EINFÜHRUNG INS MATHEMATISCHE ARBEITEN: AUFGABENSAMMLUNG 2015

BERNHARD LAMEL

1. Einfache Beweise, Elementare Zahlentheorie und Induktion

Beispiel 1. Formulieren Sie die Negation der Aussage "Alle Rosen sind rot". Ist "Es gibt eine schwarze Rose" eine gültige Negation dieser Aussage?

Beispiel 2. Formulieren Sie die Negation der Aussage "Es gibt ein schwarzes Schaf". Ist "Alle Schafe sind weiß" eine gültige Negation dieser Aussage?

Beispiel 3. Zeigen oder widerlegen Sie die Aussage "Alle Studierenden wohnen in Wien".

Beispiel 4. Zeigen oder widerlegen Sie die Aussage "Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seitenlängen 3, 4, und 6 sind".

Beispiel 5. Verneinen Sie die Aussage "Alle Hunde sind schwarz oder klein".

Beispiel 6. Verneinen Sie die Aussage "Es gibt einen Schwan, der schwarz ist und einen kurzen Hals hat".

Beispiel 7. Zeigen Sie: Seien $a, b, d, k, \ell \in \mathbb{Z}$. Wenn $d \mid a$ und $d \mid b$ gilt, so gilt $d|(ka + \ell b)$.

Beispiel 8. Verwenden Sie die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung, um folgende Aussage zu beweisen: Sei p eine Primzahl und $a \in \mathbb{N}$, und es gelte $p|a^2$. Dann gilt $p|a$.

Beispiel 9. Zeigen Sie: Sei p eine Primzahl. Dann ist $\sqrt{p}$ irrational.

Beispiel 10. Zeigen Sie unter Verwendung der Aussage, dass jedes Dreieck Winkelsumme π hat, dass jedes Viereck Winkelsumme 2π hat.

Beispiel 11. Ein n-Eck P in der Ebene heisst *konvex*, wenn für je zwei Punkte p, q auf seinem Rand die Verbindungsstrecke von p nach q im n-Eck P liegt. Geben Sie ein Beispiel für ein konvexes und ein nicht konvexes n-Eck. Zeigen Sie mit Hilfe von Induktion nach n: Die Winkelsumme eines konvexen n-Ecks ist $(n-2)\pi$. (Hier verwenden wir das Bogenmass: $180° = \pi$.)

Beispiel 12. Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{i,j,k \in \mathbb{N} \\ i+j+k=n}} A_{i,j,k} a^i b^j c^k,$$

wobei

$$A_{i,j,k} := \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}.$$

Sie können diese Aufgabe lösen, indem Sie den Binomialsatz zweimal anwenden und umformen. Oder sie gehen wie folgt vor:

- Im Ausdruck

  $$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{i,j,k \in \mathbb{N} \\ i+j+k=n}} B_{i,j,k} a^i b^j c^k,$$

  sind die $B_{i,j,k}$ (natürliche) Zahlen, welche die Gleichungen

  $$B_{i,j,k} = B_{i-1,j,k} + B_{i,j-1,k} + B_{i,j,k-1}$$

  erfüllen (für welche i, j, k das gilt, muss natürlich spezifiziert werden: das ist Teil ihrer Aufgabe).

Date: October 8, 2015.

- Zeigen Sie nun, dass die oben definierten $A_{i,j,k}$ die oben für die $B_{i,j,k}$ hergeleiteten Gleichungen erfüllen, d.h. zeigen Sie, dass die Zahlen $A_{i,j,k} := \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}$ die Gleichung
$$A_{i,j,k} = A_{i-1,j,k} + A_{i,j-1,k} + A_{i,j,k-1}$$
erfüllen.
- Folgern Sie (mit Hilfe von Induktion), dass $B_{i,j,k} = A_{i,j,k}$.

Wenn Sie eine kombinatorische Interpretation des bewiesenen "Trinomialsatz" geben könnnen, so tun Sie das!

Beispiel 13. Wir definieren eine Folge a_n natürlicher Zahlen induktiv wie folgt:
$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{j+1} = a_j + a_{j-1}, \quad j \geq 2.$$
Geben Sie die ersten 8 Terme dieser Folge an. Zeigen Sie: Für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt
$$a_j = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^j - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^j \right).$$
Gehen Sie dazu wie folgt vor:
- Zeigen Sie, dass
$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
die Lösungen der Gleichung $q^2 = q + 1$ sind.
- Folgern Sie, dass für beliebige reelle Zahlen λ, μ die durch $b_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$ definierte Folge die Rekursionsgleichung $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$ erfüllt.
- Bestimmen Sie nun λ und μ so, dass $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ gilt.
- Folgern Sie, dass $a_j = b_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt (mit Hilfe von Induktion).

Beispiel 14. Zeigen Sie mit Hilfe von Induktion: Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $3^k \geq k^3$ für alle $k \geq k_0$ gilt.

Beispiel 15. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ die Gleichung
$$\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
erfüllt ist.

Beispiel 16. Zeigen Sie mit Hilfe von Induktion: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und $a_1, \ldots, a_{2^n}$ reelle Zahlen. Dann gilt
$$\prod_{j=1}^{2^n} a_j \leq \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} a_j^{2^n}.$$

2. Mengenlehre, Funktionen, Relationen

Beispiel 17. Seien A und B Mengen. Wir definieren die symmetrische Differenz $A \Delta B$ zweier Mengen als die Menge aller Objekte, welche in A, aber nicht in B, oder in B, aber nicht in A enthalten sind, d.h.
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$
Zeigen oder widerlegen Sie: Für beliebige Mengen A, B, C gilt $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

Beispiel 18. Sei A eine Menge, und $B \subset A$ eine Teilmenge. Zeigen Sie: Es gilt $A \cap B = B$ und $A \cup B = A$.

Beispiel 19. Es seien Mengen A, B gegeben. Zeigen Sie: Wenn $A \cap B = A$ gilt, so ist $A \subseteq B$.

Beispiel 20. Zeigen oder widerlegen Sie: Für beliebige Mengen A, B, C gilt $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Beispiel 21. Es sei M eine endliche Menge mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen. Zeigen Sie: Die Potenzmenge $\mathbb{P}(M)$ ist eine endliche Menge mit 2^n Elementen.

Beispiel 22. Es sei M eine endliche Menge mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen. Zeigen Sie: das k-fache cartesische Produkt $X^k = X \times \cdots \times X$ ist eine endliche Menge mit n^k Elementen.

Beispiel 23. Wir betrachten eine total geordnete Menge $(M, \leq)$. Ein *Wort* w auf M ist eine endliche Folge von Elementen aus M, i.e.

$$w = a_1 a_2 \dots a_n, \quad a_j \in M.$$

Die natürliche Zahl n wird als die Länge des Wortes w bezeichnet. Wir definieren auf der Menge aller Wörter der Länge n eine Relation $\preceq$: Für w wie oben und $v = v_1 \dots v_n$ ist $w \prec v$ genau dann, wenn es ein $k \leq n$ gibt sodass $a_j = v_j$ für $j < k$, und $a_k < v_k$ aber $a_k \neq v_k$. Zeigen Sie, dass $\preceq$ eine Ordnungsrelation ist; ist die entstehende Ordnung eine Totalordnung?

Beispiel 24. Sei M eine Menge. Zeigen Sie, dass die mengentheoretische Inklusion $\subset$ eine Halbordnung auf der Potenzmenge $\mathbb{P}(M)$ ist. Zeigen Sie, dass für $A, B \subset M$ die Menge $\{A, B\} \subset \mathbb{P}(M)$ sowohl ein Supremum als auch ein Infimum bezüglich dieser Ordnung besitzt.

Beispiel 25. Auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ definieren wir die folgende Relation R: Eine reelle Zahl x und eine reelle Zahl y stehen in Relation R zueinander, wenn es ein k aus $\mathbb{Z}$ gibt, sodass $x - y = 2k\pi$ gilt. π bezeichnet hier wie üblich den halben Kreisumfang. Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ ist.

Beispiel 26. Auf der Menge aller Punkte in der (euklidischen) Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, mit dem Ursprung entfernt, definieren wir eine Relation $\sim$, indem wir festsetzen, dass für zwei Punkte P und Q die Relation $P \sim Q$ genau dann gilt, wenn P und Q auf derselben Geraden durch den Ursprung liegen. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Was ist der Quotientenraum dieser Äquivalenzrelation?

Beispiel 27. Bestimmen Sie, ob folgende Funktionen injektiv und/oder surjektiv sind:
(1) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$
(2) $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(z) = z^2$
(3) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $h(x) = x^2$
(4) $k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $k(x) = x^2$

Beispiel 28. Wir betrachten die aus Beispiel 25 bekannte Äquivalenzrelation R auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$: Eine reelle Zahl x und eine reelle Zahl y stehen in Relation R zueinander, wenn es ein k aus $\mathbb{Z}$ gibt, sodass $x - y = 2k\pi$ gilt. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$T\colon {}^{\mathbb{R}}\!/_{R} \to \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}, \quad T(C_x) = (\cos x, \sin x)$$

wohldefiniert ist, und untersuchen Sie, ob T bijektiv ist.

Beispiel 29. Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Wir definieren eine Relation R_f auf X:

$$R_f = \{(x_1, x_2) \in X \times X \colon f(x_1) = f(x_2)\}.$$

Zeigen Sie, dass R_f eine Äquivalenzrelation auf X ist.

Beispiel 30. Wir definieren (wie im Buch und in der Vorlesung), die Relation $\sim_d$ auf $\mathbb{Z}_d$ durch $n \sim_d m \Leftrightarrow d | n - m$. Zeigen Sie: Die Abbildung, welche der Restklasse von $n \in \mathbb{N}$ den Rest von n bei Division durch d zuordnet, ist eine (wohldefinierte) bijektive Abbildung der Quotientenmenge $\mathbb{Z}_d$ auf die endliche Menge $\{0, 1, \dots, d-1\} \subset \mathbb{N}$.

Beispiel 31. Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion und R_f die in Beispiel 29 definierte Äquivalenzrelation. Auf dem Quotientenraum $\tilde{X} = {}^{X}\!/_{R_f}$ definieren wir eine Funktion $F\colon \tilde{X} \to Y$ durch $F([x]) = f(x)$, wobei $[x]$ die Äquivalenklasse von $x \in X$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass F wohldefiniert ist, und dass F injektiv ist.

Beispiel 32. Sei R eine Äquivalenzrelation auf X. Zeigen Sie: Es gibt eine Menge Y und eine Funktion f, sodass mit der in Beispiel 29 definierten Relation R_f die Gleichheit $R = R_f$ gilt.

Beispiel 33. (Dieses Beispiel kommt doppelt vor. Ich behalte es hier, damit's nicht zu Umnummerierungsproblemen kommt.) Wir betrachten die aus Beispiel 25 bekannte Äquivalenzrelation R auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$: Eine reelle Zahl x und eine reelle Zahl y stehen in Relation R zueinander, wenn es ein k aus $\mathbb{Z}$ gibt, sodass $x - y = 2k\pi$ gilt. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$T\colon {}^{\mathbb{R}}\!/_{R} \to \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}, \quad T(C_x) = (\cos x, \sin x)$$

wohldefiniert ist, und untersuchen Sie, ob T bijektiv ist.

Beispiel 34. Es sei $\sim$ die in Beispiel 26 definierte Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Wir definieren auf dem Faktorraum ${\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}/{\sim}$ eine Funktion

$$S\colon {\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}/{\sim} \to \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 = 1\}, \quad S([(s,t)]) = \left(\frac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}\right).$$

Zeigen Sie, dass S bijektiv ist.

Beispiel 35. Es sei X eine Menge mit 5 Elementen. Wieviele (verschiedene) Äquivalenzrelationen auf X gibt es, deren Faktorraum aus 2 Elementen besteht? Können Sie eine "allgemeine" Formel für die Anzahl solcher Äquivalenzrelationen finden?

Beispiel 36. Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen. Zeigen Sie:

- Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist f injektiv.
- Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist g surjektiv.

Beispiel 37. Wir definieren (wie im Buch und in der Vorlesung), die Relation $\sim_d$ auf $\mathbb{Z}$; die Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $[n]$, und den Quotientenraum mit $\mathbb{Z}_d$. Zeigen Sie: Die Abbildungen $A\colon \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d \to \mathbb{Z}_d$, $M\colon \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d \to \mathbb{Z}_d$, welche durch

$$A([m],[n]) := [m+n], \quad M([m],[n]) := [mn]$$

gegeben sind, sind wohldefiniert.

Beispiel 38. Es sein A, M die in Beispiel 37 definierten Funktionen. Beschreiben Sie $A^{-1}([0])$, $M^{-1}([0])$, und $M^{-1}([1])$ im Falle von $d = 12$ (können Sie vermuten, was für allgemeines d zu erwarten ist?).

Beispiel 39. Es sei $M = \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$, und $N = \{0,1\}^n$. Auf der Potenzmenge $P(M)$ definieren wir eine Abbildung $T\colon P(M) \to N$ indem wir $T(X) := (x_1, \dots, x_n)$, wo

$$x_j = \begin{cases} 0, & j \in X, \\ 1, & j \notin X, \end{cases}$$

definieren. Zeigen Sie, dass T bijektiv ist.

3. Grundbegriffe der Algebra

Beispiel 40. Es sei $M_2(\mathbb{R})$ die Menge der 2×2-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Matrizenmultiplikation eine *assoziative* Operation auf $M_2(\mathbb{R})$ ist.

Beispiel 41. Es sei X eine Menge, und X^X die Menge aller Funktionen $f\colon X \to X$. Zeigen Sie, dass die Zusammensetzung von Funktionen eine assoziative Operation auf X^X ist.

Beispiel 42. Es sei wieder X^X die Menge aller Funktionen von X nach X. Bestimmen Sie das Einselement für die Operation der Zusammensetzung von Funktionen in X^X.

Beispiel 43. Es sei S_3 die Menge der Permutationen (d.h. bijektiven Abbildungen) einer 3-elementigen Menge auf sich selber. Zeigen Sie, dass S_3 mit der Zusammensetzung von Abbildungen zu einer Gruppe wird, und stellen Sie die Cayleytafel dieser Gruppe auf. Ist diese Gruppe kommutativ?

Beispiel 44. Es sei $SL_2(\mathbb{Z})$ die Menge der 2×2 Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z},$$

welche $ad - bc = 1$ erfüllen. Zeigen Sie, dass $SL_2(\mathbb{Z})$, mit der Matrixmultiplikation versehen, eine Gruppe ist. (Bemerkung: Die Lösung der Gleichungen für die Einträge der Inversen ist etwas aufwändig, aber vielleicht können Sie ja eine Formel für die Inverse erraten!) Ist diese Gruppe kommutativ?

Beispiel 45. Bestimmen Sie die Inverse bezüglich der Multiplikation einer 2×2 Matrix A mit reellen Einträgen,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

welche $ad - bc \neq 0$ erfüllt.

Beispiel 46. Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe S_3 aus Beispiel 43.

Beispiel 47. Bestimmen Sie die Gruppe Q aller Symmetrien eines Quadrats (d.h. eines Rechtecks, dessen Seiten gleich lang sind; unter einer Symmetrie wollen wir eine Drehung oder Spiegelung verstehen, die das Quadrat auf sich selber abbildet). Zeigen Sie, dass alle Symmetrien, die einen (fix gewählten) Eckpunkt fixieren, eine Untergruppe bilden.

Beispiel 48. Wählen sie in der Gruppe S_3 aus Beispiel 43 eine Teilgruppe K, die durch jene Permutationen gegeben ist, die einen Punkt der zugrundegelegten 3-elementigen Menge fixieren. Auf S_3 definieren wir eine Relation R durch $xRy \Leftrightarrow x^{-1}y \in R$. Bestimmen Sie die Faktormenge ${}^{S_3}\!/_{R}$.

Beispiel 49. Es sei G eine Gruppe mit 2 Elementen. Zeigen Sie: G ist isomorph zu $\mathbb{Z}_2$ (mit der Addition von Restklassen als Operation).

Beispiel 50. Es seien G und H Gruppen, $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, e_H das neutrale Element in H. Zeigen Sie: Der Kern $\ker f$ von f,

$$\ker f := \{g \in G\colon f(g) = e_H\},$$

ist eine Untergruppe von G.

Beispiel 51. Es seien G und H Gruppen, $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, e_H das neutrale Element in H. Zeigen Sie: Das Bild $\mathrm{im} f$ von f,

$$\mathrm{im} f := f(G) = \{h \in H\colon \text{Es gibt ein } g \in G \text{ sodass } f(g) = h\},$$

ist eine Untergruppe von G.

Beispiel 52. Zeigen Sie: $\mathbb{Z}_4$, versehen mit der Addition und Multiplikation von Restklassen, ist ein kommutativer Ring mit 1. Ist $\mathbb{Z}_4$ ein Körper?

Beispiel 53. Zeigen Sie: Die Menge

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}\colon a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$$

ist ein Teilring von $\mathbb{R}$. Ist $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ein Teilkörper von $\mathbb{R}$?

Beispiel 54. Bestimmen Sie die Menge der Einheiten im Ring $\mathbb{Z}_{12}$ und entwickeln Sie eine Vermutung, welche Eigenschaft dieser Restklassen aussschlaggebend dafür ist, dass sie Einheiten sind. Können Sie allgemein formulieren, welche Restklassen in $\mathbb{Z}_d$ Einheiten sind?

Beispiel 55. Wir betrachten die Menge K aller 2×2 Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$ welche von der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{Q}$$

sind. Zeigen Sie, dass K mit der üblichen Multiplikation und Addition von Matrizen zu einem Körper wird. (Wenn Ihnen die Rechnungen zu langwierig werden, können Sie versuchen, auf Beispiel 53 zurückzugreifen).

Beispiel 56. Zeigen Sie: Jede natürliche Zahl n lässt sich eindeutig in der Form

$$n = \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j 2^j$$

mit $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$ schreiben (k ist dabei gross genug zu wählen, z.B. $k = n$).

Beispiel 57. Wir betrachten die Menge K aller 2×2 Matrizen mit reellen Einträgen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass K mit den üblichen Matrizenoperationen ein Körper ist.

Beispiel 58. Zeigen Sie, dass der Körper K aus Beispiel 57 isomorph zum Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist.