

## Zur Gleichverteilung im $R^n$

P. Michor

Abstract: A sequence in a compact set  $K$  in  $R^n$  is uniformly distributed with respect to a Radon measure  $\mu$  on  $K$  if and only if the projection of the sequence is uniformly distributed with respect to the projection measure for all orthogonal projections onto all one dimensional subspaces out of a dense subset of  $P^{n-1}$ .

I.S. Kac [8] hat bewiesen, daß eine Folge auf der 2-Sphäre  $S^2 \subseteq R^3$  genau dann bezüglich des Oberflächenmaßes gleichverteilt ist, wenn die Projektion der Folge auf jeden Durchmesser dort gleichverteilt ist mod 2. Eine Verschärfung dieses Satzes findet man bei Gerl [3] : es genügen schon weniger Durchmesser.

Das Hauptresultat dieser Arbeit (Satz 2) zeigt, daß das erwähnte Ergebnis gar nichts mit der Kugel zu tun hat, sondern auch für beliebige kompakte Mengen und Radonmaße darauf gilt.

Dieselbe Beweismethode zeigt als Nebenresultat (Satz 1) eine leichte Verschärfung eines Resultates von Rényi [12] über Projektionen von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Das Literaturverzeichnis enthält auch Hinweise zur Entstehungsgeschichte und Entwicklung dieses Resultats und eines verwandten Problems.

Ich danke den Herren H. Rindler, L. Schmetterer und K. Sigmund für Hinweise und Diskussionen.

Integrierbare Distributionen (vgl. L. Schwartz [13], p. 199 - 203, bzw. [14], p. 99 - 102): Es sei  $\mathfrak{B}_c(\mathbb{R}^n)$  der Raum aller  $C^\infty$  Funktionen am  $\mathbb{R}^n$ , die in allen Ableitungen gleichmäßig beschränkt sind, versehen mit der feinsten lokalkonvexen Topologie, die auf jeder in allen Ableitungen gleichmäßig beschränkten Teilmenge von  $\mathfrak{B}_c(\mathbb{R}^n)$  mit der Topologie der kompakten Konvergenz in allen Ableitungen übereinstimmt. Der Dualraum  $\mathfrak{B}'_c(\mathbb{R}^n)$  von  $\mathfrak{B}_c(\mathbb{R}^n)$  ist der Raum der integrierbaren Distributionen am  $\mathbb{R}^n$ . ( $\int f = \langle f, 1 \rangle$ ).

Ist  $G$  ein eindimensionaler Teilraum des  $\mathbb{R}^n$  (ein Element des  $P^{n-1}$ ), dann sei mit  $p_G: \mathbb{R}^n \rightarrow G$  die Orthogonalprojektion auf  $G$  bezeichnet. Für  $f \in \mathfrak{B}'_c(\mathbb{R}^n)$  ist die integrierbare Distribution  $p_G(f)$  auf  $G$  gegeben durch  $\langle p_G(f), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \circ p_G \rangle$  für  $\varphi \in \mathfrak{B}_c(G)$ .  $\mathfrak{B}'_c(\mathbb{R}^n)$  ist die größte Klasse von Distributionen, für die alle Projektionen dieser Art auf eindimensionale Teilräume existieren.

Jede Funktion  $\varphi \circ p_G$  für  $G \in P^{n-1}$  und  $\varphi \in \mathfrak{B}_c(G)$  bezeichnen wir als  $G$ -konstant ("plane-wave-function" bei John [7]), da sie konstant ist auf allen affinen Hyperebenen, die zu  $G$  orthogonal sind.

Satz 1: Jede integrierbare Distribution am  $\mathbb{R}^n$  ist eindeutig bestimmt durch ihre Projektion auf alle eindimensionalen Teilräume aus einer dichten Teilmenge des  $P^{n-1}$ .

Der Beweis beruht auf dem folgenden Lemma:

Lemma: Es sei  $V$  eine dichte Teilmenge des  $P^{n-1}$ . Dann ist der Teilraum, der von allen  $G$ -konstanten Funktionen für alle  $G \in V$  erzeugt wird, dicht in  $\mathfrak{B}'_c(\mathbb{R}^n)$ .

Beweis: Es sei  $\mathcal{C}(R^n)$  der Raum der  $C^\infty$  Funktionen am  $R^n$ , die in allen Ableitungen bei Unendlich rasch gegen 0 gehen (vgl. [13], 233 ff). Klarerweise ist  $\mathcal{S}(R^n)$  dicht in  $\mathcal{B}_C(R^n)$ . Ich zeige nun, daß jedes  $\varphi \in \mathcal{S}(R^n)$  in der Topologie der kompakten Konvergenz Limes eines Netzes von endlichen Linearkombinationen von  $G$ -konstanten Funktionen für  $G \in V$  ist, das in allen Ableitungen gleichmäßig beschränkt ist. Die Existenz eines solchen Netzes ergibt sich aus der Umkehrformel zur Fouriertransformation. Es ist nämlich für jedes  $x \in R^n$

$$(*) \quad \varphi(x) = \int_{R^n} \hat{\varphi}(y) e^{i\langle x, y \rangle} dy,$$

wobei  $\hat{\varphi}(y)$  die Fouriertransformierte von  $\varphi$  ist, die wieder in  $\mathcal{S}(R^n)$  liegt (vgl. [13]). Für festes  $y \in R^n$  ist  $\hat{\varphi}(y) e^{i\langle x, y \rangle}$  eine  $(Ry)$ -konstante Funktion am  $R^n$ , konstant auf allen affinen Hyperebenen, die zu  $y$  orthogonal sind. Setzen wir  $U = \cup \{G : G \in V\}$ , dann ist das eine dichte Teilmenge des  $R^n$ . Nun ist der Integrand in  $(*)$  ein Element von  $\mathcal{S}(R^n)$  bezüglich  $y$ , also konvergieren für jedes feste  $x$  Riemann-Summen des Integrals gegen  $\varphi(x)$ , die jeweils über eine endliche Partition einer kompakten Menge  $K \subseteq R^n$  genommen werden können, da das Integral über  $R^n \setminus K$  beliebig klein wird, und die Funktionswerte in den Riemann-Summen können an Punkten  $y$  aus der dichten Menge  $U$  genommen werden. Diese Summen sind als Funktionen in  $x$  endliche Linearkombinationen von  $G$ -konstanten Funktionen für  $G \in V$ . Da der Integrand gleichmäßig stetig ist in  $x$  ( $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(R^n)$ ), konvergieren dieselben Riemann-Summen gegen  $\varphi$  gleichmäßig auf einer Umgebung von  $x$ , und außerdem kann man differenzieren nach  $x$  mit dem Integral vertauschen. Daraus folgt das Lemma.

Beweis von Satz 1: Es sei wieder  $V$  dicht in  $P^{n-1}$ . Sind  $f, g \in \mathcal{B}'_C(R^n)$  und ist  $p_G(f) = p_G(g)$  für alle  $G \in V$ , dann ist  $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$  für jede  $G$ -konstante Funktion, falls  $G \in V$ . Diese  $\varphi$  erzeugen aber einen dichten Teilraum von  $\mathcal{B}_C(R^n)$ , also ist  $f = g$ .

Anwendung auf die Gleichverteilung: Es sei  $K$  eine kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $\mu$  ein Radon-Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $K$  (also insbesondere eine integrierbare Distribution des  $\mathbb{R}^n$ ). Der Begriff der Gleichverteilung hat dann Sinn auf  $K$ : eine Folge  $(x_n)$  aus  $K$  heißt gleichverteilt bezüglich  $\mu$  in  $K$ , wenn für jede stetige Funktion  $\varphi$  auf  $K$  gilt:

$$(**) \quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi(x_n) \rightarrow \int_K \varphi(x) d\mu(x)$$

(vgl. Hlawka [6]).

Für  $G \in \mathbb{P}^{n-1}$  ist  $p_G(\mu)$  für jede Borelmenge  $B$  in  $G$  durch  $p_G(\mu)(B) = \mu(p_G^{-1}(B) \cap K)$  gegeben.

Hat  $K$  nichtleeres Inneres und der Rand  $\partial K$  Maß 0, und ist  $\mu$  (unnormierte) Einschränkung des Lebesgue-Maßes  $\lambda_n$  am  $\mathbb{R}^n$  auf  $K$ , so kann der Begriff der Gleichverteilung auch elementarer beschrieben werden: die Folge  $(x_n)$  ist gleichverteilt bezüglich  $\mu$ , wenn sie in "Kästchen" von  $K$  asymptotisch mit der richtigen Häufigkeit auftritt (vgl. Kuipers und Niederreiter [9]). In diesem Fall ist  $p_G(\mu)$  absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes  $\lambda_1$  auf  $G$  und (bis auf Normierung) gilt:

$$\frac{d p_G(\mu)}{d \lambda_1}(t) = \lambda_{n-1}(\{x \in \mathbb{R}^n: \langle x, z_0 \rangle = t\} \cap K),$$

wobei  $z_0$  ein Einheitsvektor in  $G$  ist, und  $\lambda_{n-1}$  das Lebesgue-Maß auf der Hyperebene  $\{x: \langle x, z_0 \rangle = t\}$ .

Satz 2: Ist  $K$  eine kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $\mu$  ein Radon-Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $K$ , so ist eine Folge  $(x_n)$  in  $K$  genau dann gleichverteilt bezüglich  $\mu$ , wenn für jeden eindimensionalen Teilraum  $G$  aus einer dichten Teilmenge  $V$  des  $\mathbb{P}^{n-1}$  die Folge  $p_G(x_n)$  gleichverteilt ist in  $p_G(K)$  bezüglich  $p_G(\mu)$ .

Beweis: Nach Voraussetzung gilt für jedes  $G \in V$  und jede  $G$ -ebene Funktion  $\varphi$  am  $\mathbb{R}^n$ :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi|_K(x_n) \rightarrow \int_K \varphi|_K(x) d\mu(x).$$

Der von den  $\varphi|_K$  erzeugte Teilraum ist jedoch dicht im Raum  $C(K)$  aller stetigen Funktionen auf  $K$  in der Supremumsnorm, und die Menge  $\{(x_n) : n=1,2,\dots\} \cup \{\mu\}$  ist gleichgradig stetig (weil beschränkt) in  $C(K)'$ . Daher ist (\*\*) für jedes  $\varphi \in C(K)$  erfüllt.

Bemerkung: Die Voraussetzung, daß  $K$  kompakt ist, wurde nur gemacht, um den Begriff der Gleichverteilung einfacher formulieren zu können. Der Beweis funktioniert selbstverständlich auch für beliebiges (abgeschlossenes)  $K$ .

#### Literatur

- [1] A.S. Besicovitch: A uniqueness theorem and a problem in Integration, J. London Math. Soc. 33 (1958), 82-84.
- [2] H. Cramer, H. Wold: Some theorems on distribution functions, J. London Math. Soc. 11 (1936), 290-294.
- [3] P. Gerl: Gleichverteilung auf der Kugel, Archiv der Math. 24, (1973), 203-207.
- [4] J.W. Green: On the determination of a function in the plane by its integrals over straight lines, Proc. A.M.S. 9 (1958), 758-762.
- [5] W.M. Gilbert: Projections of probability distributions, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 6 (1955), 195-198.
- [6] E. Hlawka: Folgen auf kompakten Räumen, Abh. math. Sem. Hamburg 20 (1956), 223-241.
- [7] F. John: Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, Interscience tracts 2, 1955.
- [8] I.S. Kac: Uniform distribution on a sphere, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 5 (1957), 485-486.
- [9] L. Kuipers, H. Niederreiter: Uniform distribution of sequences, Wiley Interscience 1974.

- [10] D.J. Newman: Problem 4721, American Math. Monthly 64 (1957), 49.
- [11] J. Radon: Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss., Leipzig, math. naturw. Kl. 59 (1917) 262-277.
- [12] A. Rényi: On projections of probability distributions, Acta math. Acad. Sci. Hung. 3 (1952), 113-141.
- [13] L. Schwartz: Théorie des distributions, Hermann, Paris 1966.
- [14] L. Schwartz: Espaces des fonctions différentiables à valeurs vectorielles, Journal d'Analyse Math. 4 (1954-55), 88-148.

P. Michor  
Institut für Mathematik  
Universität Wien  
Strudlhofgasse 4  
A-1090 Wien.