

Impressionen vom Internationalen Kongress der Mathematiker

Peter Michor

Universität Wien

“I regret that Dr. Perelman has declined to accept the Fields Medal.” Sir John Ball, der Präsident der internationalen mathematischen Union, gab damit bekannt, was viele Mitglieder des Internationalen Kongresses der Mathematiker 2006 in Madrid schon vermutet hatten und wenige Geheimnisträger wussten. Über 4.000 Mitglieder und viele Begleitpersonen hatten die strengen Sicherheitsüberprüfungen geduldig ertragen, um an der Eröffnung unter dem Vorsitz des spanischen Königs Juan Carlos I teilzunehmen. Wenige Tage zuvor hatte der König endgültig zugesagt, und die Ordnung der Eröffnung war vom spanischen Hofprotokoll stark beeinflusst worden. Die drei anderen Fields-Medaillen wurden während der Eröffnung vom König überreicht: An Andrei Okounkov für seine Beiträge, die Wahrscheinlichkeitstheorie, Darstellungstheorie und algebraische Geometrie verbinden. Okounkov, ein russischer Mathematiker, der nun an der Universität Princeton arbeitet und der auch einige Zeit in Wien am Erwin Schrödinger-Institut verbracht hat, stellte in seinem Vortrag eine Formel vor: diese verbindet zwei erzeugende Funktionen, deren Koeffizienten zwei Arten der Zahl der algebraischen komplexen Kurven von festem Grad und Geschlecht sind, die durch gerade so viele Punkte in einer komplex dreidimensionalen algebraischen Varietät (ein durch Polynome beschreibbarer Raum) gehen, dass ihre Zahl positiv, aber endlich ist. Für gewisse dieser Varietäten ist das bewiesen, im Allgemeinen noch offen. Auch die Geschichte der Lösung der Poincaréschen Vermutung findet im Dreidimensionalen statt.

Terence Tao, ein australischer, 31-jähriger Mathematiker, der jetzt in Los Angeles tätig ist, ein Problemlöser höchsten Grades, erhielt die dritte Fields-Medaille für seine Arbeiten zu partiellen Differentialgleichungen, zur Kombinatorik, zur harmonischen Analysis und zur additiven Zahlentheorie. In seinem Vortrag erklärte Tao, dass man unter den Primzahlen beliebig lange arithmetische Folgen finden kann (Folgen der Art $a + k, a + 2k, a + 3k, \dots, a + nk$; hier ist die Schrittweite k und die Länge n). Den Beweis, den er mit Ben Green gefunden hat, nannte Tao “a sort of cheat”, weil er auf Wahrscheinlichkeiten beruht und wenig Zahlentheo-

rie verwendet. Leider hat man keine Kontrolle über k , daher ist immer noch nicht bewiesen, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Inzwischen wurde Terence Tao auch mit einem MacArthur Fellowship ausgezeichnet.

Die vierte Fields-Medaille ging an Wendelin Werner, einen deutschen mathematischen Physiker, der nun in Paris lebt und arbeitet, für seine Arbeiten zur stochastischen Loewner-Evolution, zur Geometrie der zweidimensionalen Brownschen Bewegung und zur konformen Feldtheorie. (Seinen Vortrag habe ich leider nicht mehr gehört, weil ich zum Flughafen musste.)

Der Nevanlinna-Preis für Mathematik in den Informationswissenschaften ging an Jon Kleinberg, 35 Jahre, von der Cornell University. Er erhielt den Preis für seine Arbeiten zu Netzwerktheorie, Data Mining, komparative Genetik und Strukturanalyse von Proteinen. Sein Vortrag über die Struktur von Informationsnetzwerken beschäftigte sich mit kleinen Welten von Internet-Benutzern und wie man diese kleinen Welten benützen kann, um in Internet-Suchmaschinen wie *Altavista*, *Google* und *Jeeves* viel schneller Rangordnungen berechnen zu können als dies ursprünglich von Brin und Page (den Gründern von *Google*) getan wurde.

Stark beeindruckt hat mich auch der Vortrag "Higher composition laws and applications" von Manjul Barghava. Er gab erst eine graphische Version der Multiplikation von binären quadratischen Formen nach Gauß, indem er die Koeffizienten an die Ecken eines Würfels verteilte und dann die Koeffizienten des Produktes vom gedrehten Würfel ablas. Das führte zu Verallgemeinerungen der Gauß-Multiplikation auf andere Räume von symmetrischen Formen und zu einer mysteriösen Verbindung zwischen solchen Multiplikationen und exzeptionellen Liegruppen. Ich denke, Barghava wird 2010 eine Fields-Medaille erhalten.

Der Internationale Kongress der Mathematiker findet seit 1897 in der Regel alle vier Jahre statt. Die Mathematik ist die einzige Wissenschaft, die ihre Einheit auf einem gemeinsamen regelmäßigen Kongress betont. J.C. Fields, der Organisator des Kongresses 1924 in Toronto, schlug vor, den Überschuss aus dem Budget seines Kongresses dazu zu verwenden, junge Mathematiker (die heute gültige Interpretation heißt unter 40) für eine hervorragende Arbeit mit einem Preis zu belohnen. Daher werden seit 1936 in der Regel alle vier Jahre während des Internationalen Kongresses der Mathematiker bis zu vier Fields-Medaillen verliehen. M. Grötschel, der Organisator des Internationalen Kongresses 1998 in Berlin, erwirtschaftete ebenfalls einen Überschuss. Dieser wird seit 2006 dazu verwendet, die Gauß-Medaille für Anwendungen der Mathematik alle vier Jahre zu verleihen. Diese Medaille ehrt Wissenschaftler, deren mathematisches Werk großen Einfluss außerhalb der Mathematik hat, in Technologie, Wirtschaft oder im Alltagsleben. Die Gauß-Medaille wurde in Madrid zum ersten Mal vergeben. Der König überreichte sie stellvertretend für Kiyoshi Itô (90) an seine Tochter. Itô ist der Begründer der stochastischen Analysis. Stochastische Differentialgleichungen spielen eine große Rolle in der Meteorologie, der Finanzmathematik, der Biologie, etc. In Österreich tätige Vertreter dieser Richtung sind Walter Schachermayer

(Wittgensteinpreis 1998) und Josef Teichmann (START-Preis 2006).

Doch der Star dieses Kongresses war abwesend: Grigori Perelman, dessen Beweis der Poincaréschen Vermutung die Aufmerksamkeit der Weltöffentlichkeit erregt hat. "Annals of Mathematics Manifolds Destiny. A legendary problem and the battle over who solved it" von Sylvia Nasar und David Gruber im *New Yorker* vom 28.8.2006 (siehe http://www.newyorker.com/fact/content/articles/060828fa_fact2). ist ein 14-seitiger Artikel, der sich wie ein Kriminalroman liest. Er hat Helden und Bösewichte und schildert rücksichtslos, aber durchaus zutreffend, die spannende Geschichte, die zu Perelmans Ablehnung der Fields-Medaille führte. Richard Hamilton aus New York hielt den Eröffnungsvortrag des Kongresses über den Ricci-Fluss und erwähnte Perelman ausführlich. Seit seiner ersten Arbeit zum Ricci-Fluss im Dreidimensionalen träumte Hamilton davon, ihn zum Beweis der Poincaréschen Vermutung zu benutzen. Die Ricci-Krümmung ist eine Komponente der Krümmung einer Metrik (das ist die infinitesimale Geometrie) eines Raumes, die im Vierdimensionalen der wichtigste Teil der Einstein-Gleichung der allgemeinen Relativitätstheorie ist. Man kann die Ricci-Krümmung als infinitesimalen Erzeuger eines dynamischen Systems auffassen: eine gewöhnliche Differentialgleichung am Raum der Metriken, der eine schwach hyperbolische partielle Differentialgleichung auf der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit entspricht. Sie wirkt auf die Metrik ähnlich wie Wärmeleitung und verteilt die Geometrie gleichmäßig auf den dreidimensionalen Raum, wenn sie nicht in endlicher Zeit in Singularitäten läuft: Die möglichen Singularitäten (vergleichbar schwarzen Löchern) der Geometrie kann man so beschreiben: Eine unendlich lange, unendlich dünne Zigarre (mal einem Kreis), oder eine 3-Sphäre, die nur an einem unendlich langen unendlich dünnen Hals am Raum hängt (*bubbling off*). Alles dies hat Hamilton bewiesen, doch er sah keinen Weg, die Singularitäten zu behandeln. Perelman hat in den Neunzigern des vorigen Jahrhunderts in Berkeley dieses Problem kennengelernt. Er suchte nach einer Funktion auf den Metriken, für die der Ricci-Fluss zum Gradientenfluss wird, fand sie, und nannte sie (geometrische) Entropie. Sie wächst entlang des Flusses und ist negativ unendlich auf der Zigarrensingularität. Daher tritt diese nicht auf. Die *bubbling off*-Singularitäten behandelte Perelman so, dass er den Hals abschnitt und die Wunde durch eine 3-Kappe heilte. Dann musste er sein Funktional neu berechnen und den Ricci-Fluss neu starten. Außerdem darf dies nur endlich oft geschehen: die Singularitäten dürfen sich nicht in endlicher Zeit häufen. Am Ende erhält man einen Ricci-flachen Raum. Das entspricht einer Vakuumlösung der Einsteingleichung. Im Dreidimensionalen ist das ein Raum konstanter Schnitt- (oder Gauß-) Krümmung, und für diese ist die Poincaréschen Vermutung sehr leicht zu lösen.

Perelman hat seine drei Arbeiten in den Jahren 2002 und 2003 im Preprint Server <http://www.arXiv.org> online zugänglich gemacht und sie nicht bei einer Zeitschrift eingereicht. Sie sind sehr kurz gehalten und zum Teil skizzenhaft. Drei mehrere hundert Seiten lange Artikel sind 2006 erschienen und enthalten Ausarbeitun-



John Ewing und Peter Michor

gen von Perelmans Artikel mit Hintergrund: Cao, Zhu: *A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures – Application of the Hamilton-Perelman Theory of the Ricci Flow*, Asian Journal of Mathematics (http://www.ims.cuhk.edu.hk/~ajm/vol10/10_2.pdf); Morgan, Tian: *Ricci Flow and the Poincaré Conjecture* (<http://de.arxiv.org/abs/math.DG/0607607>); Kleiner, Lott: *Notes on Perelman's papers* (<http://de.arxiv.org/abs/math.DG/0605667>). Die Abstracts der Artikel spielen eine Rolle im Drama um die Lösung der Poincaréschen Vermutung. Die beiden letzteren schreiben alle Ideen Perelman zu, der erste reklamiert die letzten Schritte für sich.

Das *ArXiv*, wo man Perelmans Artikel findet, wurde von Paul Ginsparg in Los Alamos begonnen. Es stellt wissenschaftliche Artikel unrefertiert, aber moderiert der Wissenschaft schnell und gratis zur Verfügung. Die Gründung war eine Reaktion auch auf die hohen Preise wissenschaftlicher Journale. Das *ArXiv* ist der Gegenstand einer Wette, die beim gemeinsamen Mittagessen aller anwesenden Komiteemitglieder der Internationalen Mathematischen Union (IMU) während des Kongresses abgeschlossen wurde. Beteiligt sind John Ewing, der *Executive Director* der Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft, und der Autor dieses Artikels, der von 1999–2002 Vorsitzender des Komitees für elektronische Information und Kommunikation der IMU war. Ich behaupte, dass in 20 Jahren, am 26.

August 2026, alle Artikel, die im Jänner 2006 ins *ArXiv* geladen wurden, immer noch ohne Schwierigkeiten heruntergeladen und gedruckt werden können. John Ewing bestreitet dies. Es geht um 100 Euro wertgesichert. Der Fields-Medaillenträger Vaughan Jones hat die Wette photographisch festgehalten. Diese Wette soll weltweit in mathematischen Nachrichten publiziert werden. Der Hintergrund der Wette ist, ob man heute schon genug Gewicht auf das Langzeitarchivieren elektronischer Dokumente legt, und ob die heutigen Datenformate in 20 Jahren noch lesbar oder hinreichend in neue Formate portiert sein werden. Es geht also um die Zukunft des Wissens der Menschheit. Die Wette soll die Diskussion um diese Fragen beleben.

SCHOOL SCIENCE AND MATHEMATICS

Join the thousands of mathematics educators throughout the world who regularly read SCHOOL SCIENCE AND MATHEMATICS — the leader in its field since 1902. The journal is published eight times a year and is aimed at an audience of high school and university teachers. Each 96 page issue contains ideas that have been tested in the classroom, news items to research advances in mathematics and science, evaluations of new teaching materials, commentary on integrated mathematics and science education and book reviews along with our popular features, the mathematics laboratory and the problem section.

The institutional subscription rate for foreign subscribers is US\$ 46,- per year (surface mail), US\$ 96,- per year (air mail).

Orders should be addressed to

**School Science and Mathematics, Dr. Donald Pratt
Curriculum and Foundations, Bloomsburg University
400 E Second Street, Bloomsburg, PA 17815, USA**