Im folgenden bezeichne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ stets einen Wahrscheinlichkeitsraum wobei $|\Omega| < \infty$ und \mathcal{F} die Potenzmenge von Ω ist. Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine weitere σ -Algebra die von der Partition B_1, \ldots, B_k erzeugt wird.

- 1. Sei X eine ZV mit $X = \sum_i \alpha_i I_{B_i}, \alpha_i \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass X dann \mathcal{G} -messbar ist.
- 2. Sei X eine ZV die \mathcal{G} -messbar ist. Zeigen Sie, dass X dann die Form aus dem vorherigen Beispiel hat.
- 3. Zeigen (begründen) Sie zwei der folgenden Eigenschaften der bedingten Erwartung (wobei X eine ZV bezeichnet):
 - $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.
 - Die Abbildung $X \mapsto \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ is linear.
 - Falls $X \ge 0$ dann gilt auch $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \ge 0$.
 - Sei $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ eine weitere σ -Algebra. Dann gilt $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$.
 - Ist $Y \mathcal{G}$ -messbar, dann gilt $Y \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]$.
- 4. Zeigen Sie zwei weitere der obigen Eigenschaften.
- 5. Seien X, Y ZV die je endlich viele Werte annehmen. Zeigen Sie dass

$$\sigma(X) \subseteq \sigma(Y)$$

genau dann gilt wenn es eine Funktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass h(Y) = X.

- 6. (alternative Charakterisierung der bedingten Erwartung) Bezeichne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ einen Wahrscheinlichkeitsraum wobei $|\Omega| < \infty$ und \mathcal{F} die Potenzmenge von Ω ist. Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine weitere σ -Algebra die von der Partition B_1, \ldots, B_k erzeugt wird. Sei Z eine \mathcal{G} -messbare Zufallsvariable sodass für alle $B \in \mathcal{G}$, $\mathbb{E}I_BZ = \mathbb{E}I_BX$. Zeigen Sie dass $Z = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.
- 7. Konstruieren Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum und einen (möglichst interessanten) stochastischen Prozeß der ein Martingal ist.

- 1. Gegeben sei ein Martingal X und ein previsibler Prozeß H. Zeigen Sie, dass $M_t := (H \cdot X)_t$ wieder ein Martingal definiert und dass insbesondere $\mathbb{E}(H \cdot X)_T = 0$.
- 2. Bezeichne X den random walk. Berechnen Sie die Doob-Zerlegung des durch $Z_t:=X_t^2$ definierten Prozesses.
- 3. Umgekehrt sei X ein adaptierter Prozeß sodass $\mathbb{E}(H \cdot X)_T = 0$ für alle previsiblen Prozesse H. Zeigen Sie, dass X ein Martingal ist.
- 4. Sei $\Omega=\{-1,0,1\},\ \mathbb{P}(\{-1\})=1/4,\mathbb{P}(\{0\})=1/4,\mathbb{P}(\{1\})=1/2,\ X_0=1,\ X_1(\omega)=1+\omega$ und $\mathcal F$ die von X erzeugte Filtration. Bestimmen Sie explizit die Menge der erreichbaren Auszahlungen $K=\{(H\cdot X)_1:H\in\mathcal H\}.$
- 5. Sei $\Omega = \{-1, 1\}$, $\mathbb{P}(\{-1\}) = 1/3$, $\mathbb{P}(\{1\}) = 2/3$, $S_0 = 1$, $S_1(\omega) = 1 + \omega$ und \mathcal{F} die von S erzeugte Filtration. Bestimmen Sie die Menge aller äquivalenten Martingalmaße. Versuchen Sie $L(\mathbb{P})$ und die Menge der Martingalmaße graphisch darzustellen.
- 6. Mittels des Vektorraumisomorphismus aus der Vorlesung überträgt sich die Topologie von \mathbb{R}^N aus die Menge L^d der signierten Maße. Gegeben $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \in L^d$ zeigen Sie, dass

$$\lim_{n} \sigma_{n} = \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathcal{F}, \lim_{n} \sigma_{n}(A) = \sigma(A). \tag{1}$$

7. Zeigen Sie, dass die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße $W\subseteq L^d$ konvex und abgeschlossen ist.

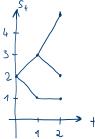
- 1. Konstruieren Sie ein Modell in dem es mehr als ein äquivalentes Martingalmaß gibt. Hinweis: Vielleicht wollen Sie T=1 und $\Omega=\{-1,0,1\}$ betrachten.
- 2. Konstruieren Sie ein Modell mit T=2 in dem es genau ein äquivalentes Martingalmaß gibt.
- 3. Konstruieren Sie ein Modell in dem es ein (absolut stetiges) Martingalmaß gibt, aber keines das auch äquivalent zu \mathbb{P} ist.
- 4. Es gelte (NA). Sei Z ein Derivat, $\mathbb{Q} \in M^e$. Dann ist

$$\mathbb{E}_{\mathbb{O}}Z$$

ein arbitragefreier Preis von Z.

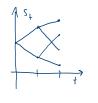
- 5. Betrachten Sie das durch $\Omega = \{-1, 0, 1\}$, $X_0 = 2, X_1(\omega) = X_0 + \omega$ gegebene Modell. Finden Sie ein Derivat, das nicht erreichbar ist.
- 6. Ein 2-d Prozess $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_n, (X_n)_n)$) mit $X = (X^1 \ X^2)$ ist ein Martingal wenn für jedes $i \in \{1,2\}$ der Prozeß $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_n, (X_n^i)_n))$ ein Martingal ist. Zeigen Sie, dass das noch nicht folgt, wenn X^1, X^2 Martingale in der jeweils eigenen Filtration sind.

1. Das Bild stellt ein Martingal $S=(S_k)_{k=0}^2$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum dar. Bestimmen sie eine konkrete Wahl von Ω , \mathcal{F} , \mathbb{P} und S die zu dem Bild passt. (Hinweis: Der Prozeß nimmt nur ganzzahlige Werte an.)



Angenommen dass Bild stellt die möglichen Entwicklungen eines Preisprozesses dar. Bestimmen sie den 'fairen Preis' der europäischen Call option $(S_2-2)_+$

2. / 3. Überlegen sie für die ersten beiden / die letzten beiden dargestellten Modelle ob Sie NA erfüllen und ob Sie vollständig sind.

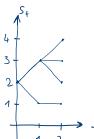








4. Bestimmen Sie im unten dargestellten Modell die Menge aller absolut stetigen Martingalmaße und für die europäische Call Option $(S_2-3)_+$ jeweils (optimale) untere und obere Schranken für die Menge der arbitragefreien Preise.



- 5. Fortsetzung: Finden Sie im Modell aus dem letzten Beispiel eine Strategie, die die europäische Call Option $(S_2-2)_+$ repliziert.
- 6. Ein 2-d Prozess $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_n, (X_n)_n))$ mit $X = (X^1 \ X^2)$ ist ein Martingal wenn für jedes $i \in \{1,2\}$ der Prozeß $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_n, (X_n^i)_n))$ ein Martingal ist. Zeigen Sie, dass das noch nicht folgt, wenn $\alpha X^1 + \beta X^2$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ein Martingal in der eigenen Filtration ist.

1. Beweisen Sie: Ein Ereignis A ist von der σ -Algebra $\mathcal G$ genau dann unabhängig wenn

$$\mathbb{P}[A|\mathcal{G}] = \mathbb{P}[A].$$

2. Sei $\Omega = \{-1,1\}^N, Y_n(y_1,\ldots,y_N) = y_n, \ \mathcal{F}_n = \sigma(Y_1,\ldots,Y_n)$. Bezeichne weiters $X_n = c + Y_1 + \ldots + Y_n, c \in \mathbb{R}$ den Aktienpreisprozeß in unserem Modell.

Zeigen Sie, dass das Modell vollständig ist und das eindeutige Martingalmaß $\mathbb Q$ folgende Bedingungen erfüllt:

- $\mathbb{Q}(Y_n = 1) = 1/2, n \le N$
- \mathcal{F}_n, Y_{n+1} unabhängig für n < N.
- 3. Betrachten Sie wieder das Modell aus dem vorherigen Beispiel. Sei ein Derivat $f(X_N)$ gegeben. Finden Sie eine Rekursion für den Wertprozeß $v_t(X_t) := V_t := \mathbb{E}[f(X_N)|\mathcal{F}_t]$ und die Strategie $H_t = h_t(X_{t-1})$ die

$$\mathbb{E}[f(X_N)] + (H \cdot X)_N = f(X_N)$$

erfüllt.

- 4. Zeigen Sie, dass $\sup_{H\in\mathcal{H}}\mathbb{E}[-\exp(-(H\cdot X)_T]$ nicht angenommen wird, falls das Modell X Arbitrage zulässt.
- 5. k sei fest gewählt. Für welche Verteilung p_1, \ldots, p_k wird $H((p_i))$ maximal?
- 6. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{Q} \mapsto H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})$ strikt konvex ist.
- 7. Ein 2-d Prozess $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_n, (X_n)_n))$ mit $X = (X^1 \ X^2)$ ist ein Martingal wenn für jedes $i \in \{1, 2\}$ der Prozeß $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_n, (X_n^i)_n))$ ein Martingal ist. Zeigen Sie, dass das noch nicht folgt, wenn $\alpha X^1 + \beta X^2$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ein Martingal in der eigenen Filtration ist.

- 1. Sei $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen sie dass die Legendretransformierte f^* (bezüglich des euklidischen Skalarproduktes) konvex und unterhalb stetig ist.
- 2. Im Fall N=1, berechnen Sie die Legendretransformationen der Abbildungen $x^2/2$, e^x und ax+b.
- 3. Seien $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ strikt konvexe, stetig differenzierbare Abbildungen mit $f^*=g$. Diskutieren Sie, was daraus für die entsprechenden Abbildungen folgt.
- 4. Im CCR (mit a < 0 < b) sei \mathbb{P} sodass alle Y_i unabhängig und verteilt mit $\mathbb{P}(Y_i = +1) = r \in (0,1)$. Lösen Sie das exp-Nutzenmaximierungsproblem.
- 5. Gegeben Sei ein 1-Perioden Markt mit k von einander unabhängigen Aktien sodass $(X_1^{(i)}-X_0^{(i)})\sim N(\mu_i,1), \mu_i>0$. Lösen Sie das exp-Nutzenmaximierungsproblem mit Hilfe des Gibbs-Jaynes-Prinzip.
- 6. Seien Z_1, Z_2, \ldots unabhängig und N(0,1) verteilt. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

nicht fast sicher existiert.

Hinweis: Das folgt zum Beispiel aus dem 0-1-Gesetz von Kolmogorov.

7. Zeigen Sie, dass $\sup_{H \in \mathcal{H}} \mathbb{E}[-\exp(-(H \cdot X)_T]$ angenommen wird falls X (NA) erfüllt.

1. Seien Z_1, Z_2, \ldots unabhängig und N(0,1) verteilt. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

nicht fast sicher existiert.

Hinweis: Das folgt zum Beispiel aus dem 0-1-Gesetz von Kolmogorov.

2. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^N$ ein Unterraum sodass $K \cap [0, \infty)^N = \{0\}$ und seien $p_1, \dots, p_N > 0$ mit $p_1 + \dots + p_N = 1$. Zeigen Sie, dass

$$\inf_{x \in K} \sum_{i=1}^{N} p_i \exp(x_i)$$

angenommen wird.

Sie können das Beispiel auch gerne kreuzen, wenn Sie es im Fall N=2, $p_1=p_2=1/2$ schaffen.

- 3. Sei B eine Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie, dass folgender Prozesse wiederum eine Brown'sche Bewegung ist: $M_t := B_{s+t} B_s$. (s > 0.)
- 4. Sei B eine Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie, dass folgender Prozesse wiederum eine Brown'sche Bewegung ist: $N_t := \frac{1}{\sqrt{\alpha}} B_{\alpha t}$. $(\alpha > 0)$.
- 5. Die OMV-Aktien ist gerade (etwa) $X_0=38$ EUR wert. Betrachten Sie die europäische Calloption $Z=(X_T-k)_+$ mit Strikepreis $k=15,16,\ldots,45$ und Laufzeit T=1. Was wären jeweils die fairen Preise (im Black-Scholes-Modell) für Z, wenn wir $\sigma=0.3$ unterstellen? Vielleicht wollen Sie diese graphisch darstellen.
- 6. Fortsetzung: Fixieren wir nun k=38 aber variieren $\sigma \in [0.1, 0.5]$. (Oder $T \in [0, 2]$. Oder $X_0 \in [15, 45]$.) Was beobachten Sie?
- 7. Sei H ein stetiger Prozess und X ein Prozess dessen Pfade 1-Lipschitz sind. Zeigen Sie, dass $Y_t(\omega) := (H \cdot X)_t(\omega)$ existiert und stetige Pfade hat. Hinweis: Eigentlich geht es in diesem Beispiel um die beiden deterministischen Funktionen $f(t) := H_t(\omega), g(t) := X_t(\omega)$. Die stetige Funktion f ist auf dem kompakten Intervall [0,T] sogar gleichmäßig stetig.

1. Seien H,G,X stochastische Prozesse in diskreter Zeit. Zeigen Sie dass

$$(H \cdot (G \cdot X))_T = ((HG) \cdot X)_T.$$

- 2. Wenden Sie die Ito-Formel auf $X_t = t^2 B_t^2$ an.
- 3. Wenden Sie die Ito-formel auf $X_t = e^{\sigma B_t 1/2\sigma^2 t + \mu t}$ an und zeigen Sie, dass

$$dX_t/X_t = \sigma dB_t + \mu dt.$$

4. Angenommen, X ist ein stetiger, adaptierter Prozess mit $X_0=0$, und es gilt

$$\mathbb{E}[(H \cdot X)_T] = 0$$

für alle einfachen, beschränkten H. Zeige, dass X ein Martingal ist.

- 5. Seiten X,Y Ito-Prozesse. Wenden Sie die Ito-Formel an um dZ für $Z_t=X_tY_t$ zu berechnen.
- 6. Angenommen, X und Y sind Zufallsvariablen, wobei X \mathcal{G} -messbar ist, $Y\sim \nu$ und Y unabhängig von \mathcal{G} ist. Sei f eine beschränkte messbare Funktion. Zeige, dass

$$\mathbb{E}[f(X+Y)|\mathcal{G}] = g(X),$$

wobei

$$g(x) = \int f(x+y) \, d\nu(y).$$

- 1. Suchen Sie im Internet reale Preise von Europäischen call Optionen, zum Beispiel auf den S& P 500, für wenigstens fünf verschiedene Kombinationen von σ, T, K . Die Anleitung auf meiner homepage (direkt neben dem downloadlink für die Übung) ist dabei hilfreich.
- 2. Halten Sie nun T fest und bestimmen Sie (numerisch) die implizite Black-Scholes Volatilität für fünf verschiedene Werte von K. Was beobachten Sie?
- 3. Halten Sie nun K fest und bestimmen Sie (numerisch) die implizite Black-Scholes Volatilität für drei verschiedene Werte von T. Was beobachten Sie?
- 4. Sei $f(x, T, \sigma, K)$ der Preis einer call Option mit Maturität T, Strike K im Black-Scholes Modell mit Start in x und Volatilität σ . Bestimmen Sie für festes x und T die Funktion $k \mapsto f(x, T, 0, K)$.
- 5. Sei $X_t := \exp(B_t t/2)$ eine geometrische Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$ fast sicher.
- 6. ('Zusatzbeispiel') Sei $f(x,T,\sigma,k)$ der Preis einer call Option mit Maturität T, Strike k im Black-Scholes Modell mit Start in x und Volatilität σ . Bestimmen Sie für festes x und T die Funktion $k\mapsto \lim_{\sigma\to\infty} f(x,T,\sigma,k)$. (Alternativ kann man auch $\sigma=1$ setzen und sich $k\mapsto \lim_{T\to\infty} f(x,T,1,k)$ überlegen, es ist leicht zu sehen, dass das auf das Gleiche hinausläuft.) Vergleichen Sie diese Funktion mit der Funktion $x\mapsto f(x,T,0,k)=f(x,0,1,k)$.

- 1. Sei $f(x,T,\sigma,k)$ der Preis einer call Option mit Maturität T, Strike k im Black-Scholes Modell mit Start in x und Volatilität σ . Bestimmen Sie für festes x und T die Funktion $k \mapsto \lim_{\sigma \to \infty} f(x,T,\sigma,k)$. (Alternativ kann man auch $\sigma = 1$ setzen und sich $k \mapsto \lim_{T \to \infty} f(x,T,1,k)$ überlegen, es ist leicht zu sehen, dass das auf das Gleiche hinausläuft.) Vergleichen Sie diese Funktion mit der Funktion $x \mapsto f(x,T,0,k) = f(x,0,1,k)$.
- 2. Sei $(X_t)_{t=0,1,2}$ der Kurs einer Aktie (r=0) und $varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe (differenzierbare) Funktion. Angenommen Sie haben die Möglichkeit eine Europäische Option mit Auszahlung $varphi(X_2)$ um 6 EUR zu kaufen und die Möglichkeit eine Amerikanische Option mit Auszahlung $varphi(X_1)$ bzw. $varphi(X_2)$ um 7 EUR zu verkaufen. Wie können Sie mittels geeigneter Handelstrategie einen risikolosen Gewinn machen? (Vielleicht hilft es, wenn Sie an den Beweis der Jensen'schen Ungleichung denken.)
- 3. Gegeben ein Supermartingale $(X_t)_{t=1}^N$, und Stoppzeiten $\sigma \leq \tau \leq N$, zeigen Sie dass $\mathbb{E}X_{\sigma} \geq \mathbb{E}X_{\tau}$.
- 4. Sei \mathbb{Q} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F}_T) und $(C_t)_{t \in \{0, ..., T\}}$ ein adaptierter Prozess, sodass $C_t \in L^1(\mathbb{Q})$ für jedes $t \in \{0, ..., T\}$ gilt. Der Prozess $U = U^{\mathbb{Q}}$, definiert durch die Rekursion $U_T := C_T$ und

$$U_t := \max\{C_t, \mathbb{E}_{\mathbb{O}}[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]\}$$

für $t \in \{0, ..., T-1\}$, wird als Snell-Hülle von H bezüglich \mathbb{Q} bezeichnet.

Zeigen Sie: die Snell-Hülle ist ein Supermartingal das größer als C ist.

- 5. Zeigen Sie: die Snell-Hülle ist das kleinste Supermartingal das größer als ${\cal C}$ ist.
- 6. Entwerfen Sie ein optimales Stopp-Problem in 4 Zeitschritten und lösen Sie es durch Rückwärtsinduktion.

NAME:

Matrikelnummer:

Bitte für jedes Beispiel ein neues Blatt verwenden! Bitte jedes Blatt mit Nachname und Matrikelnummer versehen! Pro Beispiel können 6 Punkte erreicht werden.

- 1. (a) Wann ist ein Prozess in diskreter Zeit adaptiert / previsibel / ein Martingal.
 - (b) Formulieren und beweisen Sie den Doob'schen Zerlegungssatz
- 2. (a) Was verstehen wir unter dem Modell eines Aktienmarktes? Wann ist dieses vollständig?
- (b) Geben Sie konkret ein vollständiges Modell mit mindestens drei Zeitschritten und drei verschiedenen Pfaden an. (inklusive Ω , Maß auf Ω , etc.)
- (c) Betrachten Sie in diesem Modell eine konkrete Calloption und bestimmen Sie Preis und Replikationsstrategie.
- **3**. (a) Was bedeutet es, dass eine Option erreichbar ist, wann ist eine Modell vollständig.
- (b) Zeigen Sie, dass es in einem arbitragefreien, vollständigen Modell nur ein äquivalentes Martingalmaß gibt.
- (c) Umgekehrt, falls es in einem arbitragefreien Modell nur ein Martingalmaß gibt, zeigen Sie dass das Modell vollständig ist. (Diese Frage ist etwas zu schwer für eine echte Prüfung).
- 4. (a) Definieren Sie das CRR-Modell.
 - (b) Zeigen Sie dass es vollständig ist.
- **5**. (a) Definieren Sie die Brown'sche Bewegung B.
 - (b) Zeigen Sie, dass $N_t := B_{\alpha t} / \sqrt{\alpha}$ wieder eine Brown'sche Bewegung ist.
 - (c) Zeigen Sie, dass $M_t := B_{t+s} B_t$ wieder eine Brown'sche Bewegung ist.
- 6. (a) Geben Sie eine Version der Ito-Formel an.
 - (b) Wenden Sie die Ito-Formel auf $S_t = e^{\sigma B_t \sigma^2 t}$ an.
 - (c) Wie sieht man, dass S ein Martingal ist?

(Die echte Prüfung wird kürzer, es wird nur 4 Beispiele geben.)