Stochastik - Lehramt, WS2023/24.

Übung 1., 9.-15. Oktober 2023)

1. Zwei Würfel werden geworfen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide die selbe Augenzahl zeigen?

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die beiden Augenzahlen um mehr als zwei unterscheiden?

2. Ein Unternehmen gibt N verschiedene Arten von Kupons aus. Ein Sammler kauft k Kupons (wobei jeder Ausgang gleich wahrscheinlich ist). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie alle unterschiedlich sind?

3. (Fortsetzung). Sei $\alpha > 0$ und setzen wir $k = \lfloor \alpha\sqrt{N} \rfloor$. Zeigen Sie, dass diese Wahrscheinlichkeit einen Grenzwert hat, wenn N gegen unendlich konvergiert, und berechnen Sie ihn. (Sie können die Tatsache verwenden, dass

$$\log(1 + x) \approx x$$

wenn x gegen 0 konvergiert). Was ist der Zusammenhang mit dem Geburtstagsproblem?

4. Ein voller Satz von $n = 52$ Karten wird zufällig in zwei Hälften geteilt. Finden Sie einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass jede Hälfte die gleiche Anzahl von roten und schwarzen Karten enthält.

5. (Fortsetzung.) Verwenden Sie die Stirling-Formel, um eine Näherung für dieselbe Wahrscheinlichkeit zu finden, und geben Sie diesen Näherungswert numerisch an.

6. Maria wirft zwei Münzen und Johannes wirft eine Münze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Maria öfter Kopf als John bekommt? (Ist das überraschend?) Beantworten Sie die gleiche Frage, wenn Maria drei Münzen wirft und Johannes zwei.

Übung 2 (16.-22. Oktober 2023)

7. Sei $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Seien weiters $p_1, \ldots, p_n \geq 0$ und $p_1 + \ldots + p_n = 1$. Zeigen Sie dass

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{i:\omega_i \in A} p_i, \quad A \in \mathcal{F} \tag{1}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert.

8. (Fortsetzung) Zeigen Sie dass jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F}) = (\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}, \mathcal{P}(\Omega))$ von der Gestalt (1) ist.

9. Wir wollen einen unfairen Würfel betrachten, bei dem die Wahrscheinlichkeit einen 6er zu würfeln doppelt so groß ist, wie die Wahrscheinlichkeit einen 1er zu würfeln und die Ziffern von 1 bis 5 jeweils mit der selben Wahrscheinlichkeit auftreten. Geben Sie eine Wahl von $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ an, mit der man dieses Experiment modellieren kann.

10. Seien A, B Ereignisse mit $\mathbb{P}(B) > 0$ und $\mathbb{P}(A) > 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$ genau dann, wenn $\mathbb{P}(B|A) > \mathbb{P}(B)$. Wir sagen dann, dass A und B positiv korreliert sind.

11. Wir werfen N-mal eine Münze. Sei $A =$ “der erste Wurf ist Kopf”, und $B =$ “wir bekommen insgesamt mindestens k Köpfe”. Zeigen Sie, dass A und B positiv korreliert sind.

12. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(B) > 0$. Wir definieren $\mathbb{Q} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ durch

$$\mathbb{Q}(A) := \mathbb{P}(A|B).$$

Zeigen Sie dass $\mathbb{Q}$ wiederum ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Übung 3 (ab 23. Oktober 2023)

13. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $E, F \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\} \cap \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in F\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E \cap F\},$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\} \cup \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in F\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E \cup F\},$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathbb{R} \setminus E\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\}^C.$$

(Diese Eigenschaften stimmen auch, wenn mehr als zwei Mengen betrachtet werden.)

14. Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $X : \Omega \to \mathbb{R}, X(\omega) = \omega(\omega - 1)(\omega + 1)$. Bestimmen Sie die Menge

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [0, 1]\}.$$

15. Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum wobei Ω eine endliche Menge ist. Sei weiters $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Wir definieren für $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{Q}(A) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}).$$

Zeigen Sie das $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ ist.

16. Gegeben ist eine Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p : \mathbb{R} \to [0, 1], p(1) = 1/6, p(2) = 2/6, p(3) = 1/2, p(x) = 0$$

sonst. Geben Sie konkret einen Wahrscheinlichkeitsraum und eine Zufallsvariablen X auf diesem an, sodass X diese Wahrscheinlichkeitsfunktion hat.

17. Eine Zufallsvariable ist ein fairer Würfel, falls für die entsprechende Wahrscheinlichkeitsfunktion gilt, dass $p(1) = p(2) = \ldots = p(6) = 1/6$. Kann man auf dem Raum $\Omega = \{a, b, c, \ldots, z\}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ und eine Zufallsvariable X definieren, sodass X ein fairer Würfel ist? (Falls ja, bitte angeben.)

18. Gegeben sind Wahrscheinlichkeitsfunktionen

$$p, q : \mathbb{R} \to [0, 1], p(0) = q(1) = 0.1, p(1) = q(0) = 0.9, p(x) = q(x) = 0 \text{ sonst.}$$

Geben Sie konkret einen Wahrscheinlichkeitsraum und Zufallsvariablen X, Y auf diesem an, sodass X, Y diese Wahrscheinlichkeitsfunktionen haben.

Übung 4

19. Seien $A_1, A_2, \ldots, A_5$ unabhängige Ereignisse. Zeigen Sie, dass $A_1 \cup A_2 \cup A_3, A_4$ unabhängig sind. Zeigen Sie weiters, dass $A_1 \cup A_2 \cup A_3, A_4 \cap A_5$ auch unabhängig sind.

20. Seien A, B unabhängige Ereignisse. Kann es dann sein, dass $A = B$? Bzw. was folgt wenn $A = B$ gilt für die Wahrscheinlichkeit von A?

21. Eine unfaire Münze (mit der Wahrscheinlichkeit, Kopf zu erhalten, gleich $p > 0$) wird wiederholt und unabhängig geworfen, bis der erste Kopf beobachtet wird. Sei A das Ereignis, dass der erste Kopf bei einem geradzahligen Wurf eintritt. Benutzen Sie das Gesetz der vollständigen Wahrscheinlichkeit, um $\mathbb{P}(A)$ zu berechnen. Oder berechnen Sie es direkt durch Summation einer geometrische Reihe.

22. Informationen werden digital als Binärsequenz ("Bits") übertragen. Leider ist der Kanal nicht perfekt: jede gesendete Ziffer $i \in \{0, 1\}$ wird mit Wahrscheinlichkeit α als $1 - i$ empfangen (jeweils unabhängig von einander). Nehmen Sie an, dass unabhängige Ziffern übertragen werden, und jede Ziffer entweder gleich 0 mit Wahrscheinlichkeit $3/4$, oder gleich 1 mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ ist.

Gegeben dass das empfangene Signal 00 ist, was ist die Wahrscheinlichkeit dass 00 genau das gesendete Signal war? (Benutzen Sie den Satz von Bayes).

23. Angenommen beim Lotto "6 aus 45" wird eine Million Euro ausbezahlt, wenn man alle 6 richtig errät, andernfalls erhält man nichts. Was ist der Erwartungswert des Gewinns, wenn man einen Schein ausfüllt.

24. Seien X, Y ZV auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{E}[X - Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$.

25. Seien X, Y ZV auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie, durch Angabe eines Beispiels, dass dann im allgemeinen nicht $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Übung 5

26. Wir werfen wiederholt eine Münze, für die die Wahrscheinlichkeit von Kopf gleich p ist, bis wir insgesamt r Köpfe bekommen (wobei $r \geq 1$). Sei X die entsprechende Anzahl von Würfen. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}; \quad (k \geq r).$$

27. (Fortsetzung) Was ist der Erwartungswert von X? Berechnen Sie ihn (zB) mit Hilfe der Linearität des Erwartungswertes (führen Sie geeignete geometrische Zufallsvariablen ein).

28. Seien $A, B \subset \Omega$ Ereignisse. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariabelen $X := I_A$, $Y := I_B$ genau dann unabhängig sind, wenn A und B unabhängig sind. (Die Indikatorfunktion einer Menge $C \subseteq \Omega$ ist definiert durch $I_C(\omega) = 1$ falls $\omega \in C$ und $I_C(\omega) = 0$ falls $\omega \in C^c$.)

29. (Fortsetzung) Zeigen Sie, dass im unabhängigen Fall $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

30. Gegeben seien disjunkte Ereignisse A_1, A_2, A_3 und weitere disjunkte Ereignisse B_1, B_2 sowie $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Seien weiters A_i und B_j für $i \in \{1, 2, 3, \}, j \in \{1, 2, \}$ unabhängig, sodass auch die Zufallsvariablen

$$X := a_1 I_{A_1} + a_2 I_{A_2} + a_3 I_{A_3}, \quad Y := b_1 I_{B_1} + b_2 I_{B_2}$$

unabhängig sind. Zeigen Sie wiederum, dass $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

31. Sei X eine (diskrete) Zufallsvariable mit $\mathrm{Var}(X) = 0$. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

32. Sei N eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(N > n).$$

Hinweis: Beginnen Sie mit der rechten Seite, und drücken Sie das Ereignis als disjunkte Vereinigung aus: man kann sich überlegen, dass $\mathbb{P}(N > n) = p_{n+1} + p_{n+2} + \ldots$ (wobei $p_k = \mathbb{P}(N = k)$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion bezeichnet).

Übung 6

33. (Fortsetzung.) Ich verkaufe mein Auto auf Willhaben und erhalte zufällige Angebote. Nehmen wir an, dass die Ordnung der ersten n Angebote eine zufällige Permutation ergibt. Meine Strategie ist, auf das erste Angebot N zu warten, das größer ist als das erste Angebot, das ich bekomme (also stets $N \geq 2$). Zeigen Sie, dass ich durchschnittlich unendlich lange warten muss. (Hinweis: berechnen Sie $\mathbb{P}(N > n)$ und verwenden Sie die Formel der letzten Aufgabe.)

34. Schließen Sie aus $\mathrm{Var}(Y) \geq 0$, dass stets $(\mathbb{E}[Y])^2 \leq \mathbb{E}[Y^2]$. Zeigen Sie diese Ungleichung auch aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

35. (Fortsetzung.) Zeigen Sie weiter, dass $\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X| \leq \sigma_X$ falls X eine diskrete Zufallsvariable mit endlicher Varianz ist.

Hinweis: Betrachten Sie $Y = |X - \mathbb{E}X|$.

36. Bezeichnen $X_1, X_2, X_3, \ldots$ unabhängige faire Würfel und $\bar{X}_n := (X_1 + \ldots + X_n)/n$ für $n \geq 1$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}\bar{X}_{10}, \mathbb{E}\bar{X}_{100}$ und $\mathrm{Var}(\bar{X}_1), \mathrm{Var}(\bar{X}_{10}), \mathrm{Var}(\bar{X}_{100})$.

37. Sei X eine Zufallsvariable (auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum). Wir definieren eine Funktion V durch

$$V(x) = \mathbb{E}((X - x)^2); \quad x \in \mathbb{R}.$$

Drücken Sie die Zufallsvariable $V(X)$ durch μ, σ^2 und X aus. Schließen Sie daraus, dass

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\mathbb{E}(V(X)).$$

Übung 7

38. arithmetisch-quadratische Mittelungleichung: Seien $x_1, \ldots, x_n > 0$. Zeigen Sie (zB mithilfe der Jensen'schen Ungleichung), dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Hinweis: Betrachen Sie $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ und eine Zufallsvariable mit $X(i) = x_i$.

39. (freiwilliges Zusatzbeispiel) geometrisch-arithmetische Mittelungleichung: Seien $x_1, \ldots, x_n > 0$. Zeigen Sie mithilfe der Jensen'schen Ungleichung, dass

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

40. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen. Sei μ der Erwartungswert und σ^2 die Varianz. Bestimmen Sie mit Hilfe der Chebyshev'schen Ungleichung eine Stichprobengröße n, damit die Wahrscheinlichkeit mindestens 0,99 beträgt, dass der Stichprobenmittelwert (empirisches Mittel) $\bar{X}_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$ innerhalb von zwei Standardabweichungen von μ ist.

41. Seien X und Y diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung $p(x, y)$. Nehmen wir an, dass es zwei Funktionen f und g gibt, sodass

$$p(x, y) = f(x)g(y).$$

Zeigen Sie, dass es Konstanten C_1 und C_2 gibt, sodass

$$f(x) = C_1 p_X(x); g(y) = C_2 p_Y(y);$$

wobei p_X und p_Y die Randverteilungen sind. Schließen Sie daraus, dass X und Y unabhängig sind.

42. Seien X, Y die Augenzahlen von zwei unabhängigen Würfeln, und sei $S = X + Y$. Finden Sie die gemeinsame Verteilung von (X, S) und schließen Sie daraus auf die Randverteilung $p(n)$ von S.

43. (Fortsetzung) Malen Sie einen Bild, und prüfen Sie dass

$$p(7 - m) = p_(7 + m)$$

für jedes $0 \leq m \leq 5$.

Was ist die bedingte Verteilung von X gegeben $S = n$ (wobei $2 \leq n \leq 12$)? (Überlegen Sie die Fälle $2 \leq n \leq 7$ und $7 \leq n \leq 12$ getrennt).

(*Hinweis: verwenden Sie die Symmetrie der Randverteilung von S*).

Übung 8

44. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit Mittel 0 und Varianz $\sigma^2 < \infty$. Zeigen Sie (analog zum Gesetz der großen Zahlen),

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n^{0.51}}\right) \to 0$$

und daher auch

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n^{0.51}}\right| \geq \varepsilon\right) \to 0 \text{ for } \varepsilon > 0.$$

45. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit Mittel 0 und Varianz $\sigma^2 < \infty$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n^{0.49}}\right) \to \infty.$$

In nächsten Beispielen sind jeweils Eigenschaften der bedingten Erwartung zu zeigen. Alle Zufallsvariablen die dabei vorkommen, werden als auf endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen definiert vorausgesetzt.

46. Die bedingte Erwartung von X gegeben $Y = y$ wurde durch

$$\mathbb{E}[X|Y = y] := \sum_{x\in W_X} x \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

definiert. Zeigen Sie

$$E[X|Y = y] = \mathbb{E}[X I_{Y=y}]/\mathbb{P}(Y = y).$$

47. Zeigen Sie: $\mathbb{E}[X|X = x] = x$.

48. Zeigen Sie: $\mathbb{E}[aX + bY|Z] = a\mathbb{E}[X|Z] + b\mathbb{E}[Y|Z]$.

49. Zeigen Sie: Falls $X \geq 0$ so gilt auch $\mathbb{E}[X|Y] \geq 0$.

50. Falls X unabhängig von Y ist, so gilt

$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X].$$

Übung 9

51. Seien X_1, X_2, X_3 unabhängige faire Würfel und $S := X_1 + X_2 + X_3$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X_1|S = 6]$. Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass aus Symmetriegründen $\mathbb{E}[X_1|S = 6] = \mathbb{E}[X_2|S = 6] = \mathbb{E}[X_3|S = 6]$.

52. (Fortsetzung.) Seien X_1, X_2, X_3 unabhängige faire Würfel und $S := X_1 + X_2 + X_3$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X_1|S]$.

53. Die Dichte eine stetigen Zufallsvariable X sei gegeben durch $f(x) = cx^2 I_{|x|\leq 2}$. Bestimmen Sie den Wert von c und die Verteilungsfunktion von f.

54. (Fortsetzung.) Bestimmen Sie im letzten Beispiel $\mathbb{E}X$.

55. Eine zweidimensionale Zufallsvariable sei gleichverteilt auf der Menge

$$F := \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1/\sqrt{2}\}.$$

Bestimmen Sie explizit die Dichte.

56. Gegeben sei eine stetige Zufallsvariable X mit Dichte f. Können Sie die Dichte der Zufallsvariable $Y := -X$ angeben?

Übung 10

57. Seien X, Y Zufallsvariablen und sei (X, Y) gleichverteilt auf der Menge

$$D = \{(x, y) : \max |x|, |y| \leq 1\}.$$

Berechnen Sie die gemeinsame Dichte von X, Y.

58. (Fortsetzung) Zeigen Sie, dass X und Y unabhängig sind.

59. (Fortsetzung) Bestimmen sie den Erwartungswert von $|X|$ sowie $\mathrm{Var}(X)$.

60. Seien X, Y Zufallsvariablen mit Dichte

$$f(x, y) = c \cdot x \cdot I_D$$

wobei

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}.$$

Berechnen Sie die Konstante c.

61. Seien X, Y Zufallsvariablen und sei (X, Y) gleichverteilt auf der Menge

$$D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Berechnen Sie die gemeinsame Dichte von X, Y und die Randdichte von X

62. (Fortsetzung) Bestimmen sie die bedingte Dichte von X gegeben $Y = 0.5$ sowie $\mathbb{E}[X|Y = 0.5]$.

63. (Fortsetzung) Zeigen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind.

Übung 11

64. Seien X, Y unabhängig und gleichverteilt auf $[0,1]$. Bestimmen Sie die Dichte von $Z := X + Y$.

65. Sei (X, Y) gleichverteilt auf $D := \{(x,y) \in [0,1]^2 : x \leq y\}$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}X$.

66. Sei X exponentialverteilt mit Parameter λ. Zeigen Sie mittels Transformationsformel: Dann ist $Y = \alpha X$ auch exponentialverteilt mit Parameter λ/α.

67. Sei U gleichverteilt auf $(0,1)$. Zeigen Sie mittels Transformationsformel: Dann ist $X = -\log(U)/\lambda$ exponentialverteilt mit Parameter λ.

68. Eine Zufallsvariable X ist *normalverteilt* wenn die Dichte von X gegeben ist durch

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{2}$$

Zeigen Sie: In diesem Fall ist der Erwartungswert von X gleich μ und ...

69. (Fortsetzung) ... die Varianz gleich σ^2.

70. Zeigen Sie mittels erzeugender Funktionen:
Seien X, Y unabhängig, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Dann gilt $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
Sei $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ und $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt $\alpha Z \sim N(\alpha\mu, (\alpha\sigma)^2)$.

Letzte Übung

In der letzten Übungstunde wird u.a. eine Probeprüfung besprochen. Zur Vorbereitung sind die Beispiele schon jetzt hier zu finden.

Probeprüfung (bei der echten Prüfung sind ähnliche Beispiele innerhalb von 90 Minuten zu lösen.)

NAME:

Matrikelnummer:

Bitte für jedes Beispiel ein neues Blatt verwenden!

71. (a) Definieren Sie die Begriffe Wahrscheinlichkeitsraum und Wahrscheinlichkeitsmaß.

(b) Geben Sie konkret einen Wahrscheinlichkeitsraum und unabhängige Zufallsvariablen X, Y auf diesem an, sodass X, Y faire Würfel sind.

(c) Zeigen Sie, dass jeder Wahrscheinlichkeitsraum, den man in (b) verwenden kann mindest 36 Elemente hat.

72. Seien X, Y Zufallsvariablen.

(a) Was bedeutet, dass X, Y gemeinsam stetig verteilt sind? Was ist in diesem Fall der Zusammenhang zwischen der gemeinsamen Dichte und der Dichte von X?

(b) Sei (X, Y) gleichverteilt auf der Menge $D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$. Berechnen Sie die gemeinsame Dichte von X, Y und den Erwartungswert von X.

(c) Sei $Z = X + Y$. Bestimmen Sie die Dichte oder die Verteilungsfunktion von Z.

73. Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ diskrete Zufallsvariablen.

(a) Die Varianz $\operatorname{Var}(X)$ von X wird definiert als $\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - m^2$ wobei $m = \mathbb{E}(X)$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}((X - m)^2)$. Geben Sie eine ähnliche Definition und Gleichung für die Kovarianz $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(X_i) + 2 \sum_{i<j} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$.

(c) Nehmen wir an, dass $X_i, i \geq 1$ unabhängig sind. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = 0$. Schließen Sie daraus, dass $\operatorname{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(X_i)$. Warum ist das im Zusammenhang mit dem Gesetz der großen Zahlen hilfreich?

74. (a) Erklären Sie die Begriffe Statistik und Schätzer. Was bedeutet, dass ein Schätzer unbiased ist?

Angenommen, in einer Population von Zwillingen treten Männer (M) und Frauen (F) mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf und die Wahrscheinlichkeit, dass Zwillinge eineiig sind sei θ. Wenn Zwillinge nicht eineiig sind, sei ihr jeweiliges Geschlecht unabhängig (wenn sie eineiig sind, sind ihre Geschlechter gleich).

(b) Zeigen Sie (ohne Berücksichtigung der Geburtsreihenfolge),

$$\mathbb{P}(MM) = \mathbb{P}(FF) = (1 + \theta)/4, \quad \mathbb{P}(MF) = (1 - \theta)/2.$$

(c) Angenommen, es werden n Zwillingspaare untersucht. Es wird gefunden, dass n_1 MM sind, n_2 FF sind und n_3 MF sind (wobei $n_1 + n_2 + n_3 = n$), aber es ist nicht bekannt, welche Zwillinge identisch sind. Wir möchten θ maximum-likelihood schätzen. Zeigen Sie, dass

$$L(\theta) = \text{Konst.}(1 + \theta)^{n_1 + n_2}(1 - \theta)^{n_3}$$

wobei die obige Konstante nicht von θ abhängt, und $L(\theta)$ die Likelihoodfunktion ist.