Errata zur Version 2016–04–06
Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

(Modul: “Geometrie” (UF MA 03))

Markus Fulmek

Sommersemester 2016

Kapitel 1

Elementare Geometrie

1.1 Elemente der geometrischen Anschauung

In diesem Abschnitt wurden bisher noch keine Fehler entdeckt.

1.2 Orientierung

In diesem Abschnitt wurden bisher noch keine Fehler entdeckt.

1.3 Winkel

In diesem Abschnitt wurden bisher noch keine Fehler entdeckt.

1.4 Verhältnisse

In diesem Abschnitt wurden bisher noch keine Fehler entdeckt.

1.5 Symmetrieargumente

In diesem Abschnitt wurden bisher noch keine Fehler entdeckt.

1.6 Bewegungen

In diesem Abschnitt wurden bisher noch keine Fehler entdeckt.

1.7 Kongruenz

In diesem Abschnitt wurden bisher noch keine Fehler entdeckt.

1.8 Einfache geometrische Konstruktionen

In diesem Abschnitt wurden bisher noch keine Fehler entdeckt.

1.9 Elegante geometrische Argumentationen

In diesem Abschnitt wurden bisher noch keine Fehler entdeckt.

1.10 Fläche

In diesem Abschnitt wurden bisher noch keine Fehler entdeckt.

1.11 Der Strahlensatz

In diesem Abschnitt wurden bisher noch keine Fehler entdeckt.

1.12 Sätze über das Dreieck

Seite 75. Bezeichnungen R' und Q' vertauscht, es sollte richtig lauten:

- über der Dreiecksseite $\overline{PQ}$ das *gleichwinklige* Dreieck mit den zwei gleichen Basiswinkeln δ; der dritte Eckpunkt sei R',
- über der Dreiecksseite $\overline{QR}$ das *gleichwinklige* Dreieck mit den zwei gleichen Basiswinkeln ϵ; der dritte Eckpunkt sei P',
- über der Dreiecksseite $\overline{RP}$ das *gleichwinklige* Dreieck mit den zwei gleichen Basiswinkeln ζ; der dritte Eckpunkt sei Q'.

1.13 Das rechtwinklige Dreieck und der Satz von Pythagoras

Seite 77. Im ersten Absatz von Abschnitt 1.13 sind p und q vertauscht, es sollte richtig lauten:
... wir führen die zusätzlichen Abkürzungen $h := |HC|$, $q = |AH|$ und $p = |HB|$ ein ...
Seite 79. Tippfehler in Beispiel 51, sollte richtig lauten:
Seien drei Kreise $k(M_1, r_1)$, $k(M_2, r_2)$ und $k(M_3, r_3)$ gegeben.

1.14 Trigonometrie und die Winkelfunktionen

Seite 83. Ganz oben sollte die Formulierung genauer lauten:
In dem *rechtwinkligen* Dreieck $\triangle AH_CC$ ist $\overline{AC}$ die *Hypotenuse* und $\overline{CH_C}$ die *Gegenkathete* des Winkels $\alpha = \sphericalangle(H_CAC)$ (bzw. des Winkels $180° - \alpha = \sphericalangle(H_CAC)$, falls — wie in der Skizze — $\alpha > 90°$), ...
Seite 83. Tippfehler im Beweis von Satz 1.14.7; es sollte richtig lauten:
Sei H_C der Fußpunkt der Höhe von C aus, sei $p = AH_C$ (unter der Annahme, daß $\underline{AB}$ der positive Strahl ist) und sei (in der Standardbezeichnung) $q = c - p$.
Seite 84. letzte Zeile:
An sich nicht falsch, aber statt

$$|AB|^2 = (1 - \cos(\alpha+\beta))^2 + \sin(\alpha+\beta)^2$$
$$= (\cos\alpha - \cos(-\beta))^2 + (\sin\alpha - \sin(-\beta))^2 = |A'B'|^2$$

paßt

$$|AB|^2 = (1 - \cos(\alpha+\beta))^2 + \sin(\alpha+\beta)^2$$
$$= (\cos(-\beta) - \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \sin(-\beta))^2 = |A'B'|^2$$

besser zur Skizze.
Seite 85. Vorzeichenfehler beim Term $2\sin\alpha\sin\beta$, es sollte richtig lauten:

$$1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \underbrace{\cos(\alpha+\beta)^2 + \sin(\alpha+\beta)^2}_{1} =$$
$$\underbrace{(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2}_{1} -2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + \underbrace{(\cos(-\beta))^2 + (\sin(-\beta))^2}_{1} +2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

Seite 86. Tippfehler bei Vorzeichen in der vierten Gleichungsumformung von oben:

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot c + \frac{1}{4}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot c - \frac{1}{4}\left(b^2 + c^2 + a^2\right)\right) \text{ FALSCH}$$
$$= \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot c + \frac{1}{4}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot c - \frac{1}{4}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\right) \text{ RICHTIG}$$

Seite 88. Definition 1.14.13 ist schlampig formuliert; sollte richtig lauten:
Die Menge aller Punkte P der Ebene, die Polarkoordinaten der Gestalt $\left(r_P, \phi_p\right) = (t, t \mod 360°)$ für eine nichtnegative reelle Zahl t haben, also

$$\left\{P \in \mathcal{E}\colon \ \left(r_P, \phi_p\right) = (t, t \mod 360°) \text{ für ein } t \geq 0\right\},$$

heißt *Archimedische Spirale*. (Für $t \in \mathbb{R}$ bedeutet $t \mod 360°$ jene eindeutig bestimmte reelle Zahl $t' \in \{t + k \cdot 360°\colon \ k \in \mathbb{Z}\}$, für die $0 \leq t' < 360°$ gilt.)

Kapitel 2

Analytische Geometrie

2.1 Cartesische Koordinaten

Seite 92. Tippfehler im dritten und vierten Bullet–Point (•) von oben; sollte richtig lauten:

- zur x–Achse; diese schneidet die y–Achse in einem Punkt P_y,
- zur y–Achse; diese schneidet die x–Achse in einem Punkt P_x.

Seite 97. Indexfehler in Definition 2.2.5; es sollte richtig lauten:

$$\langle\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle\rangle := \{\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m \cdot \mathbf{v}_m : \ \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

2.2 Der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$

In diesem Abschnitt wurden bisher noch keine Fehler entdeckt.

2.3 Rechnen mit Koordinatenvektoren

Seite 101. Inkonsistenz in der Notation, Bullet–Points (•) sollten richtig lauten:

- zur Geraden $\underline{AC}$; diese schneidet die Gerade $\underline{AB}$ in einem Punkt P_B,
- zur Geraden $\underline{AB}$; diese schneidet die Gerade $\underline{AC}$ in einem Punkt P_C.

Dann ordnen wir dem Punkt P wieder seinen *Koordinatenvektor*

$$P \mapsto (x, y) = \left(\frac{AP_B}{AB}, \frac{AP_C}{AC}\right)$$

zu.

2.4 Beweisen im Koordinatensystem

Seite 105. Ab Gleichung (2.7) sind die Variablen λ und μ vertauscht, es sollte richtig heißen:
Ein Punkt ist durch seine cartesischen Coordinaten eindeutig bestimmt: Wir suchen also den Punkt, für den das *lineare Gleichungssystem*

$$(-2a_1 + b_1 + c_1) \cdot \mu + (-a_1 - b_1 + 2c_1) \cdot \lambda = c_1 - a_1 \tag{2.1}$$
$$(-2a_2 + b_2 + c_2) \cdot \mu + (-a_2 - b_2 + 2c_2) \cdot \lambda = c_2 - a_2 \tag{2.2}$$

erfüllt ist. (Die Variablen sind hier λ und μ; die Konstanten a_i, b_i und c_i sind ja die vorgegebenen Koordinaten der Punkte A, B und C.)
Die *Koeffizienten* der Variablen können nicht alle Null sein, denn sonst wäre C der Streckenmittelpunkt von $\overline{AB}$ und A der Streckenmittelpunkt von $\overline{BC}$. Sei also o.B.d.A.

$$-2a_1 + b_1 + c_1 \neq 0.$$

Dann können wir aus der ersten Gleichung (2.1) die Variable μ durch die andre Variable λ *ausdrücken* ...

$$\mu = -\frac{a_1\lambda - a_1 + b_1\lambda - 2c_1\lambda + c_1}{2a_1 - b_1 - c_1} \tag{2.3}$$

... und diesen Ausdruck für μ in die zweite Gleichung (2.2) *einsetzen*. Damit erhalten wir:

$$(3\lambda - 1) \cdot \frac{-(a_2(c_1 - b_1) + a_1(b_2 - c_2) - b_2c_1 + b_1c_2)}{2a_1 - b_1 - c_1} = 0$$

mit der offensichtlichen Lösung $\lambda = \frac{1}{3}$. Wenn wir diese Lösung nun in (2.3) einsetzen, erhalten wir $\mu = \frac{1}{3}$.

2.5 Lineare Gleichung

Seite 108. Tippfehler in Definition 2.5.10, sollte richtig lauten:
Wenn eine (inhomogene) Gleichung S mit Koeffizientenvektor $(c_1, \ldots, c_m)$ gegeben ist, ...
Seite 109. Tippfehler in Aufgabe 78, sollte richtig lauten:

$$\mathbf{y} - \mathbf{z} \text{ und } \lambda \cdot \mathbf{y}$$

2.6 Lineare Gleichungssysteme

<u>**Seite 109.**</u> Tippfehler in der Koeffizientenmatrix, sollte richtig lauten:

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & \dots & c_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m-1,1} & c_{m-1,2} & \dots & c_{m-1,n} \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \dots & c_{m,n} \end{pmatrix}$$

<u>**Seite 110.**</u> Tippfehler in der erweiterten Koeffizientenmatrix, sollte richtig lauten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} & b_1 \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} & b_2 \\ c_{3,1} & c_{3,2} & \dots & c_{3,n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m-1,1} & c_{m-1,2} & \dots & c_{m-1,n} & b_{m-1} \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \dots & c_{m,n} & b_m \end{array}\right).$$

<u>**Seite 111.**</u> Ganz oben sind m und n vertauscht, es sollte richtig lauten:
Sei $n = 5$ und $m = 4$, dann können wir jedes $n \times m$–Gleichungssystem in den Variablen $x_1, \dots, x_4$ so aufschreiben:
<u>**Seite 116.**</u> Tippfehler ganz oben, es sollte richtig lauten:
Im zweiten Schritt des Eliminationsverfahrens multiplizieren wir die Zeile 2 mit $-\frac{5}{9}$ und addieren die so erhaltene Zeile

- mit $\frac{23}{5}$ multipliziert zu Zeile 1.

<u>**Seite 117.**</u> Dreimal Vorzeichen falsch in Beispiel 2.6.7 (2. Schritt), es sollte richtig lauten:
Nun addieren wir das 5–fache, (-1)–fache und 2–fache der zweiten Zeile zu den Zeilen 3, 4 und 5 ...
<u>**Seite 118.**</u> Falsche Subskripts in Beispiel 82, es sollte richtig lauten:
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems in den Variablen $c_0, c_1, c_2 \dots$
Wenn Ihnen diese "parameter–reichen" Rechnungen zu mühsam sind, setzen Sie konkret

$$x_1 = 0, y_1 = 1, x_2 = 1, y_2 = 0, x_3 = 3, y_3 = 1$$

...

2.7 Lineare Abbildungen

Seite 121. Tippfehler in Gleichung (2.14) in Definition 2.7.1; es sollte richtig lauten:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}: \ f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \lambda \cdot f(\mathbf{y}). \tag{2.4}$$

Seite 121. Kein Fehler, nur zur weiteren Erklärung von Definition 2.7.2:
Ist es richtig, daß *jede* Funktion $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^0$ linear ist?
Ja!!! Denn es gibt ja nur *eine einzige* Funktion in den *einelementigen* Raum $\mathbb{R}^0 = \{\mathbf{o}\}$, nämlich $f(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{o}$! Und für diese (konstante!) Funktion gilt natürlich

$$\mathbf{o} = f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{o} + \lambda \cdot \mathbf{o} = f(\mathbf{x}) + \lambda \cdot f(\mathbf{y}).$$

Seite 121. Kein Fehler, nur zur Vermeidung eines möglichen Mißverständnisses von Definition 2.7.2:
In der Schule bezeichnet man eine Funktion $f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als linear, wenn

$$f(x) = k \cdot x + d$$

gilt für gewisse Konstanten $k, d \in \mathbb{R}$: Das ist *nicht dasselbe* wie der hier vorgestellte Begriff; der Spezialfall

$$g(x) = k \cdot x \text{ (also mit } d = 0)$$

wäre aber auch in unserem Sinne eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, denn:

$$g(x_1 + \lambda \cdot x_2) = k \cdot (x_1 + \lambda \cdot x_2) = k \cdot x_1 + \lambda \cdot k \cdot x_1 = g(x_1) + \lambda \cdot g(x_2).$$

Seite 122. In Definition 2.7.4 wurde zweimal Index m mit n verwechselt, es sollte richtig lauten:

$$\mathbf{v} = v_1 \cdot \mathbf{e}_1 + v_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \cdots + v_n \cdot \mathbf{e}_n$$

bzw.

$$\text{Matrix von } f = (f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots f(\mathbf{e}_n))$$

Seite 122. Am Ende der Definition 2.7.4 ist ein Index falsch, es sollte richtig lauten:
Die Funktion f ist durch ihre Matrix eindeutig bestimmt, denn es gilt ja gemäß Korollar **??**:

$$f(\mathbf{v}) = v_1 \cdot f(\mathbf{e}_1) + \cdots + v_n \cdot f(\mathbf{e}_n).$$

Seite 124. Zeile vor Proposition 2.7.10: Ein "für" zuviel:
Seite 125. Im zweiten Absatz sollte dreimal "Matrixdarstellung" statt "Koeffizientenmatrix stehen, also:
Das heißt aber, daß sich die Spalten der Matrixdarstellung der Zusammensetzung $(f \circ g)$ als Multiplikation der Matrixdarstellimg von f mit den Spalten der Matrixdarstellung von g ergeben!
Seite 125. Im Bild unten sollte es lauten:

$$\cdots = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \cdots$$

2.8 Inneres Produkt und Norm

Seite 129. Tippfehler; Gleichung (2.18) sollte richtig lauten:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} + \lambda \cdot \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \lambda \cdot \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle : \quad \langle ., . \rangle \text{ ist } \textit{bilinear}.$$

Seite 129. Tippfehler; die Gleichung in Bemerkung 2.8.3 sollte richtig lauten:

$$\langle \lambda \cdot \mathbf{a} + \mu \cdot \mathbf{b}, \rho \cdot \mathbf{c} + \tau \cdot \mathbf{d} \rangle = \lambda \cdot \rho \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \lambda \cdot \tau \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle + \mu \cdot \rho \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle + \mu \cdot \tau \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle .$$

Seite 129/130. In Proposition 2.8.4. sind bei allen Normen die Quadrate verlorengegangen; es sollte richtig lauten:
Seien $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren, dann gilt:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2\right) \tag{2.5}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2\right). \tag{2.6}$$

Beweis. Aus Bilinearität und Symmetrie des inneren Produkts folgt

$$\langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2 \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle ,$$

also

$$2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2. \tag{2.7}$$

Daraus folgt die erste Polarisierungsformel (2.5).
Ersetzt man in (2.7) $\mathbf{w}$ durch $-\mathbf{w}$, so ergibt sich

$$-2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2, \tag{2.8}$$

und Subtraktion der Gleichungen (2.7) und (2.8) ergibt die zweite Polarisierungsformel (2.6). □

Seite 132. Tippfehler in Gleichung (2.28); es sollte richtig lauten:

$$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \cdots + n_m \cdot x_m = c, \tag{2.9}$$

Seite 132. Das Wort “homogen” im Absatz nach Gleichung (2.28) ist fehl am Platz; es sollte richtig lauten:
Wir haben also eine *lineare Gleichung* in m Variablen vor uns...
Seite 132. In Gleichung (2.30) sollten keine scharfen Ungleichungen stehen; es sollte richtig lauten:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle \geq c \text{ bzw. } \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle \leq c \tag{2.10}$$

Seite 132. Auch in Beobachtung 2.8.10 sollte keine scharfen Ungleichungen stehen; es sollte richtig lauten:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \ \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle \geq c\}$$

Seite 136. Tippfehler in der letzten Gleichung vor Aufgabe 91, es sollte richtig lauten:

$$\left(c^2 - \epsilon^2\right) \cdot x^2 + y^2 - \frac{d^2 \cdot \epsilon^2}{c^2 - \epsilon^2} = 0.$$

Seite 136. In Beispielen 91 und 92 zweimal derselbe sinnstörende Fehler; die Definition der Höhenschichtlinie zur Höhe t sollte richtig lauten:

$$M \cap \{(x, y, t) : \ x, y \in \mathbb{R}\} \text{ (Höhe } t \text{ ist konstant).}$$

2.9 Isometrien der Ebene

Seite 138. Kein Fehler; aber das Argument im Beweis von Lemma 2.9.6 sollte genauer formuliert werden:
Und für $f(\mathbf{x})$ haben wir zunächst die Darstellung *in bezug auf das andere cartesische Koordinatensystem* $(f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2))$ (mit demselben Koordinatenursprung)

$$f(\mathbf{x}) = \lambda \cdot f(\mathbf{e}_1) + \mu \cdot f(\mathbf{e}_2),$$

und wenn wir das innere Produkt mit $f(\mathbf{e}_1)$ betrachten, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{e}_1)\rangle &= \langle \lambda \cdot f(\mathbf{e}_1) + \mu \cdot f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_1)\rangle \\ &= \lambda \cdot \langle f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_1)\rangle + \mu \cdot \langle f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_1)\rangle \quad \leftarrow \text{Bilinearität!} \\ &= \lambda \cdot \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle + \mu \cdot \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\rangle \quad \leftarrow f \text{ erhält das innere Produkt!} \\ &= \lambda; \end{aligned}$$

und völlig analog ergibt sich

$$\mu = \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{e}_2)\rangle.$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{e}_1)\rangle \cdot f(\mathbf{e}_1) + \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{e}_2)\rangle \cdot f(\mathbf{e}_2) \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1\rangle \cdot f(\mathbf{e}_1) + \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2\rangle \cdot f(\mathbf{e}_2), \quad \leftarrow \text{da } f \text{ das innere Produkt erhält!} \end{aligned}$$

also (!) ist f linear.
Seite 139. Übungsbeispiel 93 wird irrtümlich nochmals (als Beispiel 94) wiederholt:
Beispiel 94 soll einfach gestrichen werden (was dazu führt, daß ab hier die Numerierung der Übungsbeispiele in der gedruckten Fassung des Skriptums nicht

mit der (richtigen) Numerierung in der verbesserten Fassung der Übungsblätter übereinstimmt).

Seite 141. Kein Fehler in Beobachtung 2.9.14, aber der Sachverhalt sollte genauer formuliert werden:

- $\mathbf{f}_2 = (\cos(\phi + 90°), \sin(\phi + 90°)) = (-\sin\phi, \cos\phi)$: f ist dann die Drehung um den Winkel ϕ mit Drehzentrum $\mathbf{o}$,
- $\mathbf{f}_2 = -(-\sin\phi, \cos\phi) = (\sin\phi, -\cos\phi)$: f ist dann die Spiegelung an der Geraden g durch $\mathbf{o}$, die mit der horizontalen Koordinatenachse den Winkel $\phi/2$ einschließt.

Seite 142. Tippfehler (Koordinaten vertauscht) in Beispiel 2.9.17, es sollte richtig lauten:

$$\mathbf{x} \mapsto R \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{z} - R \cdot \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.10 Komplexe Zahlen

Seite 144. zwei Tippfehler in Beobachtung 2.10.1, es sollte “reell” statt “rell” lauten:

- die Nullmatrix $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_{2,2}$ spielt die Rolle der reellen Zahl 0,
- die Einheitsmatrix $\mathbf{1} \in \mathcal{M}_{2,2}$ spielt die Rolle der reellen Zahl 1,

Seite 145. Tippfehler (Vorzeichen falsch) in Definition 2.10.3, es sollte richtig lauten:
Dann nennt man $z = a - \mathbb{i} \cdot b$ die *konjugiert komplexe Zahl* zu z und bezeichnet sie mit $\overline{z}$.

Seite 145. Ungenauigkeit in Beispiel 99 (erscheint in der gedruckten Fassung des Skriptums als Beispiel 100), es sollte richtig lauten:
Sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Beweisen Sie

$$\tan(\arg z) = \frac{z - \overline{z}}{(z + \overline{z}) \cdot \mathbb{i}}.$$

Hinweis: Stellen Sie sich die komplexe Zahl geometrisch vor und erinnern Sie sich an “Tangens ist Gegenkathete durch Ankathete”, also “Imaginärteil durch Realteil”. Zeigen Sie

$$\text{Realteil von } z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \text{ Imaginärteil von } z = \frac{z - \overline{z}}{2 \cdot \mathbb{i}}.$$

Seite 147. Fehler in Aufgabe 101 (erscheint in der gedruckten Fassung des Skriptums als Aufgabe 102), es sollte richtig lauten:
... Drehstreckung

- um Drehzentrum A
- mit Drehwinkel $30°$
- und Streckungsfaktor $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

2.11 Orientierter Inhalt und Determinante

Seite 149. Zwei Fehler in den letzten drei Bullet–Points (•; “Fläche” statt “Raum”), es sollte richtig lauten:

- Ein Punkt (als zusammengedrückte Strecke) hat Länge 0 (und erst recht Fläche und Volumen 0): Sein Inhalt ist also 0 in Gerade, Ebene und Raum;
- eine Strecke (als zusammengedrücktes Rechteck) hat Fläche 0 (und erst recht Volumen 0): Ihr Inhalt ist also 0 in Ebene und Raum;

Seite 155. Indexfehler in Definition 2.11.15, es sollte richtig lauten:

...

- die Eintragungen $(a_{1,n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n,1})$ als die *Nebendiagonale* von A.

Seite 155. Auch in der Graphik sind im linken unteren Bild Indizes vertauscht worden, es sollte richtig lauten:

3 Parallelen zur Hauptdiagonale: +

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a_{1,1} & & \\ \hline & a_{2,2} & \\ \hline & & a_{3,3} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline & a_{1,2} & \\ \hline & & a_{2,3} \\ \hline a_{3,1} & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & a_{1,3} \\ \hline a_{2,1} & & \\ \hline & a_{3,2} & \\ \hline \end{array}$$

3 Parallelen zur Nebendiagonale: −

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & a_{1,3} \\ \hline & a_{2,2} & \\ \hline a_{3,1} & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline a_{1,1} & & \\ \hline & & a_{2,3} \\ \hline & a_{3,2} & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline & a_{1,2} & \\ \hline a_{2,1} & & \\ \hline & & a_{3,3} \\ \hline \end{array}$$

Seite 157. Fehler in Aufgabe 109 (erscheint in der gedruckten Fassung des Skriptums als Aufgabe 110), es sollte richtig lauten:

... ist gegeben durch

$$[\![\triangle ABC]\!] = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|.$$

<u>**Seite 159.**</u> Fehler in Aufgabe 106 (erscheint in der gedruckten Fassung des Skriptums als Aufgabe 107), es sollte richtig lauten:
Zeigen Sie, daß für alle $n \geq 2$ die Matrixidentität

$$\begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1}$$

gilt ...

2.12 Eigenwerte und Eigenvektoren

<u>**Seite 166.**</u> Tippfehler in Definition 2.12.9, es sollte richtig lauten:
Das innere Produkt (oder Skalarprodukt) zweier Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ im $\mathbb{C}^n$ ist definiert als

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 \cdot \overline{y}_1 + \cdots + x_n \cdot \overline{y}_n.$$

2.13 Hauptachsentransformation der Kegelschnitte

<u>**Seite 169.**</u> Anfang der Seite bis zum Ende des Kapitels: Abgesehen von ein paar Tippfehlern war das Verfahren der Hauptachsentransformation zu knapp gehalten. Daher folgende etwas ausführlichere Darstellung:
Es ist ganz leicht nachzurechnen, daß wir das Polynom g damit so schreiben können:

$$g(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + c.$$

2.13.1 Vorüberlegung: Matrix einer Drehung

Die Drehung um einen Winkel ϕ hat die Matrixdarstellung

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Wir behaupten:

$$R_\phi{}^T = R_\phi{}^{-1}.$$

Das können wir entweder *geometrisch* erkennen, indem wir verwenden, daß die *Umkehrabbildung* zur Drehung um den Winkel ϕ (natürlich!) die Drehung um den Winkel $-\phi$ ist, daß also "in der Sprache der Matrizen"

$$R_\phi{}^{-1} = R_{-\phi} = \begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = R_\phi{}^T$$

gilt, oder wir rechnen das einfach aus:

$$R_\phi{}^T \cdot R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\phi + \sin^2\phi & 0 \\ 0 & \sin^2\phi + \cos^2\phi \end{pmatrix} = \mathbf{1}.$$

2.13.2 Erste Variablentransformation: Geeignete Drehung!

Dann können wir die *alten* Variablen $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ersetzen:

$$\mathbf{y} := R_\phi{}^T \cdot \mathbf{x}, \text{ das heißt aber wegen } R_\phi{}^{-1} = R_\phi{}^T\text{: } \mathbf{x} := R_\phi \cdot \mathbf{y}.$$

Mit dieser *Variablentransformation* lautet unsere Gleichung (in den *neuen* Variablen $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$):

$$\mathbf{y}^T \cdot R_\phi{}^T \cdot A \cdot R_\phi \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b} \cdot R_\phi \cdot \mathbf{y} + c = 0$$

(denn $\mathbf{x}^T = \left(R_\phi \cdot \mathbf{y}\right)^T = \mathbf{y}^T \cdot R_\phi^T$).
Diesen Aufwand werden wir natürlich nur betreiben, wenn er zur *Vereinfachung* dient, also wenn

$$R_\phi{}^T \cdot A \cdot R_\phi$$

eine *Diagonalmatrix* ist!
Da A eine reelle symmetrische Matrix ist, hat sie 2 *reelle* Eigenwerte λ_1, λ_2, die wir ganz einfach ausrechnen können:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda \cdot \mathbf{1}) &= \det\begin{pmatrix} a_1 - \lambda & a_3 \\ a_3 & a_2 - \lambda \end{pmatrix} \leftarrow \text{Definition charakteristisches Polynom} \\
&= (a_1 - \lambda) \cdot (a_2 - \lambda) - a_3^2 \leftarrow \text{Definition } 2 \times 2\text{–Determinante} \\
&= \lambda^2 - \lambda \cdot (a_1 + a_2) + a_1 \cdot a_2 - a_3^2 \leftarrow \text{Ausmultiplizieren} \\
&= \left(\lambda - \frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - a_3^2 + a_1 \cdot a_2 - \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \leftarrow \text{auf vollst. Quadrat erg.} \\
&= \left(\lambda - \frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 - a_3^2 \leftarrow \text{Terme zusammenfassen}
\end{aligned}$$

Wenn wir dieses quadratische Polynom in λ gleich Null setzen, dann sehen wir sofort: Diese quadratische Gleichung hat nur dann eine doppelte Lösung $\lambda_1 = \lambda_2$, wenn $a_3 = 0$ und $a_1 = a_2$: Dann ist $A = a_1 \cdot \mathbf{1}$ aber ein Vielfaches der Einheitsmatrix und insbesondere schon eine Diagonalmatrix, es ist also nichts mehr zu tun.
Wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann stehen die entsprechenden Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ aufeinander normal (gemäß Proposition 2.12.12): Wir können annehmen, daß sie *normalisiert* sind (also Norm 1 haben; denn wir können die Vektoren ja durch ihre Norm dividieren!) und daß $\mathbf{v}_2$ durch eine Drehung um $+90°$ aus $\mathbf{v}_1$ hervorgeht (sonst ersetzen wir $\mathbf{v}_2$

Daß die Lösungen reell sind, sehen wir auch!

durch $-\mathbf{v}_2$). Dann bestimmen wir den Winkel ψ, den $\mathbf{v}_1$ mit dem Standardbasisvektor $\mathbf{e}_1$ einschließt und sehen:

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} = R_\psi.$$

Die entsprechende Variablentransformation ist eine *Drehung* um den Winkel ψ; damit wird die Gleichung auf eine Form gebracht, in der das "gemischte Glied"

$$2 \cdot a_3 \cdot x_1 \cdot x_2$$

tatsächlich verschwunden ist!
Denn ${R_\psi}^T \cdot A \cdot R_\psi$ ist eine *Diagonalmatrix*, deren Eintragungen die Eigenwerte λ_1 und λ_2 sind:

$${R_\psi}^T \cdot A \cdot R_\psi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Um das zu zeigen, überlegen wir, welche lineare Abbildung durch die Matrix

$${R_\psi}^T \cdot A \cdot R_\psi = R_\psi^{-1} \cdot A \cdot R_\psi$$

beschrieben wird: Diese lineare Abbildung

- bildet den Standardbasis–Vektor $\mathbf{e}_i$ zunächst (konstruktionsgemäß!) auf den Eigenvektor $\mathbf{v}_i$ der Matrix A ab (durch R_ψ),
- bildet den Eigenvektor $\mathbf{v}_i$ dann (definitionsgemäß!) auf $\lambda_i \cdot \mathbf{v}_i$ ab (durch A),
- und bildet diesen Vektor schließlich (durch die *Umkehrabbildung* ${R_\psi}^T$) auf $R_\psi^{-1} \cdot (\lambda_i \cdot \mathbf{v}_i) = \lambda_i \cdot R_\psi^{-1} \cdot \mathbf{v}_i = \lambda_i \cdot \mathbf{e}_i$ ab.

Insgesamt sehen wir also: Diese lineare Abbildung ist durch

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \lambda_1 \cdot \mathbf{e}_1 \text{ und } \mathbf{e}_2 \mapsto \lambda_2 \cdot \mathbf{e}_2$$

gegeben, ihre Matrixdarstellung ist also eine *Diagonalmatrix* mit den Eintragungen λ_1 und λ_2; wie behauptet.
Schreiben wir also abkürzend $\mathbf{b} \cdot R_\psi = (d_1, d_2)$, dann ergibt sich

$$\mathbf{y}^T \cdot \left(\underbrace{{R_\psi}^T \cdot A \cdot R_\psi}_{\text{Diagonalmatrix!!!}} \right) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b} \cdot R_\psi \cdot \mathbf{y} + c =$$

$$\lambda_1 \cdot y_1^2 + \lambda_2 \cdot y_2^2 + d_1 \cdot y_1 + d_2 \cdot y_2 + c = 0. \quad (2.11)$$

Das zuvor noch vorhandene gemischte Glied

$$2 \cdot a_3 \cdot x_1 \cdot x_2$$

ist durch die Variablentransformation also tatsächlich verschwunden, wie behauptet!

2.13.3 Zweite Variablentransformation: Geeignete Schiebung!

Wenn $\lambda_i \neq 0$, können wir auf ein *vollständiges Quadrat* ergänzen:

$$\lambda_i \cdot y_i^2 + d_i \cdot y_i = \lambda_i \cdot \left(\underbrace{y_i + \frac{d_i}{2 \cdot \lambda_i}}_{=:z_i} \right)^2 - \lambda_i \cdot \left(\frac{d_i}{2 \cdot \lambda_i} \right)^2 .$$

Geometrisch entspricht diese zweite Variablentransformation einer Parallelverschiebung: Wenn beide Eigenwerte λ_1, λ_2 ungleich Null sind, dann ist der Verschiebungsvektor

$$\mathbf{t} = \left(\frac{d_1}{2 \cdot \lambda_1}, \frac{d_2}{2 \cdot \lambda_2} \right),$$

wenn ein Eigenwert Null ist, dann ist auch die entsprechende Koordinate dieses Verschiebungsvektors Null.
Die zweite Variablentransformation ist also

$$\mathbf{z} := \mathbf{y} + \mathbf{t}, \text{ also: } \mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{t}.$$

In den neuen Variablen $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ sehen wir nun klar: Wenn $\lambda_1 \neq 0$ *und* $\lambda_2 \neq 0$, dann erhalten wir

- die Gleichung einer Ellipse, wenn λ_1 und λ_2 das gleiche Vorzeichen haben,
- die Gleichung einer Hyperbel, wenn λ_1 und λ_2 das entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Wenn genau ein $\lambda_i \neq 0$ ist, dann erhalten wir die Gleichung einer Parabel. Wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, dann erhalten wir einfach die Gleichung einer Geraden.

Beispiel 2.13.1 (Ellipse)**.** *Wir betrachten die quadratische Gleichung*

$$2x_1^2 + 2x_2x_1 + 10x_1 + 2x_2^2 + 8x_2 + 10 = 0. \tag{2.12}$$

Die Matrix A und der Vektor (bzw. die einzeilige Matrix **b**) *sind hier also konkret*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (b_1\; b_2) = \begin{pmatrix} 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

mit den Lösungen

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Um einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ zu finden, betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$(A - \lambda_1 \cdot \mathbf{1}) \cdot \mathbf{x} = (A - (1) \cdot \mathbf{1}) \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}.$$

"Ausmultipliziert" schaut das so aus:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0, \\ x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungsmenge

$$\{(x_1, x_2) : \ x_2 = -x_1\},$$

aus der wir als konkreten Eigenvektor $\mathbf{v}_1' = (1, -1)$ wählen[1]*. Diesen Eigenvektor $\mathbf{v}_1'$ verdrehen wir um $+90°$: Nach unseren theoretischen Überlegungen* wissen *wir, daß wir damit einen zweiten Eigenvektor $\mathbf{v}_2' = (1, 1)$ (zum zweiten Eigenwert λ_2) gefunden haben. Diese zwei Eigenvektoren dividieren wir durch ihre (gemeinsame) Länge $\sqrt{2}$ und schreiben sie als die zwei Spalten der gesuchten Matrix R nebeneinander:*

$$R := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Wenn wir (nur zur Probe!) direkt nachrechnen, erhalten wir das erwartete Ergebnis:

$$R^T \cdot R = R \cdot R^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $R^T \cdot A \cdot R$ ist also eine Diagonalmatrix*, auf deren Hauptdiagonale die Eigenwerte erscheinen. Führen wir nun die* Variablentransformation

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2) = R^T \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{2}} - \frac{x_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

durch, dann gilt wegen $R^T = R^{-1}$:

$$\mathbf{x} = R \cdot \mathbf{y}.$$

Das bedeutet aber: Mit den neuen *Variablen $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ erscheint unsere ursprüngliche Gleichung* (2.12) *in der Form*

$$\Bigg(\underbrace{R \cdot \mathbf{y}}_{\mathbf{x}}\Bigg)^T \cdot A \cdot \Bigg(\underbrace{R \cdot \mathbf{y}}_{\mathbf{x}}\Bigg) + \mathbf{b} \cdot \Bigg(\underbrace{R \cdot \mathbf{y}}_{\mathbf{x}}\Bigg) + (10) = 0. \tag{2.13}$$

[1] Diese Wahl ist beliebig: Nur den Nullvektor dürfen wir nicht nehmen!

Wegen der Assoziativität *der Matrixmultiplikation und der Rechenregel für die Transponierte eines Matrixprodukts können wir* (2.13) *äquivalent in der Form*

$$\mathbf{y}^T \cdot \left(R^T \cdot A \cdot R\right) \cdot \mathbf{y} + (\mathbf{b} \cdot R) \cdot \mathbf{y} + (10) = 0$$

schreiben: Die (Diagonal–)Matrix $R^T \cdot A \cdot R$ *haben wir bereits ausgerechnet, und* $\mathbf{b} \cdot R = \left(\sqrt{2}, 9\sqrt{2}\right)$ *ergibt sich auch sofort durch einfache Rechnung. In den neuen Variablen* $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ *lautet unsere Gleichung also:*

$$y_1^2 + \sqrt{2}y_1 + 3y_2^2 + 9\sqrt{2}y_2 + 10 = 0.$$

Das ist nun schon einfacher! Zum Abschluß ergänzen wir noch auf vollständige Quadrate*, d.h., wir führen eine weitere Variablentransformation durch Verschiebung um den Vektor* $\mathbf{t} = (t_1, t_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ *durch:*

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2) := \mathbf{y} + \mathbf{t}, \textit{ also } \mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{t}.$$

Wenn wir nun

$$\underbrace{(\mathbf{z}-\mathbf{t})^T \cdot R^T \cdot A \cdot R \cdot (\mathbf{z}-\mathbf{t})}_{=\left(z_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+3\left(z_2-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} + (\mathbf{b} \cdot R) \cdot (\mathbf{z}-\mathbf{t}) + (10)$$

einfach ausrechnen*, dann erhalten wir die Gleichung des Kegelschnitts in den neuen Variablen* $\mathbf{z}$ *(sichtlich: Ellipse* in Hauptlage*):*

$$z_1^2 + 3z_2^2 - 4 = 0.$$

Beispiel 2.13.2 (Hyperbel)**.** *Wir betrachten die quadratische Gleichung*

$$\frac{x_1^2}{2} + 5x_2x_1 + 13x_1 + \frac{x_2^2}{2} + 17x_2 + \frac{55}{2} = 0. \tag{2.14}$$

Die Matrix A und der Vektor (bzw. die einzeilige Matrix $\mathbf{b}$*) sind hier also konkret*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (b_1\ b_2) = \begin{pmatrix} 13 & 17 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6$$

mit den Lösungen

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 3.$$

Um einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -2$ zu finden, betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$(A - \lambda_1 \cdot \mathbf{1}) \cdot \mathbf{x} = (A - (-2) \cdot \mathbf{1}) \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}.$$

"Ausmultipliziert" schaut das so aus:

$$\frac{5x_1}{2} + \frac{5x_2}{2} = 0,$$
$$\frac{5x_1}{2} + \frac{5x_2}{2} = 0.$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungsmenge

$$\{(x_1, x_2) : \ x_2 = -x_1\},$$

aus der wir als konkreten Eigenvektor $\mathbf{v}'_1 = (1, -1)$ wählen[2]. *Diesen Eigenvektor $\mathbf{v}'_1$ verdrehen wir um $+90°$: Nach unseren theoretischen Überlegungen* wissen *wir, daß wir damit einen zweiten Eigenvektor $\mathbf{v}'_2 = (1, 1)$ (zum zweiten Eigenwert λ_2) gefunden haben. Diese zwei Eigenvektoren dividieren wir durch ihre (gemeinsame) Länge $\sqrt{2}$ und schreiben sie als die zwei Spalten der gesuchten Matrix R nebeneinander:*

$$R := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Wenn wir (nur zur Probe!) direkt nachrechnen, erhalten wir das erwartete Ergebnis:

$$R^T \cdot R = R \cdot R^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $R^T \cdot A \cdot R$ ist also eine Diagonalmatrix, *auf deren Hauptdiagonale die Eigenwerte erscheinen. Führen wir nun die* Variablentransformation

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2) = R^T \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{2}} - \frac{x_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

durch, dann gilt wegen $R^T = R^{-1}$:

$$\mathbf{x} = R \cdot \mathbf{y}.$$

Das bedeutet aber: Mit den neuen *Variablen $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ erscheint unsere ursprüngliche Gleichung* (2.14) *in der Form*

$$\Big(\underbrace{R \cdot \mathbf{y}}_{\mathbf{x}}\Big)^T \cdot A \cdot \Big(\underbrace{R \cdot \mathbf{y}}_{\mathbf{x}}\Big) + \mathbf{b} \cdot \Big(\underbrace{R \cdot \mathbf{y}}_{\mathbf{x}}\Big) + \left(\frac{55}{2}\right) = 0. \tag{2.15}$$

[2]Diese Wahl ist beliebig: Nur den Nullvektor dürfen wir nicht nehmen!

Wegen der Assoziativität *der Matrixmultiplikation und der Rechenregel für die Transponierte eines Matrixprodukts können wir* (2.15) *äquivalent in der Form*

$$\mathbf{y}^T \cdot \left(R^T \cdot A \cdot R\right) \cdot \mathbf{y} + (\mathbf{b} \cdot R) \cdot \mathbf{y} + \left(\frac{55}{2}\right) = 0$$

schreiben: Die (Diagonal–)Matrix $R^T \cdot A \cdot R$ haben wir bereits ausgerechnet, und $\mathbf{b} \cdot R = \left(-2\sqrt{2}, 15\sqrt{2}\right)$ ergibt sich auch sofort durch einfache Rechnung. In den neuen Variablen $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ lautet unsere Gleichung also:

$$-2y_1^2 - 2\sqrt{2}y_1 + 3y_2^2 + 15\sqrt{2}y_2 + \frac{55}{2} = 0.$$

Das ist nun schon einfacher! Zum Abschluß ergänzen wir noch auf vollständige Quadrate*, d.h., wir führen eine weitere Variablentransformation durch Verschiebung um den Vektor $\mathbf{t} = (t_1, t_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ durch:*

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2) := \mathbf{y} + \mathbf{t}, \textit{ also } \mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{t}.$$

Wenn wir nun

$$\underbrace{(\mathbf{z}-\mathbf{t})^T \cdot R^T \cdot A \cdot R \cdot (\mathbf{z}-\mathbf{t})}_{=3\left(z_2 - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + (\mathbf{b} \cdot R) \cdot (\mathbf{z}-\mathbf{t}) + \left(\frac{55}{2}\right)$$

einfach ausrechnen*, dann erhalten wir die Gleichung des Kegelschnitts in den neuen Variablen* $\mathbf{z}$ *(sichtlich: Hyperbel* in Hauptlage*):*

$$-2z_1^2 + 3z_2^2 - 9 = 0.$$

Beispiel 2.13.3 (Parabel)**.** *Wir betrachten die quadratische Gleichung*

$$\frac{5x_1^2}{2} - 5x_2x_1 + 5x_1 + \frac{5x_2^2}{2} - 7x_2 - \frac{21}{2} = 0. \tag{2.16}$$

Die Matrix A und der Vektor (bzw. die einzeilige Matrix $\mathbf{b}$*) sind hier also konkret*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (b_1\ b_2) = \begin{pmatrix} 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\det\begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \lambda & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 5)\lambda$$

mit den Lösungen

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 5.$$

Um einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ zu finden, betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$(A - \lambda_1 \cdot \mathbf{1}) \cdot \mathbf{x} = (A - (0) \cdot \mathbf{1}) \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}.$$

"Ausmultipliziert" schaut das so aus:

$$\begin{aligned} \frac{5x_1}{2} - \frac{5x_2}{2} &= 0, \\ \frac{5x_2}{2} - \frac{5x_1}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungsmenge

$$\{(x_1, x_2) : \ x_2 = x_1\},$$

aus der wir als konkreten Eigenvektor $\mathbf{v}_1' = (1, 1)$ wählen[3]*. Diesen Eigenvektor $\mathbf{v}_1'$ verdrehen wir um $+90°$: Nach unseren theoretischen Überlegungen* wissen *wir, daß wir damit einen zweiten Eigenvektor $\mathbf{v}_2' = (-1, 1)$ (zum zweiten Eigenwert λ_2) gefunden haben. Diese zwei Eigenvektoren dividieren wir durch ihre (gemeinsame) Länge $\sqrt{2}$ und schreiben sie als die zwei Spalten der gesuchten Matrix R nebeneinander:*

$$R := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Wenn wir (nur zur Probe!) direkt nachrechnen, erhalten wir das erwartete Ergebnis:

$$R^T \cdot R = R \cdot R^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $R^T \cdot A \cdot R$ ist also eine Diagonalmatrix*, auf deren Hauptdiagonale die Eigenwerte erscheinen. Führen wir nun die* Variablentransformation

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2) = R^T \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{2}} - \frac{x_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

durch, dann gilt wegen $R^T = R^{-1}$:

$$\mathbf{x} = R \cdot \mathbf{y}.$$

[3]Diese Wahl ist beliebig: Nur den Nullvektor dürfen wir nicht nehmen!

Das bedeutet aber: Mit den neuen *Variablen* $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ *erscheint unsere ursprüngliche Gleichung* (2.16) *in der Form*

$$\left(\underbrace{R\cdot\mathbf{y}}_{\mathbf{x}}\right)^T \cdot A \cdot \left(\underbrace{R\cdot\mathbf{y}}_{\mathbf{x}}\right) + \mathbf{b} \cdot \left(\underbrace{R\cdot\mathbf{y}}_{\mathbf{x}}\right) + \left(-\frac{21}{2}\right) = 0. \tag{2.17}$$

Wegen der Assoziativität *der Matrixmultiplikation und der Rechenregel für die Transponierte eines Matrixprodukts können wir* (2.17) *äquivalent in der Form*

$$\mathbf{y}^T \cdot \left(R^T \cdot A \cdot R\right) \cdot \mathbf{y} + (\mathbf{b} \cdot R) \cdot \mathbf{y} + \left(-\frac{21}{2}\right) = 0$$

schreiben: Die (Diagonal–)Matrix $R^T \cdot A \cdot R$ *haben wir bereits ausgerechnet, und* $\mathbf{b} \cdot R = \left(-\sqrt{2}, -6\sqrt{2}\right)$ *ergibt sich auch sofort durch einfache Rechnung. In den neuen Variablen* $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ *lautet unsere Gleichung also:*

$$5y_2^2 - 6\sqrt{2}y_2 - \sqrt{2}y_1 - \frac{21}{2} = 0.$$

Das ist nun schon einfacher! Zum Abschluß ergänzen wir noch auf vollständige Quadrate, *d.h., wir führen eine weitere Variablentransformation durch Verschiebung um den Vektor* $\mathbf{t} = (t_1, t_2) = \left(0, -\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$ *durch:*

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2) := \mathbf{y} + \mathbf{t}, \textit{ also } \mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{t}.$$

Wenn wir nun

$$\underbrace{(\mathbf{z}-\mathbf{t})^T \cdot R^T \cdot A \cdot R \cdot (\mathbf{z}-\mathbf{t})}_{=5\left(z_2+\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2} + (\mathbf{b} \cdot R) \cdot (\mathbf{z}-\mathbf{t}) + \left(-\frac{21}{2}\right)$$

einfach ausrechnen, *dann erhalten wir die Gleichung des Kegelschnitts in den neuen Variablen* $\mathbf{z}$ *(sichtlich: Parabel* in Hauptlage*):*

$$5z_2^2 - \sqrt{2}z_1 - \frac{141}{10} = 0.$$