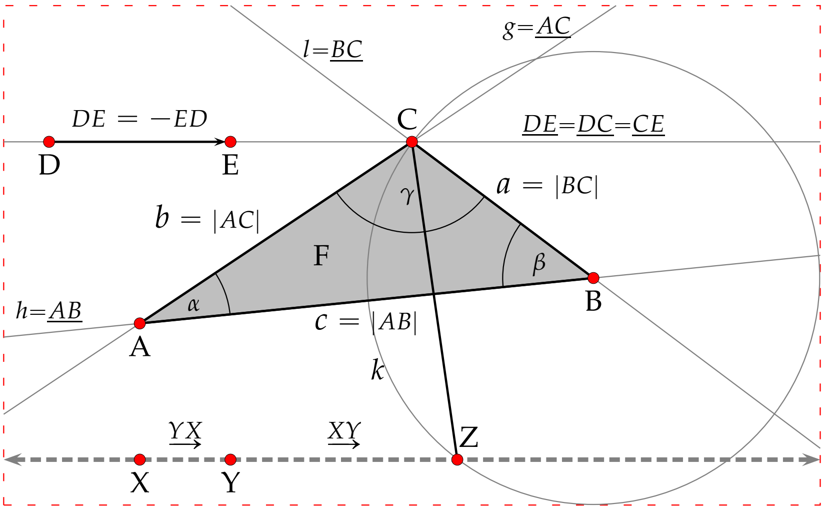
UE Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

(Modul: "Geometrie" (UF MA 03))

zur VO von Markus Fulmek

Sommersemester 2017

ABBILDUNG 1. Illustration der verwendeten Bezeichnungen: Großbuchstaben ($A, B, C \ldots$) für Punkte, Strecke $\overline{AB}$, Gerade $\underline{AB}$, Strahl $\underrightarrow{XY}$, griechische Buchstaben ($\alpha, \beta, \gamma \ldots$) für Winkel $|\measuredangle(ABC)|$, Dreieck $\triangle ABC$, Viereck $\square ABCD$, Kreis k.



Aufgabe 1: *Seien A, B, C und D vier kollineare Punkte. Zeigen Sie, daß für die orientierten Distanzen dieser Punkte gilt:*

$$DA \cdot BC + DB \cdot CA + DC \cdot AB = 0.$$

<u>Hinweis:</u> Für die orientierte Distanz gilt ja immer $XZ = XY + YZ$ und $XY = -YX$.

Aufgabe 2: *Bestimmen Sie die Lösungsmenge (also* alle *Lösungen!) des Gleichungssystems ...*

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180,$$
$$\beta + \gamma = \delta + \alpha = 180.$$

... in den Variablen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Welche Teilmenge dieser Lösungsmenge ist für den geometrischen Zusammenhang zwischen Scheitelwinkeln und Nebenwinkeln relevant?

<u>Hinweis:</u> Es gibt unendlich viele Lösungen, also konkrete Quadrupel *(a, b, c, d) reeller Zahlen, die man für $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ einsetzen kann, sodaß beide Gleichungen richtig sind. Die Aufgabe ist natürlich so gemeint, daß sie* alle *diese Lösungen möglichst einfach* beschreiben *sollen.*

Aufgabe 3: *Verallgemeinern Sie die Definition des konvexen Viereck auf das konvexe n–Eck. Zeigen Sie: Die Summe der Innenwinkel im konvexen n–Eck ist $(n-2) \cdot 180^\circ$.*

<u>Hinweis:</u> Konvexität *bedeutet bei einer durch gerade Linien begrenzten Figur, daß alle Innenwinkel kleiner als 180° sind.*

Aufgabe 4: *Sei $n > 4$. Betrachten Sie ein (nicht notwendigerweise regelmäßiges!)* konvexes *n–Eck, bei dem alle Innenwinkel größer als 90° sind. Seien $E_1, \dots E_n$ die Eckpunkte dieses n–Ecks.*

Über jeder der n–Eck–Seiten $\overline{E_iE_{i+1}}$ (wie ist das offensichtlich gemeint, wenn $i = n$?) sei ein Dreieck errichtet, dessen dritter Eckpunkt der Schnittpunkt S_i der Trägergeraden der benachbarten n–Eck–Seiten $\overline{E_{i-1}E_i}$ und $\overline{E_{i+1}E_{i+2}}$ ist (wieso existiert dieser Schnittpunkt?)

Seien $\alpha_i = |\sphericalangle(E_iS_iE_{i+1})|$ die Winkel bei diesen Eckpunkten S_i, $i = 1, \dots n$. Zeigen Sie:

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = (n-4) \cdot 180^\circ.$$

Hinweis: *Veranschaulichen Sie sich die Situation zunächst anhand des Fünfecks.*

Aufgabe 5: *Sei $\square ABCD$ ein konvexes Viereck. Sei g_A die Gerade durch den Eckpunkt A, die die (beiden) Außenwinkel bei A halbiert; und ganz analog seien die Geraden g_B, g_C und g_D definiert.*

Zeigen Sie, daß diese vier Geraden ein konvexes Viereck bestimmen, in dem die Summe von je zwei Winkeln, die einander gegenüberliegen, *gleich 180° ist.*

Aufgabe 6: *Seien $g \perp h$ zwei Geraden mit Schnittpunkt P, seien $k \perp l$ zwei Geraden mit Schnittpunkt Q; sei $Q \notin g$ und $Q \notin h$, ebenso $P \notin k$ und $P \notin l$. Sei $g \nparallel k$ und $g \nparallel l$.*

Zeigen Sie: Diese vier Geraden bestimmen insgesamt 6 verschiedene Schnittpunkte. Leiten Sie anhand einer Skizze (Q liegt im Inneren *eines Quadranten in bezug auf g und h!) alle Beziehungen ab, die zwischen den Winkeln bestehen, die bei diesen 6 Schnittpunkten auftreten (Orthogonalwinkel).*

Hinweis: *Argumentieren Sie* genau *mit dem Parallelenaxiom, verwenden Sie die Tatsachen betreffend Scheitelwinkel und Nebenwinkel.*

Aufgabe 7: *Sei $\overline{AB}$ eine Strecke. Skizzieren Sie den Funktionsgraphen des orientierten Verhältnisses eines Punktes P in bezug auf $\overline{AB}$, also den Graphen der Funktion*

$$f\colon \underline{AB} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\},\ f(P) = [AP : PB].$$

Wie ändert sich dieser Graph, wenn die Orientierung der Geraden $\underline{AB}$ umgedreht wird?

Aufgabe 8: *Ein* Tetraeder *ist ein* Polyeder *(griechisch: "Vielflächner"), der von 4 Eckpunkten im Raum bestimmt wird, die nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen.*

Im Raum ist die Streckensymmetrale einer Strecke $\overline{AB}$ jene Ebene, *die normal auf $\overline{AB}$ steht und den Streckenmittelpunkt von $\overline{AB}$ enthält.*

Zeigen Sie: Die Streckensymmetralen der Seiten eines Tetraeders schneiden einander in einem *Punkt.*

Hinweis: *Verwenden Sie (ohne Beweis): Die Streckensymmetrale von $\overline{AB}$ im Raum ist (ganz analog zur Ebene) genau die Menge aller Punkte, die von A und B denselben Abstand haben. Argumentieren Sie ganz analog zur Ebene (Streckensymmetralen der Dreiecksseiten schneiden einander in einem einzigen Punkt...).*

Aufgabe 9: *Seien $M_1 \neq M_2$ zwei Punkte der Ebene, sei $d = |M_1M_2| > 0$ und seien $r_1 \geqslant r_2 > 0$. Zeigen Sie: Die Kreise $k(M_1, r_1)$ und $k(M_2, r_2)$ mit Mittelpunkten M_1, M_2 und Radien r_1, r_2 haben*

(1) *keinen Schnittpunkt, wenn $r_1 + r_2 < d$ oder $r_1 - r_2 > d$,*
(2) *genau einen Schnittpunkt, wenn $r_1 + r_2 = d$ oder $r_1 - r_2 = d$,*
(3) *genau zwei Schnittpunkte, wenn $r_1 + r_2 > d$ und $r_1 - r_2 < d$.*

Aufgabe 10: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit den Winkeln α, β und γ, sei U der Umkreismittelpunkt des Dreiecks.*

Drücken Sie alle Winkel in den Dreiecken $\triangle ABU$, $\triangle BCU$ und $\triangle ACU$ durch α, β und γ aus.

Aufgabe 11: *Ein Viereck $\square ABCD$, das einen Umkreis hat (also einen Kreis, der alle vier Punkte A, B, C und D enthält, heißt ein* Sehnenviereck *(denn dann ist jede Vierecksseite eine Sehne des Umkreises).*

Zeigen Sie: In einem Sehnenviereck ist die Summe der gegenüberliegenden (also nicht einer gemeinsamen Seite anliegenden) Winkel gleich 180°.

Aufgabe 12: *Seien $k_1 = k(M_1, r_1)$ und $k_2 = k(M_2, r_2)$ zwei Kreise, wobei $r_1 + r_2 > |M_1M_2| > \max(r_1, r_2)$ sei: Die Kreise schneiden einander also in zwei Punkten A und B. Seien g bzw. h zwei Gerade durch A bzw. B, die aber beide* keine Tangenten *an einen der Kreise sind: Dann schneidet g also k_1 in einem weiteren Punkt G_1 (außer A) und k_2 in einem weiteren Punkt G_2, und ganz analog schneidet h die Kreise k_1, k_2 in Punkten (ungleich B) H_1, H_2.*

Zeigen Sie: $\underline{G_1H_1} \parallel \underline{G_2H_2}$.

Hinweis: Machen Sie eine Skizze und zeichnen Sie alle Dreiecke mit Eckpunkten in

$$\{A, B, G_1, G_2, H_1, H_2\},$$

die k_1 oder k_2 als Umkreis haben: Welche Winkel sind gleich, welche summieren sich auf 180°? Finden Sie zwei Sehnenvierecke: Hier müssen sich gegenüberliegende *Winkel auf 180° summieren.*

Aufgabe 13: *Legen Sie detailliert dar, wie man die Isometrien*

- *Parallelverschiebung,*
- *Spiegelung*
- *und Drehung*

mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

Aufgabe 14: *Zeigen Sie: Zwei Dreiecke mit Seitenlängen a, b und c bzw. a', b' und c' sowie Winkeln α, β und γ bzw. α', β' und γ' (in "Standardbezeichnung"), für die $a = a'$ und $b = b'$ und $a \geqslant b$ und $\alpha = \alpha'$ gilt, sind kongruent.*

Gibt es einen Fall, in dem die Dreiecke auch dann mit Sicherheit kongruent sind, wenn $a < b$ gilt?

Aufgabe 15: *Seien $A \neq B$ zwei verschiedene Punkte der Ebene. Seien f, g zwei Isometrien der Ebene, für die gilt*

$$f(A) = g(A) = C \text{ und } f(B) = g(B) = D.$$

Zeigen Sie: Die beiden Isometrien f und g sind überhaupt identisch, oder sie unterscheiden sich voneinander um die Spiegelung s an der Geraden $\underline{CD}$. D.h., daß

$$f = g \text{ oder } f = s \circ g$$

gelten muß.

Aufgabe 16: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Winkeln α, β und γ (in Standardbezeichnung).*

Zeigen Sie, daß die Winkelsymmetralen von α und β einander in einem Punkt I schneiden und drücken Sie den Winkel $|\measuredangle(AIB)|$ durch die Winkel α, β und γ aus.

Aufgabe 17: *Beweisen Sie den* Südpolsatz, *also die Aussage: In einem Dreieck $\triangle ABC$ mit Inkreismittelpunkt I sei P der (zweite) Schnittpunkt der Winkelsymmetrale von γ durch den Eckpunkt C mit dem Umkreis des Dreiecks; dann gilt: $|PA| = |PB| = |PI|$. .*

Hinweis: Machen Sie eine aussagekräftige Skizze, die die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABP$, den Umkreis, die Winkelhalbierenden von α und γ sowie deren Schnittpunkt I zeigt; zeichnen Sie nach und nach alle bekannten Winkel (beginnend mit $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$) ein, gemäß folgender Argumentationskette:

Betrachten Sie die Sehnen $\overline{BP}$ und $\overline{AP}$: Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt sofort $|\measuredangle(BAP)| = |\measuredangle(ABP)| = \frac{\gamma}{2}$, also ist das Dreieck $\triangle ABP$ gleichwinklig und daher gleichschenklig, und $|PA| = |PB|$ ist damit schon gezeigt.

Weiters ist $|\measuredangle(BAI)| = \frac{\alpha}{2}$, weil I ja auf der Winkelhalbierenden von α liegt; also ist $|\measuredangle(PAI)| = \frac{\alpha+\gamma}{2}$.

Schließlich ist auch $|\measuredangle(AIP)| = \frac{\alpha+\gamma}{2}$*; also ist das Dreieck* $\triangle ABI$ *gleichwinklig und daher gleichschenklig, und* $|PA| = |PI|$ *ist damit ebenfalls gezeigt.*

Aufgabe 18: *Zeigen Sie: In einem Dreieck* $\triangle ABC$ *schneiden einander die Winkelsymmetralen von* α *und die Winkelsymmetralen der* Außenwinkel *mit Scheitel* B *und Scheitel* C *in* einem *Punkt (dem* Ankreismittelpunkt *der Seite* $\overline{BC}$*).*

Aufgabe 19: *Zeigen Sie: Ein Viereck, in dem die Summe der gegenüberliegenden (also nicht einer gemeinsamen Seite anliegenden) Winkel gleich* 180° *ist, ist ein Sehnenviereck.*

Aufgabe 20: *Sei* $\triangle ABC$ *ein Dreieck. Sei* k *ein Kreis durch die Eckpunkte* A *und* B*, der die Seite* $\overline{AC}$ *im Punkt* F *und die Seite* $\overline{BC}$ *im Punkt* E *schneidet.*

Bestimmen Sie die Winkel im Dreieck $\triangle FEC$*.*

Sei V *der Umkreismittelpunkt des Dreiecks* $\triangle FEC$*: Zeigen Sie, daß*

$$\underline{CV} \perp \underline{AB}.$$

Aufgabe 21: *In einem spitzwinkeligen Dreieck* $\triangle ABC$ *sei*

- D *der Fußpunkt der Höhe durch* C*,*
- E *der Fußpunkt der Höhe durch* A
- *und* F *der Fußpunkt der Höhe durch* B*.*

Zeigen Sie:

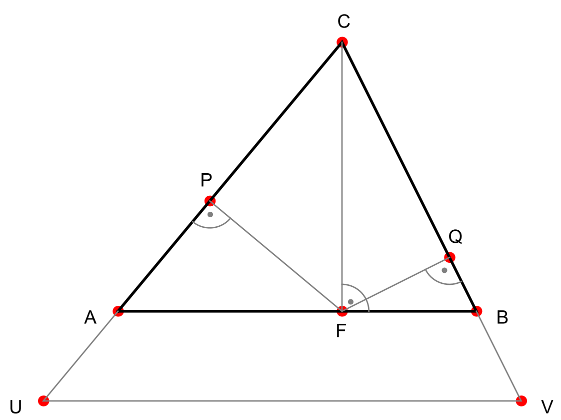
$$|\measuredangle(BED)| = |\measuredangle(CEF)| = \alpha \text{ und } |\measuredangle(AFD)| = |\measuredangle(CFE)| = \beta \text{ und } |\measuredangle(ADF)| = |\measuredangle(BDE)| = \gamma.$$

<u>Hinweis:</u> *Die Punkte* D *und* E *liegen auf einem Kreis mit Durchmesser* $\overline{AC}$*.*

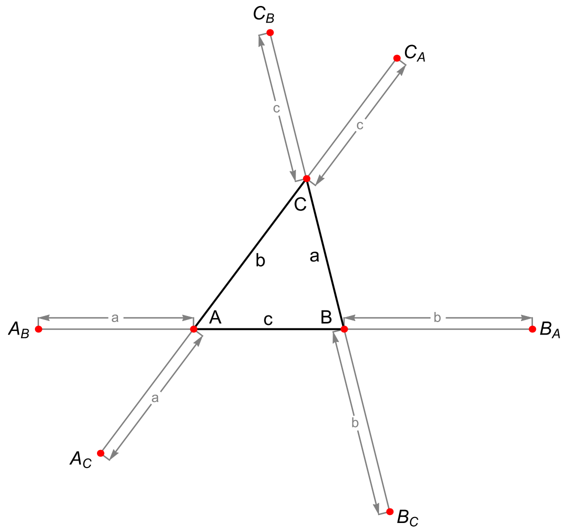
Aufgabe 22: *Sei* $\triangle ABC$ *ein Dreieck und* F *der Fußpunkt der Höhe durch den Punkt* C*. Seien* P *und* Q *die Fußpunkte der Lote von* F *auf die Seiten* $\overline{AC}$ *und* $\overline{BC}$*. Sei* g *eine parallele Gerade zur Seite* $\overline{AB}$*, sodaß die beiden Punkte* P*,* Q *auf* derselben *Seite von* g *liegen. Seien* U *und* V *die Schnittpunkte von* g *mit den Trägergeraden* $\underline{BC}$ *und* $\underline{AC}$*.*

Zeigen Sie: Die vier Punkte P*,* Q*,* U *und* V *liegen auf einem Kreis.*

<u>Hinweis:</u> *Suchen Sie anhand einer aussagekräftigen Skizze gleiche Winkel und zeigen Sie als ersten Schritt, daß das Viereck* $\square PFQC$ *ein* Sehnenviereck *ist.*



Aufgabe 23: *Zeigen Sie den Satz von Conway: Sei* $\triangle ABC$ *ein Dreieck mit Seitenlängen* a*,* b *und* c*. Auf den Trägergeraden der Seiten* $\overline{AC}$ *und* $\overline{BC}$ *tragen wir von* C *aus "nach außen" die Strecke der Länge* c *ab und erhalten so die Punkte* C_A *und* C_B*; dasselbe analog für die anderen Eckpunkte:*



Zeigen Sie, daß die Punkte A_B, A_C, B_A, B_C, C_A und C_B auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 24: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, sei F der Fußpunkt der Höhe durch C. Seien P und Q die Fußpunkte der Lote von F auf die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$. Seien U und V die Fußpunkte der Lote von F auf die Höhen durch A und durch B. Dann liegen die vier Punkte P, Q, U und V auf einer Geraden.*

Hinweis: *Zeigen Sie:*

$$|\sphericalangle(FPQ)| = |\sphericalangle(FPU)|.$$

Aufgabe 25: *Erläutern Sie (mit genauer Begründung), wie die* Dreiteilung *des rechten Winkels mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden kann.*

Aufgabe 26: *Sei $k = k(M,r)$ ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r. Sei P ein Punkt mit $|PM| > r$. Dann gibt es zwei Geraden durch P, die Tangenten an k sind: Geben Sie ein Verfahren an, wie man diese Geraden mit Zirkel und Lineal konstruieren kann und erläutern Sie genau, warum dieses Verfahren zum Ziel führt.*

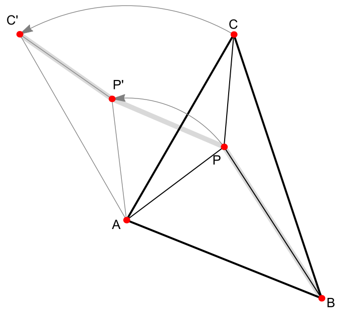
Aufgabe 27: *Sei g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf g liegt. Dann gibt es einen Kreis mit Mittelpunkt P, der g als Tangente hat: Geben Sie ein Verfahren an, wie man diesen Kreis mit Zirkel und Lineal konstruieren kann und erläutern Sie genau, warum dieses Verfahren zum Ziel führt.*

Aufgabe 28: *Sei $\triangle ABC$ ein* spitzwinkeliges *Dreieck. Bestimmen Sie jenen Punkt P, für den die Summe der Abstände*

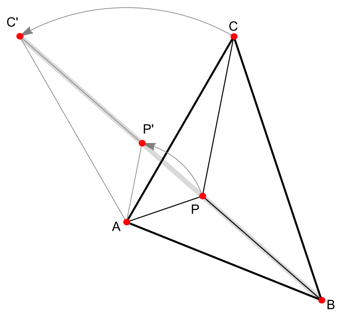
$$|AP| + |BP| + |CP| \tag{0.1}$$

minimal *wird. Charakterisieren Sie den gesuchten Punkt P und geben Sie ein Verfahren zu seiner Konstruktion mit Zirkel und Lineal an.*

Hinweis: *Den Schlüssel zur Lösung bietet hier eine* Drehung*! Drehen Sie den gesuchten Punkt P und den Punkt C um Drehzentrum A mit Drehwinkel 60°, seien P' und C' die entsprechenden Bildpunkte.*



Beachten Sie, daß $\triangle APP'$ ein gleichseitiges *Dreieck ist (warum?) und argumentieren Sie wie beim Problem von Fagnano:*



Zur Charakterisierung des gesuchten Punktes P betrachten Sie die Winkel $\sphericalangle(APB)$, $\sphericalangle(BPC)$ und $\sphericalangle(CPA)$.

Zur Konstruktion des gesuchten Punktes P betrachten Sie den Umkreis des gleichseitigen Dreiecks $\triangle ACC'$ und verwenden Sie den Peripheriewinkelsatz.

Aufgabe 29: *Machen Sie sich klar, wieso Ellipse, Hyperbel und Parabel* Kegelschnitte *heißen (besuchen Sie z.B. die Web–Site*

`http://demonstrations.wolfram.com/ConicSectionsTheDoubleCone/`

aber es gibt auch viele andere Quellen) und ergründen Sie (nur qualitativ–geometrisch), von welcher "geometrischen Größe" Ellipsen "zu wenig" haben, Parabeln "gleich viel" und Hyperbeln "zu viel".

Aufgabe 30: *Zeigen Sie: Eine Ellipse (oder eine Hyperbel) mit Brennpunkten F_1, F_2 enthält genau zwei Punkte der Geraden $\underline{F_1F_2}$, und der Abstand dieser zwei Punkte ist genau die Hauptachsenlänge r der Ellipse (oder der Hyperbel).*

Aufgabe 31: *Sei P ein Punkt der Ebene. Zeigen Sie:*

- *P liegt genau dann außerhalb des F_1–Astes einer Hyperbel mit Brennpunkten F_1, F_2 und Hauptachsenlänge r, wenn $|PF_1| - |PF_2| > -r$ gilt.*
- *P liegt genau dann außerhalb einer Parabel mit Brennpunkt F_1 und Leitlinie l, wenn $|P^{\perp}l| < |PF_1|$ gilt.*

Aufgabe 32: *Erinnern Sie sich aus der Physik daran, daß*

- *ein Lichtstrahl an einem ebenen Spiegel so reflektiert wird, daß "Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel" gilt,*
- *ein Lichtstrahl an einem gekrümmten Spiegel so reflektiert wird, als würde er an einem ebenen Spiegel, der "tangential an den gekrümmten liegt", reflektiert werden.*

Erläutern Sie die Bedeutung dieser physikalischen Tatsachen geometrisch. Welche Folgerungen ergeben sich für eine punktförmige Lichtquelle im Brennpunkt eines Kegelschnitts?

Aufgabe 33: *Zeigen Sie, daß aus unseren Voraussetzungen über die Fläche $[\![\mathcal{O}]\!]$ geometrischer Objekte $\mathcal{O}$ folgt:*

$$\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2 \implies [\![\mathcal{O}_1]\!] \leqslant [\![\mathcal{O}_2]\!].$$

Zeigen Sie ebenso, daß für $n \in \mathbb{N}$ und geometrische Objekte $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_n$, deren paarweise Durchschnitte alle Fläche Null haben (also $[\![\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j]\!] = 0$ für alle $i \neq j$), gilt:

$$[\![\mathcal{O}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{O}_n]\!] = [\![\mathcal{O}_1]\!] + \cdots + [\![\mathcal{O}_n]\!].$$

Aufgabe 34: *Zeigen Sie, daß das Rechteck mit Seitenlängen $a, b \in \mathbb{R}$ tatsächlich Fläche $a \cdot b$ hat: Setzen Sie dabei die Gültigkeit der "Flächenformel" für* rationale *Seitenlängen voraus.*

<u>*Hinweis:*</u> *Approximieren (lateinisch: "annähern") sie die reellen Zahlen a, b geeignet durch rationale Zahlen, schätzen Sie den Approximationsfehler ab und führen Sie einen Grenzübergang durch.*

Aufgabe 35: *Zeigen Sie* ganz genau, *wie sich die "Flächenformel" für das Dreieck*

$$\textit{Fläche} = \frac{\textit{Grundlinie} \cdot \textit{Höhe}}{2}$$

ergibt.

Aufgabe 36: *Zeigen Sie: Die Begrenzungsflächen eines Parallelepipeds sind Parallelogramme.*

Skizzieren Sie, wie sich die Volumsformel für den Quader im Raum

$$\textit{Volumen des Quaders} = \textit{Länge} \cdot \textit{Breite} \cdot \textit{Höhe}$$

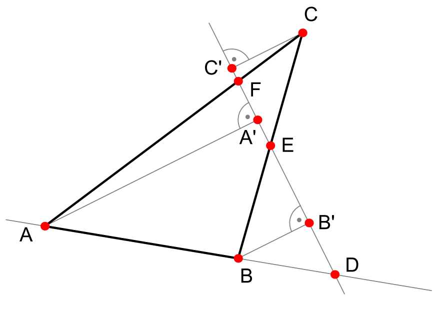
genauso beweisen läßt wie die Flächenformel für das Rechteck in der Ebene.

Aufgabe 37: *Zeigen Sie: Wenn eine Strecke der Länge 1 gegeben ist, dann kann man Strecken mit beliebiger rationaler Länge $q \in \mathbb{Q}$ mit Zirkel und Lineal konstruieren.*

Aufgabe 38: *Zeigen Sie den* Satz von Menelaos*: Seien A, B und C die Ecken eines Dreiecks, sei g eine Gerade, die durch* keinen *Eckpunkt des Dreiecks verläuft und zu* keiner *Seite des Dreiecks parallel ist.Sei D der Schnittpunkt von g mit der Geraden $\underline{AB}$, sei E der Schnittpunkt von g mit der Geraden $\underline{BC}$ und sei F der Schnittpunkt von g mit der Geraden $\underline{AC}$. Dann gilt:*

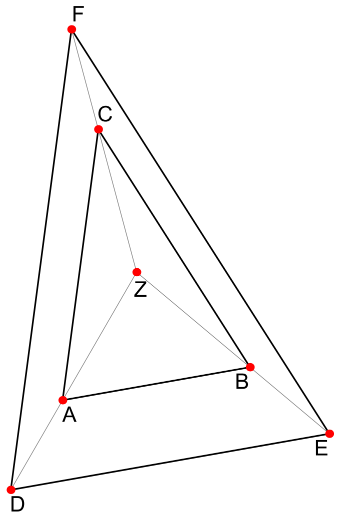
$$[DA : DB] \cdot [EB : EC] \cdot [FC : FA] = 1.$$

<u>*Hinweis:*</u> *Fällen Sie die Lote von den Eckpunkten auf g und argumentieren Sie mit dem Strahlensatz:*



Aufgabe 39: *Zeigen Sie: Ähnliche Dreiecke unterscheiden sich um eine Isometrie und eine zentrische Streckung.*

Hinweis: *Verschieben Sie das eine Dreieck so, daß sein Umkreismittelpunkt mit dem des anderen Dreiecks Z übereinstimmt, drehen Sie das eine Dreieck geeignet um das Drehzentrum Z (und spiegeln Sie, falls erforderlich) und argumentieren Sie mit dem Strahlensatz.*



Aufgabe 40: *Zeigen Sie den* Sekanten–Tangentensatz*: Sei $k = k(M, r)$ ein Kreis, sei P ein Punkt mit $|MP| > r$. Sei t die Tangente an k durch P mit Berührungspunkt T, und sei s eine Sekante von k durch P, die k in den Punkten A und B schneidet. Dann gilt:*

$$|PT|^2 = |PA| \cdot |PB|.$$

Hinweis: *Zeigen Sie: Die Dreiecke $\triangle PAT$ und $\triangle PTB$ sind ähnlich.*

Aufgabe 41: *Zeigen Sie den* Sehnensatz*: Seien zwei Sehnen $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ eines Kreises k gegeben, die einander in einem Punkt S schneiden. Dann gilt*

$$|SA| \cdot |SB| = |SC| \cdot |SD|.$$

Hinweis: *Zeigen Sie: Die Dreiecke $\triangle ASC$ und $\triangle BSD$ sind ähnlich.*

Aufgabe 42: *Zeigen Sie die* Umkreisradius–Formel*: Seien a, b und c die Längen der Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ (in Standardbezeichnung), sei F die Fläche des Dreiecks. Dann gilt für den Umkreisradius r*

$$r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot F}.$$

Hinweis: *Sei o.B.d.A. $\gamma = |\sphericalangle(BAC)| < 90^\circ$. Sei U der Umkreismittelpunkt, dann schneidet die Gerade $\underline{CU}$ den Umkreis in einem zweiten Punkt $G \neq C$. Sei weiters D der Fußpunkt der Höhe von C auf die Seite $\overline{AB}$. (Machen Sie eine aussagekräftige Skizze!)*

Folgern sie aus dem Peripheriewinkelsatz, daß die Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle GBC$ ähnlich sind. Schließen Sie den Beweis mit dem Strahlensatz ab, unter Verwendung der Flächenformel für das Dreieck (Fläche $= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD|$).

Aufgabe 43: *Zeigen Sie den* Satz von Pappos*: Seien $g \nparallel h$ zwei nicht parallele Gerade. Seien P_1, P_2 und P_3 drei Punkte auf der Geraden g, und ebenso Q_1, Q_2 und Q_3 drei Punkte auf der Geraden h; keiner dieser Punkte sei der Schnittpunkt von g und h.*

Wenn $\underline{P_2Q_1} \parallel \underline{P_3Q_2}$ und $\underline{P_1Q_2} \parallel \underline{P_2Q_3}$, dann folgt $\underline{P_1Q_1} \parallel \underline{P_3Q_3}$.

Aufgabe 44: *Zeigen Sie den* Satz von Desargues*: Seien g_1, g_2 und g_3 drei verschiedene Gerade, die einander in einem Punkt S schneiden (also $g_1 \cap g_2 \cap g_3 = \{S\}$). Seien P_1 und Q_1 Punkte auf g_1, seien P_2 und Q_2 Punkte auf g_2, und seien P_3 und Q_3 Punkte auf g_3.*

Wenn $\underline{P_1P_2} \parallel \underline{Q_1Q_2}$ und $\underline{P_2P_3} \parallel \underline{Q_2Q_3}$, dann folgt $\underline{P_1P_3} \parallel \underline{Q_1Q_3}$.

Aufgabe 45: *Seien $k_1 = k(M_1, r_1)$ und $k_2 = k(M_2, r_2)$ zwei Kreise mit $r_1 \neq r_2$ und $|M_1M_2| > r_1 + r_2$; sei $g = \underline{M_1M_2}$. k_1 und k_2 haben vier verschiedene* gemeinsame Tangenten *(also Geraden, die sowohl k_1 als auch k_2 berühren). Zwei dieser Tangenten schneiden einander in einem Punkt $B \in \overline{M_1M_2}$, die beiden anderen Tangenten schneiden einander in einem Punkt $A \in g$. Zeigen Sie, daß für diese Punkte (die alle auf g liegen) gilt:*

$$[AM_1 : AM_2] \cdot [BM_2 : BM_1] = -1.$$

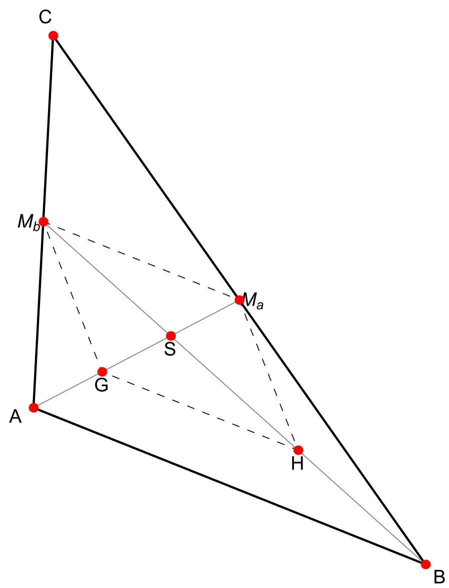
Aufgabe 46: *Seien $k_1 = k(M_1, r_1)$ und $k_2 = k(M_2, r_2)$ zwei Kreise mit $r_1 \neq r_2$ und $|M_1M_2| > r_1 + r_2$. Seien P_1 und Q_1 die Schnittpunkte des Kreises k_1 mit den Tangenten vom Punkt M_1 an den Kreis k_2. Seien P_2 und Q_2 die Schnittpunkte des Kreises k_2 mit den Tangenten vom Punkt M_2 an den Kreis k_1. Dann gilt*

$$|P_1Q_1| = |P_2Q_2|.$$

<u>Hinweis:</u> Machen Sie eine Skizze, zeichnen Sie die Gerade $\underline{M_1M_2}$ ein und und suchen Sie ähnliche Dreiecke.

Aufgabe 47: *Zeigen Sie noch einmal (ähnlich elegant wie in der Vorlesung!), daß die Schwerlinien eines Dreiecks einander in einem einzigen Punkt schneiden, der alle Schwerlinien im Verhältnis $[1 : 2]$ teilt.*

<u>Hinweis:</u> Seien M_a und M_b die Streckenmittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$. Sei S der Schnittpunkt der Schwerlinien $\overline{AM_a}$ und $\overline{BM_b}$, seien G bzw. H die Streckenmittelpunkte von $\overline{AS}$ bzw. $\overline{BS}$.



Zeigen Sie, daß $\square GHM_aM_b$ *ein* Parallelogramm *ist!*

Aufgabe 48: *Zeigen Sie für den Spezialfall des* rechtwinkligen *Dreiecks* $\triangle ABC$ *mit Höhenschnittpunkt* H*, daß*

- *die Höhenfußpunkte* H_A*,* H_B *und* H_C*,*
- *die Streckenmittelpunkte* M_a*,* M_b *und* M_c *der Dreiecksseiten* $\overline{BC}$*,* $\overline{AC}$ *und* $\overline{AB}$*,,*
- *die Streckenmittelpunkte* A'*,* B' *und* C' *der Strecken* $\overline{AH}$*,* $\overline{BH}$ *und* $\overline{CH}$*.*

auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 49: *Sei* $\triangle ABC$ *ein Dreieck mit Umkreismittelunkt* U *und Höhenschnittpunkt* H*. Zeigen Sie, daß der Mittelpunkt des Feuerbach–Kreises genau der Streckenmittelpunkt von* $\overline{HU}$ *ist, und daß sein Radius genau der halbe Umkreisradius von* $\triangle ABC$ *ist.*

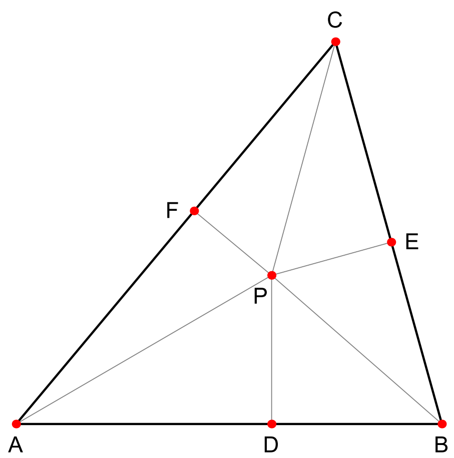
Aufgabe 50: *Zeigen Sie den Satz von Carnot unter der Voraussetzung, daß* P *im Inneren des Dreiecks* $\triangle ABC$ *liegt: Sei ein beliebiges* $\triangle ABC$ *und ein beliebiger Punkt* P *gegeben. Seien weiters*

- D *der Fußpunkt des Lotes von* P *auf* $\underline{AB}$*,*
- E *der Fußpunkt des Lotes von* P *auf* $\underline{BC}$*,*
- F *der Fußpunkt des Lotes von* P *auf* $\underline{AC}$*.*

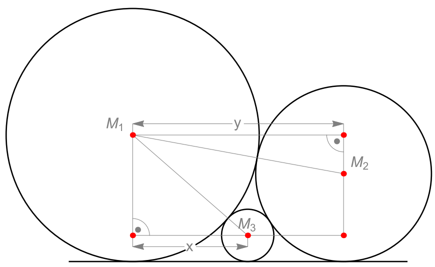
Dann gilt:

$$|AD|^2 - |DB|^2 + |BE|^2 - |EC|^2 + |CF|^2 - |FA|^2 = 0.$$

<u>*Hinweis:*</u> *Veranschaulichen Sie sich die Situation graphisch und suchen Sie rechtwinklige Dreiecke:*



Aufgabe 51: *Seien drei Kreise* $k(M_1, r_1)$*,* $k(M_2, r_2)$ *und* $k(M_3, r_3)$ *gegeben, die eine* gemeinsame *Tangente haben und einander wie in folgender Graphik berühren.*



Dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

Hinweis: Versuchen Sie, die Längen x und y in der Graphik zu berechnen.

Aufgabe 52: *Sei $\square ABCD$ ein Quadrat mit Seitenlänge a. Seien $E \in \overline{BC}$ und $F \in \overline{CD}$ so gewählt, daß das Dreieck $\triangle AEF$* gleichseitig *ist. Berechnen Sie die Seitenlänge dieses Dreiecks.*

Aufgabe 53: *Ein n–Eck heißt* regelmäßig, *wenn alle seine Seitenlängen und alle seine Innenwinkel gleich groß sind. Ein n–Eck ist einem Kreis k* eingeschrieben, *wenn alle seine Eckpunkte auf dem Kreis k liegen. Sei a die Seitenlänge eines dem Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen n–Ecks. Zeigen Sie, daß dann*

$$\sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$$

die Seitenlänge eines dem Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen $2 \cdot n$–Ecks ist. Berechnen Sie die Seitenlängen des regelmäßigen 8–Ecks und des regelmäßigen 16–Ecks, die dem Einheitskreis eingeschrieben sind.

Aufgabe 54: *Ein n–Eck ist einem Kreis k* umgeschrieben, *wenn alle seine Seiten tangential an den Kreis k liegen. Sei a die Seite eines dem Einheitskreis umgeschriebenen regelmäßgen n–Ecks. Zeigen Sie, daß dann*

$$\frac{4}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} - 1\right)$$

die Seitenlänge eines dem Einheitskreis umgeschriebenen regelmäßigen $2 \cdot n$–Ecks ist. Berechnen Sie die Seitenlängen des regelmäßigen 8–Ecks und des regelmäßigen 16–Ecks, die dem Einheitskreis umgeschrieben sind.

Aufgabe 55: *Sei $\overline{AB}$ ein Durchmesser eines Kreises k. Sei $C \in \overline{AB}$, sei g die Senkrechte auf $\overline{AB}$ durch C, sei D ein Schnittpunkt von g und k.*

Sei l ein Kreis, der die Strecken $\overline{CB}$ und $\overline{CD}$ sowie den Kreis k von innen berührt. Sei U der Berührungspunkt von $\overline{CB}$ und l. Zeigen Sie, daß dann gilt:

$$|AU| = |AD|.$$

Hinweis: Machen Sie eine Skizze und suchen Sie rechtwinklige Dreiecke!

Aufgabe 56: *Sei $\alpha \in [0, 360°)$, sei $x := \sin \frac{\alpha}{3}$. Zeigen Sie:*

$$4x^3 = 3x - \sin \alpha.$$

Hinweis: Summensätze für die Winkelfunktionen!

Aufgabe 57: *Seien $\square ABCD$ und $\square EFGH$ die Grund– und Deckfläche eines Würfels, sodaß A, B und C die Fußpunkte der Lote von E, F und G auf die Grundfläche sind. (Also: E ist der Eckpunkt gerade oberhalb von A, F ist der Eckpunkt gerade oberhalb von B, usw.).*

Die Strecke $\overline{AG}$ heißt dann eine Raumdiagonale *des Würfels: Bestimmen Sie den Winkel, den sie mit der Kante $\overline{AB}$ einschließt.*

Aufgabe 58: *Ein* regelmäßiger Tetraeder *ist ein Körper im Raum, der durch vier gleichseitige Dreiecke* $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ *und* $\triangle BCD$ *begrenzt wird.*
Sei E *der Streckenmittelpunkt von* AB: *Bestimmen Sie den Winkel* $|\sphericalangle(CED)|$.

Aufgabe 59: *Zeigen Sie: Wenn die üblichen "Konstruktionswerkzeuge" Zirkel und Lineal durch eine archimedische Spirale ergänzt werden (in dem Sinne, daß für jeden Strahl* $\overrightarrow{OR}$ *in der Ebene die entsprechende Archimedische Spirale gezeichnet werden kann), dann kann jeder Winkel "konstruktiv" in* n *Teile geteilt werden* ($n \in \mathbb{N}$).

Aufgabe 60: *Betrachten Sie den vierdimensionalen Vektorraum* $\mathbb{R}^4$ *mit der* Standardbasis, *die aus den* Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)\,, \mathbf{e}_2 = (0,1,0,0)\,, \mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)\,, \mathbf{e}_4 = (0,0,0,1)$$

besteht.
Schreiben Sie den konkreten Vektor $\mathbf{a} = (3,1,4,2)$ *als* Linearkombination *der Einheitsvektoren.*
Schreiben Sie den allgemeinen *(Variablen–)Vektor* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_4)$ *als* Linearkombination *der Einheitsvektoren.*
Schreiben Sie die Linearkombination

$$3 \cdot (1,2,-1,0) + 7 \cdot (0,-3,2,5) - 5 \cdot (1,0,-3,1)$$

als Linearkombination der Einheitsvektoren.

<u>Hinweis:</u> *Alle diese Aufgaben sind viel einfacher als sie klingen;-)*

Aufgabe 61: *Zeigen Sie: Das lineare Erzeugnis* $\langle\!\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle\!\rangle$ *der* m *Vektoren* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ ist *immer ein Teilraum.*

<u>Hinweis:</u> *Ausnahmsweise etwas Abstraktes, dafür aber sehr einfach;-):*
Betrachten Sie einfach zwei (beliebige) Linearkombinationen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \langle\!\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle\!\rangle$, *also*

$$\mathbf{a} := a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + a_n \cdot \mathbf{v}_m \text{ und } \mathbf{b} := b_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + b_n \cdot \mathbf{v}_m,$$

sowie einen (beliebigen) Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ *und zeigen Sie, daß* $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ *und* $\lambda \cdot \mathbf{a}$ *auch als Linearkombinationen der Vektoren* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ *geschrieben werden können.*

Aufgabe 62: *Betrachten Sie das Dreieck* $\triangle ABC$, *dessen Eckpunkte die Koordinaten* $\mathbf{a} = (-1,2)$, $\mathbf{b} = (3,3)$ *und* $\mathbf{c} = (2,1)$ *haben.*
Berechnen Sie die Koordinaten des Streckenmittelpunkts S *der Schwerlinie durch den Punkt* C.

Aufgabe 63: *Seien* A, B, C *und* D *die Ecken der* Grundfläche *eines Parallelepipeds, seien* E, F, G *und* H *die Ecken der* Deckfläche *(in dieser Reihenfolge); dabei sei* $\overline{AE}$ *eine der Kanten des Parallelepipeds.*
Die Koordinatenvektoren der Punkte A, B, D *und* E *seien* $\mathbf{a} = (4,1,0)$, $\mathbf{b} = (3,5,-1)$, $\mathbf{d} = (6,0,1)$ *und* $\mathbf{e} = (5,0,6)$: *Berechnen Sie die Koordinatenvektoren der anderen Eckpunkte* C, F, G *und* H.

Aufgabe 64: *Sei* $\square ABCD$ *ein (beliebiges) konvexes Viereck in der Ebene. Zeigen Sie mit Koordinaten, daß die vier Streckenmittelpunkte der Seiten dieses Vierecks immer ein* Parallelogramm *bilden.*
Seien D_1, D_2 *die Streckenmittelpunkte der Diagonalen des Vierecks, sei* M *der Streckenmittelpunkt der Strecke* $\overline{D_1D_2}$: *Zeigen Sie mit Koordinaten, daß* M *der Schnittpunkt der Diagonalen des Parallelogramms ist.*

Aufgabe 65: *Zwei Geraden müssen im allgemeinen keinen Schnittpunkt haben: Wie kann man aus der* Parameterdarstellung *zweier Geraden* g, h *in der Ebene erkennen, ob die Geraden einen Schnittpunkt haben?*

<u>Hinweis:</u> *Vergessen Sie nicht auf die Möglichkeit* $g = h$!

Aufgabe 66: *Bestimmen Sie die Schnittmenge der folgenden Ebenen im Raum, die in Parameterdarstellung gegeben sind:*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1:&\quad (1,1,1)+\lambda\cdot(1,2,-1)+\mu\cdot(2,0,2)\,,\\ \mathcal{E}_2:&\quad (-1,-1,-1)+\sigma\cdot(0,1,0)+\tau\cdot(3,2,1)\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 67: *Betrachten Sie im (dreidimensionalen) Raum die drei Punkte A, B und C mit Koordinatenvektoren* $\mathbf{a}=(-1,2,0)$, $\mathbf{b}=(0,3,3)$ *und* $\mathbf{c}=(2,2,1)$.
Bestimmen Sie die Darstellung der Ebene $\mathcal{E}$ in Parameterform, die diese drei Punkte enthält.
Wenn Sie die beiden Parameter in dieser Darstellung mit λ und μ bezeichnen, dann sehen Sie: Jeder *Punkt dieser Ebene $\mathcal{E}$ ist* eindeutig *durch das Paar $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ bestimmt. Erläutern Sie, wie (λ,μ) als* Koordinatisierung *der Ebene $\mathcal{E}$ in bezug auf ein (nicht unbedingt cartesisches: Die Koordinatenachsen müssen nicht aufeinander normal stehen, und die Basisvektoren müssen nicht Länge 1 haben) Koordinatensystem aufgefaßt werden kann. Erläutern Sie, daß damit eine Funktion*

$$\mathbb{R}^2\to\mathcal{E}$$

gegeben ist, die dem Koordinatenvektor *den entsprechenden* Punkt *zuordnet.*

Aufgabe 68: *Die Gleichung der Ellipse mit Brennpunkten $(-e,0)\,,(e,0)$ lautet* definitionsgemäß

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}+\sqrt{(x-e)^2+y^2}-2\cdot a=0. \tag{0.2}$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, daß diese Gleichung durch Quadrieren und Vereinfachen in die Form

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}=1. \tag{0.3}$$

gebracht werden kann.
Zeigen Sie anhand eines einfachen Beispiels: Das Quadrieren einer Gleichung läßt ihre Lösungsmenge im allgemeinen nicht *unverändert ("Quadrieren ist keine* Äquivalenzumformung*"). Genauer gesagt gilt:*

Lösungsmenge der Gleichung $\subseteq$ Lösungsmenge der quadrierten Gleichung.

Für die Gleichungen (0.2) *und* (0.3) *ist also klar:*

Lösungsmenge von (0.2) $\subseteq$ *Lösungsmenge von* (0.3).

Zeigen Sie, daß hier auch die umgekehrte Mengeninklusion gilt, also

Lösungsmenge von (0.3) $\subseteq$ *Lösungsmenge von* (0.2).

Hinweis: Gehen Sie indirekt vor: Wenn (x,y) die Gleichung (0.2) nicht *erfüllt, dann auch* nicht *die Gleichung* (0.3).

Aufgabe 69: *Bestimmen Sie die Gleichung der Ellipse in Hauptlage, die durch die Punkte mit den Koordinaten $(2,2)$ und $(1,4)$ geht.*

Aufgabe 70: *Bestimmen Sie die Gleichung der Hyperbel in Hauptlage, die Brennpunkt mit Koordinaten $(3,0)$ hat und durch den Punkt mit den Koordinaten $(4,1)$ geht.*

Aufgabe 71: *Bestimmen Sie die Parameterdarstellungen der Tangenten durch den Punkt $(5,1)$ an den Kegelschnitt*

$$\frac{x^2}{7}+\frac{3\cdot y^2}{7}=1.$$

Hinweis: Überzeugen Sie sich, daß die Richtungsvektoren der Tangenten durch den Punkt nicht parallel zur y–Achse sein können und setzen sie dementsprechend die Parameterdarstellung der gesuchten Tangenten allgemein an:

$$(5,1)+\lambda\cdot(1,d)=(5+\lambda,1+d\cdot\lambda)\,.$$

Schneiden Sie diese "allgemeine Gerade durch den gegebenen Punkt" mit dem Kegelschnitt; setzen Sie also in der Kegelschnittgleichung $x \to 5 + \lambda$ und $y \to 1 + d \cdot \lambda$. Nun haben Sie eine quadratische Gleichung in λ, deren (zwei!) Lösungen vom Parameter d abhängen: Dieser Parameter d muß so gewählt werden, daß die beiden Lösungen zusammenfallen *(daß also die quadratische Gleichung in λ eine* Doppellösung *hat), denn die Tangente darf die Ellipse ja nur in* einem *Punkt schneiden! Diese Bedingung entspricht einer quadratischen Gleichung in d; die beiden Lösungen dieser Gleichung ergeben die gesuchten Parameterdarstellungen.*

Aufgabe 72: *Bestimmen Sie die Parameterdarstellungen der Tangenten durch den Punkt $\left(1, \frac{1}{8}\right)$ an den Kegelschnitt*

$$\frac{3 \cdot x^2}{11} - \frac{16 \cdot y^2}{11} = 1.$$

Hinweis: *Siehe Hinweis zu Aufgabe 71!*

Aufgabe 73: *Bestimmen Sie die Parameterdarstellungen der Tangenten durch den Punkt $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ an den Kegelschnitt*

$$y^2 = 2 \cdot x.$$

Hinweis: *Siehe Hinweis zu Aufgabe 71!*

Aufgabe 74: *Betrachten Sie die Punkte P, Q in der Ebene mit den Koordinaten $\mathbf{p} = (-1, 0)$ und $\mathbf{q} = (1, 0)$.*
Sei $\lambda > 0$: Bestimmen Sie die Menge M aller Punkte X der Ebene, für die der Abstand von P das λ–Fache des Abstands von Q ist, also

$$M = \{X \in \mathcal{E} \colon \; |PX| = \lambda \cdot |QX|\}.$$

Hinweis: *Finden Sie die Gleichung, die der Koordinatenvektor $\mathbf{x}$ von $X \in M$ erfüllen muß!*

Aufgabe 75: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Zeigen Sie mit Koordinaten, daß die drei Höhen des Dreiecks einander in* einem *Punkt schneiden.*

Hinweis: *Wählen Sie ein Koordinatensystem so, daß A der Koordinatenursprung O ist und B auf der positiven x–Achse liegt: In bezug auf dieses Koordinatensystem hat A also die Koordinaten $\mathbf{a} = \mathbf{o} = (0, 0)$ und B die Koordinaten $\mathbf{b} = (b_1, 0)$ mit $b_1 > 0$; C hat dann die Koordinaten $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ mit $c_2 > 0$.*
Verwenden Sie die bekannte Tatsache: Der Vektor $\mathbf{n} = (-y, x)$ steht normal *auf den Vektor $\mathbf{p} = (x, y)$. (D.h., die entsprechenden Strecken $\overline{ON}$ und $\overline{OP}$ stehen aufeinander normal.)*

Aufgabe 76: *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Sei D ein Punkt in $\overline{AB}$ und E ein Punkt in $\overline{BC}$; sei $H^\star$ der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $\triangle DBE$. Seien K und L die Streckenmittelpunkte der Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{CD}$.*
Zeigen Sie: $\overline{HH^\star} \perp \overline{KL}$.

Hinweis: *Wählen Sie ein Koordinatensystem so, daß A der Koordinatenursprung ist und B auf der positiven x–Achse liegt.*

Aufgabe 77: *Zeigen Sie: Zwei Lösungen $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_m)$, $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m)$ der inhomogenen linearen Gleichung*

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \cdots + c_m \cdot x_m = b \neq 0$$

unterscheiden sich um eine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung; *d.h.: $\mathbf{r} - \mathbf{s}$ ist eine Lösung von*

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \cdots + c_m \cdot x_m = 0.$$

<u>Hinweis:</u> *Das klingt nur kompliziert: In Wahrheit besteht der Beweis aus einer ganz schlichten Rechnung!*

Aufgabe 78: *Zeigen Sie die folgende Behauptung: Sei eine* homogene *lineare Gleichung in m Variablen gegeben:*

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \cdots + c_m \cdot x_m = 0.$$

Dann ist ihre Lösungsmenge ein Teilraum in $\mathbb{R}^m$.

<u>Hinweis:</u> *Ausnahmsweise* abstrakt, *aber dafür sehr einfach: Betrachten Sie zwei Lösungen*

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m), \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m)$$

der Gleichung sowie einen (beliebigen) Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ und weisen Sie (durch schlichteste Rechnung!) nach, daß

$$\mathbf{y} - \mathbf{z} \text{ und } \lambda \cdot \mathbf{y}$$

ebenfalls Lösungen der Gleichung sind.

Aufgabe 79: *Bestimmen sie die Koeffizienten der allgemeinen quadratischen Gleichung in zwei Variablen x, y ...*

$$a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0$$

... so, *daß die folgenden fünf Koordinatenvektoren diese erfüllen:*

$$(1,3), (1,-1), (-2,4), (-2,2), (2,2).$$

Aufgabe 80: *Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems mit dem Eliminationsverfahren:*

$$\begin{aligned}
1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 &= 28 \\
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 1x_6 &= 13 \\
3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 1x_5 + 2x_6 &= 4 \\
4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 1x_4 + 2x_5 + 3x_6 &= 1 \\
5x_1 + 6x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 &= 4 \\
6x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 &= 13
\end{aligned}$$

<u>Hinweis:</u> *Sie können die Gleichungen jederzeit umordnen, ohne die Lösungsmenge zu verändern.*

Aufgabe 81: *Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems in den Variablen x_1, x_2, x_3 mit dem Eliminationsverfahren, wobei für die Parameter a, b und c vorausgesetzt sei, daß $a \neq b \neq c \neq 0$ (soll heißen: a, b und c sind* paarweise *verschieden und ungleich Null):*

$$\begin{aligned}
ax_1 + bx_2 + cx_3 &= 3a + 2b + c \\
ax_3 + bx_1 + cx_2 &= a + 3b + 2c \\
ax_2 + bx_3 + cx_1 &= 2a + b + 3c
\end{aligned}$$

Stimmt es, daß die Lösungsmenge überhaupt nicht *von der Wahl der Parameter a, b und c abhängt? (Achtung: Vergessen Sie nicht auf die Möglichkeit von* trivialen *Gleichungen!)*

<u>Hinweis:</u> *Keine Angst vor den unkonkreten Parametern a, b und c: Die Rechnungen funktionieren mit diesen Parametern* genauso *wie mit konkreten Zahlen — nur bei Divisionen muß man natürlich voraussetzen, daß der Divisor nicht Null ist!*

(Lassen Sie sich nicht verwirren: Bringen Sie die Koeffizientenmatrix in die richtige *— der Variablenordnung x_1, x_2, x_3 entsprechende — Ordnung.)*

Aufgabe 82: *Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems in den Variablen c_0, c_1, c_2 mit dem Eliminationsverfahren, wobei für die Parameter x_1, x_2 und x_3 vorausgesetzt sei, daß sie* paarweise *verschieden sind (die Parameter y_1, y_2 und y_3 sind beliebig):*

$$\begin{aligned}
c_2x_1^2 + c_1x_1 + c_0 &= y_1 \\
c_2x_2^2 + c_1x_2 + c_0 &= y_2 \\
c_2x_3^2 + c_1x_3 + c_0 &= y_3
\end{aligned}$$

Wenn Ihnen diese "parameter–reichen" Rechnungen zu mühsam sind, setzen Sie konkret

$$x_1 = 0, y_1 = 1, x_2 = 1, y_2 = 0, x_3 = 3, y_3 = 1$$

und erläutern Sie, was dieses Gleichungssystem mit der Aufgabenstellung

> *"Bestimme eine quadratische Funktion $p\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Graph durch drei vorgegebene Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3) geht."*

zu tun hat.

Aufgabe 83: *Betrachten Sie die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis der Einheitsvektoren*

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0)\,, \mathbf{e}_2 = (0, 1)\,.$$

Betrachten Sie die Vektoren

$$\mathbf{f}_1 = (1, 1)\,, \mathbf{f}_2 = (1, -1)$$

im $\mathbb{R}^2$: Die Koordinatenangaben beziehen sich hier (wie gewohnt) auf die Einheitsvektoren, *d.h.,*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{f}_2 &= 1 \cdot \mathbf{e}_1 - 1 \cdot \mathbf{e}_2. \end{aligned} \tag{0.4}$$

Stellen Sie sich vor, sie hätten in der Ebene ein Koordinatensystem gewählt, das aus den Vektoren $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ besteht: Das heißt, ein Vektor $\mathbf{c}$ mit Koordinaten (c_1, c_2) in bezug auf dieses Koordinatensystem *ist (definitionsgemäß!) der Vektor*

$$\mathbf{c} = c_1 \cdot \mathbf{f}_1 + c_2 \cdot \mathbf{f}_2.$$

Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Vektors $\mathbf{c}$ in bezug auf die Standardbasis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

Sei umgekehrt ein Vektor $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ mit Koordinaten in bezug auf die Standardbasis *gegeben, also*

$$\mathbf{b} = b_1 \cdot \mathbf{e}_1 + b_2 \cdot \mathbf{e}_2.$$

Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Vektors $\mathbf{b}$ in bezug auf das Koordinatensystem $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$.

Hinweis: Die Aufgabe ist viel einfacher als sie klingt: Für die erste Koordinatenbestimmung setzen Sie einfach die Ausdrücke für $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2$ aus den Gleichungen (0.4) *ein! Für die zweite Koordinatenbestimmung fassen Sie die Gleichungen* (0.4) *einfach als* Gleichungssystem *in den* Variablen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ *auf; lösen Sie dieses Gleichungssystem und erhalten Sie dadurch*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= a_{1,1} \cdot \mathbf{f}_1 + a_{1,2} \cdot \mathbf{f}_2, \\ \mathbf{e}_2 &= a_{2,1} \cdot \mathbf{f}_1 + a_{2,2} \cdot \mathbf{f}_2 \end{aligned}$$

(die Zahlen $a_{i,j}$ können Sie leicht bestimmen): Diese Ausdrücke für $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ setzen Sie nun unverdrossen für die zweite Koordinatenbestimmung ein!

Aufgabe 84: *Seien folgende Matrizen gegeben:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -6 \\ -5 & 2 & -7 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & -10 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -6 \\ -3 & 6 & -9 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$; lösen Sie das Gleichungssystem

$$(A \cdot B \cdot C) \cdot \mathbf{x} = 48 \cdot \mathbf{x}$$

in den Variablen $\mathbf{x}$.

Betrachten Sie $(A \cdot B \cdot C)$ als Matrixdarstellung einer linearen Abbildung $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: Was "macht" die Abbildung f mit den Vektoren der Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems?

Aufgabe 85: *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt bekanntlich der* Binomische Lehrsatz*:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

*Sei $m \in \mathbb{N}$, sei $\mathbf{1}$ die $m \times m$–*Einheitsmatrix. *Zeigen Sie, daß für alle $m \times m$–Matrizen X folgendes Analogon zum binomischen Lehrsatz gilt:*

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } (X+\mathbf{1})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot X^k.$$

(X^k ist natürlich die abkürzende Schreibweise für $\prod_{i=1}^{k} X$.)

Hinweis: Nein, Sie müssen natürlich nicht *beliebig große Potenzen von beliebig großen Matrizen berechnen: Die Sache folgt einfach daraus, daß Sie mit Matrizen "fast" so wie mit Zahlen rechnen dürfen; zwar ist die Multiplikation von Matrizen* im allgemeinen *nicht kommutativ, aber natürlich gilt*

$$\mathbf{1} \cdot X = X \cdot \mathbf{1} = X$$

für alle Matrizen X! ("Die Einheitsmatrix kommutiert mit allen Matrizen".) Wenden Sie also einfach Ihren Lieblingsbeweis (induktiv? kombinatorisch?) für den binomischen Lehrsatz auf diese spezielle Situation an.

Aufgabe 86: *Bei der Normalvektorgleichung der Gerade g kommt es nicht auf die Länge des Normalvektors $\mathbf{n}$ an, wir können die Gleichung also mit dem normalisierten Normalvektor $\mathbf{n}' = \frac{1}{\|\mathbf{n}\|}$ ...*

$$g = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ \langle \mathbf{x}, \mathbf{n}' \rangle = \langle \mathbf{g}, \mathbf{n}' \rangle =: c\right\}$$

... anschreiben, wobei $\mathbf{g}$ der Koordinatenvektor eines beliebigen Punktes auf g ist.
Was ist dann die geometrische *Bedeutung der Zahl c in obiger Normalvektorgleichung?*

Aufgabe 87: *Betrachten Sie im (dreidimensionalen) Raum die drei Punkte A, B und C mit Koordinatenvektoren $\mathbf{a} = (-1, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 3, 3)$ und $\mathbf{c} = (2, 2, 1)$.*
Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene $\mathcal{E}$ in Normalvektorform, die diese drei Punkte enthält.
Erläutern Sie, daß die Darstellung der Ebene $\mathcal{E}$ in Parameterform (siehe Beispiel 67) eine Beschreibung der Lösungsmenge *dieser Gleichung ist.*

Aufgabe 88: *Beweisen Sie die folgende Aussage: Sei $m \in \mathbb{N}$, sei $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$. Dann gibt es ein $i \in [m]$ mit $n_i \neq 0$, und die $m-1$ verschiedenen Vektoren*

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &:= \left(1, 0, \dots, 0, -\frac{n_1}{n_i}, 0, \dots, 0\right)\\
\mathbf{v}_2 &:= \left(0, 1, \dots, 0, -\frac{n_2}{n_i}, 0, \dots, 0\right)\\
&\dots\\
\mathbf{v}_{i-1} &:= \left(0, 0, \dots, 1, -\frac{n_{i-1}}{n_i}, 0, \dots, 0\right)\\
\mathbf{v}_i &:= \left(0, 0, \dots, 0, -\frac{n_{i+1}}{n_i}, 1, \dots, 0\right)\\
&\dots\\
\mathbf{v}_{m-1} &:= \left(0, 0, \dots, 0, -\frac{n_m}{n_i}, 0, \dots, 1\right)
\end{aligned}$$

(die Quotienten $-\frac{n_j}{n_i}$ stehen hier immer an derselben Stelle i!) erfüllen alle die (homogene) Gleichung der Hyperebene

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = 0.$$

Tatsächlich ist diese Hyperebene genau das lineare Erzeugnis $\langle\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle\rangle$. Anders gesagt: Eine Parameterdarstellung *dieser Hyperebene ist*

$$\mathbf{x} = \mathbf{o} + \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_{m-1} \cdot \mathbf{v}_{m-1}$$

Für die Lösungsmenge der inhomogenen *Gleichung*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = c \neq 0$$

müssen wir eine *Lösung $\mathbf{x}_0$ finden; die Parameterdarstellung dieser Hyperebene ist dann*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_{m-1} \cdot \mathbf{v}_{m-1}$$

Hinweis: *Wie so oft ist die Sache viel einfacher als sie aussieht: Daß die Vektoren $\mathbf{v}_j$ die Gleichung der Hyperebene erfüllen, folgt durch einfache Rechnung (Definition des Skalarprodukts!); und alles andere ist einfach eine Anwendung unserer Ergebnisse betreffend Gleichungssysteme und Lösungsmengen!*

Aufgabe 89: *Berechnen Sie die Schnittmenge der Ebenen im (dreidimensionalen) Raum, die durch die folgenden Gleichungen (in Normalvektorform) beschrieben sind:*

$$x + y + z = 4,$$
$$2 \cdot x - y + 3 \cdot z = -7.$$

Aufgabe 90: *Wenn eine Gerade g im dreidimensionalen Raum in Parameterdarstellung durch einen Punkt P, der auf der Geraden liegt, und durch einen Richtungsvektor v gegeben ist, also*

$$\mathbf{g} = \mathbf{p} + \lambda \cdot \mathbf{v} \text{ für } \lambda \in \mathbb{R},$$

und wenn eine Ebene $\mathcal{E}$ im dreidimensionalen Raum durch ihre Normalvektorgleichung

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = c$$

gegeben ist (wobei $\mathbf{n}$ den Normalvektor bezeichnet und c eine reelle Konstante ist): Wie können Sie dann ganz rasch (also ohne *das entsprechende Gleichungssystem zu lösen!) erkennen, ob g und $\mathcal{E}$ einen Schnittpunkt haben?*

Hinweis: *Vergessen Sie nicht auf die Möglichkeit, daß g in der Ebene $\mathcal{E}$ liegt, also $g \subset \mathcal{E}$!*

Aufgabe 91: *Betrachten Sie den Punkt $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$ im $\mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die Menge M aller Punkte $\mathbf{x} = (x, y, z)$, deren Abstand von $\mathbf{p}$ genauso groß ist wie der Normalabstand von der (x, y)–Ebene $\mathcal{E}$:*

$$M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \ |\mathbf{x}^{\perp}\mathcal{E}| = |\mathbf{x}\mathbf{p}| \right\}.$$

Eine Höhenschichtlinie *zur Höhe t (erinnern Sie sich an Ihren Geographie–Unterricht!) dieser Menge M ist die Schnittmenge*

$$M \cap \{(x, y, t) : \ x, y \in \mathbb{R}\} \text{ (Höhe } t \text{ ist konstant).}$$

Beschreiben Sie die Höhenschichtlinie von M zur Höhe t (für allgemeines $t \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 92: *Seien g und h zwei Geraden im $\mathbb{R}^3$ mit den Parameterdarstellungen*

$$\mathbf{g} = (0, 0, -1) + \lambda \cdot (1, 0, 0),$$
$$\mathbf{h} = (0, 0, 1) + \lambda \cdot (0, 1, 0),$$

Betrachten Sie die Menge M aller Punkte $\mathbf{x} = (x, y, z)$, die von g und h den gleichen *Normalbstand haben:*

$$M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \ |\mathbf{x}^{\perp}g| = |\mathbf{x}^{\perp}h| \right\}.$$

Eine Höhenschichtlinie *zur Höhe t (erinnern Sie sich an Ihren Geographie–Unterricht!) dieser Menge M ist die Schnittmenge*

$$M \cap \{(x, y, t) : \ x, y \in \mathbb{R}\} \text{ (Höhe } t \text{ ist konstant).}$$

Beschreiben Sie die Höhenschichtlinie von M zur Höhe t (für allgemeines $t \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 93: *Beweisen Sie die folgende Aussage: Sei A eine (komplexe) $l \times m$–Matrix, sei B eine (komplexe) $m \times n$–Matrix. Dann gilt für die* transponierte *Matrix des Produkts*

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

Hinweis: *Auf der* linken *Seite der behaupteten Gleichung ist die Eintragung in Position (i, j)* definitionsgemäß *das innere Produkt*

- *des j–ten Zeilenvektors von A*
- *und des i–ten Spaltenvektors von B.*

Zeigen Sie, daß dasselbe auch für die rechte Seite der behaupteten Gleichung gilt!

Aufgabe 94: *Welche Kombination von Drehung r und Schiebung s bildet die x–Achse des (Standard–)Koordinatensystems im $\mathbb{R}^2$ so auf die Gerade g mit der Gleichung*

$$y = 3 \cdot x - 6$$

ab, daß der Koordinatenursprung auf den Schnittpunkt von g mit der x–Achse abgebildet wird?

Hinweis: *Klingt nur kompliziert: Bestimmen Sie einfach den Schnittpunkt von g mit der x–Achse und stellen Sie sich die Sache geometrisch vor!*

Aufgabe 95: *Bestimmen Sie die Darstellung als "Matrixmultiplikation, gefolgt von Translation" der Drehung um Drehzentrum $(1, 2)$ mit Drehwinkel $60°$.*

Aufgabe 96: *Die Abbildung*

$$\mathbf{x} \mapsto \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist eine Drehung. Bestimmen Sie das Drehzentrum.

Hinweis: *Das Drehzentrum ist der einzige* Fixpunkt *einer (nichttrivialen, also Drehwinkel $\phi \neq k \cdot 360°$ für $k \in \mathbb{Z}$) Drehung.*

Aufgabe 97: *Die Abbildung*

$$\mathbf{x} \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ist eine Gleitspiegelung. Bestimmen Sie die Gleichung der Spiegelungsachse und den Translationsvektor.

Hinweis: *Lösen Sie das Beispiel mit einer* geometrischen Überlegung, *nicht rein rechnerisch! (Wenn f diese Abbildung bezeichnet, bestimmen Sie die Punkte $\mathbf{o}$, $f(\mathbf{o})$ und $f(f(\mathbf{o}))$.)*

Aufgabe 98: *Beweisen Sie die folgende Aussage: Sei $z = a + \mathrm{i} \cdot b \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Dann gilt:*

(1) $\overline{\overline{z}} = z$.
(2) $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.
(3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
(4) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Hinweis: *Sie können hier "einfach rechnen" oder geometrisch argumentieren.*

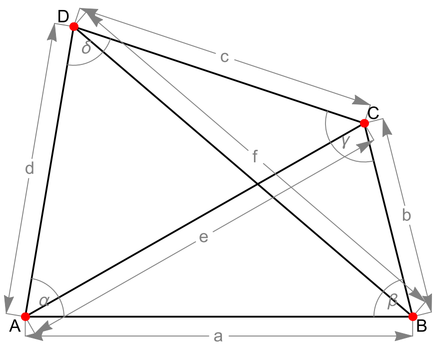
Aufgabe 99: *Sei* $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. *Beweisen Sie*

$$\tan(\arg z) = \frac{z - \overline{z}}{(z + \overline{z}) \cdot \mathbb{i}}.$$

<u>*Hinweis:*</u> *Stellen Sie sich die komplexe Zahl geometrisch vor und erinnern Sie sich an "Tangens ist Gegenkathete durch Ankathete", also "Imaginärteil durch Realteil". Zeigen Sie*

$$\textit{Realteil von } z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \ \textit{Imaginärteil von } z = \frac{z - \overline{z}}{2 \cdot \mathbb{i}}.$$

Aufgabe 100: *Beweisen Sie den* Satz von Ptolemäus*: Seien* a, b, c *und* d *die Seitenlängen eines Vierecks und* e *und* f *die Längen der Diagonalen.*

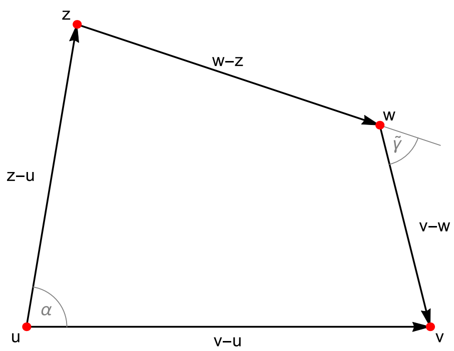


Dann gilt

$$e \cdot f \leqslant a \cdot c + b \cdot d.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn das Viereck ein Sehnenviereck *ist (d.h., wenn das Viereck einen Umkreis hat, auf dem alle seine Eckpunkte liegen — dann sind alle Seiten* Sehnen *dieses Umkreises).*

<u>*Hinweis:*</u> *Fassen Sie die Eckpunkte des Vierecks als komplexe Zahlen auf ...*

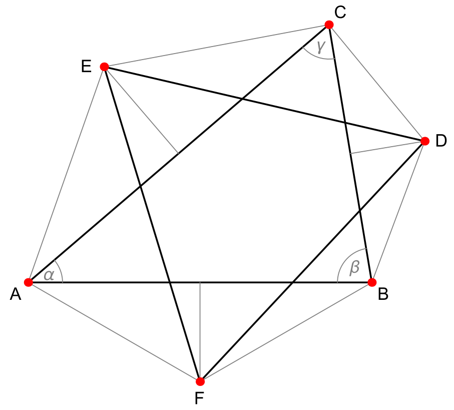


... und benutzen Sie

$$(w - u) \cdot (v - z) = (v - u) \cdot (w - z) + (v - w) \cdot (z - u)$$

und die Dreiecksungleichung.

Aufgabe 101: *Beweisen Sie den* Satz von Napoleon*: Wenn man auf die drei Seiten eines beliebigen Dreiecks* $\triangle ABC$ gleichschenkelige *Dreiecke mit Basiswinkel* $30°$ *aufsetzt ...*



..., dann bilden die Spitzen D, E und F dieser drei Dreiecke ein gleichseitiges *Dreieck.*

Hinweis: *Zeigen Sie zuerst (rein geometrisch): In einem rechtwinkligen Dreieck (mit Standardbezeichnung) mit $\alpha = 30^\circ$ und $\beta = 90^\circ$ ergibt sich der Eckpunkt C als Bild von B unter einer* Drehstreckung

- *um Drehzentrum A*
- *mit Drehwinkel* 30°
- *und Streckungsfaktor $\frac{2}{\sqrt{3}}$.*

Fassen Sie nun die Eckpunkte A, B und C des Dreiecks als komplexe *Zahlen a, b und c auf und verwenden Sie, daß*

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

gilt, um zu zeigen, daß für die dem Punkt F entsprechende komplexe Zahl f gilt:

$$f = b + \frac{1}{2} \cdot (a - b) \cdot \left(1 + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

und analoge Formeln gelten für die den anderen Punkten D und E entsprechenden komplexen Zahlen d und e. Betrachten Sie die Differenzen $f - e$ und $d - e$ und zeigen Sie, daß diese sich genau um eine Drehung um 60° unterscheiden!

Aufgabe 102: *Seien A, B, C und D die Ecken der* Grundfläche *eines Parallelepipeds, seien E, F, G und H die Ecken der* Deckfläche *(in dieser Reihenfolge); dabei sei $\overline{AE}$ eine der Kanten des Parallelepipeds.*

Die Koordinatenvektoren der Punkte A, B, D und E seien $\mathbf{a} = (4, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (3, 5, -1)$, $\mathbf{d} = (6, 0, 1)$ und $\mathbf{e} = (5, 0, 6)$: Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds.

Aufgabe 103: *Zeigen Sie durch direkte Rechnung, daß die Entwicklung nach Spalte 1 und nach Spalte 2 entsprechend dem Laplaceschen Entwicklungssatz für die allgemeine 2×2–Determinante*

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

richtig ist. (Zur Erinnerung: Eine 1×1–Determinante $\det(x)$ ist einfach gleich x.)

Zeigen Sie durch direkte Rechnung, daß die allgemeine 2×2–Determinante bilinear *(als Funktion der beiden Spaltenvektoren) und* alternierend *ist.*

Hinweis: *Ja, hier sollen Sie tatsächlich einfach rechnen;-) Die Sache ist aber sehr einfach, klingt nur kompliziert!*

Aufgabe 104: *Zeigen Sie durch direkte Rechnung, daß die Entwicklung nach Spalte 1, Spalte 2 und Spalte 3 entsprechend dem Laplaceschen Entwicklungssatz für die allgemeine* 3×3*–Determinante*

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,2} \end{pmatrix}$$

richtig ist.

Argumentieren Sie, wie daraus (ohne weitere Rechnung!) folgt, daß die allgemeine 3×3*–Determinante* trilinear *(als Funktion der drei Spaltenvektoren) und* alternierend *ist.*

Hinweis: *Ja, hier sollen Sie zunächst wieder rechnen: Fassen Sie für die Entwicklung nach der ersten Spalte einfach die Terme aus der Formel für die allgemeine* 3×3*–Determinante zusammen, die* $a_{1,1}$ *bzw.* $a_{2,1}$ *bzw.* $a_{3,1}$ *enthalten, dann haben Sie im Grunde das gewünschte Ergebnis schon vor sich.*

Für den zweiten Teil der Aufgabe brauchen Sie nur genau hinzusehen und die Ergebnisse aus Beispiel 103 anzuwenden!

Aufgabe 105: *Verwenden Sie den Laplaceschen Entwicklungssatz, um zu zeigen: Die Determinante einer oberen* 3×3*–Dreiecksmatrix* $A = \left(a_{i,j}\right)_{1,1}^{3,3}$ *ist gleich dem Produkt der Eintragungen auf der Hauptdiagonale, also*

$$\det A = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3}.$$

Hinweis: *Entwickeln Sie nach der* ersten *Spalte — und zwar* 2*–mal! (Oder können Sie die Richtigkeit der Aussage direkt aus der Formel für die* 3×3*–Determinante* sehen*?)*

Aufgabe 106: *Zeigen Sie: Die Fläche des Dreiecks* $\triangle ABC$*, dessen Eckpunkte die Koordinaten* $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$*,* $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ *und* $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ *haben, ist gegeben durch*

$$[\![\triangle ABC]\!] = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|.$$

Rechnen Sie die Determinante konkret aus und gewinnen Sie so eine weitere Formel für die Fläche des Dreiecks.

Hinweis: *Kombinieren Sie eine* geometrische *Überlegung mit einer* rechnerischen*: Betrachten Sie die Ebene als eingebettet in den Raum; d.h., interpretieren Sie die gegebenen Koordinatenvektoren als*

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, 0)\,, \mathbf{b} = (b_1, b_2, 0)\,, \mathbf{c} = (c_1, c_2, 0)\,.$$

Betrachten Sie das von den drei Vektoren

$$\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}, (0, 0, 1)$$

aufgespannte Parallelepiped *und begründen Sie (rein geometrisch!), daß dessen* Volumen *doppelt so groß ist wie die gesuchte Dreiecksfläche.*

Drücken Sie dieses Volumen durch eine Determinante aus und zeigen Sie, daß diese durch Spaltenoperationen *aus der oben gegebenen Determinante hervorgeht.*

Aufgabe 107: *Veranschaulichen Sie sich das Argument, mit dem man die Multiplikativität der Determinante "geometrisch" (aus der Multiplikativität des orientierten Inhalts) begründen kann, anhand des folgenden Beispiels in der Ebene:*

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Hinweis: *Zeichnen Sie das Bild des Einheitsquadrats unter den entsprechenden linearen Abbildungen.*

Aufgabe 108: *Zeigen Sie durch direkte Rechnung, daß die allgemeine* 2×2*–Determinante multiplikativ ist, daß also*

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$$

gilt.

Hinweis: *Ja, hier sollen Sie tatsächlich einfach rechnen;-)*

Aufgabe 109: *Die* Fibonacci–Zahlen $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ *sind eine* rekursiv *definierte Folge ganzer Zahlen:*

$$\underbrace{F_0 = 0, F_1 = 1}_{\text{Anfangswerte}} \text{ und für } n > 1 \text{ gilt: } \underbrace{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}_{\text{Rekursion}}.$$

Zeigen Sie, daß für alle $n \geqslant 2$ *die Matrixidentität*

$$\begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1}$$

gilt, und folgern Sie daraus

$$F_n \cdot F_{n-2} - F_{n-1}^2 = (-1)^n.$$

Hinweis: *Klingt nur kompliziert: Verwenden Sie Induktion nach* n *(Matrixmultiplikation und Rekursion!) und Multiplikativität der Determinante!*

Aufgabe 110: *Seien* x_1, x_2 *und* x_3 *paarweise verschieden. Berechnen Sie die Determinante der Matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix},$$

indem Sie sie durch Zeilenoperationen *(erinnern Sie sich an das Eliminationsverfahren!) auf obere Dreiecksform bringen (Zeilenoperationen ändern ja die Determinante nicht!) und dann Beispiel 105 verwenden.*

Aufgabe 111: *Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks* $\triangle ABC$ *im (dreidimensionalen) Raum, dessen Eckpunkte die Koordinaten* $\mathbf{a} = (-1, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 3, 3)$ *und* $\mathbf{c} = (2, 2, 1)$ *haben.*

Bestimmen Sie außerdem den Winkel α *im Eckpunkt* A.

Aufgabe 112: *Sei* $n = 2$ *oder* $n = 3$*; sei* $A = (a_{i,j})$ *eine* $n \times n$*–Matrix, sei*

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda \cdot \mathbf{1})$$

das charakteristische Polynom von A.

Zeigen Sie: Der führende Koeffizient von p *(also der Koeffizient von* λ^n *in* p*) ist*

$$(-1)^n.$$

Zeigen Sie weiters: Der Koeffizient von λ^{n-1} *in* p *ist*

$$(-1)^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Hinweis: *Machen Sie sich klar, daß die hier interessierenden Potenzen* λ^n *und* λ^{n-1} *nur in einem* einzigen *Summanden der Determinante* $\det(A - \lambda \cdot I)$ *auftauchen können, nämlich in*

$$\prod_{I=1}^{n} (a_{i,i} - \lambda)$$

(dieser Summand hat Vorzeichen $+1$ *in der Determinante).*

Aufgabe 113: *Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 114: *Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix:*

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 115: *Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 116: *Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Hinweis: *Denken Sie an Beispiel 105: Die Matrix hier ist ja eine* obere Dreiecksmatrix*!*

Aufgabe 117: *Führen Sie für die folgende quadratische Gleichung die Hauptachsentransformation durch und bestimmen Sie, um welchen Kegelschnitt es sich handelt:*

$$9 \cdot x^2 + 24 \cdot x \cdot y + 16 \cdot y^2 - 40 \cdot x - 95 \cdot y - 25 = 0.$$

Aufgabe 118: *Führen Sie für die folgende quadratische Gleichung die Hauptachsentransformation durch und bestimmen Sie, um welchen Kegelschnitt es sich handelt:*

$$5 \cdot x^2 + 8 \cdot x \cdot y + 5 \cdot y^2 - 22 \cdot x - 14 \cdot y + 17 = 0.$$

Aufgabe 119: *Führen Sie für die folgende quadratische Gleichung die Hauptachsentransformation durch und bestimmen Sie, um welchen Kegelschnitt es sich handelt:*

$$8 \cdot x^2 - 4 \cdot x \cdot y + 5 \cdot y^2 + 4 \cdot \sqrt{5} \cdot x - 10 \cdot \sqrt{5} \cdot y - 11 = 0.$$

Aufgabe 120: *Führen Sie für die folgende quadratische Gleichung die Hauptachsentransformation durch und bestimmen Sie, um welchen Kegelschnitt es sich handelt:*

$$0 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y - 3 \cdot y^2 + \frac{32}{\sqrt{5}} \cdot x - \frac{44}{\sqrt{5}} \cdot y - 28 = 0.$$