

Übungen zu Differentialgleichungen für LAK

WS 2010/11

M. HOFFMANN-OSTENHOF

1. Siehe Kopie: a) Radioaktiver Zerfall, b) Radioaktive Verseuchung
2. Ein Medikament M werde im Körper exponentiell mit der Halbwertszeit τ abgebaut. Wieviele Halbwertszeiten dauert es, bis von einer einmaligen Gabe von M nur noch 1% im Körper vorhanden ist?
3. Siehe Kopie: Das Newton'sche Abkühlungsgesetz
4. Siehe Kopie: Das psychophysische Grundgesetz von Weber und Fechner
5. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen und skizzieren Sie die Lösungskurven. Richtungsfeld?
a) $y' = \cos x$ b) $y' = y^3$ c) $y' = yx^{-2}, x > 0$
6. Lösen Sie die Differentialgleichungen:
a) $(1 + e^x)yy' = e^x$ b) $y' = \frac{1-y^2}{2x}$ c) $y' = xy - xy^3$
7. Die Differentialgleichung $\frac{dP}{dt} = \alpha P^\beta$, mit $\alpha > 0, \beta > 1$ ist ein Modell für explosives Wachstum. Für welches Zeitintervall existiert die Lösung des AWP mit der Anfangsbedingung $P(0) = P_0$?

8. Die Differentialgleichung $y' = ay^2 + by + c$, mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ tritt häufig in den Anwendungen auf. Lösen Sie die Differentialgleichung, indem Sie die Fallunterscheidungen $D > 0, D = 0, D < 0, D = 4ac - b^2$ berücksichtigen.
9. siehe Kopie: Das Ebbinghausche Modell des Vergessens
10. siehe Kopie: Schneebälle, Mottenkugeln
11. Lösen Sie das AWP: a) $y' = (1 + x^2)^{-1}, y(0) = 0$ b) $y' = y^{\frac{2}{3}}, y(0) = 1$
12. Lösen Sie das AWP $\dot{h} = -k\sqrt{h}, h(0) = h_0, h_0 \geq 0$ und $k > 0$. Eindeutigkeit der Lösung?
13. Lösen Sie das AWP und untersuchen Sie die lokale bzw. globale Eindeutigkeit der Lösung:
- $$y' = -x(\operatorname{sgn} y) \sqrt{|y|} = \begin{cases} -x\sqrt{y} & \text{für } y \geq 0 \\ x\sqrt{-y} & \text{für } y < 0 \end{cases} \text{ mit } y(x_0) = y_0.$$
14. Lösen Sie das AWP $y' = \frac{y}{x} - 1 - e^{-\frac{y}{x}}, y(1) = 0$
15. Lösen Sie die Differentialgleichung: $y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$
16. Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$
17. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von
a) $y' = 2y + 1 + x^2$ b) $xy' - y = x^2 \cos x$
18. siehe Kopie: Verbreitung einer Information durch Massenmedien

19. $LI + RI = U$ (wobei $I = I(t)$ Stromstärke und $U(t)$ Spannung) AWP: $I(0) = I_0$.
Lösen Sie das AWP für
- (a) $U(t) = U_0 = \text{Konst}$ (Gleichspannung)
 - (b) $U(t) = U_0 \cos \omega t$ (Wechselspannung)
20. Lösen Sie das AWP $\dot{y} + y \cos t = \cos^3 t$, $y(0) = 1$
21. Zeigen Sie: Ist y_p partikuläre Lösung der Riccati-Dgl. $y' = fy^2 + gy + h$, dann läßt sich die Gesamtheit der Lösungen d. Dgl. darstellen in der Form $y = y_p + u$, wobei u die Lösungen der Bernoulli-Dgl. $u' = (2fy_p + g)u + fu^2$ durchläuft.
22. Bestimmen Sie die allg. Lösg. d. Riccati-Dgl.
 $y' = y - y^2 + t^2 - t - 1$. Eine partikuläre Lösg. ist $y_p = 1 - t$.
23. Lösen Sie die Differentialgleichungen
- (a) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^2)dy = 0$
 - (b) $[\cos(x + y^2) + 3y]dx + [2y \cos(x + y^2) + 3x]dy = 0$
24. Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor M und lösen Sie
- (a) $ydx + (2x^2y - x)dy = 0$; $M = M(x)$
 - (b) $(xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0$; $M = M(y)$
25. Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zur Kurvenschar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c$, c Scharparameter (Skizze!).
26. Bestimmen Sie die Feldlinien des Vektorfeldes $v = (y, x)$ und ihre Orthogonaltrajektorien (Skizze!).

27. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

a) $\ddot{y} + y = t^2$ b) $\ddot{y} + y = e^{5t}$ c) $\ddot{y} + y = \cos 2t$ d) $\ddot{y} + y = t^2 + e^{5t} + \cos(2t)$

28. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 7$.

29. Lösen Sie die folgenden AWP mit der Anfangsbedingung $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.

a) $\ddot{x} + 10\dot{x} = 0$ b) $\ddot{x} + 10\dot{x} + 25x = 0$ c) $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$

Skizzieren Sie die Bahnkurve im Phasenraum.

30. Lösen Sie das AWP
$$\begin{cases} \ddot{u} - 6\dot{u} + 25u = 2\cos(2t), \\ u(0) = \dot{u}(0) = 0. \end{cases}$$

31. Lösen Sie das AWP
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y + 8\sin(2x) = 0, \\ y(0) = 2, y'(0) = 4. \end{cases}$$

32. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{u} + 4u = t^2 + 5\cos(2t).$$

33. Lösen Sie die folgenden Randwertaufgaben (sofern diese lösbar sind !):

(a) $u'' + u = 0, \quad u(0) = 1, \quad u(\pi) = 1$

(b) $u'' + u = 0, \quad u(0) = 1, \quad u(\pi) = -1$

(c) $u'' - u = 0, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 2$

34. Lösen Sie das EWP
$$\begin{cases} -u'' - \lambda u = 0, u = u(x), x \in [0, l], \\ u'(0) = u'(l) = 0. \end{cases}$$

35. Siehe Kopie: Ein Anfangs-Randwertproblem für die 1-dim. Wärmeleitungsgleichung wird mit Hilfe des Separationsansatzes gelöst. (Nachvollziehen und Verstehen!)

①

Radioaktiver Zerfall (exponentielle Zerfallsprozesse) Zur Zeit $t > 0$ seien $n(t)$ Atome einer radioaktiven Substanz vorhanden. Es ist *a priori* plausibel, daß die Zahl dn , die in der (kleinen) Zeitspanne dt zerfällt, der gerade vorhandenen Zahl $n(t)$ und der Zerfallszeit dt proportional sein wird: $dn = -\lambda n(t) dt$ mit einer positiven Konstanten λ , der sogenannten Zerfallskonstanten der Substanz (das negative Vorzeichen trägt der Tatsache Rechnung, daß $dn = n(t+dt) - n(t) < 0$ ist). Daraus ergibt sich sofort die *Differentialgleichung des radioaktiven Zerfalls*:

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda n. \quad (1.43)$$

Ihre allgemeine Lösung wird durch $n(t) = Ce^{-\lambda t}$ mit einer willkürlichen Konstanten C gegeben. Sind anfänglich n_0 Atome vorhanden ($n_0 = n(0)$), so ist also

$$n(t) = n_0 e^{-\lambda t} \quad \text{für } t > 0 \quad (1.44)$$

(vgl. (1.3) bis (1.5)). Man sagt deshalb, die radioaktive Substanz *zerfalle exponentiell*. Das Zerfallsgesetz (1.44) ist empirisch gut bestätigt. Zeige, daß die Zeit τ , innerhalb derer sich $n(t)$ um die Hälfte vermindert, durch

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (1.45)$$

gegeben wird. Sie ist unabhängig von $n(t)$, heißt die Halbwertszeit der betreffenden Substanz und ist das Gegenstück zur Verdoppelungszeit (1.8) eines exponentiellen Wachstumsprozesses.

Radioaktive Verseuchung durch Strontium-90 Das radioaktive Strontium-90 wird bei Atombombenexplosionen frei und verseucht die pflanzliche Nahrung von Menschen und Tieren. Es ist deshalb so heimtückisch, weil es chemisch mit Kalzium verwandt ist und daher über die pflanzliche Nahrung in die Knochen von Menschen und Tieren aufgenommen wird. Erschwerend kommt hinzu, daß seine Halbwertszeit recht lang ist, nämlich 28 Jahre. Angenommen, nach einer Atombombenexplosion sei der Gehalt an Strontium-90 in dem betroffenen Gebiet hundertmal höher als normal. Wie lange wird es dauern, bis dieses Gebiet wieder für Menschen bewohnbar ist?

③

Das Newtonsche Abkühlungsgesetz. Eine Substanz der Temperatur $T(t)$ wird in ein Medium der Temperatur $U(t)$ eingetaucht. Für die Temperaturdifferenz $P(t) := T(t) - U(t)$ fand I. Newton (in zahlreichen Versuchen) $\frac{dP}{dt} = \lambda P$. („Die Abkühlungsgeschwindigkeit ist proportional zur Temperaturdifferenz.“) Folglich gilt $P(t) = P(0)e^{\lambda t}$, bzw.

$$T(t) = (T(0) - U(0))e^{\lambda t} + U(t).$$

④

Das psychophysische Grundgesetz von WEBER und FECHNER. Ein Reiz der Intensität R verursacht eine Empfindung der Intensität $E(R)$. Versuche ergeben $\Delta E = a \frac{\Delta R}{R}$ mit einer Konstanten a . $\Delta R \rightarrow 0$ führt auf $\frac{dE}{dR} = a \frac{1}{R}$, also auf $E(R) = a \ln R + c$ (\rightarrow (6) und §2 (2)). Als Reizschwelle bezeichnet man den Wert R_0 mit $E(R_0) = 0$ und $E(R) > 0$ falls $R > R_0$. Damit ergibt sich $c = -a \ln R_0$ und $E(R) = a \ln R - a \ln R_0 = a \ln \frac{R}{R_0}$. Das langsame Anwachsen der \ln -Funktion verlangt in Bereichen hoher Intensität eine ganz erhebliche Änderung von R , um $E(R)$ merklich zu beeinflussen.

9

Das Ebbinghausche Modell des Vergessens Ein Student hat sich einen gewissen Wissensstoff eingeprägt (etwa für ein Examen). Mit der Zeit wird er einiges davon vergessen. $p(t)$ bedeute den Prozentsatz des Stoffes, den er t Zeiteinheiten nach dessen voller Meistersung noch im Gedächtnis hat; es ist also $p(0) = 100$. Optimistischerweise wird man annehmen dürfen, daß er einen gewissen Prozentsatz b ($0 < b < 100$) des Stoffes nie vergißt, ferner wird man den Ansatz wagen, daß zur Zeit t die Vergessensrate $\dot{p}(t)$ proportional zu dem Prozentsatz des noch zu vergessenden Stoffes, also zu $p(t) - b$, ist. Formuliere das zugehörige Anfangswertproblem, löse es und skizziere die Lösung. Sie wird nach dem deutschen Psychologen Hermann Ebbinghaus (1850-1909; 59) das Ebbinghausche Vergessensmodell genannt. Das klassische Buch „Über das Gedächtnis“ von Ebbinghaus hat die Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1971 neu aufgelegt.

10

Schneebälle, Mottenkugeln und Bonbons haben wenigstens *eines* gemeinsam: ihre Volumina V vermindern sich beim Abschmelzen, Verdunsten bzw. Lutschen mit einer zeitlichen Rate, die proportional zu der jeweils noch vorhandenen Oberfläche F ist: $dV/dt = -\lambda F$ ($\lambda > 0$ konstant). Sei etwa $r(t)$ der Radius einer gerade ausgelegten Mottenkugel, $r(t)$ ihr Radius nach Ablauf der Zeit t . a) Wie groß ist $r(t)$? b) Angenommen, die Mottenkugel habe nach 60 Tagen ihr halbes Gewicht verloren. Nach wieviel Tagen ist ihr Radius auf ein Zehntel seiner Anfangsgröße geschrumpft? (Es handelt sich hier *nicht* um einen Exponentialprozeß!)

18

Verbreitung einer Information durch Massenmedien Eine Information, etwa eine Katastrophenmeldung oder eine Werbung, werde durch Massenmedien (Radio, Fernsehen, Zeitungen) in kurzen Abständen, also praktisch „kontinuierlich“ einer gewissen Bevölkerung der Größe N mitgeteilt. Die Mitteilungen sollen zur Zeit $t_0 = 0$ beginnen, und $I(t)$ sei die Anzahl der zur Zeit $t > 0$ informierten Mitglieder der Bevölkerung, insbesondere sei $I(0) = 0$. Mache für die Informationsrate dI/dt einen „vernünftigen“ Proportionalitätsansatz und löse das so entstehende Anfangswertproblem. Wie lautet die entsprechende Aufgabe für den Bruchteil $b(t)$ der zur Zeit t Informierten und wie sieht deren Lösung aus.

Die Kopien sind aus den Buechern:
Heuser, Gew. Dgln. und Meyberg, Vachenauer, Hoehere Math. 2

uniformly for $0 \leq x \leq L$ and $t \geq 0$. Therefore the function $u(x, t)$ defined by this series is continuous in the closed strip $0 \leq x \leq L, t \geq 0$. Obviously $u(x, t)$ satisfies the boundary conditions (2.3). It remains to show that $u(x, t)$ satisfies the heat equation in the interior of the strip. To do this it suffices to show that all the series obtained by termwise differentiation of the series in (2.12), once with respect to t or twice with respect to x , converge uniformly in any closed strip of the form $0 \leq x \leq L, t_0 \leq t$ with t_0 being any positive number, however small. But this follows from the Weierstrass M -test using the fact that for any $t_0 > 0$,

$$\frac{n^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \leq 1 \quad \text{for all } t \geq t_0.$$

provided n is sufficiently large. We have shown that the desired solution of the initial-boundary value problem (2.1), (2.2), (2.3) is given by the series (2.12) with coefficients given by (2.14).

2. Solution of the Initial-Boundary Value Problem for the One-Dimensional Heat Equation

Consider a cylindrical rod of length L with insulated cylindrical surface and center-line occupying the interval $[0, L]$ of the x -axis. Suppose that when $t = 0$ the temperature in the rod is a known function of x and that for all $t \geq 0$ the temperature at the two ends of the rod is kept equal to 0. In order to determine the temperature distribution in the rod for $t \geq 0$ we must solve the initial-boundary value problem

- (2.1) $u_t - u_{xx} = 0; \quad 0 < x < L, \quad 0 < t,$
- (2.2) $u(x, 0) = \phi(x); \quad 0 \leq x \leq L,$
- (2.3) $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0; \quad 0 \leq t.$

The function ϕ is assumed to be continuous and vanish at the ends $x = 0$ and $x = L$. From the previous section, we know that this problem can have at most one solution which, if it exists, must depend continuously on the initial data $\phi(x)$. In this section we will obtain the solution of the problem using separation of variables and Fourier series. The method of solution is exactly the same as the one used in Section 8 of Chapter VIII for solving the initial-boundary value problem for the one-dimensional wave equation.

A function of the form

$$(2.4) \quad u(x, t) = X(x)T(t)$$

will satisfy the heat equation (2.1) and the boundary conditions (2.3) if $X(x)$ satisfies

$$(2.5) \quad X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < L$$

$$(2.6) \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

and $T(t)$ satisfies

$$(2.7) \quad T'' + \lambda T = 0, \quad 0 < t$$

where $-\lambda$ is the separation constant. We have already solved the eigenvalue problem (2.5), (2.6). The eigenvalues are

$$(2.8) \quad \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

with corresponding eigenfunctions

$$(2.9) \quad X_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

The general solution of the T equation (2.7) with λ being an eigenvalue λ_n is

$$(2.10) \quad T_n(t) = B_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Substituting (2.9) and (2.10) into (2.4) we obtain the infinite sequence of functions

$$(2.11) \quad u_n(x, t) = C_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

each of which satisfies the heat equation (2.1) and the boundary conditions (2.3). Hopefully, the initial condition (2.2) will be satisfied by a superposition of the functions (2.11),

$$(2.12) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}.$$

Let us postpone for a moment the consideration of questions of convergence and differentiability of the series in (2.12). In order to satisfy (2.2) the constants in (2.12) must be chosen so that

$$(2.13) \quad \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

ie., the C_n must be the coefficients of the Fourier sine series representation of the function $\phi(x)$ on the interval $[0, L]$. From formula (8.40) of Chapter VII,

$$(2.14) \quad C_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Let us assume now that ϕ satisfies the following conditions: (1) ϕ is continuous and has a sectionally continuous derivative on $[0, L]$, and (2) $\phi(0) = \phi(L) = 0$. Then we know (Problem 8.13 of Chapter VII) that the representation (2.13) with coefficients (2.14) is valid in the sense of absolute and uniform convergence on the interval $[0, L]$. Since

$$0 < e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \leq 1 \quad \text{for all } t \geq 0,$$

the series in (2.12) with coefficients (2.14) converges absolutely and

Zachwanaglu, Thoree Introduction to Partial Differential Equations and Applications