind zusammenhängend: Es sei $f : X \to Y$ stetig und surjektiv. Es sei $B \subset Y$ offen und abgeschlossen. Dann ist es auch $f^{-1}(B) \subset X$, also ist $f^{-1}(B) = \emptyset$ und somit auch $B = f(^{-1}(B)) = \emptyset$.

1.3 Trennungsaxiome

Wir wollen disjunkte Teilmenge A_0 und A_1 durch offenen disjunkte Umgebungen U_0 und U_1 trennen, oder auch durch stetige Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f|_{A_i} = i$ für $i \in \{0, 1\}$.

Falls dies für eine Menge $A_0 = A$ und zumindest alle $A_1 = \{x\}$ mit $x \notin A$ geht, so muß A abgeschlossen sein, denn $\sim A = \bigcup_{x \notin A} \sim U_x$ ist offen wobei V_x und U_x die offenen Mengen sein, die A und $\{x\}$ trennen.

1.3.1 Definition (Trennungseigenschaften).
Ein topologischer Raum X heißt

- T_1 falls $\forall x_0, x_1 \in X, x_0 \neq x_1 \exists U \in \mathcal{O} : U \cap \{x_0, x_1\} = \{x_0\}$, äquivalent, falls $\{x\}$ abgeschlossen ist, oder auch $\{x\} = \bigcap \mathcal{U}(x)$.
- T_2 (oder Hausdorff), falls $\forall x_0, x_1 \in X, x_0 \neq x_1 \exists U_i \in \mathcal{U}_{x_i} : U_0 \cap U_1 = \emptyset$, äquivalent, $x = \bigcap\{U : U$ ist abgeschlossene Umgebung von $x\}$.
- T_3 (oder regulär), falls er T_1 ist und $\forall x \in X, \forall A \subseteq X$ abgeschlossen, $x \notin A$: $\exists U_0, U_1$ offen mit $x \in U_0$, $A \subseteq U_1$ und $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, äquivalent, $\forall U \in \mathcal{U}_x \exists V \in \mathcal{U}_x$: $\overline{V} \subseteq U$.
- $T_{3\frac{1}{2}}$ (oder Tychonoff oder vollständig regulär), falls er T_1 ist und $\forall x \in X, \forall A \subseteq X$ abgeschlossen, $x \notin A$: $\exists f : X \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) = 0$, $f|_A = 1$, äquivalent, für $\forall U \in \mathcal{U}_x \exists f : X \to [0, 1]$ stetig, mit $f(x) = 1$ und $f|_{X \setminus U} = 0$.
- T_4 (oder normal), falls er T_1 ist und $\forall A_i \subseteq X$ abgeschlossen und $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ $\exists U_i \subseteq X$ offen mit $A_i \subseteq U_i$ und $U_0 \cap U_1 = \emptyset$.
- $T_{4\frac{2}{3}}$ (oder perfekt-normal), falls er T_1 ist und $\forall A \subseteq X$ abgeschlossen $\exists f \in C(X, \mathbb{R})$ mit $f^{-1}(0) = A$.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *Funktional-abgeschlossen* $:\Leftrightarrow \exists f : X \to \mathbb{R}$ stetig mit $f^{-1}(0) = A$.

Implikationen. Es gilt offensichtlich $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.
Ebenso gilt $T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$ mit $U_i := f^{-1}(\{t : |t - i| < \frac{1}{2}\}$.
Weiters gilt $T_{4\frac{2}{3}} \Rightarrow T_4$, denn seien A_i abgeschlossen und disjunkt und $f_i \in C(X, \mathbb{R})$ mit $f_i^{-1}(0) = A_i$ (O.B.d.A. $f \geq 0$, Ersetze f durch f^2). Dann ist $f := \frac{f_0}{f_0+f_1}$ die gesuchte Funktion.

Lemma von Urysohn.
X normal, $A_i \subseteq X$ abgeschlossen, $A_0 \cap A_1 = \emptyset \implies \exists f : X \to [0, 1]$ stetig mit $f|_{A_i} = i$ für $i \in \{0, 1\}$.

Beweis. Für $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ definieren wir induktiv offene $V_r \subseteq X$ mit $A_0 \subseteq V_0$, $V_1 \subseteq X \setminus A_1$ und $\overline{V_r} \subseteq V_{r'}$ für $r < r'$. Dazu wählen wir eine Aufzählung $r : \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ mit $r_0 := 0$ und $r_1 := 1$. Wegen T_4 existiert ein offenes V_0 mit $A_0 \subseteq V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq X \setminus A_1 := V_1$.

Sei nun V_{r_k} für $k < n$ bereits definiert. Es seien $a < n$ und $b < n$ jene Indizes mit $r_a < r_n$, $r_b > r_n$ möglichst nahe an r_n. Dann ist $r_a < r_b$ und somit $\overline{V_{r_a}} \subseteq V_{r_b}$. Wegen T_4 existiert also ein V_{r_n} mit $V_{r_a} \subseteq V_{r_n} \subseteq \overline{V_{r_n}} \subseteq V_{r_b}$.

Schließlich definieren wir eine Funktion $f : X \to I := [0, 1]$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] : x \in V_r\} & \text{für } x \in V_1 \\ 1 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Dann ist $f|_{A_i} = i$ für $i \in \{0,1\}$. Bleibt zu zeigen, daß f stetig ist, d.h. die Urbilder von $[0,a)$ und $(b,1]$ offen sind. Für $a \le 1$ ist $f(x) < a \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q} \cap [0,a) : x \in V_r$, also ist $f^{-1}([0,a)) = \bigcup\{V_r : r < a\}$ offen. Für $b \ge 0$ ist $f(x) > b \Leftrightarrow \exists r' \in \mathbb{Q} \cap (b,1]$ mit $x \notin V_{r'}$, d.h. $\exists r > b : x \notin \overline{V_r}$, also ist auch $f^{-1}((b,1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V_r} : r > b\}$ offen. $\square$

(metrisierbar $\Rightarrow T_{4\frac{2}{3}}$) Für abgeschlossenes A ist $d_A : x \mapsto \inf\{d(x,a) : a \in A\}$ die gesuchte stetige Funktion mit $d_A^{-1}(0) = A$.

(uniformisierbar $\Leftrightarrow T_{3\frac{1}{2}}$) Es sei X uniformisierbar. Dann trägt X die initiale Struktur bzgl. der stetigen Abbildungen $d_x : y \mapsto d(x,y)$ mit $x \in X$, $d \in \mathcal{D}$, also auch bzgl. ganz $C(X,\mathbb{R})$. Sei nun $U \in \mathcal{U}(x_0)$ also existiert ein $f \in C(X,\mathbb{R})$ und ein $\delta > 0$ mit $\{x : |f(x) - f(x_0)| < \delta\} \subseteq U$. Wir ersetzen f durch $x \mapsto \min\{1, \frac{|f(x)-f(x_0)|}{\delta}\}$ und dürfen somit $0 \le f \le 1$, $f(x_0) = 0$ und $\{x : f(x) < 1\} \subseteq U$ annehmen, d.h. $f|_{\sim U} = 1$. D.h. X ist vollständig regulär.

Es sei umgekehrt X $T_{3\frac{1}{2}}$. Dann trägt X die initiale Topologie bzgl. $C(X,\mathbb{R})$, denn $\forall U \in \mathcal{U}(x_0) \exists f \in C(X,\mathbb{R})$ mit $f(x_0) = 1$ und $f|_{\sim U} = 0$. Also ist $\{x : f(x) > 0\} \subseteq U$ eine Umgebung von x_0 in der initialen Topologie.

1.3.2 Satz von Tietze & Urysohn.
Ein T_1 Raum ist genau dann normal, wenn $\forall f \in C(A,\mathbb{R})$ mit $A \subseteq X$ abgeschlossen $\exists \tilde{f} \in C(X,\mathbb{R})$ mit $\tilde{f}|_A = f$.

Beweis. ($\Leftarrow$) Es ist $\chi_A : A \sqcup B \to [-1,1]$ stetig. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Fortsetzung. Dann sind $f^{-1}(\{t : t < \frac{1}{2}\})$ und $f^{-1}(\{t : t > \frac{1}{2}\})$ separierende Umgebungen.

($\Rightarrow$) Wir zeigen den Satz zuerst für $f : X \to I := [-1,1]$. Zu stetigen $f : A \to \mathbb{R}$ mit $\|f\|_\infty \le c$ existiert ein $g : X \to \mathbb{R}$ mit $\|g\|_\infty \le \frac{c}{3}$ und $\|g|_A - f\|_\infty \le \frac{2}{3}c$: Die abgeschlossenen Mengen $A_- := f^{-1}([-c, -\frac{c}{3}])$ und $A_+ := f^{-1}([\frac{c}{3}, c])$ sind disjunkt und nach Urysohn'schen Lemma existiert eine Funktion $h : X \to [-1,1]$ mit $h|_{A_\pm} = \pm 1$ ($h \rightsquigarrow 2h - 1$) und somit ist $g := \frac{c}{3}h$ die gesuchte Funktion.

Mittels Induktion wählen wir nun stetige Funktionen $g_k : X \to \mathbb{R}$ mit

$$\|g_k\|_\infty \le \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1} \text{ und } \|f - \sum_{j=1}^{k} g_j\|_\infty \le (\frac{2}{3})^k.$$

Dann ist $g_\infty := \sum_{j=1}^\infty g_j : X \to [-1,1]$ stetig und $g_\infty|_A = f$.

Für $f : A \to \mathbb{R}$ betrachten wir $g := h^{-1} \circ f : A \to \mathbb{R} \to (-1,1) \subseteq [-1,1]$ mit $h(x) := \frac{x}{1-x^2}$ oder $h(x) := \tan(\frac{\pi}{2}x)$. Es sei $\tilde{g} : X \to [-1,1]$ eine stetige Erweiterung von g. Dann ist $B := \tilde{g}^{-1}(\{-1,1\})$ ist disjunkt von A, also existiert ein stetiges $k : X \to \mathbb{R}$ mit $k|_A = 1$ und $k|_B = 0$. Somit ist $\tilde{f} := h \circ k\tilde{g} : X \to (-1,1) \to \mathbb{R}$ die gesuchte Erweiterung von f. $\square$

($T_{4\frac{2}{3}} \Leftrightarrow$ normal und jede abgeschlossene Menge ist eine G_δ-Menge) Eine Menge $Y \subseteq X$ heißt G_δ falls sie sich als Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen schreiben läßt. Analog heißt eine Menge $Y \subseteq X$ heißt F_σ falls sie sich als Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen schreiben läßt.
($\Leftarrow$) klar, da $\{0\} = \bigcap_n (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ eine abgeschlossene G_δ-Menge in $\mathbb{R}$ ist.

($\Rightarrow$) Es sei A eine abgeschlossene G_δ-Menge. Dann ist $X \setminus A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ mit abgeschlossenen A_i. Nach dem Urysohn'schen Lemma existiert $f_i : X \to [0,1]$ mit $f_i|_A = 0$ und $f_i|_{A_i} = 1$. Somit ist $f_\infty := \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} f_i$ die gesuchte stetige Funktion.

Die Voraussetzung T_1 in T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, T_4 und $T_{4\frac{2}{3}}$ ist notwendig, denn $2 = \{0,1\}$ mit der indiskreten Topologie ist nicht T_1 erfüllt aber die weiteren Bedingungen.

1.3.3 Gegenbeispiele zu Implikationen.

($T_{4\frac{2}{3}} \not\Rightarrow$metrisierbar) Die **Sorgenfrey-Gerade** (siehe (1.1.5)) L ist normal, denn seien A und B disjunkte abgeschlossene Mengen. $\forall a \in A \exists x(a) : [a, x(a)) \cap B = \emptyset$ und $\forall b \in B \exists x(b) : [b, x(b)) \cap A = \emptyset$ und $[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \emptyset$, denn andernfalls wäre $a \in [b, x(b))$ oder $b \in [a, x(a))$. Somit sind $U := \bigcup_{a \in A} [a, x(a))$ und $V := \bigcup_{b \in B} [b, x(b))$ die gesuchten Umgebungen.
L ist perfekt-normal, denn sei U offen und U^o das Innere in der standard-Topologie von $\mathbb{R}$. Dann ist U^o eine Vereinigung abzählbar vieler offener Intervalle (α, β), und jedes solche Intervall ist eine F_σ-Mengen in L also ist U^o eine F_σ-Menge. Sei nun $V := U \setminus U^o$. Für jedes $a \in V$ existiert ein $x(a)$ mit $[a, x(a)) \subseteq U$. Für $a < a'$ ist $[a, x(a)) \cap [a', x(a')) = \emptyset$, andernfalls wäre a' in U^o. Da $[a, x(a)) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ ist V abzählbar und somit $U = V \cup U^o$ eine F_σ-Menge.
Hingegen ist $L \times L$ nicht normal und somit L nicht metrisierbar, denn $D := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ist dicht aber $Y := \{(x, y) : x = -y\}$ ist abgeschlossen und diskreter Teilraum von $L \times L$. Somit sind auf Y alle charakteristischen Funktionen χ_A stetig und dies sind $2^{\mathbb{R}}$-viele. Die Erweiterungen nach Tietze wären aber auf D eindeutig bestimmt und es gäbe somit höchstens $\mathbb{R}^D \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$ viele. Die Kardinalität aller Teilmengen einer Menge X ist aber echt größer als jene von X: Sei nämlich $f : X \to \mathcal{P}(X)$ surjektiv, dann ist $\{x : x \notin f(x)\} = f(x_0)$ für ein x_0 und die Frage "$x_0 \in f(x_0)$?" liefert einen Widerspruch.

($T_4 \not\Rightarrow T_{4\frac{2}{3}}$) Es sei $X = \mathbb{R}$ mit $\mathcal{O} := \{O \subseteq X : 0 \notin O$ oder $X \setminus O$ ist endlich$\}$, also $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : 0 \in A$ oder A endlich$\}$.
Dieser Raum ist normal, denn wenn A_0 und A_1 abgeschlossene disjunkte Mengen sind, so muß mindestens eine (O.B.d.A. A_0) 0 nicht enthalten, und somit offen sein. Also können wir $U_0 := A_0$ und $U_1 := \sim A_0$ verwenden.
Es ist $\{0\}$ abgeschlossen aber nicht gleich $f^{-1}(0)$ für eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, denn für jede solche existiert eine abzählbare Menge $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $f|_{\mathbb{R} \setminus A}$ konstant gleich $f(0)$: In der Tat ist $f^{-1}(U_r(f(0)))$ offen und enthält 0 und somit ist $X \setminus f^{-1}(U_r(f(0)))$ endlich, $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X \setminus f^{-1}(U_{1/n}(f(0)))$ abzählbar und f auf $X \setminus A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(U_{1/n}(f(0))) = \{x : f(x) = f(0)\}$ konstant.

($T_{3\frac{1}{2}} \not\Rightarrow T_4$) Die **Niemytzki-Ebene** L (siehe (1.1.9)) ist $T_{3\frac{1}{2}}$: Es genügt die Trennungseigenschaft für $U \in \mathcal{U}(z_0)$ mit $z_0 \in L_0 := \mathbb{R} \times \{0\}$ zu zeigen. O.B.d.A. sei U eine Basismenge, also eine Scheibe, die L_0 im Punkt z_0 berührt. Zu z im Inneren der Scheibe sei z' der zweite Schnittpunkt der Gerade durch z_0 und z. Wir definieren die gesuchte stetige Funktion $f : L \to [0,1]$ nun durch $f(z_0) := 1$, $f|_{L \setminus (U \cup \{z_0\})} = 0$ und $f(z) := \frac{|z - z'|}{|z_0 - z'|}$.
L ist nicht normal: Es sei dazu $Q := \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : y > 0\}$. Dies ist dicht in L. Angenommen für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq L_0$ existieren zueinander disjunkte offene Mengen U_A und V_A mit $A \subseteq U_A$ und $L_0 \setminus A \subseteq V_A$. Es sei $Q_A := Q \cap U_A$. Falls $A_1 \neq A_2$ könne wir annehmen $\emptyset \neq A_1 \setminus A_2 \subseteq U_{A_1} \cap V_{A_2}$, also ist $\emptyset \neq Q \cap U_{A_1} \cap V_{A_2} \subseteq Q_{A_1} \setminus U_{A_2} \subseteq Q_{A_1} \setminus Q_{A_2}$, d.h. $Q_{A_1} \neq Q_{A_2}$. Also ist die

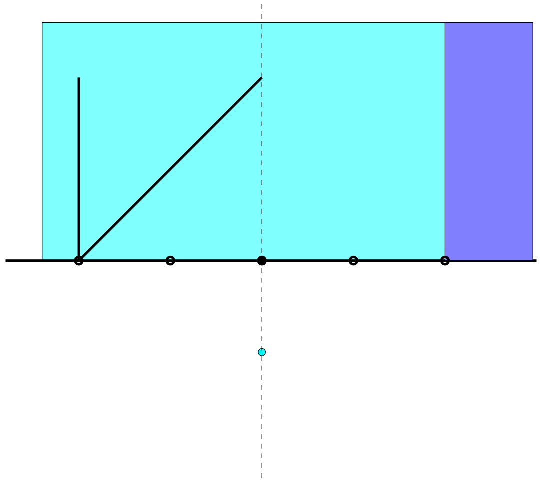
Kardinalität der A gerade $2^{\mathbb{R}}$ und jene der Q_A höchstens $2^{Q} \cong 2^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$.

.

($T_3 \not\Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$) Wir betrachten die obere Halbebene $M_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ und $M := M_0 \cup \{\infty\}$. Es sei $L := \mathbb{R} \times \{0\}$. Es sei

$$\mathcal{U}(z) := \begin{cases} \{\{z\}\} & \text{für } z \in M_0 \setminus L \\ \{(A_1(z) \cup A_2(z)) \setminus B : z \notin B \text{ endlich}\} & \text{für } z \in L \\ \{U_i(\infty) : 0 \neq i \in \mathbb{N}\} & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

wobei $A_1(z) := \{(x,y) \in M_0 : 0 \leq y \leq 2\}$ und $A_2(z) := \{(x+y,y) \in M_0 : 0 \leq y \leq 2\}$ für $z = (x,0)$ sei und $U_i(\infty) := \{\infty\} \cup \{(x,y) \in M_0 : x \geq i\}$. Dies definiert eine Umgebungsbasis eines topologischen Hausdorff-Raumes X.



Dieser Raum ist regulär: Da $\mathcal{U}(z)$ für $z \in M_0$ aus offen-abgeschlossenen Mengen besteht genügt es ∞ von $\sim U_i(\infty)$ zu trennen. Es ist $U_0 := U_{i_0+2}(\infty)$ die gesuchte Umgebung von ∞ mit Abschluß $U_{i_0+2}(\infty) \cup L_{i_0} \cup L_{i_0+1} \subseteq U_i(\infty)$, wobei $L_i := \{(x,0) \in L : i < x \leq i+1\}$ für $i \in \mathbb{N}$.

Es sei $f : M \to I$ stetig mit $f|_{L_0} = 0$. Dann ist $f(\infty) = 0$, denn wir zeigen nun mittels Induktion für jedes n die Existenz einer unendlichen Menge $K_n \subseteq L_n$ mit $f|_{K_n} = 0$: Es sei $K_0 := L_0$. Nun sei K_n bereits gewählt, o.B.d.A. abzählbar unendlich. Dann existiert für jedes $z \in K_n$ eine abzählbare Menge $A_0(z) \subseteq A_2(z)$ mit $f|_{A_2(z)\setminus A_0(z)} = 0$. Die Ortho-Projektion A von $\bigcup\{A_0(z) : z \in K_n\}$ auf L ist abzählbar und für jedes $t \in K_{n+1} := L_{n+1} \setminus A$ trifft $A_1(t)$ jedes der unendlich vielen $A_2(z) \setminus A_0(z)$ mit $z \in K_n$. Angenommen $f(t) \neq 0$. Dann ist $t \in f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap A_1(t)$ offen und hat somit endliches Komplement in $A_0(t)$. Für irgendein $z \in K_n$ trifft also $A_2(z) \setminus A_0(z)$ dieses Urbild. Andererseits ist f aber $f|_{A_2(z)\setminus A_0(z)} = 0$, ein Widerspruch.

Es gibt sogar reguläre Räume auf denen jede stetige $\mathbb{R}$-wertige Funktion konstant ist, siehe Aufgabe (65).

($T_2 \not\Rightarrow T_3$) Wir betrachten folgende Umgebungsbasis für die Menge $\mathbb{R}$ wobei $A := \{\frac{1}{k} : 0 \neq k \in \mathbb{N}\}$:

$$B(x) := \begin{cases} \{U_r(x) : r > 0\} & \text{für } x \neq 0 \\ \{U_r(x) \setminus A : r > 0\} & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Es ist A abgeschlossen und $0 \notin A$ nicht trennbar von A.

($T_1 \not\Rightarrow T_2$) Die Zariski-Topologie oder speziell $X := \mathbb{N}$ mit abgeschlossen $\Leftrightarrow$ endlich oder gleich X.

1.3.4 Metrisierungssatz von Urysohn.
2.Abz.Axiom, regulär $\Rightarrow$ separabel, metrisierbar.

Beweis. Sei A abgeschlossen und $W \supseteq A$ offen. Weiters sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis. Dann existiert zu $x \in A$ ein $W_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in W_x \subseteq \overline{W_x} \subseteq W$. Die Menge $\{W_x : x \in A\}$ ist somit abzählbar und $\bigcup_{x\in A} W_x \supseteq A$.

Der Raum ist normal: , Seien A_0 und A_1 disjunkte abgeschlossene Mengen. Dann existieren nach dem gerade gezeigten abzählbar viele offene $W_k \subseteq \overline{W_k} \subseteq {\sim}A_1$ die A_0 überdecken und ebenso abzählbar viele offene $V_k \subseteq \overline{V_k} \subseteq {\sim}A_0$ die A_1 überdecken. Nun sei $W := \bigcup_n W_n \setminus \bigcup_{k\leq n} \overline{V_k}$ und $V := \bigcup_n V_n \setminus \bigcup_{k\leq n} \overline{W_k}$. Diese Mengen sind offen und enthalten A_0 resp. A_1. Sie sind disjunkt, denn $x \in W \cap V$, d.h. $\exists n, m$ (mit $n \leq m$ O.B.d.A.) $x \in W_n \setminus \bigcup_{k\leq n} \overline{V_k} \subseteq W_n$ und $x \in V_m \setminus \bigcup_{k\leq m} \overline{W_k} \subseteq {\sim}\overline{W_n}$, ein Widerspruch.

Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis. Sei $\mathcal{A} := \{(U,V) \in \mathcal{B}\times\mathcal{B} : \overline{U} \subseteq V\}$. Da X normal ist existiert für jedes $(U,V) \in \mathcal{A}$ wählen wir ein $f = f_{U,V} \in C(X,\mathbb{R})$ mit $f|_{\overline{U}} = 0$ und $f|_{\sim V} = 1$. Die Familie $f_{U,V}$ trennt Punkte von abgeschlossenen Mengen und ist somit initial, d.h. X ist eingebettet in $\prod_{\mathcal{A}} \mathbb{R}$ und somit separabel und metrisierbar. □

1.3.5 Parakompaktheit und Partition der Eins.

Idee: In der Differential-Geometrie kann man oft lokal eine Konstruktion durchführen hätte sie aber gerne global. Dies versucht man dadurch zu erreichen, daß man die Konstruktionen auf den verschiedenen Teilmengen einer Überdeckung so gewichtet, daß die Gewichte gegen den Rand der Mengen gegen 0 gehen und sich auch 1 aufsummieren. D.h. wir benötigen die folgende Eigenschaft.

Definition (Parakompakter Raum).
Ein topologischer Raum heißt *parakompakt*, falls er T_1 ist und zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ eine untergeordnete Partition der 1 existiert, d.h. eine Menge $\mathcal{F} \subseteq C(X,[0,1])$ mit

(1) $\{\operatorname{carr}(f) : f \in \mathcal{F}\}$ ist eine lokal-endliche Verfeinerung von $\mathcal{U}$,
wobei $\operatorname{carr}(f) := \{x : f(x) \neq 0\}$.

(2) $\sum_{f\in\mathcal{F}} f = 1$.

Dabei heißt eine Menge $\mathcal{V}$ *Verfeinerung* von $\mathcal{U}$, falls $\forall V \in \mathcal{V} \exists U \in \mathcal{U} : V \subseteq U$ und $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U}$. Falls $\mathcal{V}$ eine lokal-endliche offene Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist, so existiert auch eine lokal-endliche offene Verfeinerung $\{\tilde{U} : U \in \mathcal{U}\}$ mit $\tilde{U} \subseteq U$ für alle $U \in \mathcal{U}$: Dazu wählen wir für jedes $V \in \mathcal{V}$ ein $U(V) \in \mathcal{U}$ mit $V \subseteq U(V)$. Für $U \in \mathcal{U}$ definieren wir nun $\tilde{U} := \bigcup\{V : U(V) = U\}$. Ist insbesonders $\mathcal{V} = \{\operatorname{carr}(f) : f \in \mathcal{F}\}$, so bilden die $f_U := \sum_{U(\operatorname{carr}(f))=U} f$ eine untergeordnete Partition der 1 mit $\operatorname{carr}(f_U) \subseteq U$.

Lemma. *Jeder parakompakte Raum ist normal.*

Beweis. Es seien A und B abgeschlossene disjunkte Teilmengen in X, dann ist $\{{\sim}A, {\sim}B\}$ eine offene Überdeckung von X. Sei $\{f_A, f_B\}$ eine untergeordnete Partition der 1. Also ist $f_A + f_B = 1$ und $\operatorname{carr}(f_A) \subseteq {\sim}A$ sowie $\operatorname{carr}(f_B) \subseteq {\sim}B$. Dann ist $f_A|_A = 0$ und $f_A|_B = (f_A + f_B)|_B = 1$, also ist X normal. □

1.3.6 Folgerung. *Es sei X parakompakt und $g : X \to \mathbb{R}$ unten halbstetig mit $g > 0$. Dann existiert ein $f \in C(X, \mathbb{R})$ mit $0 < f < g$.*

Eine Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ heißt *unten halbstetig*, wenn $\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists U \in \mathcal{U}(x)$ $\forall x' \in U : g(x') > g(x) - \varepsilon$, oder äquivalent, wenn $\{x : g(x) > t\}$ offen ist für jedes $t \in \mathbb{R}$, oder auch $\{x : g(x) \le t\}$ abgeschlossen ist für jedes $t \in \mathbb{R}$

Beweis. Die Mengen $U_t := \{x \in X : g(x) > t\}$ für $t > 0$ bilden eine offene Überdeckung von X. Auf U_t finden wir natürlich eine stetige Funktion f mit $0 < f < g$ nämlich die Konstante $f(x) := t$. Wir verwenden nun eine $\{U_t : t \in \mathbb{R}\}$ untergeordnete Partition $\{f_t : t > 0\}$ der 1 um diese konstanten lokal-definierten Abbildungen zu der gesuchten Abbildung

$$f := \sum_{t>0} f_t \cdot \mathrm{konst}_t$$

zu verkleben. Also ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{t>0} t\, f_t(x) = \sum_{\substack{t>0\\ f_t(x)\neq 0}} t\, f_t(x) = \sum_{\substack{t>0\\ x\in U_t}} t\, f_t(x) = \sum_{\substack{t>0\\ g(x)>t}} t\, f_t(x) \\ &< \sum_{\substack{t>0\\ g(x)>t}} g(x)\, f_t(x) = g(x) \sum_{t>0} f_t(x) = g(x). \end{aligned}$$

Und da $\{\mathrm{carr}(f_t) : t > 0\}$ eine Überdeckung ist, ist $f > 0$. □

1.3.7 Theorem (Parakompaktheit via lokal-endlichen Verfeinerungen). *Ein Raum ist genau dann parakompakt, wenn er Hausdorff ist und jede offene Überdeckung eine lokal-endliche offene Verfeinerung besitzt.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Wenn $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{U}$ untergeordnete Partition der 1 ist, dann ist $\{\mathrm{carr}(f) : f \in \mathcal{F}\}$ eine lokal-endliche offene Verfeinerung.

($\Leftarrow$) Es seien A und B abgeschlossene disjunkte Teilmenge s.d. für jedes $x \in B$ offene disjunkte Mengen $U_x \supseteq A$ und $V_x \ni x$ existieren, dann existieren offene disjunkte Mengen $U \supseteq A$ und $V \supseteq B$: Die Familie $\{V_x : x \in B\} \cup \{X \setminus B\}$ ist eine offene Überdeckung. Sei $\mathcal{W}$ eine lokal-endliche Verfeinerung und $\mathcal{W}_0 := \{W \in \mathcal{W} : W \cap B \neq \emptyset\}$. Es sind $U := X \setminus \bigcup_{W \in \mathcal{W}_0} \overline{W}$ offen (lokal endlich!) und $V := \bigcup \mathcal{W}_0$ die gesuchten offenen Mengen.

Nun wende dies zuerst auf $A = \{x\}$ an um die Regularität von X zu erhalten und danach auf allgemeines abgeschlossenes A und B um die Normalität zu zeigen.

Sei nun $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung (o.B.d.A. lokal-endlich). Da X regulär existiert zu $x \in X$ und $U \in \mathcal{U}$ ein offenes U_x mit $x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq U$. Also ist $\{U_x : x \in U \in \mathcal{U}\}$ eine offene Überdeckung. Sei $\mathcal{V}$ eine lokal-endliche Verfeinerung davon. Für jedes $V \in \mathcal{V}$ existiert somit $x \in U \in \mathcal{U}$ mit $V \subseteq U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq U$, also $\overline{V} \subseteq U$. Wir setzen $U_V := U$. Für $U \in \mathcal{U}$ sei $A_U := \bigcup\{\overline{V} : U_V = U\}$. Dann ist $\{A_U : U \in \mathcal{U}\}$ eine lokal-endliche abgeschlossene Überdeckung und eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$. Nach dem Urysohn'schen Lemma für den normalen Raum X existiert eine stetige Funktion $f_U : X \to [0, 1]$ mit $f_U|_{A_U} = 1$ und $f_U|X \setminus U = 0$. Da $\mathcal{U}$ lokal-endlich ist, ist $f := \sum_{U \in \mathcal{U}} f_U$ wohldefiniert und stetig und damit $\{f_U/f : U \in \mathcal{U}\}$ die gesuchte Partition der 1. □

1.3.8 Theorem. *Jeder metrisierbare Raum ist parakompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{W}$ eine offene Überdeckung. Da wir nicht Abzählbarkeit wie in (2.5.3) erreichen können setzen wir zumindest eine Wohlordnung $\prec$ auf $\mathcal{W}$ (siehe (1.3.9)). Für $W \in \mathcal{W}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $W_n := \bigcup_{x \in M_{W,n}} U_{1/2^n}(x)$ wobei

$$M_{W,n} := \left\{ x \in X : \begin{array}{ll} (i) \forall V \prec W : x \notin V \\ (ii) \quad \forall j < n \forall V \in \mathcal{W} : x \notin V_j \\ (iii) \quad U_{3/2^n}(x) \subseteq W \end{array} \right\}$$

Dann ist $\{W_n : W \in \mathcal{W}, n \in \mathbb{N}\}$ eine lokal-endliche Verfeinerung von $\mathcal{W}$.
Verfeinerung: $W_n \subseteq W$, da $U_{1/2^n}(x) \subseteq U_{3/2^n}(x) \subseteq W$ für $x \in M_{W,n}$.
Überdeckung: Sei $x \in X$, $V := \min\{W \in \mathcal{W} : x \in W\}$, $\exists n \in \mathbb{N} : U_{3/2^n}(x) \subseteq V \Rightarrow$ (ii) ist erfüllt und somit $x \in M_{V,n} \subseteq V_n$ oder $x \in W_j$ für ein $j < n$ und ein $W \in \mathcal{W}$.
Lokal-endlich: Sei $x \in X$ und $V := \min\{W \in \mathcal{W} : \exists n : x \in W_n\}$, d.h. $\exists n : x \in V_n$; $\exists j : U_{2/2^j}(x) \subseteq V_n$.
Beh: $i \geq n + j \Rightarrow \forall W \in \mathcal{W} : U_{1/2^{n+j}}(x) \cap W_i = \emptyset$.
Wegen $i > n$ ist $\forall y \in M_{W,i} : y \notin V_n$ nach (ii) und somit $d(y, x) \geq 2/2^j$ wegen $U_{2/2^j}(x) \subseteq V_n$. Aus $n + j \geq j$ und $i \geq j$ folgt somit

$$U_{1/2^{n+j}}(x) \cap U_{1/2^i}(y) \subseteq U_{1/2^j}(x) \cap U_{1/2^j}(y) = \emptyset.$$

Also $U_{1/2^{n+j}}(x) \cap W_i = \emptyset$.
Beh: $i < n + j \Rightarrow U_{1/2^{n+j}}(x) \cap W_i \neq \emptyset$ für höchstens ein $W \in \mathcal{W}$.
Sei $p \in W_i$ und $p' \in W'_i$ für $W, W' \in \mathcal{W}$, o.B.d.A. $W \prec W'$; d.h. $\exists y \in M_{W,i} : p \in U_{1/2^i}(y)$ und somit $U_{3/2^i}(y) \subseteq W$ nach (iii) und $\exists y' \in M_{W',i} : p' \in U_{1/2^i}(y')$ und somit $y' \notin W$ nach (i). $\Rightarrow d(y, y') \geq 3/2^i \Rightarrow d(p, p') > d(y', y) - d(p, y) - d(p', y') = 1/2^i \geq 1/2^{n+j-1}$.
Folglich wird $U_{1/2^{n+j}}(x)$ nur von endlich vielen W_j getroffen. □

1.3.9 Theorem (Versionen des Auswahlaxioms).
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) **Auswahlaxiom:** $\forall s \in S : X_s \neq \emptyset \Rightarrow \prod_{s \in S} X_s \neq \emptyset$;
(2) **Zermelo's Wohlordnungssatz:** *Jede Menge S kann wohlgeordnet werden;*
(3) **Teichmüller-Tukey Lemma:** *Es sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von endlichen Type, d.h. $A \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall B \subseteq A : B$ endlich $\Rightarrow B \in \mathcal{S}$. Dann ist jedes $A \in \mathcal{S}$ in einem maximalen Menge $B \in \mathcal{S}$ enthalten;*
(4) **Zorn'sches Lemma:** *Falls X partielle geordnet ist, und jede linear geordnete Menge eine obere Schranke besitzt, so existieren maximale Elemente in X.*

Beweis. (1⇒2) Sei $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ mit $f(A) \in A$. Wir wählen $f(\emptyset) \notin X$. Es sei α die kleinste Ordinalzahl für die keine injektive Abbildung $\alpha \to X$ existiert. Mit transfiniter Rekursion definieren wir eine Abbildung $x : \alpha \to X$ durch $x(\beta) := f(X \setminus \{x(\gamma) : \gamma < \beta\})$ für jedes $\beta < \alpha$. Falls $x_\beta \neq f(\emptyset)$ dann ist $x_\beta = f(X \setminus \{x_\gamma : \gamma < \beta\}) \in X \setminus \{x_\gamma : \gamma < \beta\}$ und somit $x_\beta \neq x_\gamma$ für $\gamma < \beta$. Wäre also $x_\beta \neq f(\emptyset)$ für alle $\beta < \alpha$, dann wäre $x : \alpha \to X$ injektiv, ein Widerspruch. Sei also $\beta < \alpha$ minimal mit $x_\beta = f(\emptyset)$. Dann ist $X = \{x_\gamma : \gamma < \beta\}$ also wohlgeordnet.

(2⇒3) Sei $\mathcal{S}$ von endlichen Typ und $A \in \mathcal{S}$. Wegen des Wohlordnungssatzes kann $X \setminus A$ wohlgeordnet werden, also existiert eine Ordinalzahl β und eine Bijektion $x : \beta \to X \setminus A$. Wir definieren mit transfiniter Rekursion A_α für $\alpha \le \beta$ durch

$$\begin{aligned} A_0 &:= A \\ A_{\alpha+1} &:= \begin{cases} A_\alpha \cup \{x_\alpha\} & \text{falls } A_\alpha \cup \{x_\alpha\} \in \mathcal{S} \\ A_\alpha & \text{andernfalls} \end{cases} \\ A_\alpha &:= \bigcup_{\beta<\alpha} A_\xi \text{ falls } \alpha \text{ eine Limesordinalzahl ist.} \end{aligned}$$

Es ist $A_\alpha \in \mathcal{S}$ und A_β maximal in $\mathcal{S}$, denn andernfalls gäbe es ein $B \in \mathcal{S}$ mit $A \subseteq A_\beta \subset B \subseteq X$. Wir wählen $\gamma < \beta$ minimal mit $x_\gamma \in B \setminus A_\beta$. Dann ist $A_\gamma \cup \{x_\gamma\} \subseteq A_\beta \cup \{x_\gamma\} \subseteq B$ und somit in $\mathcal{S}$, also $A_\beta \supseteq A_{\gamma+1} = A_\gamma \cup \{x_\gamma\} \ni x_\gamma$.

(3⇒4) Es sei $\mathcal{S} := \{A \subseteq X : A \text{ ist linear geordnet}\}$. Offensichtlich ist $\mathcal{S}$ von endlichen Typ. Also existiert nach dem Teichmüller-Tukey Lemma zu $A := \emptyset$ ein maximales $B \in \mathcal{S}$. Sei x_0 eine obere Schranke von B. Dann ist x_0 maximales Element von X, denn aus $x_0 \prec x$ folgt $B \subseteq B \cup \{x\} \in \mathcal{S}$, ein Widerspruch.

(4⇒1) Es sei $X_s \neq \emptyset$ für alle $s \in S$. Wir betrachten $\mathcal{M} := \{(x, A) : A \subseteq S, x \in \prod_{s\in A} X_s\}$ partiell geordnet vermöge $(x, A) \prec (x', A') :\Leftrightarrow A \subseteq A'$ und $x'|_A = x$. Zu jeder linear geordneten Teilmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}$ ist $(\bigcup_{(x,A)\in\mathcal{L}} x, \bigcup_{(x,A)\in\mathcal{L}} A)$ eine obere Schranke. Sei (x, A) ein maximales Element. Dann ist $A = S$, denn andernfalls sei $a \in X \setminus A$ und $x_a \in X_a$, dann ist $(\tilde{x}, \tilde{A}) \succ (x, A)$ wobei $\tilde{A} = A \cup \{a\}$ und $\tilde{x}|_A = x$, $\tilde{x}_a = x_a$. □

1.3.10 Erblichkeit.

	Teilraum	Produkt	Summe	Quotient
T_1	+✓	+✓	+✓	abg.[E:1.5.20], $-^{1)}$
T_2	+✓	+✓	+✓	perf.[E:3.7.20], $-^{1)}$
T_3	+✓	+✓	+✓	perf.[E:3.7.20], $-^{1)}$
$T_{3\frac{1}{2}}$	+✓	+	+✓	abg-off.[E:3.7.D], $-^{1)}$
T_4	F_σ[E:2.1.E],abg.✓, $-^{2)}$	$-^{3)}$	+✓	abg.[E:1.5.20], $-^{1)}$
perf. T_4	+✓	$-^{3)}$	+✓	abg.[E:1.5.20], $-^{1)}$
para-kp.	F_σ[E:5.1.28],abg.✓, $-^{2)}$	$-^{3)}$	+✓	abg.[E:5.1.33], $-^{1)}$

1) $[0,1]/(0,1)$ oder $[0,1]/(0,1]$
2) Es sei N die **Niemytzki-Ebene** (siehe (1.1.9)). Dann ist jede Kompaktifizierung (siehe (2.1.15) und (2.2.5)) T_4 (siehe (2.1.1)) und enthlt den nicht normalen Raum N als Teilraum.
3) Die **Sorgenfrey-Gerade** S (siehe (1.1.5)) ist nach obigen perfekt-normal und auch Lindelöf und somit parakompakt nach (2.5.3). In der Tat sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung. Dann ist $S \setminus \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U^o$ abzählbar, denn zu $x \in \bigcup \mathcal{U} \setminus \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U^o$ existieren $a < b$ mit $x \in [a, b) \subseteq U \in \mathcal{U}$ und wegen $x \notin (a, b)$ ist $x = a$ wir setzen $b_x := b$. Dann sind die (x, b_x) disjunkt und somit höchstens abzählbar. Andererseits existiert eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ mit $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U^o = \bigcup_{U\in\mathcal{U}_0} U^o \subseteq \bigcup \mathcal{U}_0$ da $\mathbb{R}$ das 2.Abz.Axiom erfüllt. Also erhalten wir insgesamt eine abzählbare Überdeckung. Hingegen ist $S \times S$ nicht normal nach obigen.

In [E:5.1.F.b] wird gezeigt, daß jede Teilmenge eines parakompakten $T_{4\frac{2}{3}}$-Raumes ebenfalls parakompakt (und $T_{4\frac{2}{3}}$) ist.

Jede Kompaktifizierung (siehe Kapitel (2)) eines $T_{3\frac{1}{2}}$-Raums ist parakompakt und somit T_4 und hat diesen Raum als Teilraum, der nicht T_4 und auch nicht parakompakt zu sein braucht.

In [Steen&Seebach] befindet sich kein Beispiel eines $T_{4\frac{2}{3}}$-Raumes, der nicht parakompakt wäre.

2 Kompaktheit

2.1 Kompakte Räume

2.1.1 Definition (Kompakter Raum).
Eine *Überdeckung* $\mathcal{U}$ eines Raumes X ist eine Menge $\mathcal{U}$ von Teilmengen von X mit $\bigcup \mathcal{U} = X$. Eine *Teilüberdeckung* $\mathcal{V}$ einer Überdeckung $\mathcal{U}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ mit $\mathcal{V} = X = \mathcal{U}$. Eine *Verfeinerung* $\mathcal{V}$ einer Überdeckung $\mathcal{U}$ ist eine Überdeckung, s.d. $\forall V \in \mathcal{V} \exists U \in \mathcal{U} : V \subseteq U$. Eine Menge $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X hat die *endliche Durchschnittseigenschaft*, wenn für jede endliche Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ der Durchschnitt $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Ein topologischer Raum heißt *kompakt* falls er Hausdorff ist und jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung (äquivalent, endliche Verfeinerung) besitzt. Insbesonders ist jeder kompakte Raum parakompakt und damit T_4.

2.1.2 Beispiele.

(1) $\mathbb{R}$ mit der standard-Topologie ist nicht kompakt, da $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung ist.

(2) Die Sorgenfrey-Gerade (siehe (1.1.5)) ist nicht kompakt, da $\{[-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung ist.

(3) Die Zariski-Topologie aus (1.3.3) ist zwar nicht T_2 aber jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung, denn sei $U_0 \in \mathcal{U}$ beliebig, dann ist $X \setminus U_0$ endlich und zu jeden $x(\notin U_0)$ existiert ein $U_x \in \mathcal{U}$ mit $x \in U_x$, also ist $\{U_0\} \cup \{U_x : x \notin U_0\}$ eine endliche Teilüberdeckung.

(4) Das Beispiel aus (1.3.1) für $T_4 \not\Rightarrow T_{4\frac{2}{3}}$ ist kompakt, denn ein $U_0 \in \mathcal{U}$ muß den Punkt 0 enthalten und somit ist $X \setminus U_0$ endlich und wir könne wie zuvor fortfahren. Diese Beispiel zeigt, daß kompakte Räume nicht $T_{4\frac{2}{3}}$ zu sein brachen.

2.1.3 Lemma (Kompaktheit via endlicher Durchschnittseigenschaft).
Ein Hausdorff-Raum X ist genau dann kompakt, wenn jede Menge von abgeschlossenen Teilmengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft einen nicht-leeren Durchschnitt besitzt.

Beweis. ($\Rightarrow$) Indirekt: Es habe $\mathcal{F}$ die endliche Durchschnittseigenschaft mit leeren Durchschnitt. Dann sei $\mathcal{U} := \{X \setminus A : A \in \mathcal{F}\}$. Dies ist eine offene Überdeckung, denn $\bigcup \mathcal{U} = X \setminus \bigcap \mathcal{F} = X$. Sei $\mathcal{U}_0$ eine endliche Teilüberdeckung, dann ist $\bigcap \{A \in \mathcal{F} : X \setminus A \in \mathcal{U}_0\} = \emptyset$, ein Widerspruch.

($\Leftarrow$) Indirekt: Es sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung. Dann ist $\mathcal{F} := \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ eine Menge abgeschlossener Teilmengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft, also $\bigcup \mathcal{U} = X \setminus \bigcap \mathcal{F} \neq X$, ein Widerspruch. $\square$

2.1.4 Folgerung (Teilräume kompakter Räume).
Eine abgeschlossener Teilraum eines kompakten Raums ist kompakt.

Beweis. Eine Menge $\mathcal{A}$ abgeschlossener Teilmengen in $Y \subseteq X$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft ist auch eine solche in X also ist $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$. $\square$

2.1.5 Proposition (Trennungseigenschaften kompakter Mengen).
Es sei $A \subseteq X$ kompakt. Dann gilt:

(1) *Falls X T_2 ist und $b \notin A$, so existieren offene disjunkte U und V mit $A \subseteq U$ und $b \in V$.*
(2) *Falls X T_3 ist und B abgeschlossen und disjunkt zu A ist, so existieren offene disjunkte U und V mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$.*
(3) *Falls X $T_{3\frac{1}{2}}$ ist und B abgeschlossen und disjunkt zu A ist, so existiert ein $f \in C(X, [0,1])$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.*

Beweis. (1) Für jedes $x \in A$ existieren wegen T_2 disjunkte offene $U_x \ni x$ und $V_x \ni b$. Die Überdeckung $\{U_x : x \in A\}$ besitzt dann also eine endliche Teilüberdeckung $\{U_x : x \in A_0\}$ und somit sind $U := \bigcup_{x\in A_0} U_x$ und $V := \bigcap_{x\in A_0} V_x$ die gewünschten offenen disjunkten Umgebungen.

(2) Für jedes $x \in A$ existieren wegen T_3 disjunkte offene $U_x \ni x$ und $V_x \supseteq B$. Die Überdeckung $\{U_x : x \in A\}$ besitzt dann also eine endliche Teilüberdeckung $\{U_x : x \in A_0\}$ und somit sind $U := \bigcup_{x\in A_0} U_x$ und $V := \bigcap_{x\in A_0} V_x$ die gewünschten offenen disjunkten Umgebungen.

(3) Für jedes $x \in A$ existiert wegen $T_{3\frac{1}{2}}$ ein $f_x : X \to [0,1]$ mit $f_x(x) = 0$ und $f_x|_B = 1$. Es ist $\{U_x := f_x^{-1}(\{t : t < \frac{1}{2}\}) : x \in A\}$ eine offene Überdeckung und sei $\{U_x : x \in A_0\}$ eine endliche Teilüberdeckung und $f := \min\{\tilde{f}_x : x \in A_0\}$ wobei $\tilde{f}_x := \max\{0, 2\,f_x - 1\}$ sei. Dann ist $\tilde{f}_x|_{U_x} = 0$ und $\tilde{f}_x|_B = 1$ und somit ist $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$. □

Aus (3) folgt mittels (2.1.4) direkt, daß jeder kompakte Raum normal ist.

2.1.6 Proposition. *Jeder kompakte Teilraum eines Hausdorff-Raumes ist abgeschlossen.*

Beweis. Nach (2.1.5) besitzt jedes $x \notin A$ eine Umgebung V_x disjunkt von A, also ist $X \setminus A$ offen. □

2.1.7 Proposition (Bilder kompakter Räume).
Es sei $f : X \to Y$ stetig surjektiv, X kompakt, Y Hausdorff. Dann ist Y kompakt.

Beweis. Das Urbild einer offenen Überdeckung von Y ist eine solche von X. □

2.1.8 Lemma. *Es sei $f : X \to Y$ stetig, X kompakt und Y Hausdorff. Dann ist $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ für alle $A \subseteq X$.*

Beweis. Es ist $f(\overline{A})$ kompakt nach (2.1.7) und (2.1.4), also abgeschlossen nach (2.1.6), und wegen $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ gilt Gleichheit. □

2.1.9 Folgerung. *Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit X kompakt und Y Hausdorff ist abgeschlossen.*

Beweis. Es sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, also kompakt nach (2.1.4) und somit $f(A)$ kompakt nach (2.1.8) also $f(A) \subseteq Y$ abgeschlossen nach (2.1.6). □

Bemerkung.

(1) Falls f in (2.1.9) zusätzlich bijektiv ist, so ist f ein Homöomorphismus. Wendet man dies insbesonders auf die Identität eines Raumes mit verschiedenen

Topologien an, so erhält man, daß die kompakten Topologien maximal (am feinsten) unter allen Hausdorff-Topologien sind.

(2) Falls f in (2.1.9) injektiv ist, so ist f eine abgeschlossene Einbettung.

(3) Falls f in (2.1.9) injektiv ist, so ist f eine abgeschlossene Quotienten-Abbildung.

(4) Es erhebt sich also die Frage, welche Äquivalenzrelationen auf X Hausdorff Quotienten erzeugen. Nach (2.1.9) muß dazu $\pi : X \to X/\sim$ eine abgeschlossene Quotienten-Abbildung sein, d.h. aus $A \subseteq X$ abgeschlossen muß $\pi(A) \subseteq X/\sim$ abgeschlossen und somit $\pi^{-1}(\pi(A)) \subseteq X$ abgeschlossen folgen. Beachte, daß $\pi^{-1}(\pi(A)) = \{x \in X : \exists a \in A : x \sim a\} = \bigcup_{a\in A}[a]_\sim$ ist. Eine Äquivalenzrelation $\sim$ heißt *abgeschlossen*, falls $\pi : X \to X/\sim$ abgeschlossen ist, d.h. mit jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ auch die *saturierte Hülle* $\tilde{A} := \{x \in X : \exists a \in A : x \sim a\}$ abgeschlossen ist. Es gilt:

2.1.10 Theorem von Alexandroff.
Es sei $\sim$ eine abgeschlossene Äquivalenzrelation auf einen kompakten Raum X. Dann existiert genau eine Hausdorff-Topologie auf $X/\sim$, sodaß $\pi : X \to X/\sim$ stetig ist. Diese Topologie ist sogar kompakt und π is eine abgeschlossene Quotienten-Abbildung.

Beweis. Wenn $\sim$ abgeschlossen ist, dann ist $\pi : X \to X/\sim$ abgeschlossen und nach (1.3.10) T_4 (siehe Aufgabe (66)) und weiters nach (2.1.7) kompakt. Somit haben wir solch eine Topologie gefunden. Sei Y der Raum $X/\sim$ mit einer T_2-Topologie, s.d. die kanonische Abbildung $\pi : X \to Y$ stetig ist. Dann ist wegen der universellen Eigenschaft von $X/\sim$ die Identität $X/\sim \to Y$ stetig und somit nach (2.1.9) ein Homöomorphismus, d.h. die Topologie von Y ist die Quotienten-Topologie. □

2.1.11 Proposition (Umgebungen von Produkten).
Es sei $A \subseteq X$ kompakt und $y \in Y$. Dann existieren zu jeder offenen Menge $W \supseteq A \times \{y\}$ offene Umgebungen $U \supseteq A$ und V von y mit $U \times V \subseteq W$.

Fr eine Verallgemeinerung auf beliebige Produkte siehe Aufgabe (68).

Beweis. Für $x \in A$ existieren offen Umgebungen U_x von x und V_y von y mit $U_x \times V_y \subseteq W$. Für eine endliche Teilüberdeckung von $\{U_x : x \in A\}$ ist dann die entsprechende Vereinigung $U := \bigcup_x U_x$ und Durchschnitt $V := \bigcap_x V_x$ die gewünschten Mengen. □

Dieser Beweis ist sehr ähnlich zu jenen von (2.1.4) und in der Tat folgt (2.1.4) aus (2.1.11), siehe Aufgabe (69).

2.1.12 Theorem von Kuratowski.
Es sei X ein Hausdorff-Raum. Dann sind äquivalent:

(1) *X ist kompakt;*

(2) *Für jeden (normalen) topologischen Raum Y ist $\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$ abgeschlossen.*

Beweis. (1⇒2) Es sei $A \subseteq X \times Y$ abgeschlossen und $y \notin \mathrm{pr}_2(A)$, d.h. $X \times \{y\} \cap A = \emptyset$. $\xRightarrow{(2.1.11)} \exists V \in \mathcal{U}(y) : X \times V \cap A = \emptyset$, d.h. $V \cap \mathrm{pr}_2(A) = \emptyset$, also ist $\mathrm{pr}_2(A)$ abgeschlossen.

(1⇐2) Indirekt: Es sei $\mathcal{A}$ eine Menge abgeschlossener Teilmengen von X mit der endlichen Durchschnittseigenschaft aber $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$. Wir setzen $Y := X \cup \{\infty\}$ mit $\infty \notin X$ und definieren $U \subseteq Y$ offen $:\Leftrightarrow (\infty \in U \Rightarrow \exists A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} : A_1 \cap \cdots \cap A_n \subseteq U)$. Dann ist Y T_1, denn $\bigcap \mathcal{U}(y) = \{y\}$ für alle $y \in Y$ (da $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$!). Es ist Y T_4, denn wenn B_0 und B_1 abgeschlossen und disjunkt sind, so ist ∞ in mindestens einem B_i nicht enthalten, d.h. o.B.d.A. $\infty \notin B_0$ und somit ist B_0 offen und B_0 und $Y \setminus B_0$ trennen B_0 und B_1.

Weiters ist $F := \{(x,x) : x \in X\}$ in $X \times Y$ abgeschlossen: Sei dazu $(x,y) \notin F$, d.h. $x \neq y$. Falls $y \in X$ so $\exists U \in \mathcal{U}(x)$ mit $y \notin U$ und $U \times \{y\}$ ist eine zu F disjunkte Umgebung in $X \times Y$. Andernfalls ist $y = \infty$ und zu x existiert ein $A \in \mathcal{A}$ mit $x \notin A$ (wegen $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$) und somit ist $U \times V$ eine zu F disjunkte Umgebung von (x,y), wobei $U := X \setminus A$ und $Y := \{\infty\} \cup A$.

Nach (2) müßte also $\mathrm{pr}_2(F) = X$ in Y abgeschlossen sein, ein Widerspruch. □

Folgerung (endliche Produkte kompakter Räume).
Es seien X_i kompakt für $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist $\prod_{i=1}^n X_i$ kompakt.

Beweis. Es genügt dies für $n = 2$ zu zeigen und dann Induktion anzuwenden. Nach (2.1.12) müssen wir nur die Abgeschlossenheit von $\mathrm{pr}_2 : (X_1 \times X_2) \times Y \to Y$ für beliebige topologische Räume Y zeigen. Diese Abbildung ist aber die Zusammensetzung der nach (2.1.12) abgeschlossenen Abbildungen

$$(X_1 \times X_2) \times Y \to X_1 \times (X_2 \times Y) \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} X_2 \times Y \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} Y. \quad \Box$$

2.1.13 Theorem von Tychonoff.
Ein Produkt nicht-leerer Räume ist genau dann kompakt, wenn alle Faktoren es sind.

Beweis. Nach (1.3.10) ist $X := \prod_s X_s$ Hausdorff. Es sei $\mathcal{F}_0$ eine Menge abgeschlossener Teilmengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Nach dem Teichmüller-Tukey Lemma angewendet auf

$$\mathcal{S} := \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{F} \text{ hat endliche Durchschnittseigenschaft}\}$$

existiert eine maximale Menge $\mathcal{F} \in \mathcal{S}$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_0$. Wir behaupten die Existenz eines Punktes $x \in X$ mit $x \in \overline{A}$ für alle $A \in \mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat dies auch die Familie $\mathcal{F}_s := \{\overline{\mathrm{pr}_s(A)} : A \in \mathcal{F}\}$. Also existiert ein $x_s \in \bigcap \mathcal{F}_s \subseteq X_s$. Jede Umgebung W_s von x_s in X_s trifft alle $\mathrm{pr}_s(A)$, also ist $\mathrm{pr}_s^{-1}(W_s) \cap A \neq \emptyset$, und somit wegen der Maximalität $\mathrm{pr}_s^{-1}(W_s) \in \mathcal{F}$. Damit sind aber wegen der Maximalität auch die endlichen Durchschnitte solcher Umgebungen in $\mathcal{F}$ und somit ist $x \in \overline{A}$ für alle $A \in \mathcal{F}$. Insbesonders ist $x \in \bigcap \mathcal{F}_0$. □

2.1.14 Beispiele. Der *Cantor-Würfel* ist $D^{\mathbb{N}}$, wobei D den 2-punktigen diskreten Raum $\{0,1\}$ bezeichnet. Nach (2.1.13) ist der Cantor-Würfel kompakt. Die Abbildung $(x_i)_i \mapsto \sum_{i \geq 0} \frac{2x_i}{3^{i+1}}$ ist eine injektive ($\sum_{j>n} \frac{2}{3^j} = \frac{1}{3^n}$!) stetige Abbildung nach $\mathbb{R}$ und somit ein Homöomorphismus auf ihr Bild. Dieses kann also als alle Punkte in $\mathbb{R}$ mit Trinärzahlentwicklung $x = \sum_{j>0} \frac{x_j}{3^j}$ mit $x_j \in \{0,2\}$ aufgefaßt werden oder sukzessive als Durchschnitt $\bigcap_n F_n$ der abgeschlossen Mengen

$F_n := \{\sum_{j>0} \frac{x_j}{3^j} : x_j \in \{0,1,2\}; x_j \neq 1 \text{ für } j \leq n\}$, die gerade aus jenen Punkten mit keinen 1'ern bis zur n-ten Stelle, bestehen. Es entsteht F_{n+1} aus F_n durch dritteln aller Intervalle $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}] \subseteq F_n$ und entfernen der mittleren Drittel $(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}})$.

Es ist $I := [a, b]$ kompakt. Sei dazu $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung und $O := \{x \in [a, b] : [a, x]$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}\}$. Offensichtlich ist O offen in I und $a \in O$. Angenommen $O \neq I$. Sei $x_0 := \inf(I \setminus O)$. Dann ist $x_0 \in I \setminus O$ und somit $x_0 > a$. Also existiert ein $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $x_0 \in U_0$. Wir wählen $x_1 < x_0$ mit $[x_1, x_0] \subseteq U_0$. Dann ist $x_1 \in O$ und somit existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{U_1, \ldots, U_n\}$ des Intervalls $[a, x_1]$. Damit ist aber $\{U_0; U_1, \ldots, U_n\}$ eine solche von $[a, x_0]$, ein Widerspruch.

Folgerung. *Jeder stetige $\mathbb{R}$-wertige Funktion auf eine kompakten Raum ist beschränkt und nimmt ihr Supremum und Infimum an.*

Beweis. Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und X kompakt. Dann ist $f(X)$ kompakt und somit beschränkt und abgeschlossen, also $\inf f(X) \in f(X)$ und $\sup f(X) \in f(X)$. □

Satz von Heine & Borel.
Eine Teilmenge A eines euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ oder allgemeiner von $\mathbb{R}^J$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist (d.h. $\mathrm{pr}_j(A) \subseteq \mathbb{R}$ ist beschränkt für alle $j \in J$).

Beweis. ($\Rightarrow$) Da $\mathbb{R}$ T_2 ist, ist $\mathrm{pr}_j(A)$ kompakt nach (2.1.7) und somit abgeschlossen nach (2.1.6). Es ist $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ eine offene Überdeckung und somit existiert ein n mit $\mathrm{pr}_j(A) \subseteq (-n, n)$, d.h. $\mathrm{pr}_j(A)$ ist beschränkt.

($\Leftarrow$) Es sei $\mathrm{pr}_j(A)$ beschränkt, also existiert ein n_j mit $\mathrm{pr}_j(A) \subseteq [-n_j, n_j]$ und damit $A \subseteq \prod_j [-n_j, n_j]$. Folglich ist A nach (2.1.13) und (2.1.4) kompakt. □

2.1.15 Theorem über Stone-ˇCech-Kompaktizierung.
Zu jedem topologischen Raum X existiert ein kompakter topologischer Raum βX (die sogenannte Stone-ˇCech-Kompaktifizierung) und eine stetige Abbildung $\iota_X : X \to \beta X$ mit folgender universellen Eigenschaft. Zu jeder stetigen Abbildung $g : X \to Y$ mit Werten in einem kompakten Raum Y, existiert eine eindeutige stetige Abbildung $\tilde{g} : \beta X \to Y$ mit $\tilde{g} \circ \iota = g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\iota_X"] \arrow[dr, "g"'] & & \beta X \arrow[dl, dashed, "\tilde{g}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Beweis. Wir definieren eine Abbildung $\iota : X \to [0,1]^{C(X,[0,1])}$ durch $\iota(x)_f := f(x)$, d.h. $\mathrm{pr}_f \circ \iota = f$ für alle $f \in C(X, I)$. Diese ist stetig wegen der universellen Eigenschaft des Produkts. Beachte, daß für jeden $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum X die Abbildung $\iota : X \to I^{C(X,I)}$ eine Einbettung ist, und sie ist genau dann abgeschlossen, wenn X kompakt ist nach (2.1.9).

Zu $g \in C(X, Y)$ sei $g^{**} : I^{C(X,I)} \to I^{C(Y,I)}$ definiert durch

$$g^{**}(x) := (x_{h \circ g})_{h \in C(Y,I)},$$

d.h. $\mathrm{pr}_h \circ g^{**} = \mathrm{pr}_{h\circ g}$ für $h \in C(Y,I)$. Also ist g^{**} stetig wegen der universellen Eigenschaft des Produkts $I^{C(Y,I)}$. Weiters ist $g^{**} \circ \iota_X = \iota_Y \circ g$, da $\mathrm{pr}_h(g^{**}(\iota_X(x))) = \mathrm{pr}_{h\circ g}(\iota_X(x)) = (h \circ g)(x) = h(g(x)) = \mathrm{pr}_h(\iota_Y(g(x)))$. Folglich bildet g^{**} den Abschluß $\beta X := \overline{\iota(X)}$ von $\iota(X)$ in die abgeschlossene Menge $\iota(Y) \supseteq \iota(g(X))$ hinein ab. Also können wir das gesuchte $\tilde{g} : \beta X \to Y$ durch $\iota_Y^{-1} \circ g^{**}|_{\beta X} : \beta X \to \iota_Y(Y) \to Y$ definieren.

$$\begin{tikzcd}
 & I & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dashed, "\iota_X", "(1)"'] \arrow[dr, "\iota_X"] \arrow[ddr, "h\circ g"'] \arrow[ddd, "g"'] & & I^{C(X,I)} \arrow[ul, "\mathrm{pr}_f"'] \arrow[ddl, "\mathrm{pr}_{h\circ g}"] \arrow[ddd, dashed, "(2)"', "g^{**}"] \\
 & \beta X \arrow[ur, hook] \arrow[ddl, dashed, "(3)"', "\tilde g"] & \\
 & I & \\
Y \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, hook, dashed, "\iota_Y", "(1)"'] & & I^{C(Y,I)} \arrow[ul, "\mathrm{pr}_h"']
\end{tikzcd}$$

Die Eindeutigkeit von $\tilde{g}$ ergibt sich daraus, daß zwei stetige Abbildungen $g_i : \beta X \to Y$, die auch einer dichten Menge $D := \iota_X(X)$ übereinstimmen ident sind: In der Tat ist $\Delta_Y := \{(y,y) : y \in Y\}$ in $Y \times Y$ abgeschlossen, da Y ein Hausdorff-Raum ist (siehe den Hinweis zu Aufgabe (69)). Somit ist $\{x : g_1(x) = g_2(x)\} = (g_1, g_2)^{-1}(\Delta_Y)$ abgeschlossen und dicht, also alles. □

Bemerkung.

(1) Die Stone-Čech-Kompaktifizierung $\iota : X \to \beta X$ ist durch die universelle Eigenschaft bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt: In der Tat besitze $\iota' : X \to \beta' X$ ebenfalls die universelle Eigenschaft. Dann existieren Erweiterungen $\widetilde{\iota} : \beta' X \to \beta X$ und $\widetilde{\iota'} : \beta X \to \beta' X$ und wegen der universellen Eigenschaft ist $\widetilde{\iota} \circ \widetilde{\iota'}$ die eindeutige Erweiterung $\mathrm{id}_{\beta X}$ und ebenso $\widetilde{\iota'} \circ \widetilde{\iota} = \mathrm{id}_{\beta' X}$.

(2) In der Tat genügt es die universelle Eigenschaft für $Y = I$ zu fordern. Denn ersetzt man in der Konstruktion von $\tilde{g}$ die Abbildung $\mathrm{pr}_{h\circ g}$ durch eine Erweiterung $\widetilde{h \circ g}$ von $h \circ g : X \to I$, so erhält man genauso eine stetige Fortsetzung $\tilde{g}$ mit Werten in Y.

(3) Die Abbildung $\iota : X \to \beta X$ ist genau dann eine Einbettung, wenn X $T_{3\frac{1}{2}}$ ist, und mehr noch ist ein Raum genau dann $T_{3\frac{1}{2}}$, wenn er sich in einen kompakten Raum einbettet läßt: Jeder Teilraum eines kompakten und somit $T_{3\frac{1}{2}}$-Raumes (nach (2.1.1)) ist $T_{3\frac{1}{2}}$ nach (1.3.10). Umgekehrt ist $\iota : X \to I^{C(X,I)}$ eine Einbettung für jeden $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum nach (1.3.1) und somit auch $\iota : X \to \beta X$.

(4) Die Stone-Čech-Kompaktifizierung ist maximal unter allen Kompaktifizierungen eines $T_{3\frac{1}{2}}$-Raumes, d.h. dichten Einbettungen $\iota : X \to K$ in eine kompakten Raum K. Dabei heißt eine Kompaktifizierung $\iota : X \to K$ größer als eine andere $\iota' : X \to K'$, wenn eine stetige Abbildung $q : K \to K'$

existiert mit $q \circ \iota = \iota'$. Die kompakte Menge $q(K)$ umfaßt die dichte Menge $\iota'(X) = q(\iota(X))$ und ist somit K', d.h. q ist eine abgeschlossene Quotienten-Abbildung nach (2.1.9). Daß $\iota : X \to \beta X$ maximal in diesem Sinn ist folgt sofort aus der universellen Eigenschaft von βX.

Bemerkung. Beachte, daß der Abschluß βX von X in $C(X, I)$ auch als Teilraum der Algebra-Homomorphismen $\operatorname{Alg}(C_b(X,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^{C_b(X,\mathbb{R})}$ beschrieben werden kann, wobei $C_b(X,\mathbb{R})$ den Raum der beschränkten stetigen Funktionen bezeichnet. Insbesonders ist ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum X genau dann kompakt, wenn jeder Algebra-Homomorphismus $\varphi : C_b(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine Punktevaluation ev_x für ein $x \in X$ ist.

2.1.16 Beispiel. Es sei α eine Ordinalzahl. Wir betrachten den Raum $[0,\alpha] := \alpha+1$ mit der Ordnungstopologie. Eine Basis der Topologie ist durch (β,γ) oder auch durch $(\beta,\gamma]$ gegeben, denn $(\beta,\gamma] = (\beta,\gamma+1)$ und $(\beta,\gamma) = \bigcup_{\gamma'<\gamma}(\beta,\gamma']$. Es ist $[0,\alpha]$ kompakt, mit den gleichen Beweis wie von (2.1.15). Falls α eine Limesordinalzahl ist, so ist $[0,\alpha)$ offen und dicht in $[0,\alpha]$.

Ist insbesonders $\alpha := \Omega$ die erste überabzählbare Ordinalzahl, dann ist wie wir gleich zeigen werden jede stetige Funktion $f : [0,\Omega) \to [0,1]$ schließlich konstant und läßt sich somit stetig auf $[0,\Omega]$ fortsetzen. Damit ist $[0,\Omega] = \beta[0,\Omega)$. Beachte, daß keine Folge $\beta_n \in [0,\Omega)$ existiert, die gegen Ω konvergiert, denn $\beta_\infty := \min\{\gamma < \Omega : \gamma \ge \beta_n \text{ für alle } n\} = \sup\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \beta_n$ ist abzählbar also $\beta_\infty < \Omega$. Es ist also $[0,\Omega]$ nicht Folgen-erzeugt, denn $[0,\Omega)$ ist Folgen-abgeschlossen und dicht.
Beh.: $\forall n > 0 \exists \beta_n < \Omega \forall \beta_n < \beta < \Omega : |f(\beta) - f(\beta_n)| < \frac{1}{n}$. Daraus folgt sofort, daß f konstant auf $[\beta_\infty, \Omega) := \sup_n \beta_n$ ist.
Indirekt angenommen es existiert ein $n > 0$ und zu jedem $\beta < \Omega$ ein $\beta < \beta' < \Omega$ mit $|f(\beta') - f(\beta)| \ge \frac{1}{n}$. Wir wählen rekursiv eine Folge β_n und β'_n mit $\beta_n < \beta'_n < \beta_{n+1} < \Omega$ und $|f(\beta'_n) - f(\beta_n)| \ge \frac{1}{n}$. Sei $\beta_\infty := \sup_n \beta_n = \sup_n \beta'_n$ Dann gilt offensichtlich $\beta_n \to \beta_\infty$ und $\beta'_n \to \beta_\infty$. Es wäre also $\beta_n, \beta'_n \in f^{-1}(U_{\frac{1}{2n}}(f(\beta_\infty)))$ für fast alle n und somit $|f(\beta_n) - f(\beta'_n)| < \frac{1}{2n}$ ein Widerspruch.

Ist andererseits $\alpha = \omega$ die erste unendliche Ordinalzahl, d.h. $[0,\alpha) = \mathbb{N}$ mit der diskreten Topologie so ist $[0,\alpha] = \mathbb{N}_\infty$ keineswegs die Stone-Čech-Kompaktifizierung $\beta\mathbb{N}$.

In der Tat, nach (1.2.15) ist $I^{C(\mathbb{N},I)}$ separabel. Sei $f : \mathbb{N} \to I^{C(\mathbb{N},I)}$ eine Abbildung mit dichtem Bild. Dann ist die stetige Fortsetzung $\tilde{f} : \beta\mathbb{N} \to I^{C(\mathbb{N},I)}$ surjektiv, und somit die Kardinalität von $\beta\mathbb{N}$ mindestens jene von $I^{C(\mathbb{N},I)}$, also $2^{2^{\mathbb{N}}} \cong 2^{\mathbb{R}}$.

In jede unendliche abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq \beta\mathbb{N}$ ist $\beta\mathbb{N}$ einbettbar: Wir wählen zwei Punkte $a_0 \ne a'_0$ in A und disjunkte Umgebungen U_0 von a_0 und U'_0 von a'_0. Dann liegen nicht fast alle Punkte aus A in beiden Umgebungen, also ist O.B.d.A. $A \setminus U_0$ unendlich. Um nun induktiv fortzufahren wählen wir noch eine offene Umgebung V_0 von a_0 mit $\overline{V_0} \subseteq U_0$. Wenn $a_1, \dots, a_{n-1} \in A$ und disjunkte Umgebungen $V_j, U_j \in \mathcal{U}(a_j)$ mit $\overline{V_j} \subseteq U_j$ für $j < n$ mit $A \setminus \bigcup_{j<n} U_j$ unendlich gewählt sind, so wählen wir wie zuvor ein $a_n \in A \setminus \bigcup_{j<n} U_j$ und eine Umgebung U_n von a_n mit $(A \setminus \bigcup_{j<n} U_j) \setminus U_n = A \setminus \bigcup_{j\le n} U_j$ unendlich. Nun wähle eine Umgebung V_n von a_n mit $\overline{V_n} \subseteq U_n$ und disjunkt von V_j mit $j < n$ (Schneide U_n wenn nötig mit der offenen Menge $\sim \bigcup_{j<n} \overline{V_j}$). Die Abbildung $a : \mathbb{N} \to A$, $n \mapsto a_n$ ist somit eine Einbettung mit Bild $A_0 := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Für jede stetigen Abbildung $f : A_0 \to I$

besitzt

$$f_0(n) := \begin{cases} f(a_k) & \text{für } n \in \mathbb{N} \cap U_k \\ 0 & \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \bigcup_k U_k \end{cases}$$

eine stetige Erweiterung $\widetilde{f_0} : \beta\mathbb{N} \to I$ mit $\widetilde{f_0}$ konstant $f(a_k)$ auf $\overline{U_k} = \overline{\mathbb{N} \cap U_k}$ (siehe Aufgabe (71)), d.h. $\widetilde{f_0}|_{\mathbb{N}} = f$. Somit besitzt $\overline{A_0}$ die universelle Eigenschaft der Stone-Čech-Kompaktifizierung und folglich ist $\beta\mathbb{N} \cong \beta A_0 \cong \overline{A_0} \subseteq A$.

Folglich ist jede konvergente Folge in $\beta\mathbb{N}$ konstant, andernfalls enthielte $\{a_\infty, a_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Mengen $\beta\mathbb{N}$ der Kardinalität $2^{\mathbb{R}}$. Obwohl $\beta\mathbb{N}$ kompakt ist, existieren keine nicht-triviale konvergente Folgen (d.h. $\beta\mathbb{N}$ ist weit davon entfernt Folgen-kompakt zu sein)

Kein $x \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis nicht einmal in $\mathbb{N} \cup \{x\}$, denn andernfalls wäre $\mathbb{N} \cup \{x\}$ Folgen-erzeugt und somit $\mathbb{N}$ abgeschlossen, aber x liegt in $\overline{\mathbb{N}} = \beta\mathbb{N}$.

2.1.17 Proposition (Koprodukte kompakter Räume).
Ein Koprodukt nicht-leerer Räume ist genau dann kompakt, wenn alle Summanden es sind und die Index-Menge endlich ist.

Beweis. Es ist $\{X_j : j \in J\}$ eine offene Überdeckung und $X_j \subseteq \bigsqcup_{j \in J} X_j$ abgeschlossen. $\square$

2.2 Lokal-kompakte Räume

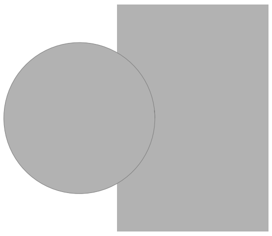
2.2.1 Definition (Lokal-kompakter Raum).
Ein Raum X heißt *lokal-kompakt*, wenn er Hausdorff ist und eine Umgebungsbasis bestehend aus kompakten Umgebungen besitzt.

2.2.2 Lemma. *Ein Raum ist genau dann lokal-kompakt, wenn jeder Punkt eine Umgebung U mit kompaktem Abschluß besitzt. Jeder lokal-kompakte Raum ist $T_{3\frac{1}{2}}$ und jeder kompakte Raum ist lokal-kompakt.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Es sei X lokal-kompakt, dann existiert zu jedem $x \in X$ eine kompakte Umgebung U_x. Da X T_2 vorausgesetzt ist, ist U_x abgeschlossen.

($\Leftarrow$) Es sei $x \in X$ und U eine Umgebung mit kompakten Abschluß. Dann ist $\overline{U}$ T_1 und somit $\{x\}$ abgeschlossen in $\overline{U}$ und damit auch in X, d.h. X ist T_1.

Sei nun $A \subseteq X$ abgeschlossen mit $x \notin A$ und U eine offene Umgebung von x mit kompakten Abschluß wie zuvor. Dann ist $A_0 := (\overline{U} \setminus U) \cup (\overline{U} \cap A)$ abgeschlossen (in $\overline{U}$) und $x \in \overline{U} \setminus A_0$. Also existiert eine stetige Funktion $f : \overline{U} \to I$ mit $f(x) = 1$ und $f|_{A_0} = 0$. Diese kann durch 0 auf $X \setminus U$ stetig auf X fortgesetzt werden, denn $\overline{U} \cap (X \setminus U) = \overline{U} \setminus U \subseteq A_0$.



Also ist X $T_{3\frac{1}{2}}$. Insbesonders besitzt jede Umgebung V von x eine offene Umgebung W mit $\overline{W} \subseteq V$ und somit ist $\overline{W \cap U} \subseteq \overline{W} \subseteq V$ eine Umgebung von x und $\overline{W \cap U} \subseteq \overline{U}$ kompakt. □

2.2.3 Proposition (Trennungseigenschaft in lokal-kompakten Räumen).
Für jede kompakte Menge A eines lokal-kompakten Raums X und jedes offene $V \supseteq A$ existiert eine kompakte Umgebung $U \subseteq V$ von A.

Beweis. Für jedes $a \in A$ existiert eine offene Menge U_a mit kompakten Abschluß $\overline{U_a} \subseteq V$. Die Familie $\{U_a : a \in A\}$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung $\{U_a : a \in A_0\}$ von A und $U := \bigcup_{a \in A_0} U_a$ ist eine Umgebung mit $\overline{U} = \bigcup_{a \in A_0} \overline{U_a} \subseteq V$ und kompakt. □

2.2.4 Proposition (Teilräume lokal-kompakter Räume).
Lokal abgeschlossene Teilräume lokal-kompakter Räume sind lokal-kompakt.

Lokal-kompakte Teilräume von Hausdorff-Räumen sind lokal-abgeschlossen .

Beweis. ($\Rightarrow$) Da die lokal abgeschlossenen Teilräume genau die Durchschnitte $A \cap U$ mit A abgeschlossen und U offen sind, d.h. $A \cap U \subseteq U$ abgeschlossen und $U \subseteq X$ offen ist, genügt zu zeigen, daß offene und abgeschlossene Teilräume lokal-kompakter Räume ebenso lokal-kompakt sind. Für offene Teilräume ist das offensichtlich. Sei andererseits $A \subseteq X$ abgeschlossen und $a \in A$ dann existiert eine Umgebung U in X mit kompaktem Abschluß. Die Spur $U_a := U \cap A$ ist dann eine Umgebung von $a \in A$ und der Abschluß $\overline{U_a}^A = \overline{U_a} \cap A \subseteq \overline{U} \cap A$ ist kompakt.

($\Leftarrow$) Es sei $Y \subseteq X$ lokal-kompakt. Wir wollen zeigen, daß Y in $\overline{Y}$ offen ist, sei also o.B.d.A. $X = \overline{Y}$. Sei $y \in Y$ und $U \subseteq Y$ eine offene Umgebung in Y mit $\overline{U}^Y = \overline{U} \cap Y$ kompakt und somit abgeschlossen auch in X nach (2.1.6). Wegen $U \subseteq \overline{U} \cap Y$ ist somit $\overline{U} \subseteq \overline{U} \cap Y \subseteq Y$. Sei $\tilde{U} \subseteq X$ offen mit $U = \tilde{U} \cap Y$, dann ist $x \in U \subseteq \tilde{U} \subseteq \overline{\tilde{U}} \overset{!}{=} \overline{\tilde{U} \cap Y} = \overline{U} \subseteq Y$ nach Aufgabe (71), da Y in X dicht liegt. □

2.2.5 Theorem über Alexandroff 1-Punkt Kompaktifizierung.
Ein topologischer Raum ist lokal-kompakt genau dann, wenn er als offener (dichter) Teilraum eines kompakten Raums einbettbar ist. Die Alexandroff-Kompaktifizierung eines lokal-kompakten Raumes X ist $\beta X/(\beta X \setminus X)$. Dies ist die kleinste aller Kompaktifizierungen. Falls X lokal-kompakt aber nicht kompakt ist, so kann $\beta X/(\beta X \setminus X)$ auch als $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ beschreiben werden, wobei $X \subseteq X_\infty$ ein offener Teilraum ist und die offenen Umgebungen von ∞ gerade die Komplemente der kompakten Teilmengen von X sind.

Beweis. ($\Rightarrow$) Es sei X lokal-kompakt und somit $T_{3\frac{1}{2}}$ nach (2.2.2). Dann ist X in βX eingebettet, und somit lokal-abgeschlossen in βX nach (2.2.4), d.h. offen im Abschluß βX von X.

($\Leftarrow$) Es sei umgekehrt $X \subseteq Y$ offen in einem kompakten Raum, dann ist X lokal-abgeschlossen und somit lokal-kompakt nach (2.2.4).

Es sei X lokal-kompakt und o.B.d.A. nicht kompakt. Dann ist $X \subset \beta X$ offen und die $X_\infty := \beta X/\beta X \setminus X$ definierende Äquivalenz-Relation ist abgeschlossen, also $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ kompakt, wobei ∞ die Äquivalenzklasse $\beta X \setminus X$ bezeichnet, und $\pi : \beta X \to X_\infty$ eine abgeschlossene Quotienten-Abbildung. Nach Proseminar-Beispiel (56) ist $X \to X_\infty$ eine offene Einbettung da $X \subseteq \beta X$ offen ist.

Falls $K \subseteq X$ kompakt ist, so ist $K \subseteq \beta X$ abgeschlossen und damit $\pi(K) \subseteq X_\infty$ ebenfalls abgeschlossen, d.h. $X_\infty \setminus K$ eine offene Umgebung von $\infty := \pi(\beta X \setminus X)$. Umgekehrt sei U solch eine Umgebung. Dann ist $\pi^{-1}(U) \subseteq \beta X$ offen mit $\beta X \setminus X \subseteq \pi^{-1}(U)$, d.h. $K := \beta X \setminus \pi^{-1}(U) \subseteq X$ ist kompakt und $U = X_\infty \setminus K$.

Man kann diese Beschreibung auch direkt benutzen um (die kompakte Topologie auf) X_∞ zu konstruieren.

Die Alexandroff-Kompaktifizierung ist minimal, denn sei $f : X \to Y$ eine dichte Einbettung in einen kompakten Raum Y. Wir Identifizieren X mit seinen Bild $f(X)$ in Y Es sei $q|_X$ die Inklusion von X in X_∞ und $q|_{Y \setminus X} = \infty$. Dann ist q ist stetig, denn für $y \in X$ ist q lokal die stetige Inklusion $X \hookrightarrow X_\infty$ und für $K \subseteq X$ kompakt ist $q^{-1}(X_\infty \setminus K) = (Y \setminus X) \cup (X \setminus K) = Y \setminus K$ offen. □

2.2.6 Proposition (Koprodukte lokal-kompakter Räume).
Ein Koprodukt ist genau dann lokal-kompakt, wenn es alle Summanden sind.

Beweis. Denn $\bigsqcup_j X_j$ ist lokal homöomorph zu X_j. □

2.2.7 Proposition (Produkte lokal-kompakter Räume).
Ein Produkt nicht-leerer Räume ist genau dann lokal-kompakt, wenn alle Faktoren lokal-kompakt sind und dabei fast alle kompakt sind.

Beweis. Es sei $U := \prod_j U_j$ eine offene Umgebung von $(x_j)_j$ mit $U_j \subseteq X_j$ offen und $U_j = X_j$ für fast alle j. Die Menge U hat genau dann kompakten Abschluß $\prod_j \overline{U_j}$, wenn $\overline{U_j}$ kompakt in X_j ist und somit für fast alle j insbesonders $X_j = \overline{U_j}$ kompakt ist. □

2.2.8 Proposition (Bilder lokal-kompakter Räume).
Es sei X lokal-kompakt, Y Hausdorff und $f : X \to Y$ eine stetige surjektive offene Abbildung. Dann ist auch Y lokal-kompakt.

Beweis. Das Bild eine offenen Umgebung von $x \in X$ mit kompakten Abschluß ist nach (2.1.7) eine Umgebung von $f(x)$ mit kompakten Abschluß. □

2.2.9 Theorem von Whitehead.
Es sei X lokal-kompakt und $g : Y \to Z$ eine Quotienten-Abbildung. Dann ist auch $X \times g : X \times Y \to X \times Z$ eine Quotienten-Abbildung.

Beweis. Es sei $(x_0, z_0) \in W \subseteq X \times Z$ mit $f^{-1}(W) \subseteq X \times Y$ offen, wobei $f := X \times g$. Wir wählen $y_0 \in g^{-1}(z_0)$ und $U \in \mathcal{U}(x_0)$ kompakt mit $U \times \{y_0\} \subseteq f^{-1}(W)$ nach (2.1.11). Da $f^{-1}(W)$ saturiert ist, ist $U \times g^{-1}(g(y)) \subseteq f^{-1}(W)$ falls $U \times \{y\} \subseteq f^{-1}(W)$. Insbesonders ist $U \times g^{-1}(z_0) \subseteq f^{-1}(W)$. Es sei $V := \{z \in Z : U \times g^{-1}(z) \subseteq f^{-1}(W)\}$. Dann ist $(x_0, z_0) \in U \times V \subseteq W$ und V ist offen, denn $g^{-1}(V) := \{y \in Y : U \times \{y\} \subseteq f^{-1}(W)\}$ ist nach (2.1.11) offen. □

2.3 Kompakt-erzeugte Räume oder auch Kelley-Räume

2.3.1 Definition (Kelley-Raum).
Ein Raum heißt *k-Raum* oder *Kelley-Raum* oder *kompakt-erzeugt* falls er Hausdorff ist und die finale Topologie bzgl. der Inklusionen seiner kompakten Teilmengen trägt (oder auch bzgl. aller stetiger Abbildungen von kompakten Mengen) Offensichtlich ist jeder Folgen-erzeugte T_2-Raum X kompakt erzeugt, denn das Bild jeder konvergenten Folge zusammen mit ihrem Grenzwert ist kompakt und $B \subseteq X$ ist genau dann Folgen-erzeugt, wenn $B \cap A$ in $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_\infty\}$ abgeschlossen ist für konvergente Folgen $a_n \to a_\infty$.

Beispiele. In [E:3.3.24] befindet sich das Beispiel eines k-Raumes

$$(\mathbb{N}_\infty \times (\mathbb{R}, \text{diskret})_\infty \setminus \{(\infty,\infty)\})/(\mathbb{N} \times \{\infty\})$$

der nicht T_3 ist. Und in [E:3.3.24] ist ein $T_{4\frac{2}{3}}$-Raum angegeben, der nicht k-Raum ist.

Schließlich ist $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ nicht lokal-kompakt, aber k-erzeugt, wie wir gleich sehen werden.

2.3.2 Proposition. *Ein Hausdorff-Raum ist genau dann ein k-Raum, wenn er ein Quotient eines lokal-kompakten Raumes ist.*

Insbesonders ist jeder lokal-kompakte Raum ein k-Raum.

Beweis. ($\Leftarrow$) Topologische Räume tragen die finale Topologie bzgl. ihrer Umgebungsbasen. Somit ist jeder lokal-kompakte Raum ein k-Raum und auch jeder Hausdorff-Quotient, da nach (2.1.7) Hausdorff-Bilder kompakter Mengen kompakt sind.

($\Rightarrow$) Sei X ein k-Raum. Dann ist X ein Hausdorff-Quotient von $Y := \coprod\{K : K \subseteq X \text{ kompakt}\}$ und Y ist offensichtlich lokal-kompakt. □

2.3.3 Folgerung (Erblichkeit von k-Räumen).
Hausdorff-Quotienten von k-Räumen sind k-Räume. Ebenso offene bzw. abgeschlossene Teilräume. Und auch Koprodukte.

Beweis. Für Quotienten folgt dies aus (2.3.2). Für Koprodukte, da $\coprod_j X_j$ die finale Struktur der X_j trägt und diese ihrerseits die finale Struktur bzgl. der kompakten Teilmengen in X_j. Für abgeschlossene/offene Teilräume folgt dies ebenfalls aus (2.3.2), denn sei $\pi : X_0 \to X$ eine Quotienten-Darstellung eine k-Raumes X mittels eines lokal-kompakten Raumes X_0. Weiters sei $Y \subseteq X$ offen/abgeschlossen. Dann ist $\pi|_{\pi^{-1}(Y)} : \pi^{-1}(Y) \to Y$ eine Quotienten-Abbildung nach Proseminar-Beispiel (54) und $\pi^{-1}(Y)$ ist offen/abgeschlossen in einem lokal-kompakten Raum also selbst lokal-kompakt nach (2.2.4). Folglich ist Y ein k-Raum nach (2.3.2). □

2.3.4 Folgerung (Produkte von k-Räumen).
Es sei X lokal-kompakt und Y ein k-Raum. Dann ist auch $X \times Y$ ein k-Raum.

Beweis. Es sei $Y_0 \to Y$ eine Quotienten-Abbildung mit Y_0 lokal-kompakt. Nach (2.2.9) ist $X \times Y_0 \to X \times Y$ eine Quotienten-Abbildung und $X \times Y_0$ ist lokal-kompakt, also ist $X \times Y$ ein k-Raum nach (2.3.2). □

2.3.5 Folgerung (Stetige Abbildungen zwischen k-Räumen).
Es sei X ein k-Raum.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn ihre Einschränkungen $f|_K : K \to Y$ auf kompakte Teilmengen $K \subseteq X$ es sind.

Falls $f : Y \to X$ stetig ist, so ist f genau dann offen/abgeschlossen/Quotienten-Abbildungen wenn $f_K := f|_{f^{-1}(K)} : f^{-1}(K) \to K$ es ist für alle kompakten $K \subseteq X$.

Beweis. Der erste Teil ist wegen der Finalität der Topologie klar.

Die Richtungen ($\Rightarrow$) sind ebenfalls evident. Umgekehrt sei $f : Y \to X$ eine stetige Abbildung in einen k-Raum X. Und f_K sei offen/abgeschlossen. Es sei $B \subseteq Y$ offen/abgeschlossen. Dann ist $f(B) \cap K = f(B \cap f^{-1}(K)) = f_K(B)$ offen/abgeschlossen in K und somit $f(B)$ offen/abgeschlossen.

Nun sei f_K eine Quotienten-Abbildung für alle kompakten $K \subseteq X$. Und sei $A \subseteq X$ mit $f^{-1}(A)$ abgeschlossen. Dann ist $f_K^{-1}(A \cap K) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(K)$ abgeschlossen in $f^{-1}(K)$ und somit $A \cap K$ abgeschlossen in K, also A abgeschlossen in X. □

2.3.6 Folgerung (Produkte von Quotienten-Abbildungen).
Es sei $g : Y \to Z$ eine Quotienten-Abbildung und $X \times Z$ ein k-Raum. Dann ist $X \times g : X \times Y \to X \times Z$ eine Quotienten-Abbildung.

Beweis. Es sei $f := X \times g : X \times Y \to X \times Z$. Alle kompakten Teilmengen in $X \times Z$ sind enthalten in Mengen der Form $K \times L$ mit $K \subseteq X$ kompakt und $L \subseteq Z$ kompakt. Es ist $f|_{f^{-1}(K \times L)} : K \times g^{-1}(L) \to K \times L$ eine Quotienten-Abbildung nach (2.2.9) und somit f eine Quotienten-Abbildung nach (2.3.5). □

2.3.7 Beispiel. Produkte von k-Räumen sind nicht immer k-Räume.
In (1.2.12) haben wir $X \times \pi : X \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}/\mathbb{N}$ betrachtet und gezeigt, daß dies keine Quotienten-Abbildung ist. Da $\mathbb{R}$ lokal-kompakt ist, ist $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ ein k-Raum und $X \subseteq \mathbb{R}$ ist metrisierbar, also Folgen-erzeugt und somit ebenfalls ein k-Raum. Wegen (2.3.6) kann aber $X \times \mathbb{R}/\mathbb{N}$ kein k-Raum sein.

2.3.8 Proposition über die Kelley-fizierung.
Es sei X ein T_2-Raum. Mit kX bezeichnen wir die Menge X zusammen mit der bzgl. $\{K \hookrightarrow X : K \subseteq X,\ \text{kompakt}\}$ finalen Topologie. Dann ist kX ein k-Raum mit den gleichen kompakten Mengen wie X und die Identität $kX \to X$ ist stetig und besitzt folgende universelle Eigenschaft: Jede stetige Abbildung $f : Y \to X$ auf einem k-Raum Y ist ebenfalls stetig von $Y \to kX$.

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & X \\
& Y \arrow[ul, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis.

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[rr, tail, two heads] & & X \\
& f(L) = K \arrow[ul, dashed] \arrow[ur, hook] & \\
L \arrow[uu, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[ur, "f|_L"'] \arrow[rr, hook] & & Y \arrow[uu, "f"']
\end{tikzcd}$$

Offensichtlich trägt kX eine feinere Topologie als X und somit ist auch kX Hausdorff und $\mathrm{id} : kX \to X$ stetig. Klarerweise besitzt X und kX die selben kompakten Teilmengen und somit ist kX ein k-Raum. Sei $f : Y \to X$ stetig und Y ein k-Raum. Um die Stetigkeit von $f : Y \to kX$ zu zeigen, genügt nach (2.3.5) die Stetigkeit von $f|_L : L \to kX$ für alle kompakten $L \subseteq Y$ nachzuweisen. Es ist aber $K := f(L)$ kompakt nach (2.1.7) und somit $f|_L : L \to f(L) = K \to kX$ stetig. □

2.4 Funktionenräume

Falls X und Y topologische Räume sind, so wollen wir auch den Raum $C(X, Y)$ aller stetiger Abbildungen von X nach Y zu einem topologischen Raum machen.

Eine Möglichkeit ist, diesen als Teilraum von $Y^X := \prod_{x \in X} Y$ aufzufassen, d.h. mit der *Topologie der punktweisen Konvergenz* zu versehen, siehe auch (1.2.10), (1.2.15), (1.3.10) und Proseminar-Beispielen (6), (39), (61), (62), (68) und (79). Er ist dann allerdings nicht abgeschlossen, denn ein punktweiser Grenzwert stetiger Funktionen ist nicht immer stetig.

Im Falle eines uniformen Raumes Y ist eine andere Möglichkeit die *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz* zu verwenden, siehe Proseminar-Beispiele (3), (31) und (45). Dies ist im allgemeinen eine echt feinere Topologie, allerdings gilt folgende partielle Umkehrung:

2.4.1 Theorem von Dini.
Es sei X kompakt und $f_n \in C(X, \mathbb{R})$ mit $f_n \leq f_{n+1}$. Falls f_n punktweise gegen ein stetiges f_∞ konvergiert, so ist die Konvergenz gleichmäßig.

Beweis. Es sei f_∞ der punktweise Grenzwert. Für $\varepsilon > 0$ sind die Mengen $A_n := \{x : f_\infty(x) - f_n(x) \geq \varepsilon\}$ abgeschlossen (da $f_\infty - f_n$ stetig ist) und monoton abnehmend (da $f_n \leq f_{n+1}$) mit $\bigcap_n A_n = \emptyset$ (da $f_n(x) \to f_\infty(x)$). Da X kompakt ist, muß die endliche Durchschnittseigenschaft verletzt sein, d.h. $\exists n_0$: $A_{n_0} = \emptyset$, also $f_\infty(x) - \varepsilon < f_{n_0}(x) \leq f_n(x) \leq f_\infty(x)$ für alle $x \in X$ und $n \geq n_0$, d.h. $f_n \to f_\infty$ gleichmäßig. □

Die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz ist aber im allgemeinen zu fein, denn z.B. konvergieren Potenzreihe im allgemeinen nicht gleichmäßig auf ihrem Definitionsbereich, sondern nur auf kompakten Teilen im Inneren. Dies führt dazu folgende Definition zu geben:

2.4.2 Definition (Kompakt-offene Topologie).
Unter der *kompakt-offenen Topologie* auf $C(X,Y)$ verstehen wir die Topologie gegeben durch die Subbasis gebildet aus den Mengen $M(K,U) := \{f : f(K) \subseteq U\}$ mit $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq Y$ offen, vgl. mit den Proseminar-Beispielen (19) und (24).

2.4.3 Approximation stetiger Abbildungen.
Es sei X ein topologischer Raum. Dann ist $C(X,\mathbb{R})$ eine *Algebra*, d.h. ein reeller Vektorraum (bzgl. $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$ und $\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda \cdot f(x)$) zusammen mit einer assoziativen und bilinearen Multiplikation (und zwar $C(X,\mathbb{R}) \times C(X,\mathbb{R}) \to C(X,\mathbb{R})$, $(f,g) \mapsto f \cdot g(: x \mapsto f(x)\cdot g(x)))$ mit neutralem Element (nämlich $1 : x \mapsto 1$).

Satz von Stone & Weierstraß.
Jede Punkte-trennende Teilalgebra von $C(X,\mathbb{R})$ die 1 enthält ist dicht in $C(X,\mathbb{R})$.

Insbesonders ist der Raum der Polynome in m-Variablen dicht in $C(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$.

Beweis.

Beh. Es existiert ein Folge von Polynomen, die gegen $\sqrt{} : [0,1] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.
Wir definieren rekursive $p_0 := 0$, $p_{n+1:} = p_n + \frac{1}{2}(\mathrm{id} - p_n^2)$ und zeigen mittels Induktion $0 \le p_n(t) \le p_{n+1}(t) \le \sqrt{t}$. Es ist

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) = \sqrt{t} - p_n(t) - \frac{1}{2}(t - p_n^2(t)) = \underbrace{(\sqrt{t} - p_n(t))}_{\ge 0}(1 - \frac{1}{2}\underbrace{(\sqrt{t} + \overbrace{p_n(t)}^{\le\sqrt{t}})}_{\le 2}) \ge 0$$

und somit ist $p_{n+1} = p_n + \frac{1}{2}(\mathrm{id} - p_n^2) \ge p_n$. Folglich ist $p_n(t)$ konvergent. Sei $p_\infty(t) := \lim_{n\to\infty} p_n(t)$. Dann ist $p_\infty(t) = p_\infty(t) + \frac{1}{2}(t - p_\infty(t)^2)$, also $p_\infty(t) = \sqrt{t}$.

Es sei A der Abschluß der Teilalgebra und vorerst X kompakt.

Beh. Falls $0 \le f \in A$, so ist auch $\sqrt{f} \in A$:
Denn f ist beschränkt (durch $K < \infty$) und somit $\sqrt{f} = \sqrt{K} \cdot \sqrt{\frac{f}{K}}$, d.h. o.B.d.A. $\|f\|_\infty \le 1$. Dann ist $\sqrt{f} = \lim_{n\to\infty} p_n \circ f \in A$.

Beh. Mit $f,g \in A$ sind auch $|f|, \max\{f,g\}, \min\{f,g\} \in A$:
Denn $|f| = \sqrt{f^2}$, $\max\{f,g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ und $\min\{f,g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2}$.

Beh. Für $x_1 \ne x_0$ und $y_1, y_0 \in \mathbb{R}$ existiert ein $f \in A$ mit $f(x_i) = y_i$ für $i = 1,2$:
Da A Punkte-trennend ist, existiert ein $h \in A$ mit $h(x_1) \ne h(x_0)$. Dann erfüllt aber die Zusammensetzung $x \mapsto f(x) := y_0 \frac{h(x)-h(x_1)}{h(x_0)-h(x_1)} + y_1 \frac{h(x)-h(x_0)}{h(x_1)-h(x_0)}$ von h mit der affinen Funktion $t \mapsto y_0 \frac{t-h(x_1)}{h(x_0)-h(x_1)} + y_1 \frac{t-h(x_0)}{h(x_1)-h(x_0)}$, die $h(x_i) = y_i$ erfüllt, das Gewünschte.

Beh. Für $f \in C(X,\mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $h \in A$ mit $\|f - h\| \le \varepsilon$:
Für $x, y \in X$ existiert nach der letzten Behauptung ein $f_{x,y} \in A$, welches auf $\{x,y\}$

mit f übereinstimmt (Falls $x = y$ ist, so sei $f_{x,y}$ konstant gleich $f(x) = f(y)$). Da $f_{x,y} - f$ bei y verschwindet, existiert eine Umgebung U_y von y mit $f_{x,y}(z) - f(z) < \varepsilon$ für $z \in U_y$. Da X kompakt ist, überdecken endlich viele $U_{y_1}, \dots, U_{y_n}$ ganz X. Es sei $f_x := \min\{f_{x,y_1}, \dots, f_{x,y_n}\} \in A$. Dann gilt $f_x(x) = f(x)$ und $f_x(z) \le f_{x,y_i}(z) < f(z) + \varepsilon$, wobei i so gewählt wurde, daß $z \in U_{y_i}$. Es existiert somit eine Umgebung U_x von x mit $f_x(z) - f(z) > -\varepsilon$ für alle $z \in U_x$. Da X kompakt ist überdecken auch endlich viele $U_{x_1}, \dots, U_{x_m}$ ganz X. Sei schließlich $h := \max\{f_{x_1}, \dots, f_{x_m}\} \in A$. Dann ist $f(z) - \varepsilon < h(z) < f(z) + \varepsilon$ für alle $z \in X$, und somit $\|h - f\| \le \varepsilon$.

Beh. Der Satz gilt auch für beliebiges X. Denn sei $f \in C(X, \mathbb{R})$ und $K \subseteq X$ kompakt, $\varepsilon > 0$. Wir müssen die Existenz eines g in der Teilalgebra zeigen mit $\|(f - g)|_K\|_\infty < \varepsilon$. Dazu betrachten wir den Algebra-Homomorphismus $\mathrm{incl}^* : C(X, \mathbb{R}) \to C(K, \mathbb{R})$. Das Bild der Teil-Algebra ist eine Punkte-trennende Teilalgebra in $C(K, \mathbb{R})$, also existiert ein g in der Teilalgebra mit $\|f|K - g|_K\|_\infty < \varepsilon$. $\square$

Exponentialgesetze.

2.4.4 Lemma ($C(\_,\_)$ als Funktor).
Es sei $f : X \to Y$ stetig. Dann ist $f_* : C(Z, X) \to C(Z, Y)$, $g \mapsto f \circ g$ und für T_2-Räume Z auch $f^* : C(Y, Z) \to C(X, Z)$, $h \mapsto h \circ f$ stetig bzgl. den kompakt-offenen Topologien.

Beweis.

$$(f_*)^{-1}(N_{K,U}) = \{g : (f \circ g)(K) \subseteq U\} = \{g : g(K) \subseteq f^{-1}(U)\} = N_{K, f^{-1}(U)}$$
$$(f^*)^{-1}(N_{K,U}) = \{h : (h \circ f)(K) \subseteq U\} = \{h : f(K) \subseteq U\} = N_{f(K),U} \quad \square$$

Für diskretes Z haben wir Homöomorphismen $C(Z, X) \cong X^Z$ sowie $C(Z, Y) \cong Y^Z$ und f_* entspricht gerade dem Produkt $\prod_{z \in Z} f =: f^Z$:

$$\begin{tikzcd} C(Z,X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, equal] & C(Z,Y) \arrow[d, equal] \\ X^Z \arrow[r, "f^Z"] & Y^Z \end{tikzcd}$$

Entsprechend ist für diskretes X und Y die Abbildung f^* gerade Z^f, die Abbildung die nur die Koordinaten entsprechend f umparametrisiert:

$$\begin{tikzcd} C(Y,Z) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, equal] & C(X,Z) \arrow[d, equal] \\ Z^Y \arrow[r, "Z^f"] & Z^X \end{tikzcd}$$

Für die Produkt-Topologie haben wir folgenden Homöomorphismen:

$$(Z^Y)^X \cong Z^{X \times Y}, \quad ((f_{x,y})_{y \in Y})_{x \in X} \hat{=} (f_{(x,y)})_{(x,y) \in X \times Y};$$

Wir hätten das gerne auch für Räume stetiger Abbildungen, d.h. einen Homöomorphismus $C(X, C(Y, Z)) \cong C(X \times Y, Z)$ der durch $g \mapsto g\hat{}: (x, y) \mapsto g(x)(y)$ und

$f \mapsto \check{f} : x \mapsto (y \mapsto f(x,y))$ gegeben ist. Beachte, daß wir vermöge der Abbildungen $\mathrm{ev} : C(X,Y) \times X \to Y$, $(f,x) \mapsto f(x)$ und $\mathrm{ins} : Z \to C(X, Z \times X)$, $z \mapsto (x \mapsto (z,x))$ folgende Darstellungen von $g\hat{}$ und $\check{f}$ haben:

$$\begin{tikzcd} Z \times X \arrow[rr, "g\hat{}"] \arrow[dr, "g \times X"'] & & Y \\ & C(X,Y) \times X \arrow[ur, "\mathrm{ev}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "\check{f}"] \arrow[dr, "\mathrm{ins}"'] & & C(X,Y) \\ & C(X, Z \times X) \arrow[ur, "f_*"'] & \end{tikzcd}$$

2.4.5 Proposition (Stetigkeit von $f^\vee$).
Es sei $f : X \times Y \to Z$ stetig. Dann ist $f^\vee : X \to C(Y,Z)$, $f^\vee(z)(x) := f(z,x)$ stetig bzgl. der kompakt-offenen Topologie auf $C(Y,Z)$.

Beweis. Nach obiger Bemerkung genügt es die Stetigkeit der Insertionsabbildung $\mathrm{ins} : X \to C(Y, X \times Y)$, $z \mapsto (x \mapsto (z,x))$ nachzuweisen. Sei dazu $\mathrm{ins}(z) \in N_{K,U}$ mit $K \subseteq Y$ kompakt und $U \subseteq X \times Y$ offen, d.h. $\{z\} \times K \subseteq U$ und nach (2.1.11) existiert eine offene Umgebung W von z mit $W \times K \subseteq U$, d.h. $\mathrm{ins}(W) \in N_{K,U}$.

2.ter direkter Beweis: Es sei $f^\vee(z) \in N_{K,U}$, d.h. $f(\{z\} \times K) \subseteq U$. Nach (2.1.11) existieren offene Mengen $U_z \ni z$ und $U_K \supseteq K$ mit $f(U_z \times U_K) \subseteq U$, also insbesonders $f^\vee(z') \in N_{K,U}$ für alle $z' \in U_z$. $\square$

2.4.6 Proposition (Stetigkeit von $^\vee$).
Für T_2-Räume X und Y und beliebigen Z ist $^\vee : C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y,Z))$ eine Einbettung.

Beweis.

Sublemma. *Es sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung eines kompakten Raumes X. Dann existiert eine Überdeckung $\{K_U : U \in \mathcal{U}\}$ von X mit kompakten Mengen $K_U \subseteq U$ für alle $U \in \mathcal{U}$.*

Beweis des Sublemmas. Für jedes $x \in X$ wählen wir $U_x \in \mathcal{U}$ mit $x \in U_x$ und ein offenes V_x mit $x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$. Da X kompakt ist besitzt die Überdeckung $\{V_x : x \in X\}$ eine endliche Teilüberdeckung $\{V_x ; x \in X_0\}$. Für $U \in \mathcal{U}$ sei $K_U := \bigcup\{\overline{V_x} : x \in X_0,\ U_x = U\}$. Dann ist K_U als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen und somit kompakt, $K_U \subseteq U$ und $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} K_U = \bigcup_{x \in X_0} \overline{V_x} = X$. $\square$

Beh.: Es sei $\mathcal{U}$ eine Subbasis von Z, dann bilden die $N_{K,U}$ mit $U \in \mathcal{U}$ und $K \subseteq X$ kompakt eine Subbasis von $C(X,Z)$.
Sei nämlich $f \in N_{K,O}$ mit $K \subseteq Y$ kompakt und $O \subseteq Z$ offen. Dann ist $f(K) \subseteq O$ und da $\mathcal{U}$ eine Subbasis ist existiert für jedes $x \in K$ eine endliche Teilmenge $\mathcal{O}_x \subseteq \mathcal{O}$ mit $f(x) \in \bigcap \mathcal{O}_x \subseteq O$. Die Mengen $f^{-1}(\bigcap \mathcal{O}_x)$ für $x \in K$ überdecken die kompakte Menge K, also reichen endlich viele $x \in X_0$ aus. Wir wählen dazu nach

dem Sublemma kompakte Teilmengen $K_x \subseteq f^{-1}(\bigcap \mathcal{O}_x)$ die K überdecken. Dann ist $f \in \bigcap_{x\in X_0, O\in\mathcal{O}_x} N_{K_x,O} \subseteq N_{K,O}$, denn für $f(K_x) \subseteq \bigcap O_x$ und $g(K_x) \subseteq O$ für alle $x \in X_0$ und $O \in \mathcal{O}_x$ impliziert, daß $g(K) \subseteq O$, da zu $\bar{x} \in K$ ein $x \in X_0$ existiert mit $\bar{x} \in K_x$ und folglich $g(\bar{x}) \in g(K_x) \subseteq \bigcap \mathcal{O}_x \subseteq O$ gilt.

Beh.: $^\vee$ ist stetig.
Offensichtlich ist $(^\vee)^{-1}(N_{K_1,N_{K_2,O}}) = N_{K_1\times K_2,O}$ und nach der vorigen Behauptung bilden die $N_{K_1,N_{K_2,O}}$ mit $K_1 \subseteq X$ kompakt, $K_2 \subseteq Y$ kompakt und $O \subseteq Z$ offen eine Subbasis.

Beh.: $^\vee$ ist initial.
Nach der vorigen Behauptung bilden die Mengen

$$\{N_{K_1\times K_2,O} : K_1 \subseteq X \text{ kompakt}, K_2 \subseteq Y \text{ kompakt und } O \subseteq Z \text{ offen}\}$$

eine Subbasis der initialen Topologie auf $C(X \times Y, Z)$. Bleibt zu zeigen, daß diese auch eine Subbasis der kompakt-offenen Topologie bilden. Sei dazu $K \subseteq X \times Y$ kompakt und $O \subseteq Z$ offen mit $f(K) \subseteq O$. Dann existieren endlich viele offene Mengen W_i und V_i mit $K \subseteq \bigcup_i W_i \times V_i \subseteq f^{-1}(O)$ und nach dem Sublemma finden wir eine Überdeckung von K bestehend aus kompakten Mengen $K_i \subseteq W_i \times V_i$. Da X und Y Hausdorff sind, ist $\mathrm{pr}_X(K_i)$ und $\mathrm{pr}_Y(K_i)$ kompakt und $f \in \bigcap_i N_{\mathrm{pr}_X(K_i)\times \mathrm{pr}_Y(K_i),O} \subseteq N_{K,O}$, denn $f(\mathrm{pr}_X(K_i) \times \mathrm{pr}_Y(K_i)) \subseteq f(U_i \times V_i) \subseteq O$ und aus $g(\mathrm{pr}_X(K_i) \times \mathrm{pr}_Y(K_i)) \subseteq O$ für alle i folgt $g(K) = \bigcup_i g(K_i) \subseteq O$. □

2.4.7 Proposition (Stetigkeit von $g\hat{}$).
Es sei Y lokal-kompakt und $g : X \to C(Y, Z)$ stetig bzgl. der kompakt-offenen Topologie. Dann ist $g\hat{}: X \times Y \to Z$, $g\hat{}(z, x) := g(z)(x)$ stetig.

Beweis. Nach obiger Bemerkung genügt es die Stetigkeit von $\mathrm{ev} : C(Y, Z)\times Y \to Z$ nachzuweisen. Sei dazu $U \subseteq Z$ offen und $(f, x) \in C(Y, Z) \times Y$ mit $f(x) = \mathrm{ev}(f, x) \in U$. Dann existiert eine kompakte Umgebung K von x mit $K \subseteq f^{-1}(U)$ und somit ist $(f, x) \in N_{K,U} \times U \subseteq \mathrm{ev}^{-1}(U)$.

2.ter direkter Beweis: Sei $g\hat{}(z, x) \in V$. Da $g(z)$ stetig ist und Y lokal-kompakt ist existiert eine kompakte Umgebung U_x von x mit $g(z)(U_x) \subseteq V$. Da g stetig ist, existiert eine Umgebung W_z von z mit $g(W_z) \subseteq N_{U_x,V}$, also $g\hat{}(W_x \times U_x) \subseteq V$. □

2.4.8 Folgerung (Exponentialgesetz).
Falls Y lokal-kompakt und X Hausdorff ist, so haben wir einen Homöomorphismus

$$C(X, C(Y, Z)) \cong C(X \times Y, Z).$$

Insbesonders ist dann die Evaluation $\mathrm{ev} : C(Y, Z) \times Y \to Z$ *stetig.*

Die Komposition $\mathrm{komp} : C(Y, Z) \times C(X, Y) \to C(X, Z)$ *ist stetig, falls X und Y lokal-kompakt sind.*

Beweis. Der erste Teil folgt aus (2.4.6) und (2.4.7).

Die Aussage über ev haben wir in (2.4.7) gezeigt. Sie folgt aber auch nachträglich aus $\mathrm{ev} = \widehat{\mathrm{id}_{C(X,Y)}}$ mittels (2.4.7).

Es ist $\mathrm{komp} = f^\vee$, wobei $f = \mathrm{ev} \circ (C(Y, Z) \times \mathrm{ev}) : C(Y, Z) \times C(X, Y) \times X \to C(Y, Z) \times Y \to Z$ ist. □

2.4.9 Folgerung (Exponentialgesetz für kompakt-stetige Abbildungen). *Für Hausdorff-Räume X und Y haben wir einen Homöomorphismus*

$$C_k(X \times Y, Z) \cong C_k(X, C_k(Y, Z)),$$

wobei $C_k(Y, Z)$ den Raum aller $f : Y \to Z$, die auf allen kompakten $K \subseteq Y$ stetig sind mit der kompakt-offenen Topologie bezeichnet. Es ist

$$C_k(Y, Z) = C(kY, Z)$$

und somit

$$C(k(X \times Y), Z) \cong C(kX, C(kY, Z))$$

oder

$$kC(kX \times_k kY, kZ) \cong kC(kX, kC(kY, kZ)),$$

wobei $X \times_k Y := k(X \times Y)$ und $kC(X, Y) := k(C(X, Y))$ bezeichnet.

Ist insbesonders $X \times Y$ ein k-Raum, dann sind auch X und Y k-Räume und somit ist

$$C(X \times Y, Z) \cong C(X, C(Y, Z)).$$

Beweis. Es ist $f \in C_k(X \times Y, Z)$ genau dann, wenn $f|_{K \times L} : K \times L \to Z$ stetig ist für alle kompakten $K \subseteq X$ und $L \subseteq Y$, also nach (2.4.8) wenn $(f|_{K \times L})^\vee : K \to C(L, Z)$ stetig ist, oder äquivalent, wenn $f^\vee|_K : K \to C_k(Y, Z)$ stetig ist für alle kompakten $K \subseteq X$, d.h. $f^\vee \in C_k(X, C_k(Y, Z))$.

Da Y und kY die selben kompakten Teilmengen hat ist $C_k(Y, Z) = C_k(kY, Z) = C(kY, Z)$.

Folglich ist

$$C(k(X \times Y), Z) = C_k(X \times Y, Z) \cong C_k(X, C_k(Y, Z)) = C(kX, C(kY, Z))$$

und somit – wegen $kC(kX, Z) = kC(kX, kZ)$ – auch

$$\begin{aligned} kC(kX \times_k kY, kZ) = kC(k(X \times Y), Z) \cong \\ \cong kC(kX, C(kY, Z)) = kC(kX, kC(kY, kZ)), \end{aligned}$$

Direkter Beweis des letzten Resultates. Es genügt Surjektivität zu zeigen. Sei dazu $g : X \to C(Y, Z)$ stetig. Für die Stetigkeit von $g\hat{}: X \times Y \to Z$ genügt - da $X \times Y$ als k-Raum vorausgesetzt ist – jene von $g\hat{}|_{K \times L} : K \times L \to Z$ für kompaktes $K \subseteq X$ und $L \subseteq Y$ zu zeigen. Dies folgt aber sofort mittels (2.4.7) aus der Stetigkeit von $K \to X \to C(Y, Z) \to C(L, Z)$. $\square$

2.4.10 Proposition (Trennungseigenschaften des Abbildungsraums). *Es sei $i \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$. Falls Y T_i so auch $C(X, Y)$ in der kompakt-offenen Topologie. X lokal-kompakt, X, Y 2.Abz.Axiom $\Rightarrow$ $C(X, Y)$ 2.Abz.Axiom.*

Beweis. Für $i \in \{1, 2\}$ folgt dies da $C(X, Y)$ eine feinere Topologie als jene von Y^X trägt.

Nun für $i = 3$: Sei $f \in N_{K,U}$ mit $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq Y$ offen. Dann ist $f(K) \subseteq U$ kompakt und somit abgeschlossen, also existiert eine offene Menge V mit $f(K) \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$, und $f \in N_{K,V} \subseteq \overline{N_{K,V}} \subseteq N_{K,\overline{V}} \subseteq N_{K,U}$. Beachte dazu, daß $N_{K,\overline{V}}$ sogar in der Topologie von Y^X abgeschlossen ist.

Schließlich für $i = 3\frac{1}{2}$: Es sei $f \in N_{K,U}$ mit $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq Y$ offen. Wir wählen eine stetige Funktion $g : Y \to I$ mit $g|_{f(K)} = 1$ und $g|_{\sim U} = 0$. Dann ist $\gamma : C(X,Y) \to I$ definiert durch $\gamma(h) := \min\{g(h(x)) : x \in K\}$ stetig (Denn sei $\varepsilon > 0$ und $h_0 \in C(X,Y)$. Wir wählen $k_0 \in K$ mit $\gamma(h_0) = g(h_0(k_0))$ und eine Umgebung U von $h_0(k_0)$ mit $g(U) \subseteq U_\varepsilon(\gamma(h_0))$. Dann ist $\gamma(N_{K,U}) \subseteq \overline{U_\varepsilon(\gamma(h_0)))}$ mit $\gamma(f) = 1$ und $\gamma(h) = 0$ für $h \notin K_{K,U}$.

Sei nun X lokal-kompakt und X, Y 2AA und T_2. Es sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis von X bestehend aus relativ kompakten Mengen und abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen und $\mathcal{U}$ eine abzählbare Basis von Y ebenfalls abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen. Dann bildet $\{N_{\overline{B},U} : B \in \mathcal{B},\ U \in \mathcal{U}\}$ eine abzählbare Subbasis von $C(X,Y)$, denn für jedes $f \in N_{K,O}$ mit $K \subseteq X$ kompakt und $O \subseteq Y$ offen existiert ein $B \in \mathcal{B}$ mit $K \subseteq B \subseteq \overline{B} \subseteq f^{-1}(O)$. Weiters existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $f(\overline{B}) \subseteq U \subseteq O$. Also ist $f \in N_{\overline{B},U} \subseteq N_{K,O}$. $\square$

Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist nach Definition genau dann stetig, wenn

$$\forall x \in X, y := f(x) \forall V \in \mathcal{U}(y) \exists U \in \mathcal{U}(x) : f(U) \subseteq V.$$

Wir wollen nun für eine Menge $\mathcal{F}$ von Abbildungen $f : X \to Y$ beschreiben, was es heißt, daß wir im wesentlichen die gleiche Menge U für alle f wählen können. Direkt läßt sich das nicht formulieren, denn die Werte $f(x)$ mit $f \in \mathcal{F}$ werden ja allgemein verschieden (von y) sein, aber zumindest für f, für die $f(x)$ hinreichend nahe an y liegen, geht das, und somit heißt eine Menge $\mathcal{F} \subseteq Y^X$ *gleichgradig stetig*, wenn für jedes $x \in X$ und $y \in Y$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ ein $U \in \mathcal{U}(x)$ und eine $W \in \mathcal{U}(y)$ existiert mit $f \in \mathcal{F}$, $f(x) \in W \Rightarrow f(U) \subseteq V$.

Beachte, daß jede gleichgradig stetige Menge in $C(X,Y)$ enthalten ist.

2.4.11 Theorem von Ascoli & Arzela.
Es sei X ein k-Raum und Y regulär. Dann ist eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq C(X,Y)$ genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen, gleichgradig stetig und punktweise (relativ-)kompakt ist.

Beweis. ($\Rightarrow$) Es sei $\mathcal{F} \subseteq C(X,Y)$ kompakt. Dann ist $\mathcal{F}$ abgeschlossen (da $C(X,Y)$ Hausdorff ist) und $\mathrm{ev}_x(\mathcal{F}) = \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ kompakt in Y, da $\mathrm{ev}_x : C(X,Y) \to Y^X \to Y$ stetig ist. Es ist $\mathrm{ev} : \mathcal{F} \times X \to Y$ stetig nach (2.4.9), denn $\mathrm{id} = \mathrm{ev}^\vee : \mathcal{F} \to C(X,Y)$ ist stetig und $\mathcal{F} \times Y$ ist k-Raum nach (2.3.4).

Sei nun $x \in X$, $y \in Y$ und $V \in \mathcal{U}(y)$. Wir wählen $W \in \mathcal{U}(y)$ mit $\overline{W} \subseteq V$. Also ist $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F} \cap N_{\{x\},\overline{W}}$ kompakt und wegen $\mathrm{ev}(\mathcal{F}_0 \times \{x\}) \subseteq V$ ist $\mathcal{F}_0 \times \{x\} \subseteq (\mathrm{ev}\,|_{\mathcal{F}\times X})^{-1}(V)$, also existiert nach (2.1.11) ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $\mathrm{ev}(\mathcal{F}_0 \times U) \subseteq V$, also ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig.

($\Leftarrow$) Es sei $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig und $\mathcal{F}_x := \overline{\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}}$ kompakt. Dann ist $\prod_{x\in X} \mathcal{F}_x$ kompakt und somit ist der Abschluß $\overline{\mathcal{F}}$ von $\mathcal{F}$ in Y^X kompakt. Dieser ist dann aber auch gleichgradig stetig: Sei $x \in X$, $y \in Y$. Für jedes $V \in \mathcal{U}(y)$ wählen wir $V' \in \mathcal{U}(y)$ mit $\overline{V'} \subseteq V$ und Umgebungen U_V von x und W_V von y mit $f \in \mathcal{F}$, $f(x) \in W_V \Rightarrow f(U_V) \subseteq V'$. Also ist $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{pr}_x^{-1}(Y \setminus W_V) \cup \bigcap_{x' \in U_V} \mathrm{pr}_{x'}^{-1}(\overline{V'})$. Und die rechte Seite ist abgeschlossen in der punktweisen Konvergenz. Also ist $\overline{\mathcal{F}}$ enthalten im Durchschnitt all dieser Mengen mit $x \in X$, $y \in Y$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ und somit selbst gleichgradig stetig und $\overline{\mathcal{F}} \subseteq C(X,Y)$.

Somit ist $\mathrm{ev} : \overline{\mathcal{F}} \times X \to Y$ stetig bzgl. der punktweisen Konvergenz auf $\overline{\mathcal{F}}$: Denn zu $y := f(x) \in V$ existieren Umgebungen W von y und U von x mit $g(x) \in W$, $g \in \overline{\mathcal{F}}$ $\Rightarrow g(U) \subseteq V$, also $(f,x) \in (\overline{\mathcal{F}} \cap N_{\{x\},W}) \times U \subseteq \mathrm{ev}^{-1}(V)$.

Folglich ist $\mathrm{id} = \mathrm{ev}^\vee : \overline{\mathcal{F}} \to C(X,Y)$ stetig bzgl. der punktweisen Konvergenz auf $\overline{\mathcal{F}}$ nach (2.4.5), also ist $\mathcal{F}$ kompakt in $C(X,Y)$ bzgl. der kompakt offenen Topologie nach (2.4.10). □

2.5 Varianten von Kompaktheit

2.5.1 Definition (Varianten der Kompaktheit).
Ein topologischer Raum X heißt

(1) *Lindelöf*, falls er T_3 ist und jede offene Überdeckung eine abzählbare (offene Verfeinerung) resp. Teilüberdeckung besitzt.
(2) *Folgen-kompakt*, falls er T_2 ist und jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt, d.h. jede Folge einen Häufungspunkt besitzt;
(3) *abzählbar-kompakt*, falls er T_2 ist und jede abzählbare offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt
(4) *pseudo-kompakt*, falls er $T_{3\frac{1}{2}}$ ist und jede stetige Funktion $X \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.
(5) *reell-kompakt*, falls er $T_{3\frac{1}{2}}$ ist und jeder Algebra-Homo. $\varphi : C(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ die Auswertung ev_x bei einem Punkt in $x \in X$ ist.

Beispiele. Es ist $\beta\mathbb{N}$ kompakt (und damit abzählbar kompakt), aber nicht Flg-kompakt, denn nach (2.1.16) sind alle konvergenten Folgen schließlich konstant, nun betrachte $\mathbb{N} \subseteq \beta\mathbb{N}$.

Es ist $[0,\Omega)$ ist Flg-kompakt: Sei $\alpha_j \in [0,\Omega)$. Wir definieren rekursive n_k als $n_{k+1} := \min\{n > n_k : \alpha_n = \min\{\alpha_k : k > n_k\}\}$. Dann ist $(\alpha_{n_k})_{k\geq 1}$ monoton wachsend und $\lim_k \alpha_{n_k} = \sup_k \alpha_k < \Omega$. Andererseits ist aber $[0,\Omega)$ dicht in $[0,\Omega]$ und somit nicht kompakt (nur lokal-kompakt).

2.5.2 Proposition (Charakterisierung der Varianten zur Kompaktheit).
Für einen T_2-Raum sind äquivalent:

(1) *X ist abzählbar kompakt ;*
(2) *jede oben halbstetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt;*
(3) *jede lokal endliche Familie ist endlich;*
(4) *jede (abzählbar) unendliche Teilmenge hat einen Häufungspunkt;*
(5) $\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$ *ist abgeschlossen für jeden Folgen-erzeugten Raum Y (für $Y = \mathbb{N}_\infty$).*

Für einen $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum sind äquivalent:

(1) *X ist pseudo-kompakt ;*

(2) *jede lokal endliche offene Familie ist endlich;*

(3) *jede lokal endliche offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung.*

Für einen $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum sind äquivalent:

(1) *X ist reell-kompakt;*

(2) *X ist abgeschlossen einbettbar in $\mathbb{R}^J$ für eine Menge J.*

Beweis. Es sei X ein T_2-Raum:

($1\Rightarrow 2$) Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ oben halbstetig. Die offene Überdeckung $\{f^{-1}\{t : t < n\} : n \in \mathbb{N}\}$ besitzt also eine endliche Teilüberdeckung, d.h. f ist nach oben beschränkt.

($2\Rightarrow 3$) Es sei $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine lokal endliche Familie (abgeschlossener) Mengen. Dann ist χ_{B_n} oben halbstetig und ebenso $f = \sum_n n\chi_{B_n}$ nach (1.2.14.3). Also ist f nach oben beschränkt, d.h. $B_n = \emptyset$ für alle hinreichend großen n.

($3\Rightarrow 4$) Sei A eine unendliche Teilmenge (o.B.d.A. $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$) ohne Häufungspunkt. Dann ist $\{\{a_n\} : n \in \mathbb{N}\}$ lokal endlich, ein Widerspruch.

($4\Rightarrow 5$) Es sei $A \subseteq X \times Y$ abgeschlossen und $(x_n, y_n) \in A$ mit $y_n \to y_\infty$. Falls $\{x_k : k\}$ endlich ist, so ist o.B.d.A. x_k konstant x_∞ und somit ist $(x_\infty, y_\infty) \in A$, also $y_\infty \in \mathrm{pr}_2(A)$. Falls andererseits $\{x_k : k\}$ unendlich ist, dann existiert ein Häufungspunkt x_∞ und somit ist $(x_\infty, y_\infty) \in A$, also wieder $y_\infty \in \mathrm{pr}_2(A)$.

($5\Rightarrow 1$) Sei $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare offene Überdeckung. O.B.d.A. $(U_n)_n$ monoton wachsend. Es sei $U_\infty := X$ und $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_\infty} U_n \times \{n\}$. Dann ist U offen und $\mathrm{pr}_2(\sim U) := \{n : \exists x : x \notin U_n\} \not\ni \infty$, also ist diese Menge endlich und somit $U_n = X$ für fast alle n.

Sei nun X ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum:

($1\Rightarrow 2$) Es sei $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine lokal-endliche Familie offener nicht-leerer Mengen. Wir wählen $x_n \in U_n$ und $f_n \in C(X, I)$ mit $f_n(x_n) = 1$ und $f_n|_{X\setminus U_n} = 0$. Dann ist $\sum_n n\, f_n$ stetig (lokal-endliche Summe) und unbeschränkt, also X nicht pseudokompakt.

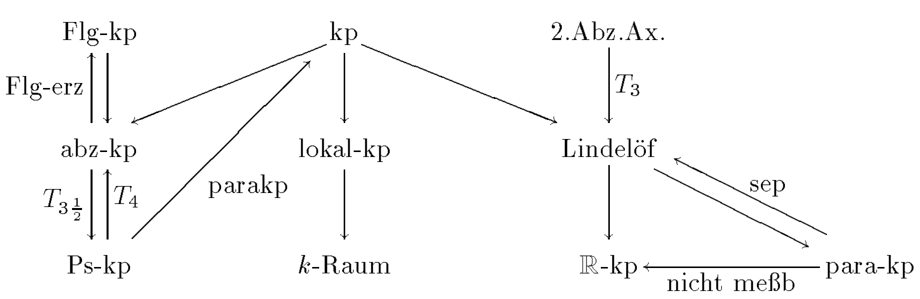
($2\Rightarrow 3$) ist trivial.

($3\Rightarrow 1$) Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\{f^{-1}(k-1, k+1) : k \in \mathbb{Z}\}$ eine lokal-endliche offene Überdeckung, also existiert eine endliche Teilüberdeckung, d.h. f ist beschränkt

($1\Rightarrow 2$) Es sei X reell-kompakt, d.h. die Einbettung (X ist $T_{3\frac{1}{2}}$) $\iota : X \to \mathbb{R}^{C(X,\mathbb{R})}$ hat $\mathrm{Alg}(C(X,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ als Bild, und dieses ist offensichtlich abgeschlossen.

($2\Rightarrow 1$) Für die äquivalente Beschreibung von reell-kompakt siehe [E:3.12.22.g]. $\square$

2.5.3 Implikationen.



Beweis. (kp. $\Leftrightarrow$ abz.kp. + Lindelöf) ist offensichtlich.

(kp. $\Rightarrow$ lokal-kp.) ist (2.2.2).
(lokal-kp $\Rightarrow$ k-Raum) ist (2.3.2).

(Flg.kp. $\Rightarrow$ abz.kp.) ist evident nach (2.5.2).
(abz.kp. + Flg-erz. $\Rightarrow$ Flg.kp.) : Es sei x_n eine Folge (von o.B.d.A. paarweise verschiedenen Punkten). Dann besitzt $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ einen Häufungspunkt x_∞. Wegen $x_\infty \in \overline{A \setminus \{x_\infty\}}$ ist $A \setminus \{x_\infty\}$ nicht abgeschlossen, also existiert eine Folge in $A \setminus \{x_\infty\}$ die gegen etwas in $A \setminus \{x_\infty\}$ konvergiert (denn X ist Folgen-erzeugt). O.B.d.A. können wir annehmen, daß dies eine Teilfolge von $(x_n)_n$ ist.

(abz.kp. + $T_{3\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ ps.kp.) ist evident nach (2.5.2).

(ps.kp. + $T_4 \Rightarrow$ abz.kp.) Es sei X normal und nicht abzählbar kompakt. Nach (2.5.2) existiert eine abzählbare unendliche Teilmenge $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ohne Häufungspunkt. Offensichtlich ist A diskret und abgeschlossen (also eine abgeschlossene Einbettung von $\mathbb{N}$), somit existiert nach Tietze-Urysohn (1.3.2) eine stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(a_n) = n$, also ist f nicht beschränkt.

(pseudo-kp. + parakp. $\Rightarrow$ kp.) Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung. Da X parakompakt ist dürfen wir lokal-endlich voraussetzen. Nun folgt die Endlichkeit mittels (2.5.2).

(2.Abz.Ax. + $T_3 \Rightarrow$ Lindelöf) Sei $\mathcal{O}$ eine abzählbare Basis und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung. Es ist $\mathcal{U}_0 := \{O \in \mathcal{O} : \exists U \in \mathcal{U} : O \subseteq U\}$ eine abzählbare Verfeinerung von $\mathcal{U}$.

(Lindelöf $\Rightarrow$ Reell-kp.) Es sei $\varphi : C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ein Algebra-Homomorphismus. Für $f \in C(X, \mathbb{R})$ betrachten wir $Z_f := f^{-1}(0)$. Falls $x \in Z_f$ für alle $f \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, so ist $\varphi = \operatorname{ev}_x$, denn für jedes $g \in C(X, \mathbb{R})$ ist $f := g - \varphi(g)\,1 \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ und somit $0 = f(x) = g(x) - \varphi(g)$.
Es ist $Z_f \neq \emptyset$, denn $Z_f = \emptyset$ impliziert $1 = f \cdot \frac{1}{f}$ und somit $1 = \varphi(1) = \varphi(f) \cdot \varphi(\frac{1}{f})$ also $\varphi(f) \neq 0$.
Es ist $Z_{f_1} \cap Z_{f_2} = Z_f$ mit $f := (f_1)^2 + (f_2)^2 \in \operatorname{Ker}(\varphi)$.
Es ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_{f_n} = Z_g$ mit $g := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} g_n$, wobei $g_n := \frac{(f_n)^2}{1+(f_n)^2} \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, $0 \leq g_n \leq 1$. Wir wissen aber nicht ob φ stetig und damit $g \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ ist, also müssen wir vorsichtiger vorgehen. Angenommen $Z_g = \emptyset$, d.h. $g > 0$ und somit ist $h := \frac{1}{g} \in C(X, \mathbb{R})$ und es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $2^n > \varphi(\frac{1}{g})$. Sei $x_0 \in Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_n} \cap Z_{h-\varphi(h)}$. Dann ist $f_k(x_0) = 0$ für $k \leq n$ und

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{\varphi(h)} = \frac{1}{h(x_0)} = g(x_0) = \sum_{k>n} \frac{1}{2^k} g_k(x_0) \leq \frac{1}{2^n},$$

ein Widerspruch.
Also hat $\{Z_f : f \in \operatorname{Ker}(\varphi)\}$ die abzählbare Durchschnittseigenschaft und hat somit nicht-leeren Durchschnitt, da X Lindelöf ist.

(Lindelöf $\Rightarrow$ para-kp.) Die Idee des Beweises besteht darin, zu einer abzählbaren Überdeckung $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ die lokal-endliche Verfeinerung $\{V_n := U_n \setminus \bigcup_{k<n} U_k\}$ zu betrachten. Mit U_n sind aber die V_n nicht offen, und so müssen wir diese noch ein wenig schrumpfen.
Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung. Für $x \in U \in \mathcal{U}$ existiert wegen T_3 ein offenes U_x mit $x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq U$. Es sei $\{W_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Teilüberdeckung

der Verfeinerung $\{U_x : x \in U \in \mathcal{U}\}$ von $\mathcal{U}$ und $W_k \subseteq U_k \in \mathcal{U}$. Schließlich setzen wir $V_n := U_n \setminus \bigcup_{j<n} \overline{W_j}$. Dann ist $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine offene Verfeinerung von $\mathcal{U}$, denn $V_n \subseteq U_n$ und für jedes x sei n_x minimal unter allen n mit $x \in U_n$ und somit $x \in V_{n_x}$. Es ist $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ lokal-endlich, denn $W_j \cap V_n = \emptyset$ für $n > j$.

(para-kp. + sep. $\Rightarrow$ Lindelöf) : Es sei X parakompakt, $D \subseteq X$ abzählbar und dicht, und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung. Wie in (1.3.7) existiert eine lokal-endliche abgeschlossene Verfeinerung $\mathcal{A} := \{A_U : U \in \mathcal{U}\}$ mit $A_U \subseteq U$, Für jedes $x \in X$ ist $\{U \in \mathcal{U} : x \in A_U\}$ endlich und somit ist $\mathcal{U}_0 := \{U \in \mathcal{U} : D \cap A_U \neq \emptyset\} = \bigcup_{x \in D}\{U \in \mathcal{U} : x \in A_U\}$ abzählbar und es gilt

$$X = \overline{D} = \overline{\bigcup_{U \in \mathcal{U}_0} D \cap A_U} \overset{\text{lok.endl.}}{=\!=} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_0} \overline{D \cap A_U} \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}_0} A_U \subseteq \bigcup \mathcal{U}_0.$$

(parakp. $\Rightarrow T_4$) (1.3.5).

(kompakt $\Leftrightarrow$ pseudo-kompakt + reell-kompakt) Angenommen $\exists \tilde{x} \beta X \setminus X$. Die Abbildung $\iota^* : C(\beta X, \mathbb{R}) \to C(X, \mathbb{R})$ ist ein injektiver Algebra-Homomorphismus (da X dicht liegt) und auch surjektiv, denn jedes $f \in C(X, \mathbb{R})$ ist beschränkt (da X pseudo-kompakt ist) und somit auf βX stetig erweiterbar. Dann ist $\mathrm{ev}_{\tilde{x}} \circ (\iota^*)^{-1} : C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ein Algebra-Homomorphismus der nicht ev_x für ein $x \in X$ ist ($C(\beta X, \mathbb{R})$ trennt Punkte), ein Widerspruch zur reell-Kompaktheit.

(parakp. + nicht meßbar $\Rightarrow$ reell-kompakt) Ein diskreter Raum X ist genau dann reell-kompakt, wenn seine Kardinalität *nicht meßbar* ist (d.h. jedes $\mu : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ mit $\mu(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ und $\mu(\{x\}) = 0 \forall x \in X$ ist die 0-Funktion), siehe [E:3.11.13].
Ein parakompakter Raum ist genau dann reell-kompakt, wenn all seine abgeschlossenen diskreten Teilräume es sind, siehe [E:5.5.10].
Somit sind in einem parakompakten Raum von nicht-meßbarer Kardinalität alle diskreten Teilräume reell-kompakt und damit er selbst auch.

Es ist konsistent anzunehmen, daß keine meßbaren Ordinalzahlen existieren. Ob man umgekehrt deren Existenz voraussetzen darf ist unbekannt. □

2.5.4 Erblichkeit.

	$T_?$	Teilraum	Produkt	Summe	Quotient
kompakt	T_4	abg.	+	endl.	T_2-Bild
	(2.1.1)	(2.1.4)	(2.1.13)	(2.1.17)	(2.1.7)
lokal-kp.	$T_{3\frac{1}{2}}$	lok.abg.	endl.	+	off.
	(2.2.2)	(2.2.4)	(2.2.7)	(2.2.6)	(2.2.8)
k-Raum	T_2	lok.abg.	×lkp.	+	quot.
	(2.3.1)	(2.3.3)	(2.3.4)	(2.3.3)	(2.3.3)
Lindelöf	T_4	abg.,F_σ	×kp	abz.	T_3-Bild
	(1.3.5)	[E:3.8.4]	[E:3.8.10]	[E:3.8.6]	[E:3.8.7]
		[E:3.8.A.a]			
Ps.-kp.	$T_{3\frac{1}{2}}$	-	×k/Flg-kp	endl.	$T_{3\frac{1}{2}}$-Bild
	(2.5.1)	[E:3.10.29]	[E:3.10.26+37]	[E:3.10.25]	[E:3.10.24]
abz.kp.	T_2	abg.	×k/Flg-kp	endl.	T_2-Bild
	(2.5.1)	[E:3.10.4]	[E:3.10.13+36]	[E:3.10.8]	[E:3.10.5]
Flg.kp.	T_2	abg.	abz.	endl.	T_2-Bild
	(2.5.1)	[E:3.10.33]	[E:3.10.35]	[E:3.10.34]	[E:3.10.32]
reell-kp.	$T_{3\frac{1}{2}}$	abg.	+	nicht meßb.	-
	(2.5.1)	[E:3.11.4]	[E:3.11.5]	[E:3.11.D.b]	[E:217]
		(2.5.2)	(2.5.2)		

Beweis. Die ersten 3 Zeilen haben wir bereits in Abschnitt (2.1) – (2.3) behandelt.
([E:3.10.29]) Ein Gegenbeispiel ist $\mathbb{N} \subseteq \beta\mathbb{R} \setminus (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$.
([E:217]) Ein Gegenbeispiel ist $\bigsqcup_{\alpha<\Omega}[0,\alpha) \to [0,\Omega)$.
([E:3.11.D.b]) Man wähle $a \in \prod_{j\in J} X_j$ und benutze folgende abgeschlossene Einbettung

$$\bigsqcup_{j\in J} X_j \to J \times \prod_{j\in J} X_j$$
$$X_j \ni x^j \mapsto (j,(x^k)_k) \text{ mit } x^k := \begin{cases} x^j & \text{für } k=j \\ a^j & \text{andernfalls} \end{cases}$$

mit Linksinversen

$$x^j \leftarrow\!\shortmid (j,(x^k)_k).$$

(Lindelöf×kompakt ist kompakt) Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$. Für jedes $y \in Y$ existiert eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{U}$ mit $X \times \{y\} \subseteq \bigcup \mathcal{U}_y$ (da $X \times \{y\} \cong X$), d.h. $y \in \sim\mathrm{pr}_2(\sim\bigcup\mathcal{U}_y)$ und somit bilden die $\sim\mathrm{pr}_2(\sim\bigcap\mathcal{U}_0)$ für alle abzählbaren $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ eine offene Überdeckung. Wir wählen eine abzählbare Teilüberdeckung mit $U_1, U_2 \ldots \subseteq \mathcal{U}$. Dann ist

$$X \times Y = \mathrm{pr}_2^{-1}(Y) \subseteq \bigcup \mathrm{pr}_2^{-1}(\sim\mathrm{pr}_2(\sim\bigcup U_i)) \subseteq \bigcup_j \bigcup \mathcal{U}_j.$$

(abz.kp.$\times$Flg.kp. ist abz.kp) Sei $A \subseteq X \times Y$ abzählbar unendlich. Wähle paarweise verschiedene $(x_k, y_k \in A)$. O.B.d.A. sei $y_k \to y_\infty$ (da Y Flg.kp.). Falls $\{x_k : k\}$ endlich ist, so ist O.B.d.A. $x_k = x_\infty$ für alle k, andernfalls existiert ein Häufungspunkt x_∞ von $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. In beiden Fällen ist $\{x_\infty, y_\infty\}$ ein Häufungspunkt von A.

(abz.Produkte Flg.kp. Räume sind Flg.kp.) Es sei $x_n \in \prod_{j\in\mathbb{N}} X_j$. Dann existiert eine konvergente Teilfolge $n \mapsto x^1_{f(1,n)}$ von $n \mapsto x^1_n$ in X_1, sowie eine konvergente Teilfolge $n \mapsto x^2_{f(2,n)}$ von $x_{f(1,n)^2}$ in X_2 und so weiter. Schließlich ist $n \mapsto x_{f(n,n)}$ eine konvergente Teilfolge in $\prod_{j\in\mathbb{N}} X_j$. $\square$

3 Metrische und uniforme Räume

3.1 Vollständige metrische Räume

3.1.1 Definition (Cauchy-Folgen und Vollständigkeit).
Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_n$ in X heißt *Cauchy-Folge* $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall i, j > n : d(x_i, x_j) < \varepsilon$, oder kurz gesagt, wenn $d(x_n, x_m) \to 0$ für $n, m \to \infty$.

Jede konvergente Folge $(x_n)_n$ in einem metrischen Raum ist eine Cauchy-Folge, denn aus $d(x_n, x_\infty) \to 0$ für $n \to \infty$ und $0 \leq d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_\infty) + d(x_m, x_\infty)$ folgt $d(x_n, x_m) \to 0$ für $n, m \to \infty$.

Falls eine Cauchy-Folge $(x_n)_n$ in einem metrischen Raum eine Häufungspunkt x_∞ hat, so konvergiert sie gegen diesen, denn dann existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ die gegen x_∞ konvergiert und somit für jedes $\varepsilon > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$ mit $d(x_{n_k}, x_\infty) < \varepsilon$ für alle $k \geq K$. Da $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für $n, m \geq N$, insgesamt also

$$d(x_n, x_\infty) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_\infty) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

falls $n \geq N$ (und $k \geq K$ so gewählt wird, daß $n_k \geq N$ gilt).

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig* und die Metrik d heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X konvergiert.

Ein topologischer Raum X heißt *vollständig metrisierbar*, wenn eine vollständige Metrik d existiert, die die gegebene Topologie auf X erzeugt.

Beispiele.

(1) Jeder diskrete Raum mit der Metrik $d(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \neq y$ ist offensichtlich vollständig, denn jede Cauchyfolge ist schließlich konstant, siehe Aufgabe (80).

(2) $\mathbb{R}$ ist vollständig, denn sei x_n eine Cauchyfolge. Dann ist $B := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt und somit besitzt die Folge $(x_n)_n$ eine Häufungspunkt x_∞ in dem kompakten Abschluß $\overline{B}$. Nach oben gesagten konvergiert somit x_n gegen x_∞.

(3) Es sei X eine Menge. Dann ist der Raum $B(X, \mathbb{R})$ der beschränkten Funktionen auf X vollständig metrisch bzgl. der Metrik $d_\infty(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$.
Sei $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $B(X, \mathbb{R})$ bezüglich d_∞, dann ist für jedes $x \in X$ wegen $0 \leq |f_n(x) - f_m(x)| \leq d_\infty(f_n, f_m)$ auch $(f_n(x))_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und nach dem vorigen Punkt somit konvergent. Es sei $f_\infty(x) := \lim_n f_n(x)$. Es konvergiert also f_n punktweise gegen f_∞.
Es konvergiert aber $f_n \to f_\infty$ sogar glm., denn

$$d(f_n(x), f_\infty(x)) \leq \underbrace{d(f_n(x), f_m(x))}_{\substack{<\varepsilon \\ \exists N_\varepsilon \forall n, m \geq N_\varepsilon}} + \underbrace{d(f_m(x), f_\infty(x))}_{\substack{<\varepsilon \\ \exists M_{\varepsilon,x} \forall m \geq M_{\varepsilon,x}}} < 2\varepsilon,$$

für $n \geq N_\varepsilon$ (und ein geeignet gewähltes m mit $m \geq M_{\varepsilon,x}$ und $m \geq N_\varepsilon$). Folglich ist $d_\infty(f_n, f_\infty) \leq 2\varepsilon$ für $n \geq N_\varepsilon$.
Schließlich ist $f_\infty \in B(X, \mathbb{R})$, denn

$$|f_\infty(x)| \leq |f_\infty(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq d_\infty(f_\infty, f_n) + \|f_n\|_\infty < 1 + \|f_n\|_\infty,$$

für $n \geq N_1$ und somit $\|f_\infty\|_\infty < 1 + \|f_{N_1}\|_\infty < \infty$.

(4) Ein metrischer Raum (X, d) ist genau dann vollständig, wenn es (X, d_1) ist, wobei $d_1 := \min\{1, d\} \leq$ (oder auch $d_1 := \frac{d}{1+d} \leq 1$) ist.

(5) Es seinen (X_n, d_n) vollständig metrisch mit $d_n \leq 1$. Dann ist auch das Produkt $\prod_n X_n$ vollständig metrisch bzgl. $d_\infty(x, y) := \sum_n \frac{1}{2^n} d_n(x^n, y^n)$: In $\prod_n X_n$ ist jede Cauchy-Folge auch Koordinaten-weise eine Cauchy-Folge und konvergiert somit Koordinaten-weise (und somit in der angegebenen Metrik, siehe (1.1)) gegen ein $x_\infty \in \prod_n X_n$. Dies kann man wie folgt auch direkt sehen:

$$d_\infty(x_n, x_\infty) = \sum_k \frac{1}{2^k} d(x_n^k, x_\infty^k) \leq \sum_{k \leq m} \frac{1}{2^k} d(x_n^k, x_\infty^k) + \frac{1}{2^m} \to 0 + \frac{1}{2^m} \text{ für } n \to \infty$$

3.1.2 Lemma (Teilräume vollständiger metrischer Räume).
Ein Teilraum Y eines vollständig metrischen Raumes X ist genau dann vollständig wenn er abgeschlossen ist.

Beweis. ($\Rightarrow$) Es ist Y (Folgen-)abgeschlossen, denn jede Folge in Y die in X konvergiert ist eine Cauchyfolge in X und damit auch in Y und somit konvergent in Y, d.h. der eindeutige(!) Grenzwert liegt in Y.

($\Leftarrow$) Jede Cauchy-Folge in Y ist auch eine solche in X konvergiert also in X und wegen der Abgeschlossenheit liegt der Grenzwert in Y und die Folge konvergiert in Y. □

3.1.3 Proposition (Vollständigkeit von Abbildungsräumen).
Es sei Y ein vollständig metrischer Raum. Dann ist Y^X mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz vollständig metrisierbar. Ist insbesonders X ein topologischer Raum so ist auch $C(X, Y)$ vollständig metrisierbar.

Beweis. Die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Y^X haben wir mittels der Metrik $d_\infty(f, g) := \sup\{d_1(f(x), g(x)) : x \in X\}\}$ beschrieben. Sei also $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in Y^X. Dann ist $(f_n(x))_n$ eine Cauchy-Folge in Y bzgl. der Metrik d_1 und somit nach (3.1.1.4) konvergent, d.h. f_n konvergiert punktweise gegen ein $f_\infty \in Y^X$. Es konvergiert $f_n \to f_\infty$ gleichmäßig, denn

$$d(f_n(x), f_\infty(x)) \leq \underbrace{d(f_n(x), f_m(x))}_{\leq \varepsilon\ \forall n,m \geq N(\varepsilon)} + \underbrace{d(f_m(x), f_\infty(x))}_{\leq \varepsilon\ \forall m \geq N(\varepsilon,x)} \leq 2\varepsilon \quad \forall m \geq N(\varepsilon).$$

Der zweite Teil folgt nun mittels (3.1.2), da $C(X, Y)$ in Y^X nach (1.2.5) abgeschlossen ist. □

3.1.4 Theorem von Cantor.
Ein metrischer Raum ist genau dann vollständig, wenn das Prinzip der Intervallschachtelung gilt: Es seien $A_n \neq \emptyset$ abgeschlossen und in n monoton fallend. Aus $d(A_n) \to 0$ folgt $\emptyset \neq \bigcap_n A_n$.

Ebenso ist die folgende allgemeinere Eigenschaft charakterisierend: jede Menge abgeschlossener Teilmengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft, die für jedes $\varepsilon > 0$ eine Menge mit Durchmesser kleiner als ε enthält, hat nicht-leeren Durchschnitt.

Es gibt sogar genau ein $x_\infty \in \bigcap \mathcal{A}$

Beweis. ($\Rightarrow$) Es sei $A_{n-1} \supseteq A_n \neq \emptyset$, $d(A_n) \to 0$. Wir wählen $x_n \in A_n$. Dann ist (x_n) eine Cauchy-Folge, sei x_∞ ihr Grenzwert. Da $x_k \in A_k \subseteq A_n$ für $k \geq n$ und A_n abgeschlossen ist, ist $x_\infty \in A_n$ für alle n, also $x_\infty \in \bigcap_n A_n$.

Die Verschärfung folgt so: Wir wählen für jedes n eine Menge $A_n \in \mathcal{A}$ mit $d(A_n) < \frac{1}{n}$. Dann ist $\bigcap_n A_n = \{x_\infty\}$ für ein $x_\infty \in X$. Sei nun $A \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann ist auch $\{x_\infty\} \supseteq \bigcap_n A_n \cap A \neq \emptyset$, d.h. $x_\infty \in A$.

Ist x'_∞ ebenfalls in $\bigcap \mathcal{A}$, so ist $d(x_\infty, x'_\infty) \leq d(A_n) \to 0$, also $x'_\infty = x_\infty$.

($\Leftarrow$) Es sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge. Dann ist $A_n := \overline{\{x_k : k \geq n\}} \neq \emptyset$ abgeschlossen und monoton fallend. Weiters ist $d(\{x_k : k \geq n\}) \to 0$ und somit $d(A_n) \to 0$. Sei $x_\infty \in \bigcap_n A_n$, dann ist x_∞ ein Häufungspunkt von x_n wegen $x_\infty \in A_n = \overline{\{x_k : k \geq n\}}$. Also konvergiert x_n gegen x_∞. □

Folgerung. *Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig metrisch.* □

3.1.5 Proposition (Erweiterung von dichten Teilräumen).
Es sei (Y, d) vollständig metrisch, X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ dicht und $f : A \to X$ stetig. Dann existiert eine eindeutig stetige Erweiterung $\tilde{f} : A^f \to Y$, wobei $A^f := \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 \exists U \in \mathcal{U}(x) : d(f(A \cap U)) < \varepsilon\}$ die Menge der Punkte mit verschwindender Oszillation $\omega_f(x) := \inf\{d(f(A \cap U) : U \in \mathcal{U}(x))\}$ von f ist und $d(A) := \sup\{d(a, a') : a, a' \in\}$ der Durchmesser von A ist.

Beachte, daß A^f die maximale Teilmenge von X ist, auf die sich f stetig fortsetzen läßt: Sei nämlich $\tilde{f} : A \cup \{x\} \to Y$ eine stetige Erweiterung, so existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $d(\tilde{f}(x'), \tilde{f}(x)) < \varepsilon$ für alle $x' \in U$. Insbesonders ist also $d(f(x'), f(x'')) < 2\varepsilon$ für alle $x', x'' \in U \cap A$, d.h. $\omega_f(x) \leq 2\varepsilon$.

Beweis. Nach (3.1.4) existiert zu $x \in A^f$ ein eindeutiger Punkt

$$\tilde{f}(x) \in \bigcap \{\overline{f(A \cap U)} : U \in \mathcal{U}(x)\}.$$

Offensichtlich ist $\tilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in A$. Bleibt zu zeigen, daß $\tilde{f}$ auf A^f stetig ist. Sei dazu $x \in A^f$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $d(f(A \cap U)) < \varepsilon$. Für jedes $\tilde{x} \in U \cap A^f$ ist $U \in \mathcal{U}(\tilde{x})$ und somit $\tilde{f}(\tilde{x}) \in \overline{f(A \cap U)}$ aber auch $\tilde{f}(x) \in \overline{f(A \cap U)}$. Somit ist $d(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{f}(x)) \leq d(\overline{f(A \cap U)}) \leq \varepsilon$, d.h. $\tilde{f}$ ist stetig bei jedem $x \in A^f$. □

Folgerung (Erweiterung glm. stetiger Abbildungen).
Es sei X ein metrischer Raum, Y ein vollständig metrischer Raum, $A \subseteq X$ dicht und $f : A \to Y$ glm. stetig. Dann existiert eine (eindeutige glm.) stetige Erweiterung $\tilde{f} : X \to Y$ von f.

Dabei heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen *gleichmäßig stetig*, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x' \in X$: $d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Beweis. Da f glm. stetig ist und A dicht liegt, ist $A^f = X$, denn für $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ so gewählt, daß $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$ für alle $d(x, x') < \delta$ gilt. Dann ist $d(f(A \cap U_{\frac{\delta}{2}}(x))) \leq \varepsilon$ da für $x', x'' \in A \cap U_{\frac{\delta}{2}}(x)$ die Beziehung $d(x', x'') \leq d(x', x) + d(x,'', x) < \delta$ gilt.

Bleibt zu zeigen, daß $\tilde{f}$ glm. stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ wie zuvor gewählt. Für je zwei Punkte $z, z' \in X$ mit $d(z, z') < \delta$ ist $U := U_r(z) \cup U_r(z')$ offen mit Durchmesser kleiner als $2r + d(z, z') < \delta$ falls $r < \frac{\delta - d(z,z')}{2}$ gewählt wird. Somit ist $d(\overline{f(A \cap U)}) = d(f(A \cap U)) \leq \varepsilon$ nach Aufgabe (81). Wegen $\tilde{f}(z), \tilde{f}(z') \in \overline{f(A \cap U)}$ ist $d(f(z), f(z')) \leq \varepsilon$. $\square$

3.1.6 Vervollständigung metrischer Räume. .
Jeder metrische Raum (X, d) besitzt eine Vervollständigung $(\tilde{X}, \tilde{d})$, d.h. einen vollständig metrischen Raum mit einer glm. stetigen Abbildung $\iota : X \to \tilde{X}$, die folgende universelle Eigenschaft besitzt. Zu jeder glm. stetigen Abbildung $f : X \to Y$ mit Werten in einem vollständig metrischen Raum Y existiert eine eindeutige glm. stetige Abbildung $\tilde{f} : \tilde{X} \to Y$ mit $\tilde{f} \circ \iota = f$. Es folgt, daß ι eine dichte Einbettung ist.

Beweis. Falls $X = \emptyset$, dann ist X vollständig und somit $\tilde{X} = X$. Andernfalls wählen wir $x_0 \in X$. Es sei $B(X, \mathbb{R})$ der Raum der beschränkten Abbildungen von $X \to \mathbb{R}$. Bzgl. der Supremumsnorm ist dies ein vollständig metrischer Raum nach (3.1.1.4). Die Abbildung $\iota : x \mapsto (y \mapsto d(y, x) - d(y, x_0))$ hat Werte in $B(X, \mathbb{R})$, denn $|d(y, x) - d(y, x_0)| \leq d(x, x_0)$. Sie ist eine Isometrie, denn $\|\iota(x) - \iota(x')\|_\infty = \sup\{|d(y, x) - d(y, x')| : y \in X\} = d(x, x')$ ($\leq$ ist klar wegen der Dreiecksungleichung, und nun setze $y = x'$). Sei nun $\tilde{X}$ der Abschluß von $\iota(X)$ in $B(X, \mathbb{R})$. Die universelle Eigenschaft folgt nun aus (3.1.5). $\square$

3.1.7 Fixpunktsatz von Banach.
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und $r : X \to X$ sei eine strikte Kontraktion, d.h. $\exists q < 1$ mit $d(r(x), r(y)) \leq q\, d(x, y)$. Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt $x_\infty \in X$ von r, d.h. $r(x_\infty) = x_\infty$, und für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} := r(x_n)$ gegen x_∞ und zwar gilt $d(x_n, x_\infty) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1)$.

Beweis. Mittels Induktion folgt:

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &\leq d(r(x_n), r(x_{n-1})) \leq q\, d(x_n, x_{b-1}) \leq \cdots \leq q^n\, d(x_1, x_0) \\
d(x_{n+m}, x_n) &\leq \sum_{k=0}^{m-1} d(x_{n+k+1}, x_{n+k}) \leq \sum_{k=0}^{m-1} q^k\, d(x_1, x_0) \\
&\leq \frac{q^n}{1-q}\, d(x_1, x_0) \to 0 \text{ für } n \to \infty
\end{aligned}
$$

$$d(x_\infty, x_n) \le \underbrace{d(x_\infty, x_{n+m})}_{\to d(x_\infty, x_\infty)=0} + \underbrace{d(x_{n+m}, x_n)}_{\le \frac{q^n}{1-q}\, d(x_1,x_0)} \stackrel{m\to\infty}{\to} \frac{q^n}{1-q}\, d(x_1, x_0).$$

Es ist $r(x_\infty) = r(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} r(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_\infty$.
Die Eindeutigkeit folgt aus

$$|x_\infty - \bar{x}_\infty| = |r(x_\infty) - r(\bar{x}_\infty)| \le q \cdot |x_\infty - \bar{x}_\infty|. \quad \square$$

Bemerkung. Dieser Satz ist das wichtigste Hilfsmittel in der Mathematik um allgemeine Gleichungen zu lösen. Z.B. folgt daraus der Satz über implizite bzw. inverse Funktionen in der Analysis, und auch der Satz von Picard-Lindelöf über die eindeutige Lösbarkeit von gewöhnlichen Differential-Gleichungen.

3.2 Baire-Räume

3.2.1 Definition (Magere und nirgends dichte Teilmengen).
Eine Menge $M \subseteq X$ eines topologischen Raums X heißt *nirgends dicht* falls M auf keiner nicht-leeren offenen Menge eine dichte Spur hat, d.h. für keine offene Menge $U \neq \emptyset$ ist $M \cap U$ dicht in U (d.h. $U = \overline{M \cap U}^U = \overline{M \cap U} \cap U$, oder äquivalent $U \subseteq \overline{M \cap U}$) Äquivalent dazu ist, daß das Innere des Abschlusses von M leer ist:
($\Rightarrow$) Es sei U das Innere des Abschlusses $\overline{M}$ von M. Angenommen $U \neq \emptyset$. Dann ist $U \subseteq \overline{(M \cap U)}$ (und somit ein Widerspruch zur Annahme), denn für jedes $x \in U$ und jede offene Umgebung V von x ist $V \cap U$ eine offene Umgebung von x, also ist $V \cap U \cap M \neq \emptyset$ wegen $U \subseteq \overline{M}$, und somit $x \in \overline{U \cap M}$.
($\Leftarrow$) Angenommen es existiert ein offenes $U \neq \emptyset$ mit $U = \overline{M \cap U}^U = \overline{M \cap U} \cap U$, d.h. $\emptyset \neq U \subseteq \overline{M \cap U} \subseteq \overline{M}$, ein Widerspruch.

Falls A abgeschlossen ist, so ist offensichtlich $\partial A = A \setminus A^o$ nirgends dicht. Allgemein stimmt das nicht, wie das Beispiel $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ zeigt.

Eine Menge heißt *mager*, falls sie eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist. Das ist genau dann der Fall, wenn sie in der abzählbaren Vereinigung abgeschlossener Mengen mit leeren Inneren enthalten ist.
($\Rightarrow$) Es sei $M = \bigcup_n N_n$, dann ist $M \subseteq \bigcup_n \overline{N_n}$.
($\Leftarrow$) E sei $M \subseteq \bigcup_n A_n$, dann ist $M = \bigcup_n (M \cap A_n)$ und $\overline{M \cap A_n} \subseteq \overline{A_n} = A_n$.

Offensichtlich ist jede Teilmenge und die abzählbare Vereinigung magerer Mengen selbst mager.

3.2.2 Satz von Osgood.
Jede Menge von reell-wertigen stetigen Funktionen die auf einen nicht mageren Raum X punktweise beschränkt ist, ist gleichmäßig beschränkt auf einer offenen, nicht-leeren Teilmenge.

Beweis. Es sei $\mathcal{F}$ die gegebene Familie von reell-wertigen Funktionen auf X. Es sei

$$A_{f,k} := \{x \in X : |f(x)| \le k\}.$$

Dann ist $A_{f,k}$ abgeschlossen, und folglich auch die Menge $A_k := \bigcap_{f\in\mathcal{F}} A_{f,k}$ der Punkte, auf welchen alle f durch k beschränkt sind. Nach Voraussetzung ist $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ nicht mager und folglich existiert ein $k \in \mathbb{N}$ und eine offenen nicht leere Menge U mit $U \subseteq A_k$, d.h. $\mathcal{F}$ ist gleichmäßig durch k auf U beschränkt. □

3.2.3 Satz von Baire.

Konvergiert eine Folge von stetigen reell-wertigen Funktionen auf einem topologischen Raum X punktweise, so ist die Grenzfunktion bis auf eine magere Menge stetig.

Beweis. Es konvergiere die Folge stetiger Funktionen $f_n \in C(X,\mathbb{R})$ punktweise gegen eine Funktion $f_\infty : X \to \mathbb{R}$.

Es sei $F_{k,\varepsilon} := \{x \in X : |f_\infty(x) - f_k(x)| \le \varepsilon\}$ und $F_\varepsilon := \bigcup_k (F_{k,\varepsilon})^o$ ist die Menge jener Punkte, wo f_∞ lokal durch ein f_k bis auf ε approximiert wird. Dann ist sowohl $F_{k,\varepsilon}$ als auch F_ε wachsend in ε.

Wir behaupten, daß f_∞ stetig ist in jedem Punkt aus $\bigcap_{\varepsilon>0} F_\varepsilon$ (Es gilt sogar Gleichheit). Falls $a \in \bigcap_{\varepsilon>0} F_\varepsilon$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ wegen $a \in F_\varepsilon$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a \in (F_{k,\varepsilon})^0$, d.h. es existiert eine Umgebung U von a mit $|f_k(x) - f_\infty(x)| \le \varepsilon$ für alle $x \in U$. Da f_k stetig ist können wir U so klein wählen, daß $|f_k(x) - f_k(a)| \le \varepsilon$ ist für alle $x \in U$. Somit gilt $|f_\infty(x) - f_\infty(a)| \le |f_\infty(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(a)| + |f_k(a) - f_\infty(a)| \le 3\varepsilon$ für alle $x \in U$, d.h. f_∞ ist stetig bei a.

Es bleibt also zu zeigen, daß $X \setminus \bigcap_{\varepsilon>0} F_\varepsilon$ mager ist. Sei dazu $A_{k,\varepsilon} := \{x \in X : \forall n : |f_k(x) - f_{k+n}(x)| \le \varepsilon\}$. Dann ist $A_{k,\varepsilon}$ abgeschlossen, da die f_i stetig sind, und $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{k,\varepsilon}$, da die Folge der f_i punktweise konvergiert. Weiters ist $A_{k,\varepsilon} \subseteq F_{k,\varepsilon}$, da f_i punktweise gegen f_∞ konvergiert. Also ist auch das Innere von $A_{k,\varepsilon}$ in jenem von $F_{k,\varepsilon}$ enthalten, und folglich gilt: $\bigcup_k (A_{k,\varepsilon})^o \subseteq \bigcup_k (F_{k,\varepsilon})^o = F_\varepsilon$. Da nach (3.2.1) $\partial A = A \setminus A^o$ nirgends dicht ist für jede abgeschlossene Menge A, ist

$$X \setminus F_\varepsilon \subseteq X \setminus \bigcup_k (A_{k,\varepsilon})^o = \bigcup_l (A_{l,\varepsilon} \setminus \bigcup_k (A_{k,\varepsilon})^o) \subseteq \bigcup_l (A_{l,\varepsilon} \setminus (A_{l,\varepsilon})^o)$$

mager, und somit auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus F_{1/n}) = X \setminus \bigcap_{\varepsilon>0} F_\varepsilon$ wegen der Monotonie von $\varepsilon \mapsto F_\varepsilon$. □

Definition (Baire-Raum).
Ein topologischer Raum X heißt *Baire-Raum*, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) Jede magere Menge hat leeres Inneres;
(2) A_n abg., $A_n^o = \emptyset \Rightarrow (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^o = \emptyset$;
(3) O_n offen, $\overline{O_n} = X \Rightarrow \overline{(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n)} = X$.

Beweis. $(2 \Leftrightarrow 3)$ A_n abg., $A_n^o = \emptyset \Leftrightarrow O_n :=\sim A_n$ offen, $\overline{O_n} = X$.

$$\emptyset = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^o = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sim O_n)^o = (\sim \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n)^o = \sim \overline{\bigcap_n O_n}.$$

$(1 \Rightarrow 2)$ A_n abg., $A_n^o = \emptyset \Rightarrow M := \bigcup_n A_n$ mager $\Rightarrow M^o = \emptyset$.

$(2 \Rightarrow 1)$ M mager $\Rightarrow M = \bigcup_n N_n$ mit $\overline{N_n}^o = \emptyset$. $A_n := \overline{N_n} \Rightarrow M^o \subseteq (\bigcup_n A_n)^o = \emptyset$. □

3.2.4 Theorem von Baire & Hausdorff.
Jeder vollständig metrische Raum ist Baire'sch.
Jeder (lokal-)kompakte topologische Raum ist Baire'sch.

Beweis. Es sei X vollständig metrisierbar. Es sei $M = \bigcup_n N_n$ eine magere Menge, $x_0 \in X$ beliebig und $r_0 > 0$. Wir müssen zeigen, daß $X \setminus M$ die Umgebung $B_0 := \{x : d(x, x_0) < r_0\}$ trifft. Dazu wählen wir induktiv Punkte $x_n \notin \overline{N_n}$ mit $d(x_n, x_{n-1}) < \frac{r_{n-1}}{2}$ (dies geht, da $X \setminus \overline{M_n}$ nach Voraussetzung dicht liegt) und Radien $r_n \leq \frac{r_{n-1}}{2}$ mit $B_n := \{x : d(x, x_n) \leq r_n\} \subseteq B_{n-1} \setminus \overline{N_n}$ (dies geht, da x_n im Inneren von B_{n-1} liegt aber nicht in der abgeschlossenen Menge $\overline{B_n}$). Die x_n bilden eine Cauchy-Folge, denn $x_n \in B_n \subseteq B_m$ für $n \geq m$, also existiert wegen der Vollständigkeit $\lim_n x_n =: x_\infty$ und liegt in $B_m \subseteq B_0$ für alle m. Es liegt folglich x_∞ in $X \setminus M$, denn $x_\infty \in B_{n+1} \subseteq (X \setminus N_n)$. Also trifft $X \setminus M$ die Umgebung B_0, und somit ist $X \setminus M$ ist dicht.

Nun sei X lokal-kompakt und $O_n \subseteq X$ offen und dicht. Es sei $x \in X$ und K_0 eine beliebige und o.B.d.A. kompakte Umgebung von x. Da O_1 dicht ist, ist die Menge $K_0 \cap O_1$ nicht leer, enthält also wegen der Lokal-Kompaktheit eine kompakte Umgebung $K_1 \subseteq K_0 \cap O_1$ eines Punktes. Analog existiert eine kompakte Umgebung $K_2 \subseteq K_1 \cap O_2$ eines Punktes dieses nicht-leeren Durchschnitts und mittels Induktion erhalten wir nicht-leere kompakte Mengen $K_n \subseteq O_n \cap K_{n-1}$. Da K_0 kompakt ist, besitzen die K_n einen nicht-leeren Durchschnitt. Somit ist $\emptyset \neq \bigcap_n K_n \subseteq K_0 \cap \bigcap_n O_n$, d.h. $\bigcap_n O_n$ ist dicht, also X Baire'sch. □

3.2.5 Folgerung von Weierstraß.
Die Ableitung jeder überall differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig bis auf die Punkte in einer mageren Teilmenge.
Es gibt stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nirgends differenzierbar sind.

Beweis. Falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, so ist $f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ und somit f' der punktweise Grenzwert der stetigen Funktionen $f_n : t \mapsto n\,(f(t + \frac{1}{n}) - f(t))$, also nach (3.2.3) stetig in allen Punkten bis auf jene aus einer mageren Menge.

Für den zweiten Teil genügt es eine stetige Funktion $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ zu finden, die in keinen Punkt $t \in [0,1]$ differenzierbar ist. Wir können diese Funktion dann so verschieben, daß sie in den Punkten aus $\mathbb{Z}$ zusammenpaßt zu einer stetigen Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die dann natürlich in keinem Punkt aus $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Falls $f \in C[0,1]$ in einem Punkt $t \in [0,1]$ differenzierbar ist, so existiert

$$\lim_{h \to 0, t+h \in (0,1)} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

und $h \mapsto \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ ist stetig auf $\{h \neq 0 : t + h \in [0,1]\}$, also ist der Differenzenquotient beschränkt auf $\{h \neq 0 : t + h \in [0,1]\}$, d.h. $f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, wobei $A_n := \{f \in C[0,1] : \exists t \in [0,1] \forall h \neq 0 : 0 < t + h < 1 \Rightarrow |\frac{f(t+h)-f(t)}{h}| \leq n\}$. Wir müssen also zeigen, daß $M := \bigcup_n A_n$ nicht ganz $C[0,1]$ ist. Da $C[0,1]$ vollständig ist nach (3.1.3) folgt dies, wenn alle A_n nirgends dicht und somit M mager ist.

Es ist A_n abgeschlossen in $C[0,1]$: Denn seien $f_k \in A_n$ mit $f_k \to f_\infty \in C[0,1]$ gleichmäßig, dann existieren $t_k \in [0,1]$, s.d.

$$\left| \frac{f_k(h + t_k) - f(t_k)}{h} \right| \leq n \text{ für alle } 0 \neq h \text{ mit } 0 < h + t_k < 1.$$

Die Folge $(t_k)_k$ hat einen Häufungspunkt t_∞ in der kompakten Menge $[0,1]$, d.h. durch Übergang zu einer Teilfolge können wir o.B.d.A. annehmen, daß $t_k \to t_\infty$. Aus $f_k \to f_\infty$ glm. folgt $f_k(t_k) \to f_\infty(t_\infty)$, denn

$$\begin{aligned}|f_\infty(t_\infty) - f_k(t_k)| &\le |f_\infty(t_\infty) - f_\infty(t_k)| + |f_\infty(t_k) - f_k(t_k)| \\ &\le |f_\infty(t_\infty) - f_\infty(t_k)| + \|f_\infty - f_k\|_\infty \to 0 \text{ für } k \to \infty,\end{aligned}$$

da f_∞ als glm. Grenzwert nach (3.1.3) stetig ist. Für jedes $0 \neq h$ mit $0 < h+t_\infty < 1$ ist auch $0 < h + t_k < 1$ für fast alle k und somit $\left|\frac{f_k(h+t_k)-f(t_k)}{h}\right| \le n$, also auch

$$\left|\frac{f_\infty(h+t_\infty) - f(t_\infty)}{h}\right| \le n,$$

d.h. $f_\infty \in A_n$.

Schließlich ist das Innere von A_n leer, denn andernfalls enthielte nach dem Satz (2.4.3) von Stone-Weierstraß A_n eine ε-Umgebung eines Polynoms p. Jedes Polynom p ist aber stetig differenzierbar und somit $\|p'\|_\infty < \infty$. Wir wählen nun eine stetige Sägezahnkurve g mit $\|g\|_\infty < \varepsilon$ und Anstieg $\pm(\|p'\|_\infty + n + 1)$. Dann ist $p + g$ in der ε-Umgebung von p, also in A_n, aber der Betrag des Anstiegs im jeden Punkt t ist mindestens $\|p'\|_\infty + m + 1 - |p'(t)| > n$, ein Widerspruch. □

3.3 Kompakte metrische Räume

3.3.1 Proposition (Abzählbarkeitsbedingungen in metrischen Räumen).
Für jeden metrischen Raum X sind äquivalent:

(1) *X erfüllte das 2.Abz.Axiom;*
(2) *X ist separabel;*
(3) *X ist Lindelöf.*

Siehe auch (3.3.9).

Beweis. (1⇒3) Wir haben in (2.5.3) allgemein gezeigt: 2.Abz.Axiom + T_3 ⇒ Lindelöf.

(3⇒2) Für $r > 0$ ist $\mathcal{U}_r := \{B_r(x) : x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X. $\xRightarrow{\text{Lindelöff}} \exists\, X_r \subseteq X$ abzählbar, s.d. $\{B_r(x) : x \in X_r\}$ eine Teilüberdeckung von $\mathcal{U}_r$ ist. Die abzählbare Menge $X_0 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_{\frac{1}{n}}$ ist dann dicht, denn $\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in X$ $\exists n \in \mathbb{N} : r := \frac{1}{n} < \varepsilon \wedge \exists x_r \in X_r \subseteq X_0 : x \in B_r(x_r)$, d.h. $d(x, x_r) \le r < \varepsilon$.

(2⇒1) Es sei $X_0 \subseteq X$ dicht und abzählbar. Mit $\mathcal{B}$ bezeichnen wir die abzählbare Menge $\mathcal{B} := \{B_r(x) : x \in X_0, 0 < r \in \mathbb{Q}\}$. Dies ist eine Basis der Topologie, denn $\forall U$ offen $\forall x \in U \exists 0 < r \in \mathbb{Q} : B_r(x) \subseteq U \Rightarrow \exists x_0 \in X_0 : d(x, x_0) < \frac{r}{2} \Rightarrow$ $U_0 := B_{\frac{r}{2}}(x_0) \in \mathcal{B}$ und $x \in U_0 \subseteq B_r(x) \subseteq U$. □

3.3.2 Folgerung (Kompaktheit in metrischen Räumen).
Für metrische Räume X ist äquivalent:

(1) *X ist kompakt;*
(2) *X ist Flg-kompakt;*
(3) *X ist abz.kompakt;*
(4) *X ist pseudo-kompakt.*

Siehe auch (3.3.8).

Beweis. Wir haben in (2.5.3) folgende Implikationen gezeigt:

$$
\begin{tikzcd}
\text{Flg-kp} \arrow[d, shift left] & \text{kp} \arrow[dl] \\
\text{abz-kp} \arrow[u, shift left, "\text{Flg-erz}"] \arrow[d, shift right, "T_{3\frac{1}{2}}"'] & \\
\text{Ps-kp} \arrow[u, shift right, "T_4"'] \arrow[uur, "\text{parakp}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Nach (1.3.8) sind metrische Räume para-kompakt und somit T_4 nach (1.3.5), ja sogar $T_{4\frac{2}{3}}$ nach (1.3.1). Außerdem erfüllen metrische Räume das 1.Abz.Axiom und sind somit Folgen-erzeugt nach (1.1.10) (und damit auch kompakt erzeugt nach (2.3.1)). $\square$

3.3.3 Überdeckungssatz von Lebesgue.
Es sei X ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{U}$ offene Überdeckung. $\Rightarrow \exists \delta > 0$: $\{U_\delta(x) : x \in X\}$ ist Verfeinerung von $\mathcal{U}$. Mit anderen Worten ist jede Menge A mit Durchmesser $d(A) < \delta$ ganz enthalten in einen $U \in \mathcal{U}$.

Ein solches $\delta > 0$ heißt *Lebesgue-Zahl* der Überdeckung $\mathcal{U}$.

Beweis. Für jedes $x \in X$ wählen wir ein ε_x, s.d. ein $U \in \mathcal{U}$ existiert mit $U_{2\varepsilon_x}(x) \subseteq U$. Die Überdeckung $\{U_{\varepsilon_x}(x) : x \in X\}$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{\varepsilon_x}(x) : x \in X_0\}$ und $\varepsilon := \min\{\varepsilon_x : x \in X_0\}$ ist dann das gesuchte $\varepsilon > 0$, denn für $x \in X$ existiert ein $x_0 \in X_0$ mit $x \in U_{\varepsilon_{x_0}}(x_0) \subseteq U_{2\varepsilon_{x_0}}(x_0) \subseteq U$ für ein $U \in \mathcal{U}$, d.h. $d(x, x_0) < \varepsilon_{x_0}$ also folgt aus $y \in U_\varepsilon(x)$, daß $d(y, x) < \varepsilon \le \varepsilon_{x_0}$, also $d(y, x_0) < d(y, x) + d(x, x_0) < \varepsilon + \varepsilon_{x_0} \le 2\varepsilon_{x_0}$ und somit $y \in U$, d.h. $U_\varepsilon(x) \subseteq U$. $\square$

3.3.4 Folgerung.
Es sei $f : X \to Y$ stetig, X, Y metrisch mit X kompakt $\Rightarrow$ f ist glm. stetig.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ eine Lebesgue-Zahl der offenen Überdeckung $\{f^{-1}(U_{\varepsilon/2}(y)) : y \in Y\}$. Aus $d(x', x) < \delta$ folgt somit die Existenz eines $y \in Y$ mit $\{x', x\} \subseteq f^{-1}(U_{\varepsilon/2}(y))$, d.h. $d(f(x), y), d(f(x'), y) < \frac{\varepsilon}{2}$ und somit $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. $\square$

3.3.5 Proposition.
Es sei X und Y metrisch, $f : X \to Y$ stetig. $\Rightarrow \exists d$, eine äquivalente Metrik auf X, s.d. f bzgl. dieser Metrik glm. stetig ist.

Beweis. Offensichtlich definiert $\tilde{d}(x_1, x_2) := d(x_1, x_2) + d(f(x_1), f(x_2))$ eine Metrik auf X, denn

$$
\begin{aligned}
\tilde{d}(x_0, x_2) &= d(x_0, x_2) + d(f(x_0), f(x_2)) \\
&\le d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + d(f(x_0), f(x_1)) + d(f(x_1), f(x_2)) \\
&= \tilde{d}(x_0, x_1) + \tilde{d}(x_1, x_2).
\end{aligned}
$$

Weiters ist $f : (X, \tilde{d}) \to (Y, d)$ glm. stetig, denn für $\varepsilon > 0$ gilt: $\tilde{d}(x_1, x_2) < \varepsilon \Rightarrow d(f(x_1), f(x_2)) \leq \tilde{d}(x_1, x_2) < \varepsilon$. Schließlich sind die beiden Metriken auf X äquivalent: Es sei dazu $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Wegen der Stetigkeit von f bei x_0 existiert ein $\delta > 0$ mit $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$. O.B.d.A. ist $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ und somit ist $\{x : d(x, x_0) < \delta\} \subseteq \{x : \tilde{d}(x, x_0) = d(x, x_0) + d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\}$. Umgekehrt gilt wegen $\tilde{d} \geq d$ offensichtlich $\{x : \tilde{d}(x, x_0) < \varepsilon\} \subseteq \{x : d(x, x_0) < \varepsilon\}$. □

3.3.6 Definition (Präkompakter Raum).
Ein metrischer Raum X heißt *präkompakt* (oder auch *total beschränkt*), wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $X_0 \subseteq X$ existiert, s.d. $X = \bigcup_{x \in X_0} U_\varepsilon(x)$, man sagt X_0 ist ε-dicht in X. Dies ist keine topologische Eigenschaft sondern hängt von der Metrik ab: $(0, 1) \cong \mathbb{R}$!

3.3.7 Lemma (Teilräume präkompakter metrischer Räume).
Teilmengen präkompakter metrischer Räume sind präkompakt.

Der Abschluß präkompakter Teilmengen metrischer Räume ist präkompakt.

Beweis. Es sei X präkompakt und $M \subseteq X$. Für $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge $X_0 \subseteq X$ mit $X = \bigcup_{x \in X_0} U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Zu jeden $x \in X_0$ mit $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap M \neq \emptyset$ wählen wir ein x' in diesen Durchschnitt und M_0 sei die endliche Menge dieser x'. Dann ist $M \subseteq \bigcup_{x' \in M_0} U_\varepsilon(x')$.

Es sei $\varepsilon > 0$ und M_0 $\frac{\varepsilon}{2}$-dicht in M. Dann ist M_0 ε-dicht in $\overline{M}$. □

3.3.8 Theorem.
Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und präkompakt ist.

Beweis. ($\Rightarrow$) (präkompakt) ist klar, denn $\{U_\varepsilon(x) : x \in X\}$ ist eine offen Überdeckung und wenn $\{U_\varepsilon(x) : x \in X_0\}$ eine endliche Teilüberdeckung ist, so ist X_0 die für Präkompaktkeit gesuchte Teilmenge.

(vollständig) Nach (3.1.4) genügt zu zeigen, daß der Durchschnitt $\bigcap_n A_n$ eine fallenden Familie nicht-leerer abgeschlossener Mengen nicht leer ist. Da eine solche die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt folgt dies sofort aus abzählbar-kompakt.

($\Leftarrow$) Wir wählen für jedes n eine endliche Menge X_n die $\frac{1}{2n}$-dicht ist, d.h. $X = \bigcup_{x \in X_n} U_{\frac{1}{2n}}(x)$. Es ist $d(U_{\frac{1}{2n}}(x)) \leq \frac{1}{n}$. Wir zeigen nun, daß jede unendliche Teilmenge $A \subseteq X$ einen Häufungspunkt besitzt, d.h. nach (2.5.2) X abzählbar kompakt und nach (3.3.2) oder direkt nach (2.5.3) kompakt ist. Es existiert ein $x_1 \in X_1$ mit $A_1 := A \cap U_2(x_1)$ unendlich. Mittels Induktion wählen wir ein $x_n \in X_n$ mit $A_n := A_{n-1} \cap U_{2n}(x_n)$ unendlich. Folglich ist A_n monoton fallend und $d(A_n) \leq \frac{1}{n}$. Also existiert nach (3.1.4) ein $x_\infty \in \bigcap_n \overline{A_n}$, d.h. $d(x_\infty, x_n) \leq d(A_n) \leq \frac{1}{n}$ und somit ist x_∞ ein Häufungspunkt von A. □

Folgerung.
Ein metrischer Raum ist genau dann präkompakt, wenn seine Vervollständigung kompakt ist.
Allgemeiner ist eine Teilmenge eines metrischen Raumes genau dann präkompakt, wenn sie in seiner Vervollständigung kompakten Abschluß hat. Ü

Beweis. Sei X ein metrischer Raum, $\tilde{X}$ seine Vervollständigung.

($\Rightarrow$) X präkompakt $\xRightarrow{(3.3.7)}$ $\tilde{X}$ präkompakt, vollständig $\xRightarrow{(3.3.8)}$ $\tilde{X}$ kompakt.

($\Leftarrow$) $\tilde{X}$ kompakt $\xRightarrow{(3.3.8)}$ $\tilde{X}$ präkompakt $\xRightarrow{(3.3.7)}$ X präkompakt. $\square$

3.3.9 Proposition. *Ein metrischer Raum ist genau dann separabel, wenn eine äquivalente präkompakte Metrik existiert.*

Vergleiche mit (3.3.1).

Beweis. ($\Rightarrow$) Es sei $X_0 \subseteq X$ dicht und abzählbar und o.B.d.A. $d \leq 1$. Dann bilden die $d_x : y \mapsto d(x, y)$ für $x \in X_0$ eine initiale Familie stetiger Abbildungen, und somit ist X in $[0, 1]^{X_0}$ einbettbar. Dieses abzählbare Produkt ist nach (2.1.13) kompakt und somit nach (3.3.8) präkompakt (dies kann auch direkt gezeigt werden, siehe [E:4.3.3]) und damit auch X nach (3.3.7).

($\Leftarrow$) Es sei X_n eine endliche $\frac{1}{n}$-dichte Teilmenge von X. Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ eine abzählbare dichte Teilmenge. $\square$

Folgerung (Präkompakt metrisierbare Räume).
Für topologische Räume gilt: präkompakt metrisierbar $\Leftrightarrow$ 2. Abzählbarkeits Axiom und T_3.

Beweis. ($\Rightarrow$) Nach (3.3.9) ist X separabel, metrisch und somit T_3. Und nach (3.3.1) erfüllt er das 2. Abzählbarkeits Axiom.

($\Leftarrow$) 2.Abz.Axiom + T_3 $\xRightarrow{(1.3.4)}$ separabel metrisierbar $\xRightarrow{(3.3.9)}$ präkompakt metrisierbar. $\square$

3.3.10 Metrisierungssatz von Nagata & Smirnov.
Ein topologischer Raum X ist genau dann metrisierbar, wenn er T_3 ist und eine σ-lokal endliche Basis besitzt.

Dabei heißt eine Basis $\mathcal{B}$ einer Topologie *σ-lokal-endlich*, falls sie abzählbare Vereinigung lokal-endlicher Mengen ist.

Beweis. ($\Rightarrow$) X ist perfekt-normal nach (1.3.1). Die offene Überdeckung $\{U_{\frac{1}{i}}(x) : x \in X\}$ besitzt eine lokal-endliche Verfeinerung $\mathcal{B}_i$, da X parakompakt ist nach (1.3.8). Es ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ eine σ-lokal-endliche Basis der Topologie von X: Für $O \subseteq X$ offen und $x_0 \in O$ existiert ein $n > 0$ mit $U_{\frac{1}{n}}(x_0) \subseteq O$. Sei $B \in \mathcal{B}_{2n+1}$ mit x_0 in B, dann ist $B \subseteq U_{\frac{1}{2n+1}}(x)$ für ein $x \in X$ und somit $d(B) \leq \frac{2}{2n+1} < \frac{1}{n}$, also $B \subseteq U_{\frac{1}{n}}(x_0) \subseteq O$.

($\Leftarrow$) Es sei X regulär und $\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{B}_n$ eine σ-lokal-endliche Basis.

Wir zeigen zuerst, daß X perfekt-normal ist. Sei also $W \subseteq X$ offen. Für jedes $x \in W$ existiert ein $n_x \in \mathbb{N}$ und ein $U_x \in \mathcal{B}_{n_x}$ mit $x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq W$. Es sei $W_n := \bigcup_{n_x=n} U_x$. Dann ist $W = \bigcup_n W_n$ und $\overline{W_n} \subseteq W$ nach (1.2.14). Nach dem Beweis von (1.3.4) ist X normal und wegen $W = \bigcup_n \overline{W_n}$ nach (1.2.14) auch perfekt normal.

Somit existiert für jedes offene $U \subseteq X$ ein $f_U \in C(X, [0, 1])$ mit $U = f^{-1}([0, 1]\setminus\{0\})$. Die Menge $\{\tilde{U} := (U \times X) \cup (X \times U) : U \in \mathcal{B}_n\}$ ist lokal-endlich in $X \times X$, denn

$\tilde{U} \cap (U_x \times U_y) \neq \emptyset \Leftrightarrow U \cap U_x \neq \emptyset$ oder $U \cap U_y \neq \emptyset$. Weiters ist $f_U(x) = 0 = f_U(y)$ für alle $(x, y) \notin \tilde{U}$. Nach (1.2.14) definiert

$$g_n : (x, y) \mapsto \sum_{U \in \mathcal{B}_n} |f_U(x) - f_U(y)|$$

eine stetige pseudo-Metrik $g_n : X \times X \to \mathbb{R}$ und $d_n := \min\{1, g_n\}$ eine durch 1-beschränkte Pseudo-Metrik. Schließlich definieren wir die stetige pseudo-Metrik $d := \sum_n \frac{1}{2^n} d_n$.

Für jedes abgeschlossene $A \subseteq X$ und $x \notin A$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und $U \in \mathcal{B}_n$ mit $x \in U \subseteq X \setminus A$. Wegen $f_U|_A = 0$ ist $2^n d(x, A) \geq d_n(x, A) = \inf\{d_n(x, a) : a \in A\} \geq f_U(x) > 0$.

Da X T_1 ist können wir $A := \{y\}$ setzen und somit ist $d(x, y) > 0$ für $x \neq y$, also d eine stetige Metrik.

Die Metrik d erzeugt die gegebene Topologie von X:
In jeden metrischen Raum ist der Abschluß in der induzierten Metrik $\overline{A} = \{x : d(x, A) = 0\}$Ⓤ. Es genügt also diese Gleichung für den Abschluß in der gegebenen Metrik zu zeigen. Für $x \in A$ ist $d(x, A) = 0$ und da mit d auch $x \mapsto d(x, A)$ stetig ist auch $d(x, A) = 0$ für alle $x \in \overline{A}$. Umgekehrt sei $x \notin \overline{A}$, dann ist nach dem oben gesagten $0 < d(x, \overline{A}) \leq d(x, A)$, also $x \notin \{y : d(y, A) = 0\}$. □

Lemma (Abgeschlossene Bilder parakompakter Räume).
Es sei Y parakompakt, $f : Y \to X$ abgeschlossen und stetig und X T_3. Dann ist X parakompakt.

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß jede offene Überdeckung von X eine abgeschlossene lokal-endliche Verfeinerung besitzt:
Sei also $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann ist $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ eine offene Überdeckung von X, sei $\mathcal{V}$ eine lokal endliche Verfeinerung. Nach dem Beweis von (1.3.7) existiert eine abgeschlossene (lokal endliche) Überdeckung $\{A_V \subseteq V : V \in \mathcal{V}\}$. Da f abgeschlossen ist, ist $\{f(A_V) : V \in \mathcal{V}\}$ eine abgeschlossene und lokal-endliche Verfeinerung von $\mathcal{U}$.

Wir zeigen nun, daß jeder T_3-Raum X mit der eben gezeigten Eigenschaft parakompakt ist.
Sei dazu $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X und $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene lokal-endliche Verfeinerung. Für jedes $x \in X$ wählen wir ein $U_x \in \mathcal{U}(x)$, welches nur endlich viele $A \in \mathcal{A}$ trifft. Es sei $\mathcal{C}$ eine abgeschlossene lokal-endliche Verfeinerung der Überdeckung $\{U_x : x \in X\}$. Für $A \in \mathcal{A}$ sei

$$W_A := \sim\bigcup\{C \in \mathcal{C} : C \cap A = \emptyset\}.$$

Da $\mathcal{C}$ lokal-endlich ist, ist $W_A \supseteq A$ offen. Weiters gilt für jedes $C \in \mathcal{C}$: $W_A \cap C \neq \emptyset$ $\Leftrightarrow A \cap C \neq \emptyset$. Dabei ist $(\Leftarrow)$ wegen $A \subseteq W_A$ offensichtlich. Umgekehrt sei $A \cap C = \emptyset$ aber $C \cap W_A \neq \emptyset$. Dann trifft C insbesonders $\sim C$, ein Widerspruch.
Da $\mathcal{A}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist existiert für jedes $A \in \mathcal{A}$ ein $U_A \in \mathcal{U}$ mit $A \subseteq U_A$. Es sei $V_A := W_A \cap U_A \supseteq A$. Dann ist $\{V_A : A \in \mathcal{A}\}$ eine offene Verfeinerung von $\mathcal{U}$, da $A \subseteq V_A \subseteq U_A$ und $\mathcal{A}$ eine Überdeckung ist.

Diese Verfeinerung $\{V_A : A \in \mathcal{A}\}$ ist lokal endlich:
Für $x \in X$ existiert, da $\mathcal{C}$ lokal endlich ist, ein $V_x \in \mathcal{U}(x)$ welches nur endlich viele $C \in \mathcal{C}$ trifft. Sei $V_x \cap V_A \neq \emptyset$. Wegen $V_x \cap V_A \subseteq V_x$ liegt $V_x \cap V_A$ in der endlichen Vereinigung $\bigcup\{C \in \mathcal{C} : C \cap V_x \neq \emptyset\}$. Falls $V_x \cap V_A \cap C \neq \emptyset$, so ist $W_A \cap C \supseteq V_x \cap V_A \cap C \neq \emptyset$ und somit $A \cap C \neq \emptyset$. Dies kann aber nur für endlich viele $A \in \mathcal{A}$ gelten, denn $C \subseteq U_y$ für eine $y \in X$ und U_y trifft nur endlich viele $A \in \mathcal{A}$. $\square$

Lemma (Perfekte Bilder metrischer Räume).
Es sei $f : X \to Y$ perfekt (d.h. abgeschlossen, stetig und mit kompakten Fasern $f^{-1}(y)$), surjektiv und X metrisierbar. Dann ist Y metrisierbar.

Beweis. Es sei $f : X \to Y$ perfekt und d eine Metrik auf X. Für $n \in \mathbb{N}$ und $y \in Y$ definieren wir

$$\begin{aligned} U_n(y) &:= \{x \in X : d(x, f^{-1}(y)) \leq \frac{1}{n}\}, \\ W_n(y) &:= \sim f(\sim U_n(y)), \\ V_n(y) &:= f^{-1}(W_n(y)) \subseteq U_n(y). \end{aligned}$$

Dann ist $U_n(y) \subseteq U_m(y)$ für $n \geq m$.
Die Familie $\mathcal{W}_n := \{W_n(y) : y \in Y\}$ ist eine offene Überdeckung von Y und $\{W_n(y) : n > 0\}$ ist eine Umgebungsbasis von $y \in Y$, denn für jede Umgebung V von y ist $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(V)$ und nach (3.3.6) existiert ein n mit $U_n(y) \subseteq f^{-1}(V)$, also ist $W_n(y) \subseteq V$.
Wir behaupten nun, daß für alle n und y existiert ein m mit $\bigcup\{W_m(z) : y \in W_m(z)\} \subseteq W_n(y)$: Da $f^{-1}(y) \subseteq V_{2n}(y)$ kompakt ist existiert nach (2.3.6) ein $m \geq 2n$, s.d. $U_m(y) \subseteq V_{2n}(y)$. Es sei $z \in Y$ mit $y \in W_m(z)$. Wegen $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(W_m(z)) = V_m(z) \subseteq U_m(z)$ existiert für $x' \in f^{-1}(y)$ ein $x \in f^{-1}(z)$ mit $d(x', x) < \frac{1}{m}$. Also ist $x \in U_m(y) \cap f^{-1}(z) \subseteq V_{2n}(y) \cap f^{-1}(z) \neq \emptyset$ und weiters $f^{-1}(z) \subseteq V_{2n}(y) = f^{-1}(W_{2n}(y))$, denn die letzte Menge enthält mit jedem Punkt x auch die Faser $f^{-1}(f(x))$.
Nun sei $t \in W_m(z)$. Wegen $f^{-1}(t) \subseteq f^{-1}(W_m(z)) \subseteq U_m(z)$ existiert für jedes $x \in f^{-1}(t)$ ein $x' \in f^{-1}(z)$ mit $d(x, x') < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2n}$. Nach obigen ist $f^{-1}(z) \subseteq V_{2n}(y) \subseteq U_{2n}(y)$ und somit existiert ein $x'' \in f^{-1}(y)$ mit $d(x', x'') < \frac{1}{2n}$ also $d(x, x'') < \frac{1}{n}$ und somit $x \in U_i(y)$, also $f^{-1}(t) \subseteq U_n(y)$, also $t \in W_n(y)$ (denn $t = f(s)$ mit $s \in X \setminus U_n(y)$ würde $s \in f^{-1}(t) \setminus U_n(y)$ implizieren)
Nach dem letzten Lemma besitzt $\mathcal{W}_n$ eine offene lokal-endliche Verfeinerung $\mathcal{B}_n$. Es ist $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ eine Basis von Y, denn zu $y \in U \subseteq Y$ offen existiert ein n mit $y \in W_n(y) \subseteq U$. Nach obigen existiert ein m mit $W_m(z) \subseteq W_n(y)$ für alle z mit $y \in W_m(z)$. Es sei $y \in B_m \in \mathcal{B}_m$. Dann existiert ein z mit $y \in B_m \subseteq W_m(z)$, also $B_m \subseteq W_m(z) \subseteq W_n(y) \subseteq U$. Folglich ist Y metrisierbar nach (3.3.10) und Aufgabe (66). $\square$

3.3.11 Satz von Hanai, Morita & Stone.
Es sei $f : X \to Y$ surjektiv, abgeschlossen und stetig mit X metrisierbar. Dann sind äquivalent:

(1) *Y metrisierbar*
(2) *Y erfüllt 1.Abz.Ax.*
(3) *$\partial(f^{-1}(y))$ ist kompakt für alle $y \in Y$.*

Beweis. (1⇒2) ist offensichtlich.
(2⇒3) Vaǐnsteǐn's Lemma : Wir zeigen, daß $\partial(f^{-1}(y))$ abzählbar kompakt für jedes $y \in Y$ und somit nach (2.5.3) kompakt ist. Sei $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von y und $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \partial(f^{-1}(y))$ abzählbar unendlich. Zu jeden n wählen wir ein $b_n \in f^{-1}(V_n) \setminus f^{-1}(y)$ mit $d(a_n, b_n) < \frac{1}{n}$. Das geht, denn $\{y\}$ ist abgeschlossen und folglich auch $f^{-1}(y)$ und somit ist $a_n \in \partial(f^{-1}(y)) \subseteq f^{-1}(y)$, also ist $U_{\frac{1}{n}}(a_n) \cap f^{-1}(V_n)$ eine Umgebung von a_n. Diese trifft $\sim f^{-1}(y)$ da $a_n \in \partial(f^{-1}(y))$, also $\exists b_n \in U_{\frac{1}{n}}(a_n) \cap f^{-1}(V_n) \cap \sim f^{-1}(y)$. Es sei $B := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $y \in \overline{f(B)} \setminus f(B)$, denn $b_n \notin f^{-1}(y) \Rightarrow y \neq f(b_n) \forall n \Rightarrow y \notin f(B)$ und andererseits ist $y \in \overline{f(B)}$, denn $f(b_n) \in V_n \cap f(B)$, und somit $B \subset \overline{B}$, denn aus $B = \overline{B}$ würde $f(B) = \overline{f(B)}$ folgen, da f abgeschlossen ist. Also existiert ein Häufungspunkt (jedes $x \in \overline{B} \setminus B$) von B und wegen $d(a_n, b_n) < \frac{1}{n}$ ist dieser auch ein Häufungspunkt von A. Nach (2.5.2) ist also $\partial(f^{-1}(y))$ abzählbar kompakt und nach der Folgerung in (2.5.3) somit kompakt.

(3⇒1) Es sei $A_y := \partial(f^{-1}(y))$ falls diese Menge nicht leer ist und $A_y := \{x_y\}$ für ein $x_y \in f^{-1}(y)$ andernfalls (d.h. wenn $f^{-1}(y)$ offen und abgeschlossen ist). Dann ist $A := \bigcup_{y \in Y} A_y$ abgeschlossen, denn sein Komplement ist $X \setminus \bigcup_y A_y = \bigcup_y f^{-1}(y) \setminus \bigcup_y A_y = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) \setminus A_y$, eine Vereinigung offener Mengen. $f|_A : A \to Y$ ist somit eine abgeschlossene surjektive stetige Abbildung. Die Fasern sind $(f|_A)^{-1}(y) = A \cap f^{-1}(y) = A_y$ und somit ist f perfekt. Nach dem letzten Lemma ist somit Y metrisierbar. □

3.4 Konvergenz

Mittels Folgen können wir zwar in metrischen Räumen nicht aber in allgemeinen topologischen Räumen die Topologie oder die stetigen Abbildungen beschreiben. Wir wollen nun eine Verallgemeinerung des Begriffes Folge vorstellen, mit Hilfe dessen solche Beschreibungen doch gelingen.

3.4.1 Definition (Netz).
Ein *Netz* x in einen Raum X ist eine Abbildung von einer gerichteten nicht-leeren Menge $(I, \preceq)$ nach X. Eine Menge I heißt *gerichtet* vermöge einer Relation $\preceq$ falls folgendes erfüllt ist:

(1) $x \preceq x$;
(2) $x \preceq y,\ y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$;
(3) $\forall x_1, x_2 \in X\ \exists x_0 \in X$: $x_1 \preceq x_0$ und $x_2 \preceq x_0$.

Beachte, daß wir auf die Antisymmetrie ($x \preceq y,\ y \preceq x \Rightarrow x = y$) verzichtet haben. Dies wird in (3.4.7) von Vorteil sein.

Falls X ein topologischer Raum ist und $x_\infty \in X$, so heißt das Netz x *konvergent* gegen x_∞ (und x_∞ ein *Limes* oder auch *Grenzwert* von x), wenn für alle Umgebungen U von x_∞ ein $i_0 \in I$ existiert, sodaß $x_i \in U$ für alle $i \succeq i_0$. Der Punkt x_∞ heißt *Häufungspunkt* von x, wenn für jede Umgebung U von x_∞ und jedes $i_0 \in I$ ein $i \succeq i_0$ existiert mit $x_i \in U$. Vergleiche dies mit dem entsprechenden Begriff bei Folgen, wo man üblicherweise verlangt, daß $x_i \in U$ für unendlich viele $i \in \mathbb{N}$ gilt. Ein Netz x' heißt *feiner* als x, falls eine Funktion $f : I' \to I$ existiert mit $x \circ f = x'$ und s.d. $\forall i \in I \exists i_0 \in I : i' \succeq i_0 \Rightarrow f(i') \succeq i$. Insbesonders können wir jede monoton wachsende Funktion $f : I' \to I$ mit kofinalen Bild verwenden um ein feineres Netz $x \circ f$ zu erhalten.

Jede Folge $x = (x_n)_n : \mathbb{N} \to X$ ist ein Netz, welches genau dann gegen x_∞ konvergiert (x_∞ als Häufungspunkt besitzt) wenn dies die Folge x tut. Jede Teilfolge $x' = (x_{n_k})_k : \mathbb{N} \to X$ (d.h. $k \mapsto n_k$ ist streng monoton wachsend) ist ein Teilnetz von x, aber nicht jedes Teilnetz einer Folge ist eine Teilfolge, z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ mit $t \mapsto [t]$ oder $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $2n \mapsto 2n$, $2n+1 \mapsto 2n-1$.

Beispiel. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Für jede *punktierte Zerlegung* (Z,ξ) von $[a,b]$, d.h. Zerlegung $Z = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ von $[a,b]$ und Zwischenvektor $\xi = (\xi_i)_{i<n}$ mit $t_i \le \xi_i \le t_{i+1}$, definiert man die *Riemann-Summe* als

$$R(Z,\xi) := \sum_{i<n} (t_{i+1} - t_i)\, f(\xi_i)$$

und erhaltet somit ein $\mathbb{R}$-wertiges Netz R von der Menge $\mathcal{Z}$ aller punktierten Zerlegungen geordnet vermöge $(Z,\xi) \succeq (Z',\xi')$ falls $|Z'| \le |Z| := \max\{|t_{i+1} - t_i| : i < n\}$. Bekanntlich heißt f *Riemann-integrierbar* falls dieses Netz konvergiert, und der Limes des Netzes heißt das Riemann-Integral $\int_a^b f$ von f.

3.4.2 Lemma (Konvergenz feinere Netze).
Sei $x : I \to X$ ein Netz und $x' = x \circ f : I' \to I \to X$ ein feineres Netz.

(1) *Dann ist jeder Limes von x auch einer von x'.*
(2) *Weiters ist jeder Häufungspunkt von x' auch einer von x.*
(3) *Falls x_∞ Häufungspunkt von x ist, so existiert ein feineres Netz x' welches gegen x_∞ konvergiert.*

Beweis. (1) Es sei x_∞ ein Limes von x, d.h.

$$\forall U \in \mathcal{U}(x_\infty)\ \exists i_0 \in I\ \forall i \succeq i_0 : x_i \in U$$

Da $x' = x \circ f$ feiner als x ist, existiert ein $i'_0 \in I'$ mit $f(i') \succeq i_0$ für alle $i' \succeq i'_0$, also ist $x'_{i'} = x_{f(i')} \in U$ für alle $i' \succeq i'_0$, d.h. x_∞ ist ein Limes von x'.

(2) Es sei x_∞ ein Häufungspunkt von x'. Für $U \in \mathcal{U}(x_\infty)$ und $i_0 \in I$ existiert ein $i'_0 \in I'$ mit $i' \succeq i'_0 \Rightarrow f(i') \succeq i_0$. Da x_∞ ein Häufungspunkt von $x \circ f$ ist, existiert ein $i' \succeq i'_0$ mit $x_{f(i')} = x'_{i'} \in U$. Wegen $f(i') \succeq i_0$ ist somit x_∞ ist ein Häufungspunkt von x.

(3) Wir betrachten $I' := \{(i,U) : i \in I, x_i \in U \in \mathcal{U}(x_\infty)\}$ mit der gerichteten Ordnung $(i,U) \succeq (i',U') \Leftrightarrow i \succeq i'$ und $U \subseteq U'$. Das Netz x' sei nun durch $x'_{(i,U)} := x_i$ gegeben. Es ist feiner als x vermöge $\mathrm{pr}_1 : I' \to I$, denn $\forall i_0 \in I\ \forall (i,X) \succeq (i_0,X)$: $i = \mathrm{pr}_1(i,U) \succeq i_0$. Weiters konvergiert x' gegen x_∞, denn $\forall U_0 \in \mathcal{U}(x_\infty)$ und $(\forall i_1 \in I)\ \exists i_0 \succeq i_1$ mit $x_{i_0} \in U_0$, also ist $x'_{(I,U)} = x_i \in U \subseteq U_0$ für alle $(i,U) \succeq (i_0,U_0)$ $\square$

Bemerkung. Beachte, daß das Bild eines konvergenten Netzes zusammen mit den Grenzwert nicht abgeschlossen und somit auch nicht kompakt zu sein braucht. Denn für $I := \{t \in \mathbb{Q} : t < 0\}$ mit der üblichen Ordnung ist $x_t := t$ ein gegen 0 konvergentes Netz.

3.4.3 Proposition (Topologie via Netze).
Es sei $A \subseteq X$.

(1) *Dann ist $x_\infty \in \overline{A}$ genau dann, wenn ein Netz x in A existiert, welches gegen x_∞ in X konvergiert.*
(2) *Eine Menge A ist also genau dann abgeschlossen, wenn die Limiten aller Netze in A zu A gehören.*
(3) *Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn das Bild jedes Limes eines Netzes x in X ein Limes des Bild-Netzes $f \circ x$ ist.*

Vergleiche dies mit (1.1.11).

Beweis. (1) Offensichtlich gehört jeder Häufungspunkt eines Netzes in A zum Abschluß von A. Umgekehrt sei $x_\infty \in \overline{A}$. Es sei $I := \{U : U \in \mathcal{U}(x_\infty)\}$ mit der zur enthalten-Relation dualen Ordnung. Für jedes U wählen wir ein $x_U \in U \cap A$. Dann konvergiert das Netz x gegen x_∞.

(2) ist nun evident.

(3)

($\Rightarrow$) Es sei $x : I \to X$ ein gegen x_∞ konvergentes Netz und $V \in \mathcal{U}(f(x_\infty))$. Dann ist $U := f^{-1}(V)$ in $\mathcal{U}(x_\infty)$, also existiert ein i_0 mit $x_i \in U$ für alle $i \succeq i_0$, und folglich ist $f(x_i) \in f(U) = f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ für diese i.

($\Leftarrow$) Nach (1.2.4) genügt $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ zu zeigen. Nach (3.4.3) ist jedes $x_\infty \in \overline{A}$ Grenzwert eines Netzes x in A, und folglich ist $f(x_\infty)$ Grenzwert des Netzes $f \circ x$ in $f(A)$, d.h. $f(x_\infty) \in \overline{f(A)}$. $\square$

3.4.4 Proposition (Hausdorff via Netze).
Ein topologischer Raum ist genau dann T_2, wenn jedes Netz höchstens einen Grenzwert besitzt.

Beweis. ($\Rightarrow$) Falls $x_\infty \neq x'_\infty$ zwei Grenzwerte eines Netzes x sind, so existieren disjunkte Umgebungen U und U' in denen das Netz schließlich liegen muß. Dies ist unmöglich.

($\Leftarrow$) Angenommen X ist nicht Hausdorff. Seien $x_\infty \neq x'_\infty$ nicht trennbare Punkte, d.h. für jede Umgebung U von x_∞ und U' von x'_∞ existiert ein $x_{(U,U')} \in U \cap U'$. Dies definiert ein Netz von $x : \mathcal{U}(x_\infty) \times \mathcal{U}(x'_\infty) \to X$, wobei die Ordnung durch $(U,U') \succeq (V,V') \Leftrightarrow U \subseteq U'$ und $V \subseteq V'$ gegeben ist. Es sind x_∞ und x'_∞ Grenzwerte dieses Netzes. $\square$

3.4.5 Proposition (Kompaktheit via Netze).
Ein T_2-Raum ist genau dann kompakt, wenn jedes Netz einen Häufungspunkt besitzt.

Beweis. ($\Rightarrow$) Es sei $x : J \to X$ ein Netz. Dann hat die Familie der abgeschlossen Mengen $F_j := \overline{\{x_{j'} : j' \succeq j\}}$ die endliche Durchschnittseigenschaft und jedes $x_\infty \in \bigcap_{j \in J} F_j$ ist ein Häufungspunkt von x.

($\Leftarrow$) Es habe $\mathcal{A}$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Sei J die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathcal{A}$ und für jedes $j \in J$ sei $x_j \in \bigcap_{A \in j} A$ gewählt. Weiters sei x_∞ ein Häufungspunkt des Netzes x. Für jede Umgebung U von x_∞ und jedes $A \in \mathcal{A}$ (also $\{A\} \in J$) existiert ein $j = \{A_1, \dots, A_n\} \in J$ mit $j \supseteq \{A\}$

(d.h. $A \in \{A_1, \dots, A_n\}$) und $x_j \in U$, also $A \cap U \supseteq A_1 \cap \dots \cap A_n \cap U \neq \emptyset$, d.h. $x_\infty \in \overline{A} = A$. $\square$

3.4.6 Definition (Filter).
Bei den obigen Beweisen von (3.4.2), (3.4.3) und (3.4.4) waren die konstruierten Netze oft durch $\mathcal{U}(x_0)$ parametrisiert. Es drängt sich also auf statt Netze mit $\mathcal{U}(x_0)$ ähnliche Objekte zu verwenden: Unter einen *Filter* $\mathcal{F}$ auf einer Menge X verstehen wir eine Menge von Teilmengen mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F} \neq \emptyset$; $A \in \mathcal{F}, A \subseteq A' \Rightarrow A' \in \mathcal{F}$.
(2) $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$.

Für jeden Punkt x in einem topologischen Raum X ist $\mathcal{U}(x)$ ein Filter, der sogenannte *Umgebungsfilter* von x.

Dabei heißt ein Filter $\mathcal{F}$ *feiner* als ein anderer $\mathcal{F}'$, wenn $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$.

Eine *Filterbasis* $\mathcal{B}$ ist eine Menge von Teilmengen von X die $\emptyset \notin \mathcal{B} \neq \emptyset$ und $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{B}\ \exists A \in \mathcal{B} : A \subseteq A_1 \cap A_2$ erfüllt. Die Menge $\mathcal{F} := \{A \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq A\}$ ist dann ein Filter, der von $\mathcal{B}$ *erzeugte Filter.*

Ein Punkt $x_\infty \in X$ heißt *Limespunkt* des Filters $\mathcal{F}$ (bzw. $\mathcal{F}$ konvergiert gegen x_∞, oder symbolisch $\mathcal{F} \to x_\infty$), wenn $\mathcal{F}$ feiner als der Umgebungsfilter von x_∞ ist. Falls $\mathcal{B}$ eine Filterbasis von $\mathcal{F}$ ist, so bedeutet dies, daß $\forall U \in \mathcal{U}(x_\infty)\ \exists B \in \mathcal{B}$: $B \subseteq \mathcal{U}$.

Ein Punkt $x_\infty \in X$ heißt *Häufungspunkt* des Filter $\mathcal{F}$, wenn jede Umgebung von x_∞ alle $A \in \mathcal{F}$ trifft, d.h. $x_\infty \in \overline{A}$ für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt. Falls $\mathcal{B}$ eine Filterbasis von $\mathcal{F}$ ist, so bedeutet dies, daß $\forall U \in \mathcal{U}\ \forall B \in \mathcal{B}$: $U \cap B \neq \emptyset$.

3.4.7 Proposition (Netze versus Filter).
Es sei $x : I \to X$ ein Netz. Die Familie der Endabschnitte $\{x_i : i \succeq i_0\}$ mit $i_0 \in I$ ist eine Filterbasis. Sei $\mathcal{F}_x := \mathcal{F} := \{F \subseteq X : \exists i_0 \in I \forall i \succeq i_0 : x_i \in F\}$ der dadurch erzeugte Filter. Dieser hat die gleichen Grenzwerten (resp. Häufungswerte) wie x. Falls x' feiner als x ist, so ist der zugehörige Filter $\mathcal{F}'$ feiner als $\mathcal{F}$.

Sei umgekehrt $\mathcal{F}$ ein Filter in X. Es sei $I := \{(a, F) : a \in F \in \mathcal{F}\}$ geordnet vermöge $(a, F) \succeq (a', F') \Leftrightarrow F \subseteq F'$. Dann ist $x_\mathcal{F} := x : I \to X$, $(a, F) \mapsto a$ eine Netz mit den gleichen Grenzwerten (resp. Häufungspunkten) wie $\mathcal{F}$. Es ist $\mathcal{F}_{x_\mathcal{F}} = \mathcal{F}$.

Beweis. Es ist x_∞ genau dann ein Grenzwert des Filters $\mathcal{F}_x$, wenn $\mathcal{U}(x_\infty) \subseteq \mathcal{F}_x$, d.h.

$$\forall U \in \mathcal{U}(x_\infty) \exists i_0 \in I : \{x_i : i \succeq i_0\} \subseteq U,$$

also genau dann, wenn x_∞ ein Grenzwert des Netzes x ist.

Es ist x_∞ genau dann ein Häufungswert des Filters $\mathcal{F}_x$, wenn $U \cap F \neq \emptyset$ für jedes $U \in \mathcal{U}(x_\infty)$ und $F \in \mathcal{F}_x$, d.h.

$$\forall U \in \mathcal{U}(x_\infty)\ \forall i_0 \in I : U \cap \{x_i : i \succeq i_0\} \neq \emptyset,$$

also genau dann, wenn x_∞ ein Häufungswert des Netzes x ist.

Sei nun $x' = x \circ f : I' \to X$ feiner als x. Dann ist $\mathcal{F}_{x'}$ feiner als $\mathcal{F}_x$, denn für jedes $i_0 \in I$ ist das Element $\{x_i : i \succeq i_0\}$ der Filterbasis von $\mathcal{F}_x$ auch ein Element des Filters $\mathcal{F}_{x'}$, denn nach Voraussetzung existiert ein i_0' mit $f(i') \succeq i_0$ für alle $i' \succeq i_0'$ und somit ist $\{x'_{i'} = x_{f(i')} : i' \succeq i_0'\} \subseteq \{x_i : i \succeq i_0\}$.

Sei nun umgekehrt $\mathcal{F}$ ein Filter und $I := I_\mathcal{F} := \{(a, F) : a \in F \in \mathcal{F}\}$. Dann ist I vermöge der angegebenen Relation $\succeq$ eine gerichtete Menge und somit $x_\mathcal{F} : I \to X$ ein Netz.

Es ist x_∞ genau dann ein Grenzwert des Netzes $x = x_\mathcal{F}$, wenn für jedes $U \in \mathcal{U}(x_\infty)$ ein $i_0 = (a_0, F_0) \in I$ existiert mit $a = x_{a,F} \in U$ für alle $I \ni (a, F) \succeq (a_0, F_0)$ (d.h. für $a \in F \subseteq F_0$), d.h. $F_0 \subseteq U$, also genau dann wenn $\mathcal{F}$ feiner als $\mathcal{U}(x_\infty)$ ist, d.h. x_∞ ein Grenzwert des Filters $\mathcal{F}$ ist.

Es ist x_∞ genau dann ein Häufungspunkt des Netzes $x = x_\mathcal{F}$, wenn für jedes $U \in \mathcal{U}(x_\infty)$ und jedes $(a_0, F_0) \in I$ ein $I \ni (a, F) \succeq (a_0, F_0)$ existiert mit $a = x_{(a,F)} \in U$, d.h. ein $a \in F \subseteq F_0$ mit $a \in U$, also genau dann, wenn $U \cap F_0 \neq \emptyset$, d.h. x_∞ ein Häufungspunkt von $\mathcal{F}$ ist.

Es sei $x : I \to X$ das zu $\mathcal{F}$ gehörende Netz und $\mathcal{F}_x$ der zu x gehörende Filter. Seine Endabschnitte sind $\{x_{a,F} : I \ni (a, F) \succeq (a_0, F_0)\} = \{a : a \in F \subseteq F_0$ für ein $F \in \mathcal{F}\} = F_0$ für $F_0 \in \mathcal{F}$ also genau der ursprüngliche Filter $\mathcal{F}$. Somit ist $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}$. □

Es gelten die folgenden Analoga

3.4.8 Folgerung (Topologie via Filter).

(1) *(vgl. (3.4.2)) Sei $\mathcal{F}$ ein Filter und $\mathcal{F}'$ ein feinerer Filter. Dann ist jeder Limes von $\mathcal{F}$ auch einer von $\mathcal{F}'$, und jeder Häufungspunkt von $\mathcal{F}'$ auch einer von $\mathcal{F}$.*
Falls x_∞ Häufungspunkt von $\mathcal{F}$ ist, so existiert ein feinerer Filter $\mathcal{F}'$ welcher gegen x_∞ konvergiert.

(2) *(vgl. (3.4.3)) Es sei $A \subseteq X$. Dann ist $x_\infty \in \overline{A}$ genau dann, wenn eine Filterbasis in A existiert, sodaß der zugehörige Filter $\mathcal{F}$ in X gegen x_∞ konvergiert.*

Eine Menge A ist also genau dann abgeschlossen, wenn die Limiten aller Filter mit Filterbasis in A zu A gehören.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn das Bild jedes Limes eines Filters $\mathcal{F}$ in X ein Limes des von der Filterbasis $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$ erzeugten Filters $f(\mathcal{F})$ ist.

(3) *(vgl. (3.4.4)) Ein topologischer Raum ist genau dann T_2, wenn jeder Filter höchstens einen Grenzwert besitzt.*

(4) *(vgl. (3.4.5)) Ein T_2-Raum ist genau dann kompakt, wenn jeder Filter einen Häufungspunkt besitzt.*

Beweis. (1) Wegen $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ folgt aus $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{U}(x_\infty)$ auch $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{U}(x_\infty)$, d.h. die Aussage über Grenzwerte.
Sein nun x_∞ ein Häufungspunkt von $\mathcal{F}'$, dann trifft jedes $U \in \mathcal{U}(x_\infty)$ jedes $F \in \mathcal{F}'$ und somit auch jedes $F \in \mathcal{F}$, d.h. x_∞ ist Häufungspunkt von $\mathcal{F}$.
Sei schließlich x_∞ ein Häufungspunkt von $\mathcal{F}$. Dann ist x_∞ auch Häufungspunkt des nach (3.4.7) dazugehörenden Netzes x. Zu diesen existiert nach (3.4.2) also ein feineres Netz x' welches gegen x_∞ konvergiert. Somit ist $\mathcal{F}_{x'}$ ein gegen x_∞ konvergenter Filter, der feiner als der Filter $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}$ ist.
Direkter Beweis: Es ist $\{U \cap F : U \in \mathcal{U}(x_\infty), F \in \mathcal{F}\}$ offensichtlich eine Filterbasis. Der zugehörige Filter ist feiner als $\mathcal{F}$ und auch als $\mathcal{U}(x_\infty)$ also x_∞ ein Grenzwert von ihm.

(2) Der ersten beiden Teile folgen direkt aus (3.4.3) vermöge (3.4.7). Direkt geht es wie folgt:
($\Rightarrow$) Sei $x_\infty \in \overline{A}$. Dann ist $\mathcal{B} := \{U \cap A : U \in \mathcal{U}(x_\infty)\}$ Filterbasis in A eines gegen x_∞ konvergenten Filters.
($\Leftarrow$) Sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis in A eines gegen x_∞ konvergenten Filters, d.h. $\forall U \in \mathcal{U}(x_\infty)\ \exists B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq U$. Wegen $\emptyset \neq B \subseteq A$ ist also $A \cap U \neq \emptyset$, d.h. $x_\infty \in \overline{A}$.
Den letzten Teil zeigen wir direkt:
($\Rightarrow$) Es sei x_∞ ein Grenzwert von $\mathcal{F}$, d.h. $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{U}(x_\infty)$. Dann ist $f(x_\infty)$ ein Grenzwert von $f(\mathcal{F})$, denn zu $V \in \mathcal{U}(f(x_\infty))$ existiert wegen der Stetigkeit ein $U \in \mathcal{U}(x_\infty) \subseteq \mathcal{F}$ mit $f(U) \subseteq V$, d.h. $V \in f(\mathcal{F})$.
($\Leftarrow$) Da offensichtlich x_∞ eine Grenzwert von $\mathcal{U}(x_\infty)$ ist, ist $f(x_\infty)$ ein Grenzwert von $f(\mathcal{U}(x_\infty))$, d.h. für jedes $V \in \mathcal{U}(f(x_\infty))$ existiert ein $U \in \mathcal{U}(x_\infty)$ mit $f(U) \subseteq V$, also ist f stetig bei x_∞.

(3) folgt direkt aus (3.4.4) vermöge (3.4.7). Direkt läßt sich das leichter als für Netze zeigen.

(4) folgt direkt aus (3.4.5) vermöge (3.4.7). Auch dies läßt sich direkt leichter als für Netze zeigen. □

3.5 Uniforme Räume

3.5.1 Definition (Cauchy-Netze und Vollständigkeit).
cf. (3.1.1) Ein uniformer Raum $(X, \mathcal{D})$ heißt *vollständig*, wenn jedes Cauchy-Netz konvergiert. Dabei heißt ein Netz $x : I \to X$ *Cauchy-Netz* falls $\forall d \in \mathcal{D}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists i_0\ \forall i, i' \succeq i_0$: $d(x_i, x_{i'}) < \varepsilon$.

Beispiele.

(1) Jedes Produkt vollständig uniformer Räume ist vollständig uniformisierbar: Sei nämlich $(x_i)_i$ ein Cauchy-Netz in $\prod_j X_j$ bzgl. der Pseudo-Metriken die durch das Maximum von Pseudo-Metriken auf endlich vielen Komponenten gegeben sind. Dann ist jede Komponente $(x_i^j)_i$ ein Cauchy-Netz in X_j und konvergiert somit gegen ein x_∞^j. Sei x_∞ der entsprechende Punkt im Produkt mit diesen Koordinaten. Dann konvergiert $x_i \to x_\infty$ denn dazu müssen wir immer nur endlich viele Komponenten kontrollieren.

(2) Es sei X ein k-Raum und Y ein vollständig uniformer Raum. Dann ist auch $C(X, Y)$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta ein vollständig uniformisierbarer Raum: Pseudo-Metriken auf $C(X, Y)$ sind durch $d_K(f, g) := \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in K\}$ für $K \subseteq X$ kompakt und $d \in \mathcal{D}$ gegeben, siehe Aufgabe (19). Sei $(f_i)_i$ ein Cauchy-Netz in $C(X, Y)$. Dann ist für jedes $x \in X$ auch $(f_i(x))_i$ ein Cauchy-Netz in Y. Also existiert ein $f_\infty(x) := \lim_i f_i(x)$. Es konvergiert f_i gegen $f_\infty \in Y^X$, denn für $x \in K$ ist

$$\begin{aligned} d(f_i(x), f_\infty(x)) &\le d(f_i(x), f_{i'}(x)) + d(f_{i'}(x), f_\infty(x)) \\ &\le \varepsilon + \varepsilon \text{ falls } i, i' \succeq N_{d,\varepsilon,K} \text{ und } i' \succeq N_{d,\varepsilon,x}, \end{aligned}$$

und somit ist $d_K(f_i, f_\infty) \le 2\varepsilon$ für alle $i \succeq N_{d,K,\varepsilon}$.

Also ist $f_\infty|_K$ als glm. Grenzwert stetiger Funktionen nach (1.2.6) stetig, und da X ein k-Raum ist, ist $f_\infty : X \to Y$ stetig nach (2.3.6).

3.5.2 Proposition (Teilräume vollständig uniformer Räume). *cf. (3.1.2)*
Ein Teilraum Y eines vollständig uniformen Raumes X ist genau dann vollständig wenn er abgeschlossen ist.

Beweis. Dieser Beweis ist ident mit jenen von (3.1.2) wobei Folge durch Netz ersetzt wird.
($\Rightarrow$) Es ist $Y \subseteq X$ abgeschlossen, denn jedes Netz in Y welches in X konvergiert ist eine Cauchy-Netz in X und damit auch in Y und somit konvergent in Y, d.h. der eindeutige(!) Grenzwert liegt in Y.

($\Leftarrow$) Jede Cauchy-Netz in Y ist auch eine solche in X konvergiert also in X und wegen der Abgeschlossenheit liegt der Grenzwert in Y und das Netz konvergiert in Y. □

3.5.3 Proposition (Vollständigkeit via Durchschnittseigensch.). *cf. (3.1.4)*
Ein uniformer Raum ist genau dann vollständig, wenn jede Menge abgeschlossener Teilmengen mit endlicher Durchschnittseigenschaft und "beliebig kleinen Mengen" (d.h. $\forall d$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A$: $d(A) := \sup\{d(a,a') : a, a' \in A\} < \varepsilon$) einen nicht-leeren Durchschnitt besitzt.

Beachte, daß die Filter, die vermöge (3.4.7) den Cauchy-Netzen entsprechen, gerade jene Filter sind, die beliebig kleine Mengen enthalten. Die in der Proposition vorkommenden Mengensysteme beschreiben also gerade Cauchy-Filter die eine abgeschlossene Filterbasis besitzen. Allerdings kann ein gegen x_∞ konvergenter Filter $\mathcal{F}$ durchaus leeren Durchschnitt haben; z.B. ist $\{U \setminus \{x_\infty\} : U \in \mathcal{U}(x_\infty)\}$ eine Filterbasis so eines Filters. Umgekehrt muß allerdings jeder Cauchy-Filter $\mathcal{F}$ gegen jedes $x_\infty \in \bigcap \mathcal{F}$ konvergieren, denn für jedes $U \in \mathcal{U}(x_\infty)$ existiert ein $d \in \mathcal{D}$ und ein $\delta > 0$ mit $U_{d,\delta}(x_\infty) \subseteq U$ und somit auch ein $F \in \mathcal{F}$ mit $d(F) < \delta$ und damit $F \subseteq U_{d,\delta}(x_\infty) \subseteq U$ da $x_\infty \in F$.

Beweis. Dieser Beweis ist ähnlich zu jenen von (3.1.4) wobei Folge durch Netz ersetzt wird.
($\Rightarrow$) Es sei $\mathcal{A}$ so eine Menge abgeschlossener Teilmengen. Für jede endliche Teilmenge $i \subseteq \mathcal{A}$ wählen wir ein $x_i \in \bigcap i \neq \emptyset$. Dann ist $i \mapsto x_i$ ein Cauchy-Netz, wenn wir auf den endlichen Teilmengen von $\mathcal{A}$ die duale Ordnung verwenden, da $\forall d$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A \in \mathcal{A}$: $d(A) < \varepsilon$ und somit $d(x_i, x_{i'}) \leq \varepsilon$ für alle i, i' die A enthalten. Also konvergiert x_i gegen ein x_∞. Weiters ist $x_\infty \in A$ für alle $A \in \mathcal{A}$, da x schließlich in A ist und A abgeschlossen ist.

($\Leftarrow$) Es sei $(x_i)_i$ eine Cauchy-Netz. Dann ist $A_i := \overline{\{x_j : j \succeq i\}} \neq \emptyset$ abgeschlossen und monoton fallend. Weiters ist $d(\{x_j : j \succeq i\}) \to 0$ und somit $d(A_i) \to 0$. Sei $x_\infty \in \bigcap_i A_i$, dann ist x_∞ ein Häufungspunkt von x_i wegen $x_\infty \in A_i = \overline{\{x_j : j \succeq i\}}$. Also konvergiert x_i gegen x_∞, denn

$$d(x_i, x_\infty) \leq d(x_i, x_j) + d(x_j, x_\infty) < \varepsilon + \varepsilon. \quad \square$$

3.5.4 Folgerung (Vollständigkeit metrischer Räume).
Ein metrischer Raum ist genau dann vollständig, wenn er es als uniformer Raum ist.

Beweis. Nach (3.1.4) ist die Vollständigkeit eines metrischen Raumes äquivalent mit der die Vollständigkeit des zugehörigen uniformen Raumes nach (3.5.3) charakterisierenden Eigenschaft. □

3.5.5 Proposition (Erweiterung glm. stetiger Abbildungen). *cf. (3.1.5)*
Glm. stetige Abbildungen von dichten Teilräumen uniformer Räume mit Werten in vollständig uniformen Räumen besitzen eine globale stetige Erweiterung.

Beweis. Dieser Beweis ist ähnlich zu jenen von (3.1.5) wobei Folge durch Netz ersetzt wird.
Nach (3.5.3) existiert ein eindeutiger Punkt $\tilde f(x) \in \bigcap\{\overline{f(A \cap U_{d,\varepsilon}(x))} : d, \varepsilon > 0, x \in X\}$, denn wegen der glm. Stetigkeit enthält dieses Mengensystem beliebig kleine Teilmengen. Offensichtlich ist $\tilde f(x) = f(x)$ für $x \in A$. Bleibt zu zeigen, daß $\tilde f$ glm. stetig ist. Sei d eine Pseudo-Metrik von Y, $\varepsilon > 0$. Da $f : A \to Y$ glm. stetig ist existiert eine Pseudo-Metrik d' von X und ein $\varepsilon' > 0$ mit $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $d'(x_1, x_2) < \varepsilon'$. Für je zwei Punkte $z_1, z_2 \in X$ mit $d'(z_1, z_2) < \varepsilon'$ ist $U := U_r(z_1) \cup U_r(z_2)$ offen mit Durchmesser kleiner als $2r + d'(z_1, z_2) < \varepsilon'$ falls $r < \frac{\varepsilon' - d'(z_1,z_2)}{2}$ gewählt wird. Somit ist $d(\overline{f(A \cap U)}) = d(f(A \cap U)) \le \varepsilon$ und da $\tilde f(z_1), \tilde f(z_2) \in \overline{f(A \cap U)}$ liegt, ist $d(f(z_1), f(z_2)) \le \varepsilon$. □

3.5.6 Proposition (Vervollständigung). *cf. (3.1.6)*
Für jeden uniformen Raum X existiert ein vollständiger uniformer Raum $\tilde X$ und eine gleichmäßig stetige Einbettung $\iota : X \to \tilde X$ mit der universellen Eigenschaft für glm. stetige Abbildungen in vollständige uniforme Räume.

Beweis. Jeder uniforme Raum $(X, \mathcal{D})$ läßt sich in das Produkt metrischer Räume $X_d := (X, d)/_{\sim_d}$ einbetten, wobei $x \sim_d x' :\Leftrightarrow d(x, x') = 0$. Das Produkt $\prod_{d \in \mathcal{D}} \widetilde{X_d}$ der Vervollständigungen dieser metrischen Räume ist ein vollständig uniformer Raum . Nach (3.5.2) ist der Abschluß $\tilde X$ des Bildes von X in diesem Produkt ein vollständig uniformer Raum in dem X dicht eingebettet ist. Nach (3.5.5) besitzt jede glm. stetige Abbildung auf X mit Werten in einem vollständig uniformen Raum Y eine glm. stetige Erweiterung. □

3.5.7 Definition (Präkompakter Raum).
Ein uniformer Raum $(X, \mathcal{D})$ heißt *präkompakt*, wenn für jedes $d \in \mathcal{D}$ und $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $X_0 \subseteq X$ existiert mit $\bigcup_{x \in X_0} U_{d,\varepsilon}(x) = X$.

3.5.8 Proposition (Teilräume präkompakter Räume). *cf. (3.3.7)*
Alle Teilräume präkompakter uniformer Räume sind präkompakt. Abschlüsse präkompakter Teilmengen sind präkompakt.

Beweis. Dieser Beweis ist ident mit jenen von (3.3.7) wobei ε durch (d, ε) ersetzt wird.
Es sei X präkompakt und $M \subseteq X$. Für $\varepsilon > 0$ und d existiert eine endliche Teilmenge $X_0 \subseteq X$ mit $X = \bigcup_{x \in X_0} U_{d,\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Zu jeden $x \in X_0$ mit $U_{d,\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap M \neq \emptyset$ wählen

wir ein x' in diesen Durchschnitt und M_0 sei die endliche Menge dieser x'. Dann ist $M \subseteq \bigcup_{x' \in M_0} U_{d,\varepsilon}(x')$.

Es sei $\varepsilon > 0$, $d \in \mathcal{D}$ und M_0 $(d, \frac{\varepsilon}{2})$-dicht in M. Dann ist M_0 (d, ε)-dicht in $\overline{M}$. $\square$

3.5.9 Theorem. *cf. (3.3.8)*
Ein uniformer Raum ist kompakt genau dann wenn er präkompakt und vollständig ist.

Beweis. Die eine Richtung dieses Beweis ist ident mit jenen von (3.3.8) wobei ε durch (d, ε) ersetzt wird.
(kompakt $\Rightarrow$ präkompakt) ist klar, denn $\{U_{d,\varepsilon}(x) : x \in X\}$ ist eine offen Überdeckung und wenn $\{U_{d,\varepsilon}(x) : x \in X_0\}$ eine endliche Teilüberdeckung ist, so ist X_0 die für Präkompaktkeit gesuchte Teilmenge.
(kompakt $\Rightarrow$ vollständig) ist klar, denn nach (3.5.3) genügt zu zeigen, daß der Durchschnitt eine Menge abgeschlossener Mengen mit endlicher Durchschnittseigenschaft und beliebig kleinen Elementen nicht leer ist.
($\Leftarrow$) Es ist X einbettbar in ein Produkt metrischer (und o.B.d.A. vollständiger) Räume $\widetilde{X_d}$. Da X vollständig ist, ist diese Einbettung abgeschlossen nach (3.5.2). Mit X ist auch $X_d = \mathrm{pr}_d(X) \subseteq \widetilde{X_d}$ präkompakt und somit auch der Abschluß $\widetilde{X_d}$ nach (3.5.8). Also ist X_d nach (3.3.8) kompakt und damit auch X kompakt nach dem Satz (2.1.13) von Tychonoff. $\square$

3.5.10 Folgerung. *cf. Folgerung zu (3.3.8)*
Die Vervollständigung eines uniformen Raumes ist genau dann kompakt, wenn er selbst präkompakt ist.

Beweis. Dieser Beweis ist ident mit jenen der Folgerung in (3.3.8).

Wenn die Vervollständigung $\tilde{X}$ kompakt ist, so ist sie auch präkompakt nach (3.5.9) und damit auch X präkompakt nach (3.5.8).

Umgekehrt sei X präkompakt, dann ist auch die Vervollständigung $\tilde{X}$ präkompakt nach (3.5.8) und somit kompakt nach (3.5.9). $\square$

Literatur

L.A.Steen & J.A.Seebach, *Counterexamples in Topology*, Springer, NewYork, Heidelberg, Berlin, 1978.

C.O.Christenson & W.L.Voxman, *Aspects of Topology*, ISBN: 0-914351-08-07, BCS Asociate, Moscow, Idaho, USA, 1998.

Johann Cigler & Hans-Christian Reichel, *Topologie, Eine Grundvorlesung*, BI-Hochschultaschenbuch Bd.121; ISBN: 3-411-00121-6,, Bibliographisches Institut, Mannheim / Wien / Zürich, 1978.

Ryszard Engelking, *General Topology*, ISBN: 3-88538-006-4, Heldermann, Berlin, 1989.

Index

W

Z