Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, S2023.

Übung 1 (13-18 März 2023)

1. Aus einem Wurf werden vier Mäuse (ohne Wiederholung) ausgewählt. In diesem Wurf gibt es zwei weiße Mäuse. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide weißen Mäuse ausgewählt werden, ist zweimal die Wahrscheinlichkeit, dass beide *nicht* ausgewählt werden. Wie viele Mäuse gibt es insgesamt in diesem Wurf?
2. Ein Unternehmen gibt N verschiedene Arten von Kupons aus. Ein Sammler kauft k Kupons (wobei jeder Ausgang gleich wahrscheinlich ist). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie alle unterschiedlich sind?
3. (Fortsetzung). Sei $\alpha > 0$ und setzen wir $k = \lfloor \alpha \sqrt{N} \rfloor$. Zeigen Sie, dass diese Wahrscheinlichkeit einen Grenzwert hat, wenn N gegen unendlich konvergiert, und berechnen Sie ihn. (Sie können die Tatsache verwenden, dass

$$\log(1+x) \approx x$$

wenn x gegen 0 konvergiert). Was ist der Zusammenhang mit dem Geburtstagsproblem?

4. Ein voller Satz von $n = 52$ Karten wird zufällig in zwei Hälften geteilt. Finden Sie einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass jede Hälfte die gleiche Anzahl von roten und schwarzen Karten enthält.

Verwenden Sie die Stirling-Formel, um eine Näherung für dieselbe Wahrscheinlichkeit zu finden, und geben Sie diesen Näherungswert numerisch an.

5. Maria wirft zwei Münzen und Johannes wirft eine Münze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Maria öfter Kopf als John bekommt? (Ist das überraschend?) Beantworten Sie die gleiche Frage, wenn Maria drei Münzen wirft und Johannes zwei.
6. (Fortsetzung.) Stellen Sie eine Vermutung für die entsprechende Wahrscheinlichkeit auf, wenn Mary $n + 1$ und John n mal wirft. Können Sie Ihre Vermutung beweisen?

Übung 2 (20-25 März 2023)

7. Seien $A_1, A_2, \dots$, unabhängige Ereignisse. Zeigen Sie, dass $A_1^c, A_2^c, \dots$, auch unabhängig sind.

Sei weiters $B_1, B_2, \dots$ eine Folge von Ereignissen, wobei für jedes i entweder $B_i = A_i$ oder $B_i = A_i^c$. Zeigen Sie, dass auch $B_1, B_2, \dots$ unabhängig sind.

8. Jetzt nehmen Sie an, dass die abzählbare Folge von Ereignissen $A_1, A_2, \dots$ unabhängig ist, im Sinne, dass für jede endliche Sammlung von Indizes $i_1, \dots, i_n$ gilt

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_n}). \quad (1)$$

(Das ist die Definition aus der Vorlesung). Zeigen Sie, dass im letzten Beispiel (1) auch für eine unendliche Folge von Indizes gilt. Hinweis: Benutzen Sie die Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes.

9. Seien A, B Ereignisse mit $\mathbb{P}(B) > 0$ und $\mathbb{P}(A) > 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$ genau dann, wenn $\mathbb{P}(B|A) > \mathbb{P}(B)$. Wir sagen dann, dass A und B positiv korreliert sind.

Nehmen Sie an, dass A und B disjunkt sind. Können sie unabhängig sein?

Wir werfen N -mal eine Münze. Sei $A =$ "der erste Wurf ist Kopf", und $B =$ "wir bekommen insgesamt mindestens k Köpfe". Zeigen Sie, dass A und B positiv korreliert sind.

10. Eine unfaire Münze (mit der Wahrscheinlichkeit, Kopf zu erhalten, gleich $p > 0$) wird wiederholt und unabhängig geworfen, bis der erste Kopf beobachtet wird. Sei A das Ereignis, dass der erste Kopf bei einem geradzahligem Wurf eintritt. Benutzen Sie das Gesetz der vollständigen Wahrscheinlichkeit, um $\mathbb{P}(A)$ zu berechnen. Berechnen Sie es auch direkt durch Summation einer geometrische Reihe.

11. Informationen werden digital als Binärsequenz ("Bits") übertragen. Leider ist der Kanal nicht perfekt: jede gesendete Ziffer $i \in \{0, 1\}$ wird mit Wahrscheinlichkeit α als $1 - i$ empfangen (jeweils unabhängig von einander). Nehmen Sie an, dass unabhängige Ziffern übertragen werden, und jede Ziffer entweder gleich 0 mit Wahrscheinlichkeit $3/4$, oder gleich 1 mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ ist.

Gegeben dass das empfangene Signal 00 ist, was ist die Wahrscheinlichkeit dass 00 genau das gesendete Signal war? (Benutzen Sie den Satz von Bayes).

12. Sei X eine ganzzahlige Zufallsvariable mit der Verteilung

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}, \quad (n \geq 1),$$

wobei $s > 1$ und $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} 1/n^s$ die Riemannsche Zeta-Funktion ist.

Sei $\mathcal{P}$ die Menge der Primzahlen, und für $p \in \mathcal{P}$ sei A_p das Ereignis, dass X durch p teilbar ist. Berechnen Sie $\mathbb{P}(A_p)$ und zeigen Sie, dass $\{A_p\}_{p \in \mathcal{P}}$ unabhängig sind. Schließen Sie daraus, dass

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s})$$

(Euler-formel für die Riemannsche Zeta-Funktion).

13. Eine Seite aus einem Buch enthält eine zufällige Anzahl X von Tippfehlern. Nehmen Sie an, dass X die Poisson (λ) Verteilung hat:

$$\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Ein Korrektor überprüft die Seite und identifiziert jeden Tippfehler mit Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$, (jeweils unabhängig von einander). Finden Sie die Verteilung der Anzahl Y der identifizierten Tippfehler.

Hinweis: bemerken Sie, dass

$$\mathbb{P}(X = n, Y = k) = \mathbb{P}(Y = k | X = n) \mathbb{P}(X = n),$$

und benutzen Sie das Gesetz der vollständigen Wahrscheinlichkeit.

Übung 3 (27-31 März 2023)

14. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X ein fairer Würfel auf Ω . Zeigen Sie, dass Ω mindestens 6 Elemente hat.

Gibt es auf jedem solchen Wahrscheinlichkeitsraum eine mit Parameter $p = 1/7$ Bernoulli verteilte Zufallsvariable?

15. Sei Y geometrisch verteilt mit Parameter p . Zeigen Sie (sh. Beispiel 22 im Skriptum) dass $\mathbb{E}Y = 1/p$.

16. Wir werfen wiederholt eine Münze, für die die Wahrscheinlichkeit von Kopf gleich p ist, bis wir insgesamt r Köpfe bekommen (wobei $r \geq 1$). Sei X die entsprechende Anzahl von Würfeln. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}; \quad (k \geq r).$$

Was ist der Erwartungswert von X ? Berechnen Sie ihn (zB) mit Hilfe der Linearität des Erwartungswertes (führen Sie geeignete geometrische Zufallsvariablen ein).

17. Wir nehmen an, dass die jährliche Niederschlagsmenge in Wien in den Jahren $1, \dots, n$ eine (zufällige) Permutation von $1, \dots, n$ induziert (für jedes $n \geq 1$). Wir sagen, dass das Jahr i ein Rekordjahr ist, wenn die Niederschlagsmenge in diesem Jahr größer ist als in den Jahren $1, \dots, i-1$. (D.h., Jahr 1 ist immer ein Rekordjahr). Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_n , dass das Jahr n ein Rekordjahr ist?

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der Anzahl R_n der Rekordjahre bis zum Jahr n gleich

$$\mathbb{E}(R_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

ist. (Hinweis: führen Sie die Zufallsvariable $Z_i = 1_{A_i}$ ein, wobei 1_A ist die Bernoulli Zufallsvariable gleich entweder 1 wenn A eintritt, oder 0 wenn A nicht eintritt. Benutzen Sie die Linearität der Erwartungswertes).

18. Sei N eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(N > n).$$

Hinweis: Beginnen Sie mit der rechten Seite, und drücken Sie das Ereignis als disjunkte Vereinigung aus: man kann sich überlegen, dass $\mathbb{P}(N > n) = p_{n+1} + p_{n+2} + \dots$ (wobei $p_k = \mathbb{P}(N = k)$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion bezeichnet).

19. (Fortsetzung.) Ich verkaufe mein Auto auf Willhaben und erhalte zufällige Angebote. Nehmen wir an, dass die Ordnung der ersten n Angebote eine zufällige Permutation ergibt. Meine Strategie ist, auf das erste Angebot N zu warten, das größer ist als das erste Angebot, das ich bekomme (also $N \geq 2$ immer). Zeigen Sie, dass ich durchschnittlich unendlich lange warten muss. (Hinweis: berechnen Sie $\mathbb{P}(N > n)$ und verwenden Sie die Formel der letzten Aufgabe.)

20. Sei X eine (diskrete) Zufallsvariable mit wohldefiniertem Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Wir definieren eine Funktion V durch

$$V(x) = \mathbb{E}((X - x)^2); \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $V(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist. Danach drücken Sie die Zufallsvariable $V(X)$ durch μ, σ^2 und X aus. Schließen Sie daraus, dass

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\mathbb{E}(V(X)).$$

Übung 4 (17-23 April 2023)

21. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum auf dem zwei unabhängige Würfel X, Y definiert sind (d.h. X, Y sind jeweils gleichverteilt auf der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). Beweisen Sie, dass Ω mindestens 36 Elemente hat.

21. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $E = L^2(\mathbb{P})$ der Raum aller Zufallsvariablen über Ω sodass $\mathbb{E}(X^2) < \infty$. Zeigen Sie, dass E ein Vektorraum ist und $(X, Y) \mapsto \mathbb{E}(XY)$ ein Skalarprodukt auf E definiert. (*Hinweis: verwenden Sie die Cauchy-Schwarz Ungleichung.*)

22. (Fortsetzung). Sei H der Raum der Zufallsvariablen in E mit $\mathbb{E}(X) = 0$ (erklären Sie, warum $\mathbb{E}(X)$ wohldefiniert ist). Zeigen Sie, dass H auch ein Vektorraum ist. Zeigen Sie auch, dass $(X, Y) \mapsto \text{Cov}(X, Y)$ ein Skalarprodukt auf H definiert.

Erklären Sie warum $\text{Var}(X)$ wohldefiniert ist sobald $\mathbb{E}(X^2) < \infty$.

23. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige diskrete Zufallsvariablen. Seien $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Zeigen Sie, dass $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ auch unabhängig sind.

Zeigen Sie, dass X_1 und $X_2 + \dots + X_n$ unabhängig sind. [*Hinweis: führen Sie die Funktion $g(x_2, \dots, x_n) = x_2 + \dots + x_n$ ein.*]

24. Sei Z_n gleichverteilt auf $U_n = \{e^{2ik\pi/n}\}_{k=0, \dots, n-1}$. Sei $X_n = \Re(Z_n)$ und $Y_n = \Im(Z_n)$. Zeigen Sie, dass X_n und Y_n unkorreliert sind, aber nicht unabhängig. Zeichnen Sie ein Bild und erklären Sie mit diesem Bild die Unkorreliertheit. Es ist hilfreich anzudenken, was die bedingte Verteilung von Y , gegeben $X = x$, ist? Die bedingte Verteilung ist definiert als

$$P_{Y|X=x}(A) := \frac{P_{(X,Y)}(A \times B)}{P_Y(y)}.$$

25. Seien X, Y Poissonverteilte Zufallsvariablen mit Parametern λ, μ . Nehmen wir an, dass X, Y unabhängig sind. Finden Sie die Verteilung von $Z = X + Y$. Gegeben $Z = n$, was ist die (bedingte) Verteilung von X ?

26. Seien X, Y ganzzahlige Zufallsvariablen mit der Verteilung

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}, \quad (n \geq 1),$$

wobei $s > 1$ und $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} 1/n^s$ die Riemann'sche Zeta-Funktion ist. Nehmen wir an, dass X und Y unabhängig sind. Sei Z der größte gemeinsame Teiler von X und Y . Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(Z = n) = \frac{n^{-2s}}{\zeta(2s)}.$$

27. Seien $x_1, \dots, x_n > 0$. Zeigen Sie mithilfe der Jensen'schen Ungleichung, dass

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Seien $y_i, \dots, y_n$ eine Neuordnung von $x_1, \dots, x_n$. Schließen Sie daraus, dass

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} \geq n.$$

28. Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(x), x \in \mathcal{W}$. Sei $q(x)$ eine andere Verteilung, i.e., $q(x) \geq 0$ für $x \in \mathcal{W}$ und $\sum_{x \in \mathcal{W}} q(x) = 1$. Zeigen Sie, dass

$$-\mathbb{E}[\log_2 q(X)] \geq H(X),$$

wobei $H(X) := -\sum_{x \in \mathcal{W}_X} p(x) \log_2(p(x))$ die Entropie von X ist. (Per Konvention nehmen wir $-\log_2 0 = \infty$.)

Übung 5 (24-28 April 2023)

28. Sei f eine zwei mal stetig differenzierbare Funktion mit $f'' > 0$. Nehmen Sie an, dass $\mathbb{E}(f(X)) = f(\mathbb{E}(X))$. Zeigen Sie, dass X eine (nicht zufällige) Konstante ist, d.h., $X = \mathbb{E}(X)$. (Wenn Sie wollen, könnten Sie annehmen, dass X nur endliche viele Werte nimmt.)

29. (Fortsetzung.) Seien nun X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit Wahrscheinlichkeitsfunktionen p und q und Werten in der Menge $\mathcal{W}$. (Wenn Sie wollen, könnten Sie annehmen, dass $\mathcal{W}$ endlich ist.) Wir definieren die relative Entropie von X bezüglich Y als die Größe

$$H(X|Y) = - \sum_{x \in \mathcal{W}} p(x) \log_2(p(x)/q(x)).$$

Zeigen Sie, dass $H(X|Y) \leq 0$ (verwenden Sie Problem 8 aus Übung 4, oder argumentieren sie mit der Konvexität der Funktion $x \mapsto x \log(x)$). Falls $H(X|Y) = 0$, zeigen Sie, dass $p(x) = q(x)$ (d.h., X und Y sind identisch verteilt).

30. Seien X und Y diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung $p(x, y)$, und Randverteilungen die wir als p_X und p_Y bezeichnen. Die gemeinsame Information I ist die Größe

$$I = \sum_{x,y} p(x, y) \log_2 \left(\frac{p(x, y)}{p_X(x)p_Y(y)} \right) = \mathbb{E} \left[\log \left(\frac{p(X, Y)}{p_X(X)p_Y(Y)} \right) \right]$$

Zeigen Sie, dass $I \geq 0$ und $I = 0$ genau dann, wenn X und Y unabhängig sind. (Verwenden Sie Problem 2.) D.h. I misst die Entfernung von Unabhängigkeit.

31. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen. Sei μ der Erwartungswert und σ^2 die Varianz. Bestimmen Sie mit Hilfe der Chebyshev'schen Ungleichung eine Stichprobengröße n , damit die Wahrscheinlichkeit mindestens 0,99 beträgt, dass der Stichprobenmittelwert (empirisches Mittel) $\bar{X}_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$ innerhalb von zwei Standardabweichungen von μ ist.

32. Sei $(X_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von Zufallsvariablen, und sei $m_n = \mathbb{E}(X_n)$ und $\sigma_n = \sqrt{\text{Var}(X_n)}$ die Standardabweichung. Wir sagen, dass X_n um seinen Mittelwert konzentriert ist, wenn für alle $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{X_n}{m_n} - 1 \right| > \epsilon \right) = 0.$$

Zeigen Sie, dass (X_n) um seinen Mittelwert konzentriert ist, wenn $\sigma_n/m_n \rightarrow 0$.

33. (Fortsetzung.) Seien nun $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen. Wir nehmen an, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = m$, und $\text{Var}(X_n) \leq C < \infty$. (Bemerken Sie, dass die X_n nicht identisch verteilt angenommen werden). Zeigen Sie, dass $\bar{X}_n := (X_1 + \dots + X_n)/n$ um seinen Mittelwert konzentriert ist. (Sie dürfen voraussetzen, dass die Cesaro-Mittel einer konvergenten Folge konvergieren.) Schließen Sie daraus, dass für alle $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - m| > \epsilon) \rightarrow 0.$$

34. Seien X und Y diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung $p(x, y)$. Nehmen wir an, dass es zwei Funktionen f und g gibt, sodass

$$p(x, y) = f(x)g(y).$$

Zeigen Sie, dass es Konstanten C_1 und C_2 gibt, sodass

$$f(x) = C_1 p_X(x); g(y) = C_2 p_Y(y);$$

wobei p_X und p_Y die Randverteilungen sind. Schließen Sie daraus, dass X und Y unabhängig sind.

35. Seien X, Y die Augenzahlen von zwei unabhängigen Würfeln, und sei $S = X + Y$. Finden Sie die gemeinsame Verteilung von (X, S) und schließen Sie daraus die Randverteilung p_n von S . Machen Sie ein Bild, und prüfen Sie dass

$$p_{7-m} = p_{7+m}$$

für jede $0 \leq m \leq 5$.

Was ist die bedingte Verteilung von X gegeben $S = n$ (wobei $2 \leq n \leq 12$)? (Überlegen Sie die Fälle $2 \leq n \leq 7$ und $7 \leq n \leq 12$ getrennt). Was ist die entsprechende bedingte Erwartung?

(Hinweis: verwenden Sie die Symmetrie der Randverteilung von S).

Übung 7 (8-12 Mai 2023)

In ersten Beispielen sind jeweils Eigenschaften der bedingten Erwartung zu zeigen. Alle Zufallsvariablen die dabei vorkommen, werden als integrierbar vorausgesetzt.

36. Zeigen Sie: $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$.

37. Zeigen Sie: Falls $X \geq 0$ so gilt auch $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$.

38. Falls $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ so gilt

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}].$$

39. Falls X unabhängig von $\mathcal{G}$ ist, so gilt

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X].$$

40. Sei $(X_n)_n$ ein adaptierter, integrierbarer Prozeß. Angenommen für alle beschränkten, previsiblen $(H_n)_n$ gilt

$$\mathbb{E}(H \cdot X)_n = 0.$$

Zeigen Sie, dass X dann ein Martingal ist. (Hinweis: betrachten Sie geeignete Strategien H die zu den meisten Zeitpunkten 0 sind und nur zu einem Zeitpunkt auf einer geeigneten Menge auch den Wert 1 annehmen.)

41. Seien σ, τ Stoppzeiten. Zeigen Sie, dass dann auch $\sigma \wedge \tau, \sigma \vee \tau$ Stoppzeiten sind.

42. Sei $(X_n)_n$ ein adaptierter Prozeß und $B \subseteq \mathbb{R}$ eine Borelmenge. Zeigen Sie, dass

$$\tau := \inf\{n : X_n \in B\}$$

eine Stoppzeit ist.

Übung 8 (15-17 Mai 2023)

43. Zeigen Sie: Ist $(X_n)_n$ ein Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_n$, dann ist $(X_n)_n$ auch ein Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{G}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n), n \geq 1$.

44. Sei $(X_n)_n$ ein Martingal und ϕ konvex. Sei weiters ϕ konvex und $\mathbb{E}[\phi(X_n)] < \infty, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(\phi(X_n))_n$ ein Submartingal ist.

45. Angenommen, in der Situation des letzten Beispiels ist $(X_n)_n$ selbst nur ein Submartingal. Zeigen Sie, dass der Satz dann nicht mehr stimmt. Fällt ihnen eine natürliche zusätzliche Forderung an ϕ ein, sodass der Satz weiterhin gilt?

46. Betrachten Sie als Wahrscheinlichkeitsraum das Einheitsintervall mit Lebesguemaß und $X_n := nI_{[0,1/n]}, n \geq 1$. Gibt es eine Filtration, so dass X_n ein Martingal wird?

47. Zeigen Sie: Ist eine Folge von Zufallsvariablen (X_n) uniform integrierbar, so gilt $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ sowie

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_n \sup_{B: \mathbb{P}(B) \leq \varepsilon} \int_B |X_n| d\mathbb{P} \rightarrow 0. \quad (2)$$

48. Eine Folge von Zufallsvariablen (X_n) mit $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ erfülle

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_n \sup_{B: \mathbb{P}(B) \leq \varepsilon} \int_B |X_n| d\mathbb{P} \rightarrow 0. \quad (3)$$

Zeigen Sie, dass (X_n) uniform integrierbar ist.

Übung 9 (22-26 Mai 2023)

48. Zeigen Sie: Falls alle Ereignisse einer σ -Algebra $\mathcal{F}$ trivial sind in dem Sinne, dass $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ für $A \in \mathcal{F}$, dann ist jede $\mathcal{F}$ -messbare Funktion konstant.

49. Wir haben für allgemeine Zufallsvariablen $\mathbb{E}[X|Y]$ als $\mathbb{E}[X|\sigma(Y)]$ definiert. Zeigen Sie: wenn Y diskret ist, gibt es eine P_Y -fast sicher eindeutig bestimmte Funktion f sodass

$$\mathbb{E}[X|\sigma(Y)] = f(Y).$$

(Mittels geeigneter Approximationsargumente kann man den Satz auch für allgemeines Y zeigen.)

50. Beweisen Sie mit Hilfe des upcrossing lemmas den Konvergenzsatz für Rückwärtsmartingale: Gegeben eine Folge von σ -Algebren

$$\dots \subseteq \mathcal{G}_{-3} \subseteq \mathcal{G}_{-2} \subseteq \mathcal{G}_{-1}$$

und

$$Y_{-n} := \mathbb{E}[Y_0|\mathcal{G}_{-n}]$$

für $n \in \mathbb{N}$ und eine integrierbare Zufallsvariable Y_0 , existiert

$$Y_{-\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{-n}$$

fast sicher.

51. Sei τ eine Stoppzeit sodass für geeignetes $N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}(\tau \leq n + N | \mathcal{F}_n) > \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie mit Induktion, dass $\mathbb{P}(\tau > kN) \leq (1 - \varepsilon)^k$. Schließen Sie dass $\mathbb{E}\tau < \infty$.

(Bem: $\mathbb{P}(A|\mathcal{F}) = \mathbb{E}[I_A|\mathcal{F}]$.)

52. (Verzweigungsprozess.) Sei $\{X_k^{(n)} : n, k \geq 1\}$ eine Familie von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}$, Mittel R und Varianz $\sigma^2 < \infty$. Wir definieren (Z_n) rekursiv durch $Z_0 = 1$ und

$$Z_{n+1} := X_1^{(n+1)} + \dots + X_{Z_n}^{(n+1)}.$$

Zeigen Sie, dass $M_n := Z_n/R^n$ ein Martingal bez. $\mathcal{F}_n := \sigma(Z_0, \dots, Z_n)$ definiert.

53. Fortsetzung.

Zeigen Sie weiters, dass

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = R^2 Z_n^2 + \sigma^2 Z_n$$

und schließen Sie, dass M genau dann in L^2 beschränkt ist, wenn $R > 1$.

Übung 10 (29. Mai - 2. Juni 2023)

54. Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von Zufallsvariablen die schwach gegen eine konstante Zufallsvariable $X = c \in \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Folge dann auch in Wahrscheinlichkeit konvergiert.

55. Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von Zufallsvariablen sodass $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$. Zeigen Sie dass die Folge straff ('tight') ist.

55. Seien $X_1, \dots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, mit momentenerzeugender Funktion $G(z) < \infty, z \in (-\theta, \theta)$. Zeigen Sie, dass $G(z) = 1 + mz + o(z)$ wenn $z \rightarrow 0$, wobei $m = \mathbb{E}(X_1)$ wohldefiniert ist.

56. (Fortsetzung.) Sei $\bar{X}_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$, und sei $\bar{G}_n(z)$ ihre momentenerzeugende Funktion. Zeigen Sie, dass $\bar{G}_n(z) = G(z/n)^n$. Zeigen Sie, dass

$$\bar{G}_n(z) \rightarrow e^{zm}$$

wenn $n \rightarrow \infty$. Was ist die Verbindung mit dem Gesetz der Großen Zahlen?

57. Sei X eine $N(m, \sigma^2)$ normalverteilte Zufallsvariable mit Parameter m und $\sigma^2 > 0$. Zeigen, Sie $\mathbb{E}(X) = m$ und $\text{Var}(X) = \sigma^2$.

Zeigen Sie auch, dass $(X - m)/\sigma$ die normalverteilt mit Parametern 0 und 1 ist.

58. Sei $X_1, \dots, X_n$ unabhängige $N(m_i, \sigma_i^2)$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ auch normalverteilt ist, und finden die Parametern. Zeigen Sie insbesondere im Fall $m_i = m, \sigma_i^2 = \sigma^2$, dass

$$\frac{(X_1 + \dots + X_n) - mn}{\sqrt{n}} \sim N(0, \sigma^2).$$

59. Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig und $N(0, 1)$ -verteilt. Zeigen sie, dass

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$$

nicht fast sicher konvergiert. (In dem Zusammenhang ist das 0-1-Gesetz von Kolmogorov interessant.)

Übung 11 (4. Juni - 9. Juni 2023)

60. Sei $(S_n)_{n \geq 0}$ die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$, $b > 0$ und $\tau_{-b,b} := \inf\{n \geq 0 : |S_n| > b\}$. Zeigen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertungssatzes, dass $\mathbb{P}(\tau_{-b,b} < \infty) = 1$.

(Bemerkung: tatsächlich gilt nach dem Gesetz des iterierten Logarithmus sogar, dass $\inf\{n \geq 0 : S_n > b\sqrt{n}\}$ fast sicher endlich ist.)

61. Seien $X_1, \dots, X_n$ gleichverteilt auf dem Intervall $[0, \theta]$ (d.h. die Dichte von X_i ist $\frac{1}{\theta} I_{[0,\theta]}$) wobei $\theta > 0$ uns unbekannt ist. Zeigen, Sie dass der MLS $\hat{\theta}$ für θ durch

$$\hat{\theta} = \max_i x_i$$

gegeben ist.

62. (Fortsetzung des Glühbirnenbeispiels aus der Vorlesung). Seien $X_1, \dots, X_n$ exponentialverteilt mit Parameter $1/\mu$, d.h. die Dichte von X_i ist gegeben durch $f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$ sodass μ gerade der Erwartungswert von X_i ist. Gegeben die Beobachtung $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ erhalten wir für μ den MLS

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Wie und in welchem Sinn können wir sicherstellen, dass sich

$$\hat{\mu}(X_1, \dots, X_n)$$

für große n dem tatsächlichen Wert von μ annähert?

63. Smarties sind Süßigkeiten die in k verschiedenen Farben hergestellt werden, wobei wir den Parameter k nicht kennen. (Aber jemand hat uns verraten, dass alle Farben gleich häufig auftreten.) Angenommen wir ziehen zunächst ein rotes, dann ein grünes und dann wieder ein rotes Smartie aus der Verpackung. Zeigen Sie, dass die Likelihood Funktion durch $L(k) = (k-1)/k^2$ gegeben ist. Schließen Sie daraus, $\hat{k} = 2$ (wobei $\hat{k}$ die MLS für k ist). *Hinweis: Sie können einige Zahlenwerte numerisch auswerten, und eine geeignete Funktion studieren.*

64. (Fortsetzung.) Angenommen ein weiteres Smartie wird gezogen und dieses ist blau. Zeigen Sie, dass die neue maximum likelihood Schätzung $\hat{k} = 5$ erfüllt (obwohl wir nur drei Farben beobachtet haben!) *Hinweis: verwenden Sie ein geeignetes Programm oder einen online-Rechner wie Wolfram Alpha zur Unterstützung, wenn notwendig.*

65. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und geometrisch verteilt mit Parameter p . Bestimmen Sie den MLS für p .

letzte Übung - Probeprüfung

- 66.** (a) Definieren Sie die Begriffe Wahrscheinlichkeitsraum und Zufallsvariable
 (b) Finden Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und eine Zufallsvariable X sodass die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion erfüllt, dass $p_X(1) = 1/2, p_X(2) = 1/3, p_X(3) = 1/6$.

(c) Angenommen, der Wahrscheinlichkeitsraum soll zusätzlich noch eine unabhängige (faire) Münze tragen. Wie viele Elemente muß er dann mindestens enthalten? (mit Beweis)

- 67.** (a) Wie ist die Momentenerzeugende / Charakteristische Funktion einer Zufallsvariable definiert?

Sei $0 < p < 1$. Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter $0 < p < 1$. D.h., für $n \geq 1$ gilt $\mathbb{P}(X = n) = p_n$, wobei $p_n = (1 - p)^{n-1}p$.

- (b) Zeigen Sie, dass $(p_n)_{n \geq 1}$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion definiert (d.h., $\sum_n p_n = 1$).
 (c) Berechnen Sie die momenten-erzeugende Funktion.
 (d) Schließen Sie daraus, dass $\mathbb{E}(X) = 1/p$.

- 68.** Seien $X, X_1, X_2, \dots$ Zufallsvariablen.

(a) Formulieren Sie eine Variante des Gesetzes der großen Zahlen.

(b) Die Varianz $\text{Var}(X)$ von X wird definiert als $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - m^2$ wobei $m = \mathbb{E}(X)$. Zeigen Sie, dass $\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - m)^2)$. Geben Sie eine ähnliche Definition und Gleichung für die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$.

(d) Nehmen wir an, dass $X_i, i \geq 1$ unabhängig sind. Zeigen Sie, dass $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$. Schließen Sie daraus, dass $\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$. Warum ist das im Zusammenhang mit dem Gesetz der großen Zahlen hilfreich?

- 69.**

(a) Wie ist der Maximum-likelihood Schätzer definiert. Was bedeutet, dass eine Schätzer konsistent ist?

Angenommen, in einer Population von Zwillingen treten Männer (M) und Frauen (F) mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf und die Wahrscheinlichkeit, dass Zwillinge eineiig sind sei θ . Wenn Zwillinge nicht eineiig sind, sei ihr jeweiliges Geschlecht unabhängig (wenn sie eineiig sind, sind ihre Geschlechter gleich).

(b) Zeigen Sie (ohne Berücksichtigung der Geburtsreihenfolge),

$$\mathbb{P}(MM) = \mathbb{P}(FF) = (1 + \theta)/4, \quad \mathbb{P}(MF) = (1 - \theta)/2.$$

(c) Angenommen, es werden n Zwillingspaare untersucht. Es wird gefunden, dass n_1 MM sind, n_2 FF sind und n_3 MF sind (wobei $n_1 + n_2 + n_3 = n$), aber es ist nicht bekannt, welche Zwillinge identisch sind. Wir möchten θ maximum-likelihood schätzen. Zeigen Sie, dass

$$L(\theta) = \text{Konst.} \cdot (1 + \theta)^{n_1 + n_2} (1 - \theta)^{n_3}$$

wobei die obige Konstante nicht von θ abhängt, und $L(\theta)$ die Likelihoodfunktion ist.

(d) Schließen Sie, dass wenn $n_3 \leq n_1 + n_2$,

$$\hat{\theta} = \frac{n_1 + n_2 - n_3}{n},$$

wobei $\hat{\theta}$ der Maximum Likelihood Schätzer ist.