Übungen zu Einführung in die Analysis

(Günther Hörmann, Michael Kunzinger)

Sommersemester 2010

Vor den folgenden Aufgaben werden in den ersten Wochen der Übungen noch jene zur *Einführung in das mathematische Arbeiten* durchgenommen.

I. FOLGEN, REIHEN UND TEILMENGEN REELLER ZAHLEN

Zu §1: $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ und die Archimedische Eigenschaft

$\boxed{\mathbf{1}}$ Zeigen Sie:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists! n \in \mathbb{Z}: \ n \leq x < n+1.$$

Wir setzen dann $\lfloor x \rfloor := n$ (oft auch als $[x]$ notiert, die sog. Gaußklammer) und nennen $\lfloor x \rfloor$ das *größte Ganze von* x. Damit definieren wir eine Funktion floor : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$. Skizzieren Sie ihren Graphen.

$\boxed{\mathbf{2}}$ **Definition:** Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heiße *unendlich groß*, wenn gilt: für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x > n$. Gibt es unendlich große reelle Zahlen?

$\boxed{\mathbf{3}}$ (a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: es existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall n \geq n_1: \quad (n-k) > (\frac{n}{2}).$$

Insbesondere ist dann auch $(n-k)^{k+1} > (n/2)^{k+1}$.

(b) Sei $x > 0$. Zeigen Sie: es existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall n \geq n_2: \quad (1+x)^n > n^k.$$

(Hinweis: Binomischer Lehrsatz, (a) und archimedische Eigenschaft.)

Zu §2: Folgen und Grenzwerte

$\boxed{4}$ Sei $b > 1$.

(a) Folgern Sie aus Aufg. 3: zu $m \in \mathbb{N}$ beliebig existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall n \geq n_0 : \quad b^n > n^m.$$

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{b^n} = 0$. (Hinweis: ähnlich wie Beisp.2.4.5) in der V)

$\boxed{5}$ Zeigen Sie:

(a) $\lim a_n = a$ ist äquivalent zu $\lim |a_n - a| = 0$.
(b) Ändert man endlich viele Glieder einer konvergenten Folge ab, so ändern sich weder Konvergenzverhalten noch Grenzwert.

$\boxed{6}$ Sei $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent? Beweisen Sie Ihre Behauptung direkt durch Rückgriff auf die Definition der Konvergenz.

$\boxed{7}$ Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) mit $a_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$ $(n \geq 1)$ gegen 1 konvergiert. Finden Sie zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ explizit ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq N$ stets $|a_n - 1| < \varepsilon$ gilt.
(Hinweis: Bernoulli-Ungleichung.)

$\boxed{8}$ Entscheiden Sie jeweils welche der Eigenschaften *beschränkt*, *konvergent* bzw. *divergent* für die gegebene Folge vorliegen. Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{(3-n)^3}{3n^3 - 1}$ (b) $b_n = \dfrac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$

Aufg. 33-34: Bestimmen Sie jeweils $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, falls der Grenzwert existiert.

$\boxed{9}$ (a) $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(3n^2 + 2n + 1)(2n - 1)}$

(b) $a_n = \dfrac{n^3 + 4}{2n^2 + n + 1}$

$\boxed{10}$ (a) $a_n = \dfrac{(n+1)^k - n^k}{n^{k-1}}$, wobei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ fest

(b) $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{3n^2 + 4n + 5}$

$\boxed{11}$ Zeigen Sie, dass $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} \to 1$ für $n \to \infty$.

(Hinweis: $\sqrt[n]{n} = 1 + b_n \Rightarrow n = (1 + b_n)^n$.)

$\boxed{12}$ Zeigen Sie jeweils, dass es sich um Nullfolgen handelt:

(a) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ (b) $b_n = \dfrac{2^n}{n!}$

$\boxed{\mathbf{13}}$ Richtig oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

(a) $(a_{n+1} - a_n)$ ist Nullfolge $\Longleftrightarrow$ (a_n) ist konvergent

(b) Sei $0 < q < 1$ und $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 < a_{n+1} \leq q \cdot a_n$. Dann ist (a_n) eine Nullfolge.

$\boxed{\mathbf{14}}$ (a) Zeigen Sie: Ist (a_n) konvergent mit $a := \lim a_n > 0$ und (b_n) bestimmt divergent gegen $+\infty$, dann ist $(a_n \cdot b_n)$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

(b) Gilt die Aussage aus (a) auch im Fall $a = 0$?

$\boxed{\mathbf{15}}$ Geben Sie jeweils ein Beispiel für Folgen (a_n) und (b_n) an, für die $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$ ist und

(a) $\lim a_n = +\infty$

(b) $\lim a_n = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(c) (a_n) divergent, aber nicht bestimmt divergent.

$\boxed{\mathbf{16}}$ Beweisen Sie (2.12.Prop.(ii) aus der Vorlesung): Sei (a_n) eine Nullfolge mit $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, dann gilt $\lim \dfrac{1}{a_n} = +\infty$.

Zu §3: Vollständigkeit und Konvergenzprinzipien

$\boxed{\mathbf{17}}$ Bestimmen Sie jeweils alle Häufungswerte der Folge (a_n), insbesondere den Limes superior und Limes inferior. Vergleichen Sie stets mit dem Infimum und Supremum der Menge $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

(a) $a_n = (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N})$

(b) $a_{3n-2} = 3 + \dfrac{1}{n}$, $a_{3n-1} = \dfrac{2}{n}$, $a_{3n} = -\dfrac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$

(c) $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}$ [vgl. Aufg. 32(b)]

Für Aufgaben 18-19 betrachten Sie folgende Aussagen: Sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge.

(i) (a_n) ist konvergent

(ii) (a_n) ist beschränkt und besitzt genau einen Häufungswert.

$\boxed{\mathbf{18}}$ Zeigen Sie: (i) $\Rightarrow$ (ii).

$\boxed{\mathbf{19}}$ Zeigen Sie: (ii) $\Rightarrow$ (i).

$\boxed{\mathbf{20}}$ Sei $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und für $n = 2, 3, \ldots$ sei a_n durch die Rekursion

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

definiert. Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist, indem Sie zum Beispiel zunächst induktiv die Formel $a_{n+1} - a_n = (-1)^n/2^n$ ($n \in \mathbb{N}$) nachweisen. Letzteres erlaubt auch die explizite Bestimmung des Grenzwertes. Was ist sein Wert?

$\boxed{\textbf{21}}$ Es sei (a_n) eine Folge mit der Eigenschaft, dass für ein (festes) $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ gilt:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot |a_n - a_{n-1}| \qquad (n \geq 1).$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Konvergenzprinzipes von Cauchy, dass (a_n) konvergent ist.

Zusatzfrage: Lässt sich die Konvergenz auch beweisen, wenn $|a_{n+1} - a_n| < |a_n - a_{n-1}|$ gilt?

$\boxed{\textbf{22}}$ Übertragen Sie die Überlegungen aus der VO in 3.12, Beisp. 2) und Theorem, auf den folgenden Fall: sei $a > 0$, $x_0 > 0$

(a) zeigen Sie, dass durch die Rekursionsgleichung

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

eine reelle Folge (x_n) definiert wird, für die $x_n^2 \geq a$ $(n \geq 1)$ gilt. Insbesondere ist (x_n) nach unten beschränkt.

(b) zeigen Sie, dass (x_n) ab $n \geq 1$ monoton fallend ist;

(c) schließen Sie, dass (x_n) gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

$\boxed{\textbf{23}}$ Zeigen Sie: eine nach oben beschränkte monoton wachsende Folge (a_n) konvergiert gegen das Supremum der Menge $A := \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$.

$\boxed{\textbf{24}}$ Bestimmen Sie jeweils alle Berührpunkte und Häufungspunkte der angegebenen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

(a) $A := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ (b) $B := \Big([1, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, 2[\Big) \cap \mathbb{Q}$

(c) C eine beliebige endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$

$\boxed{\textbf{25}}$ Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: a ist Häufungspunkt von A genau dann, wenn a Berührpunkt von $A \setminus \{a\}$ ist.

Zu §4: Konvergenzkriterien für Reihen

$\boxed{\textbf{26}}$ Untersuchen Sie jeweils, ob $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert für

(a) $c_n = \dfrac{(-1)^n\, n}{(n+1)(n+2)}$ (b) $c_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

(c) Wie sieht es mit absoluter Konvergenz aus?

Aufgaben 27-28: Welche der folgenden Reihen sind absolut konvergent?

27 (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

28 (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$

29 Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{2^n}$?

⋆ **Zusatzaufgabe** *(freiwillig)* Zeigen Sie: die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \Big)$$

ist alternierend und die Reihenglieder bilden eine Nullfolge. Ist sie divergent? Setzen Sie Ihr Ergebnis in Beziehung zum Leibniz-Kriterium.

II. STETIGE FUNKTIONEN EINER VARIABLE

Zu §5: Stetigkeit

30 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wie sehen die Graphen der folgenden Funktionen im Vergleich zu jenem von f aus? Veranschaulichen Sie Ihre Aussagen in Skizzen.

(a) $\check{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(-x)$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(2x)$ (allgemeiner: $x \mapsto f(\lambda x)$ mit $\lambda > 0$)

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x-1)$ (allgemeiner: $x \mapsto f(x-a)$ mit $a \in \mathbb{R}$)

31 An welchen Stellen sind die gegebenen Funktionen stetig?

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{1}{x}$

(b) $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{sgn}(x) := \dfrac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$ und $\operatorname{sgn}(0) := 0$ (Signum-Funktion).

32 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 3x^2 + 2x & \text{für } x \leq 1 \\ 8x - 3 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Ist f stetig auf $\mathbb{R}$?

$\boxed{\mathbf{33}}$ Die Funktionen $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Cosinus Hyperbolicus) und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Sinus Hyperbolicus) sind definiert durch

$$\cosh(x) := \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \qquad \text{und} \qquad \sinh(x) := \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}.$$

Wiederholen Sie, warum die Funktionen cosh und sinh stetig auf $\mathbb{R}$ sind. Zeigen Sie die Formel

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{(daher also 'Hyperbelfunktionen')}$$

und eines der beiden (sogenannten) Additionstheoreme (für $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig)

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\ \sinh(x+y) &= \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y). \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{34}}$ Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren und, wenn ja, berechnen Sie diese:

(a) $\displaystyle\lim_{x \searrow 1} \frac{1+x}{1-x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 5x^2 - 1}{1 - x^3}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{x^2 - 131x - 97}{(x+17)(x+1)}\right)$.

$\boxed{\mathbf{35}}$ Es sei $\xi \in]a,b[$, $f :]a,b[\setminus \{\xi\} \to \mathbb{R}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x \searrow \xi} f(x) = \gamma = \lim_{x \nearrow \xi} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to \xi} f(x) = \gamma$$

(insbesondere existiert der Limes).

$\boxed{\mathbf{36}}$ Gegeben sei die stetige Funktion $f : [-1,1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$. Begründen Sie, warum f nicht *als stetige Funktion auf ganz* $[-1,1]$ *fortgesetzt* werden kann, d.h. es gibt keine stetige Funktion $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \neq 0$.

$\boxed{\mathbf{37}}$ Zeigen Sie direkt mittels Rückgriff auf die Definition, dass die Funktion $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x^2$, stetig ist.
Ist die Funktion f gleichmäßig stetig auf $]0,\infty[$?
Ist die Einschränkung von f auf $[1,\infty[$ gleichmäßig stetig?

⋆ **Zusatzaufgabe** *(freiwillig)* Finden Sie ein Beispiel einer Funktion $f : [0,1[\to \mathbb{R}$, die stetig und beschränkt, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

$\boxed{\mathbf{38}}$ Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$.

(a) Hat f eine Nullstelle in $]0,1[$?

(b) Gibt es eine stetige Umkehrfunktion zu f?

$\boxed{\mathbf{39}}$ Es sei $D := [-2,-1[\cup [1,2]$ und $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{für } -2 \le x < -1 \\ x-1 & \text{für } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f als Abbildung $D \to [-1,1]$ stetig, streng monoton wachsend und bijektiv ist. Ermitteln Sie die Umkehrfunktion $g : [-1,1] \to D$ explizit (Skizze!) und begründen Sie, warum g im Punkt 0 nicht stetig ist.

Zu §6: Elementar-transzendente Funktionen

$\boxed{\textbf{40}}$ Es sei $a > 1$ und $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ gegeben durch $x \mapsto a^x$ (wobei $\mathbb{R}^+ :=]0, \infty[$). Zeigen Sie:

(a) f_a ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv

(b) die Umkehrfunktion ${}^a\log := f_a^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend

(c) $\forall x \in \mathbb{R}^+$: ${}^a\log(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(a)}$.

$\boxed{\textbf{41}}$ Zeigen Sie: $\log(1 + x) = x + o(|x|)$ $(x \to 0)$.

$\boxed{\textbf{42}}$ Sind die folgenden Reihen konvergent in $\mathbb{C}$?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n} + \frac{i}{n})$ (b) $z \in \mathbb{C}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (Hinweis: Fallunterscheidung für $|z|$)

$\boxed{\textbf{43}}$ Es sei $\alpha \in] - \pi, \pi[$. Zeigen Sie:

(i) für $\alpha \neq 0$ gilt $\dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

(ii) die Abbildung $\alpha \mapsto t := \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \tan\dfrac{\alpha}{2}$ ist bijektiv $] - \pi, \pi[\to \mathbb{R}$

(iii) es gelten die Formeln $\cos\alpha = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\sin\alpha = \dfrac{2t}{1 + t^2}$

Bemerkung: somit erhalten wir $\{(\cos\alpha, \sin\alpha) : -\pi < \alpha < \pi\} = \{\frac{(1-t^2,2t)}{1+t^2} : t \in \mathbb{R}\}$, was einer Parametrisierung des Einheitskreises (im $\mathbb{R}^2$) durch rationale Funktionen entspricht; Sie werden diese Formeln vor allem in der klassischen Trickkiste für Techniken der Integration finden.

$\boxed{\textbf{44}}$ Beweisen Sie aus den Additionstheoremen mit Hilfe der Definition von π, dass $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion ist, d.h. $\forall x \in \mathbb{R}$: $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

$\boxed{\textbf{45}}$ Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

Zeigen Sie, dass f stetig (auf $\mathbb{R}$) ist.
Können Sie - kann irgend jemand - den Graphen der Funktion f „ganz durchzeichnen“?

III. DIFFERENTIATION

Zu §7: Differenzierbarkeit und Ableitung

Aufgaben 46-47: Untersuchen Sie folgende Funktionen jeweils hinsichtlich Differenzierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung:

46 (a) $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allerdings direkt durch Rückgriff auf die Definition der Differenzierbarkeit reeller Funktionen

(b) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \cdot \log(x) - x$

(c) $h :]0,1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x} \cdot \arcsin(\sqrt{x})$

47 (a) $r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$

(b) $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$

(c) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{1/3}$ (also die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^3$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

48 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$
Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig?

Zu §8: Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

49 Zeigen Sie, dass die Funktion f aus Aufgabe 32 differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Bestimmen Sie die lokalen Extrema und untersuchen Sie die Monotonieeigenschaften. Gibt es ein globales Minimum bzw. Maximum? Ist f zweimal differenzierbar auf $\mathbb{R}$?

50 Sei $a \geq 0$ und $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Polynomfunktion $p(x) = x^4 - 4ax^3$. Untersuchen Sie p bezüglich Monotonie und Extrema in Abhängigkeit vom Parameter a.

51 Untersuchen Sie die Funktion $f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\log(x)}{x}$ hinsichtlich Extrema und geben Sie maximale Intervalle an, in denen f konvex bzw. konkav ist.

52 Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ $\quad (a, b > 0)$ $\qquad$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.