Übungen zu
"Lineare Algebra und Geometrie 1"

Hermann Schichl
Andreas Čap

Sommersemester 2018

Wiederholung grundlegender Begriffe

(1) Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die gegeben ist durch
$$f(x, y, z) = (3x - 2y + z, y - z, 6x - y - z).$$

(2) Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 &= 3 \\ +x_2 - 2x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

(3) Für welche Werte $a, b, c \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

(4) Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_7$:
$$\begin{aligned} \bar{3}x + \bar{2}y + z &= \bar{4} \\ x + \bar{3}y - z &= \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}z &= \bar{5} \end{aligned}$$

(5) Sei $\mathbb{R}_2[x]$ der Raum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Man schreibe für $p \in \mathbb{R}_2[x]$ die zugehörige Polynomfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als $t \mapsto p(t)$.
Zeigen Sie, dass $\{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(-1) = p(1)\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ ein Teilraum ist und finden Sie einen komplementären Teilraum von $\mathbb{R}_2[x]$.

(6) Bestimmen Sie den Rang der Matrix $A \in M_4(\mathbb{R})$, die gegeben ist durch
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(7) Sei $\mathbb{R}_2[x]$ der Raum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Man schreibe für $p \in \mathbb{R}_2[x]$ die zugehörige Polynomfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als $t \mapsto p(t)$ und betrachte die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch $\varphi(p) := \int_0^1 p(t)dt$. Zeigen Sie, dass φ eine lineare Abbildung ist.
Anleitung: Berechnen Sie $\varphi(p)$ explizit als Funktion der Koeffizienten von p.

(8) Erweiteren Sie die Vektoren $v = (0, -2, 3, 1)$ und $w = (1, 0, 0, -1)$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

(9) Sei $g \subset \mathbb{R}^3$ die affine Gerade durch den Punkt $(1, 2, 3)$ in Richtung des Vektors $(1, 1, 1)$. Bestimmen Sie die lineare Hülle $\langle g \rangle$ von g und geben Sie eine Basis für diesen Teilraum an.

(10) Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$–Vektorraum, $W \subset V$ ein Teilraum und $v_0 \in V$ ein Vektor mit $v_0 \notin W$. Zeigen Sie, dass es eine linear Abbildung $f : V \to \mathbb{K}$ gibt, sodass $W \subset \ker(f)$ und $f(v_0) = 1$ gilt.

Anleitung: Zeigen Sie, dass die Vereinigung einer Basis von W mit $\{v_0\}$ linear unabhängig ist, erweitern Sie zu einer Basis für V und definieren Sie f auf dieser Basis.

(11) Berechnen Sie für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ die beiden Matrizen $[\mathrm{id}]^{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}$ und $[\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{S}}$ zu den Basiswechseln zwischen der Standardbasis $\mathcal{S}$ und der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(12) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} := \{x^2 - 1, x^2 - 3x + 2, x^2 - x - 2\}$ eine Basis von $\mathbb{R}_2[x]$ ist und bestimmen Sie die Koordinatenvektoren der Polynome 1, x und x^2 bezüglich dieser Basis.

Berechnen Sie die Matrixdarstellung $[D]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ des Ableitungsoperators $D : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, der gegeben ist durch $D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$, bezüglich $\mathcal{B}$.

(13) Seien U, V und W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ und seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen.

Zeigen Sie, dass für die Ränge die Abschätzung $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}$ gilt. Zeigen Sie durch Beispiele, dass Gleichheit gelten kann aber nicht gelten muss.

(14) Für eine Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $k \leq m$ und $\ell \leq n$ definiert man eine $k \times \ell$–*Teilmatrix* von A als eine Matrix, die entsteht, wenn man in A $(m - k)$ Zeilen und $(n - \ell)$ Spalten "weglässt".

Versuchen Sie, eine präzise Definition des Begriffs der Teilmatrix zu geben und zeigen Sie mit Hilfe des vorigen Beispiels, dass für eine Teilmatrix B von A immer $\mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(A)$ gelten muss.

Sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ eine Matrix. Zeigen Sie, dass A genau dann Rang r hat, wenn es eine $r \times r$–Teilmatrix von A gibt, die invertierbar ist, aber keine $(r + 1) \times (r + 1)$–Teilmatrix diese Eigenschaft hat.

Anleitung: Hat A Rang r, dann zeigen Sie zunächst, dass es r linear unabhängige Zeilen in A gibt, dann betrachten Sie die von diesen Zeilen gebildete $r \times n$–Teilmatrix.

(15) Bestimmen Sie die Dimension des Teilraumes von $\mathbb{R}^5$, der von den Vektoren $(1, -1, 2, 0, 0)$, $(0, 1, 2, 0, 1)$, $(1, 2, 0, 1, 0)$ und $(0, -1, 6, -1, 2)$ erzeugt wird.

Anleitung: Führen Sie das Problem auf die Bestimmung des Ranges einer Matrix zurück.

(16) Für die Matrizen $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ berechnen Sie $(E + F)^2$ und $E^2 + 2EF + F^2$.

(17) Definieren Sie den *Kommutator* $[A, B]$ von zwei Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ durch $[A, B] = AB - BA$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ genau dann gilt, wenn $[A, B] = 0$ ist. Beweisen Sie weiters, dass für $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$ die *Jacobi–Identität* $[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]$ gilt.

Kapitel 5: Quotientenräume und Dualräume

(18) Betrachten Sie den Teilraum von $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Konstruieren Sie explizit einen linearen Isomorphismus zwischen dem Quotientenraum $\mathbb{R}^3/W$ und dem Teilraum $\{(t, t, t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

(19) Seien U und V zwei $\mathbb{K}$–Vektorräume und $W \subset V$ ein Teilraum. Zeigen Sie, dass man den Raum $L(U, W)$ von linearen Abbildungen als Teilraum von $L(U, V)$ betrachten kann und dass der Quotient $L(U, V)/L(U, W)$ isomorph zu $L(U, V/W)$ ist.

Anleitung: Der Isomorphismus kann durch die Abbildung $\pi_*(f) := \pi \circ f$ realisiert werden, wobei $\pi : V \to V/W$ die natürliche Quotientenabbildung ist.

(20) Seien V und Z zwei $\mathbb{K}$–Vektorräume und $W \subset V$ ein Teilraum. Zeigen Sie, dass man den Raum $L(V/W, Z)$ von linearen Abbildungen mit dem Teilraum

$$\{\varphi \in L(V, Z) : \forall w \in W : \varphi(w) = 0\} \subset L(V, Z)$$

identifizieren kann.

Anleitung: Der Isomorphismus kann durch die Abbildung $\pi^*(f) := f \circ \pi$ realisiert werden, wobei $\pi : V \to V/W$ die natürliche Quotientenabbildung ist.

(21) Zeigen Sie, dass es reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für jedes Polynom $p \in \mathbb{R}_2[x]$ die zugehörige Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gleichung

$$p(5) = a(p(-1)) + b(p(0)) + c(p(1))$$

erfüllt. Bestimmen Sie diese Zahlen explizit.

(22) Betrachten Sie den Raum $\mathbb{R}_n[x]$ von Polynomen mit reellen Koeffizienten, und schreiben Sie die Polynomfunktion zu $p \in \mathbb{R}_n[x]$ als $t \mapsto p(t)$.

Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\mathrm{ev}_t(p) := p(t)$ ein Element des Dualraumes $(\mathbb{R}_n[x])^*$ definiert. Zeigen Sie weiters, dass für $n + 1$ paarweise verschiedene Punkte $t_0, \dots, t_n$ die Menge $\{\mathrm{ev}_{t_0}, \dots, \mathrm{ev}_{t_n}\}$ eine Basis für $(\mathbb{R}_n[x])^*$ bildet. Interpretieren Sie das vorige Beispiel in Anbetracht dieses Resultats.

(23) Zum Ableitungsoperator $D : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ aus Beispiel (13) sei D^* die duale Abbildung. Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen von D^* bezüglich der dualen Basis $\mathcal{B}^*$ zu $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$.

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der Abbildung D^* bezüglich der Basis $\mathcal{C} = \{\mathrm{ev}_{-1}, \mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1\}$.

(24) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $p : V \to V$ eine Projektion, d.h. es gelte $p^2 = p$. Zeigen Sie, dass es einen Teilraum W von V gibt, sodass $p|_W = id_W$ gilt, und ein Komplement W' zu W mit $W' \subseteq \mathrm{Ker}(p)$. Zeigen Sie, dass es eine Projektion $q : V \to V$ gibt, für die W und W' ihre Rollen tauschen.

Bestimmen Sie p^* und q^*.

(25) Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $f^* : W^* \to V^*$ die duale Abbildung. Untersuchen, Sie die Eigenschaften von f^* in den Fällen, dass f injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.
(26) Sei $A = \{(1,2,4),\ (2,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie A° und $(A^\circ)^\circ$.
(27) Sei $B = \{X + X^2, X - X^2\} \subseteq \mathbb{R}_3[X]$. Bestimmen Sie B°.

Kapitel 6: Determinanten

(28) Zeigen Sie durch direktes Nachrechnen, dass $\det : M_2(R) \to R$ bilinear ist.
(29) Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Beweisen Sie durch Nachrechnen, dass für $A, B \in M_2(R)$ gilt:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

(30) Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Berechnen Sie für beliebiges $r \in R$ und $A \in M_n(R)$ die Determinante $\det(rA)$.
(31) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit Hilfe der Cramerschen Regel

$$\begin{aligned} 5x + y - z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ y - z &= 1 \end{aligned}$$

(32) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_5$ mit Hilfe der Cramerschen Regel

$$\begin{aligned} 2x - \ \ y + \ \ z &= 1 \\ x + 3y - 2z &= 0 \\ 4x - 3y + \ \ z &= 2 \end{aligned}$$

(33) Sei $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ eine *untere Dreiecksmatrix*, d.h. $a_{ij} = 0$ für $j > i$. Benutzen Sie die Definition von det aus Satz 6.4 der Vorlesung und Induktion nach n, um zu beweisen, dass $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$ gilt.
(34) Betrachten Sie für $n \geq 2$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ die Matrix $A_\lambda = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, die gegeben ist durch $a_{ii} = 1$ für $i = 1, \dots, n$, $a_{i+1,i} = \lambda$ für $i = 1, \dots, n-1$, $a_{1n} = \lambda$ und alle anderen Eintragungen gleich Null. Zeigen Sie, dass $\det(A_\lambda) = 1 + (-1)^{n-1}\lambda^n$ gilt.
(35) Eine Matrix $M = (m_{ij}) \in M_n(R)$ heißt *Block–untere Dreiecksmatrix* der Größe k, falls $m_{ij} = 0$ gilt, wann immer $i \leq k$ und $j > k$ gilt. Das bedeutet gerade, dass man M in Blockform als $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ für $A \in M_k(R)$, $C \in M_{n-k}(R)$ und $B \in M_{n-k,k}(R)$. Benutze die Definition von det aus Satz 6.4 der Vorlesung und Induktion nach k um zu beweisen, dass $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$ gilt.
(36) Erstellen Sie eine Liste aller Permutationen in $\mathfrak{S}_3$, stellen Sie jede dieser Permutationen als ein Produkt von höchstens drei Transpositionen dar und bestimmen Sie ihr Signum.

(37) Sei $k < n \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ eine Permutation, sodass $\sigma(j) \leq k$ für alle $j \leq k$ gilt. Zeigen Sie, dass es eindeutige Permutationen $\sigma' \in \mathfrak{S}_k$ und $\sigma'' \in \mathfrak{S}_{n-k}$ gibt, sodass $\sigma(j) = \sigma'(j)$ für $j \leq k$ und $\sigma(j) = \sigma''(j-k) + k$ für alle $j > k$ gilt. Zeigen Sie weiters, dass $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma')\operatorname{sgn}(\sigma'')$ gilt.

(38) Betrachten Sie für Matrizen $A \in M_k(R)$ und $B \in M_\ell(R)$ die $(k+\ell) \times (k+\ell)$–Matrix $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ (“Blockdiagonalmatrix”). Benutzen Sie das vorige Beispiel und die Leibnizformel für die Determinante, um zu zeigen, dass die Determinante dieser Matrix $\det(A)\det(B)$ ist. Verallgemeineren Sie das auf endlich viele Blöcke.

(39) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen durch Entwickeln nach Zeilen oder Spalten:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(40) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Z}_7$.

(41) Seien $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$, und sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ die *Vandermonde-Matrix* mit Einträgen

$$A_{ij} := b_j^i.$$

Berechnen Sie die $\det A$.

(42) Berechnen Sie mit Hilfe von Determinanten die Inverse der komplexen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ -1 & 2 & i \\ 0 & 1 & 1+i \end{pmatrix}$$

(43) Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

(44) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ bcd & acd & abd & abc \end{pmatrix}$$

(45) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix mit ganzzahligen Eintragungen. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ mit ganzzahligen Eintragungen sind alle Komponenten der eindeutigen Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ganzzahlig.

(b) Alle Eintragungen der inversen Matrix A^{-1} sind ganzzahlig.
(c) $\det(A) = \pm 1$.

Kapitel 7: Eigenwerte und charakteristisches Polynom

(46) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

(47) Bestimmen Sie für $\theta \in [0, 2\pi)$ das charakteristische Polynom der Matrix

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

und bestimmen Sie damit die Eigenwerte von A_θ. Interpretieren Sie die lineare Abbildung $x \mapsto A_\theta x$ geometrisch.

(48) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 8 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(49) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $B \in M_3(\mathbb{Z}_7)$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(50) Zeige Sie, dass es über $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ unendlich viele Polynome gibt, die keine Nullstelle in $\mathbb{K}$ haben.

(51) Finden Sie für $\varphi \in [0, 2\pi)$ eine Basis von $\mathbb{C}^2$, die aus Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

besteht.

(52) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und finden Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von A besteht.

(53) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und finden Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von A besteht.

(54) Sei $V := C([0,1], \mathbb{R})$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Funktion $I : V \to V$, die gegeben ist durch $I(f)(x) = \int_0^x f(s)ds$, ist linear und besitzt keinen Eigenwert.

Anleitung: Wäre f ein Eigenvektor, dann wäre $f(0) = 0$. Andererseits folgt aus $I(f) = \lambda f$ das f differenzierbar ist und eine bestimmte Differentialgleichung erfüllt

(55) Zeigen Sie: Für $a, b \in \mathbb{R}$ sind die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ die komplexen Zahlen $a \pm ib$.

(56) Zeige Sie: Ist $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisierbar und sind alle Eigenwerte von $A \geq 0$, dann gibt es eine Matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$, sodaß $B^2 = BB = A$ gilt.
Anleitung: diagonalisieren Sie A, wählen Sie eine Wurzel davon, und bilden Sie daraus eine Wurzel von A.

(57) Zeigen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, dass es keine Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ gibt, die $AB - BA = \mathbb{I}$ erfüllen.
Anleitung: Verwenden Sie die Spur.

(58) Zeigen Sie, dass es keine Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$ gibt, die $A^2 = -\mathbb{I}$ erfüllt. Finden Sie eine Matrix $B \in M_2(\mathbb{R})$ mit $B^2 = -\mathbb{I}$.
Anleitung: Benutzen Sie, dass A mindestens einen reellen Eigenwert haben muss, weil das charaktieristische Polynom p_A Grad 3 hat.

(59) Zeigen Sie, dass es keine Matrix $B \in M_2(\mathbb{R})$ gibt, die $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ erfüllt.
Anleitung: Zeigen Sie zuerst, dass die Abbildung $f(x) := Bx$ nichttrivialen Kern hat. Erweitern Sie eine Basis von $\mathrm{Ker}(f)$ zu einer Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$. Überlegen Sie danach, dass $[f]_{\mathcal{B}}^4 = 0$ gilt, und folgern Sie daraus $[f]_{\mathcal{B}}^2 = 0$ und daraus $B^2 = 0$.

(60) Zeigen Sie: Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

(61) Zeigen Sie: Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ ist diagonalisierbar.

(62) Sei $A \in M_3(\mathbb{R})$ die Matrix aus dem letzten Beispiel. Finden Sie eine invertierbare Matrix $T \in M_3(\mathbb{R})$, sodass TAT^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

(63) Zeigen Sie: Die Matrix $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ ist nicht diagonalisierbar.

(64) Finden Sie Bedingungen an $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ die äquivalent zur Diagonalisierbarkeit von $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (i) über $\mathbb{R}$ und (ii) über $\mathbb{C}$ sind.

(65) Zeigen Sie: Um Nullstellen von Polynomen dritter Ordnung über $\mathbb{C}$ zu bestimmen, genügt es, Polynome der Form $x^3 + px + q$ zu betrachten.
Anleitung: Normieren Sie erst den führenden Koeffizienten, dann eliminieren Sie den quadratischen Term durch eine geeignete Substitution der Form $t = x - a$.

(66) Benutzen Sie die Idee von Beispiel 65, um die Lösungsformeln für quadratische Gleichungen herzuleiten.

(67) Zeigen Sie, wie man eine Lösung der kubischen Gleichung $\lambda^3 + p\lambda + q = 0$ über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ finden kann.
Anleitung: Substituieren Sie $\lambda = w - \frac{p}{3w}$. Multiplizieren Sie die entstehende Gleichung mit w^3, und lösen Sie die daraus erhaltene quadratische Gleichung für w^3. Dann muss man nur noch die dritte Wurzel ziehen und einsetzen.

(68) Sei $p \in \mathbb{R}_2[x]$ ein Polynom vom Grad ≤ 2. Zeigen Sie, dass es ein eindeutiges Polynom $q \in \mathbb{R}_2[x]$ gibt, sodass $q(\lambda) = p(\lambda + 1)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Wie sieht das über $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ aus?

(69) Zeigen Sie, dass man eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ erhält, indem man $\Phi(p)$ als das eindeutige Polynom q aus dem letzten Beispiel definiert. Berechnen Sie die Eigenwerte von Φ und zeigen Sie, dass Φ nicht diagonalisierbar ist.

(70) Verallgemeinern Sie das letzte Beispiel auf Polynome höheren Grades und auf Verschiebungen um $\mu \in \mathbb{R}$ statt um 1.

(71) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, die 2 als einzigen Eigenwert besitzt, wobei die algebraische Vielfachheit 3 und die geometrische Vielfachheit 2 beträgt. Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ gibt, sodass $[f]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ gilt.

Anleitung: Wählen Sie zunächst eine Basis des Eigenraumes V_2^f und erweitern Sie sie durch einen Vektor v_3 zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$. Benutzen Sie die resultierende Matrixdarstellung und die Information über die Vielfachheiten, um zu zeigen, dass $v_2 := f(v_3) - 2v_3 \in V_2^f \setminus \{0\}$ gilt. Dann wählen Sie $v_1 \in V_2^f$ so, dass $\{v_1, v_2\}$ eine Basis für V_2^f ist und setzen Sie $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Kapitel 8: Normen und innere Produkte

(72) Sei $(V, \| \ \|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$ für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Zeigen Sie, dass die Operatornorm auf $L(V, \mathbb{K})$ eine Norm auf dem Dualraum V^* definiert, die *duale Norm.*

(73) Bestimmen Sie die duale Norm zu $\| \ \|_2$, $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$.

(74) Bestimmen Sie die dualen Normen zu $\| \ \|_p$ für die übrigen $p \geq 1$ auf $\mathbb{R}^n$.

(75) Seien $(V, \| \ \|_V)$ und $(W, \| \ \|_W)$ (endlich dimensionale) normierte Räume. Zeigen Sie, dass die Operatornorm $\| \ \|_{V,W}$ auf $L(V, W)$ eine Norm ist.

(76) Betrachten Sie $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$. Bestimmen Sie die Operatornorm $\| \ \|_1$ auf $M_n(\mathbb{R})$

(77) Betrachten Sie $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$. Bestimmen Sie die Operatornorm $\| \ \|_\infty$ auf $M_n(\mathbb{R})$

(78) Sei $(V, \| \ \|_V)$ ein endlich dimensionaler normierter Vektorraum, und sei W ein Teilraum von V. Zeigen Sie, dass durch

$$\|v + W\| := \inf\{\|w - v\|_V \mid w \in W\}$$

eine Norm auf V/W definiert wird, die *Quotientennorm.*

(79) Sei $\ell^\infty(\mathbb{R})$ die Menge aller beschränkten reellen Folgen. Sei $\|(x_n)_n\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Zeigen Sie, dass $\| \ \|_\infty$ eine Norm ist.

Sei $s : \ell^\infty(\mathbb{R}) \to \ell^\infty(\mathbb{R})$ die Abbildung $(x_n)_n \mapsto (x_{n+1})_n$, also die Abbildung, die die gesamte Folge um ein Folgenglied nach „links“ schiebt. Bestimmen Sie die Operatornorm von s.

(80) Sei $c(\mathbb{R})$ die Menge aller konvergenten reellen Folgen. Zeigen Sie, dass $c(\mathbb{R}) \subseteq \ell^\infty(\mathbb{R})$ ein normierter Teilraum von $\ell^\infty(\mathbb{R})$ ist. Bestimmen Sie die Operatornorm von $\lim : c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $(x_n)_n \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$.

(81) Sei $V := C([0,1],\mathbb{R})$ die Menge der stetigen Funktionen auf $[0,1]$. Zeigen Sie, dass
$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 f(x)^2\,dx}$$
eine Norm auf V definiert. Ist V bezüglich dieser Norm vollständig?

(82) Zeigen Sie, dass $\langle A,B\rangle := \mathrm{tr}(AB^t)$, wobei tr die Spur bezeichnet, ein positive definites inneres Produkt auf dem Raum $M_n(\mathbb{R})$ der reellen $n\times n$–Matrizen definiert.

(83) Berechnen Sie für die Vektoren $v = (2,-1,5)$ und $w = (3,1,-3)$ in $\mathbb{R}^3$ die Ausdrücke $\|v\|$, $\|w\|$, $\langle v,w\rangle$, $\|v+w\|$ und $\|v-w\|$.

(84) Interpretieren Sie die Parallelogrammidentität $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$ geometrisch, und bringen Sie sie mit dem Satz von Pythagoras in Verbindung.

(85) Zeigen Sie, dass für $A \in M_n(\mathbb{R})$ der Ausdruck
$$b(x,y) := x^T Ay$$
eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Wann ist diese Bilinearform symmetrisch?

(86) Zeigen Sie, dass für $V = C([0,1],\mathbb{R})$ der Ausdruck
$$\langle f,g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$
ein inneres Produkt auf V definiert.

(87) Zeigen Sie, dass für $V = C([0,1],\mathbb{C})$ und eine beliebige Funktion $\omega \in C([0,1],\mathbb{R})$ mit $\omega(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$ der Ausdruck
$$\langle f,g\rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\omega(x)\,dx$$
ein inneres Produkt auf V definiert.

(88) Zeigen Sie direkt, dass für das Standard innere Produkt auf $\mathbb{R}^n$ und eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ die Gleichung $\langle Ax,y\rangle = \langle x,A^t y\rangle$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(89) Benutzen Sie das vorige Beispiel, um folgendes Resultat zu beweisen: Ist $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch, d.h. $A^t = A$, und sind v und w Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten, dann ist $\langle v,w\rangle = 0$.

(90) Sei $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $\mathcal{B} = \{v_1,\dots,v_n\}$ eine Orthonormalbasis für V. Zeige: Ist $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, dann ist die Matrixdarstellung $[f]_{\mathcal{B}} = (a_{ij})$ gegeben durch $a_{ij} = \langle f(v_i),v_j\rangle$.

(91) Finden Sie eine Orthonormalbasis für den Teilraum von $\mathbb{R}^4$, der von den Vektoren $(1,1,-1,1)$ und $(0,1,2,2)$ erzeugt wird.

(92) Finden Sie eine Orthonormalbasis für den Teilraum von $\mathbb{C}^3$, der von den Vektoren $(1,i,0)$ und $(1,1,1)$ erzeugt wird.

(93) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für den Teilraum $\mathbb{R}_4[x]$ von $C([0,1],\mathbb{R})$ (d.h. dass die Polynome in diesem Fall als stetige reelle Funktionen interpretiert werden sollen) bezüglich des inneren Produkts, das in Beispiel 86 definiert wurde.

(94) Sei $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $W \subset V$ ein Teilraum und seien $p,q \in V$ Punkte. Zeigen Sie: Im affinen Teilraum $p + W = \{p + w : w \in W\}$ gibt es einen eindeutigen Punkt x_0, der minimalen Abstand von q besitzt. Zeigen Sie weiters, dass x_0 durch $(x_0 - q) \perp W$ charakterisiert ist.

Anleitung: Benutzen Sie $V = W \oplus W^\perp$, um die Existenz eines eindeutigen Punktes x_0 mit $(x_0 - q) \perp W$ zu zeigen. Berechnen Sie dann für $x \in p + W$ mit Hilfe des Satzes von Pythagoras $\|x - q\|$.

(95) Zeigen Sie durch explizites Nachrechneh: Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ immer diagonalisierbar.

(96) Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $W \subset V$ ein Teilraum und $\pi : V \to W$ die Orthogonalprojektion auf W. Zeigen Sie: Ist $\{w_1, \dots, w_k\}$ eine Orthonormalbasis für W, dann ist $\pi(v) = \sum_{i=1}^k \langle v, w_i \rangle w_i$.

(97) Betrachten Sie die Ebene E in $\mathbb{R}^3$, die von den Vektoren $(1, 2, 2)$ und $(-1, 1, 0)$ erzeugt wird. Finden Sie die Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$, sodass $x \mapsto Ax$ die Orthogonalprojektion auf E ist. Verfizieren Sie, dass $AA = A^t = A$ gilt.
Anleitung: Benutzen Sie die Formel für die Orthogonalprojektion aus dem letzten Beispiel.

(98) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine Matrix. Zeigen Sie, dass $b(x, y) := \langle Ax, y \rangle$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ definiert, die genau dann symmetrisch ist, wenn A symmetrisch ist, also $A^t = A$ erfüllt.

(99) Nehmen Sie in der Situation des letzten Beispiels an, dass $n = 2$ gilt und A symmetrisch ist. Zeigen Sie, dass die Bilinearform $b(x, y) := \langle Ax, y \rangle$ genau dann positiv definit ist, wenn die beiden Eigenwerte von A (vergleichen Sie mit Beispiel 95) positiv sind.

(100) Zeigen Sie in der Situation des letzten Beispiels, dass die Bilinearform b zur Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ genau dann positiv definit ist, wenn $a > 0$ und $\det(A) > 0$ gilt.

(101) Finden Sie für $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ einen Vektor $n \in \mathbb{R}^2$ und eine Zahl $d \in \mathbb{R}$, sodass $\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle n, x \rangle = d\}$ die affine Gerade durch die Punkte $(a, 0)$ und $(0, b)$ ist.

(102) Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig und $p \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt. Zeigen Sie, dass der Normalabstand von p von der von v und w erzeugten Ebene durch $\frac{\langle p, v \times w \rangle}{\langle v \times w, v \times w \rangle}$ gegeben ist.

(103) Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass $\{v, v \times w, v \times (v \times w)\}$ eine Orthogonalbasis für $\mathbb{R}^3$ ist.

(104) Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und seien $v_0, w_0 \in V$ beliebig. Bestimmen Sie für die lineare Abbildung $f(v) := \langle v, v_0 \rangle w_0$ die adjungierte Abbildung f^*.

(105) Schreiben Sie die Drehung um einen Winkel φ in $\mathbb{R}^2$ explizit als Produkt von 2 Spiegelungen.

(106) Betrachten Sie den euklidischen Vektorraum $V := \mathbb{R}^n$ (mit dem Standard inneren Produkt), den k–dimensionalen Teilraum $\mathbb{R}^k \subset V$ sowie einen beliebigen weiteren Teilraum $W \subset V$ mit $\dim(W) = k$. Zeigen Sie, dass es eine orthogonale lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt, die $f(\mathbb{R}^k) = W$ erfüllt.
Anleitung: Wählen Sie eine Orthonormalbasis für W und ergänzen Sie sie zu einer Orthonormalbasis für V. Benutzen Sie diese Basis, um eine geeignete orthogonale Matrix zu konstruieren.

(107) Beschreiben Sie die Abbildung

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

geometrisch.

(108) Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum, $W \subset V$ ein Teilraum. Definieren Sie die Spiegelung $\sigma_W : V \to V$ an W durch $\sigma_W(v) = v_1 - v_2$, wobei $v = v_1 + v_2$ die eindeutige Darstellung mit $v_1 \in W$ und $v_2 \in W^\perp$ ist. Zeigen Sie, daß σ_W eine orthgonale Abbildung ist, und das $\det(\sigma_W) = (-1)^{\dim(W^\perp)}$ ist. Was sind $\sigma_{\{0\}}$ und σ_V?

(109) Zeigen Sie: Sind V und W wie im letzten Beispiel und ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine Orthonormalbasis für $W^\perp$, dann ist $\sigma_W(v) = v - 2\sum_{i=1}^k \langle v, v_i\rangle v_i$.

(110) Betrachten Sie die Vektoren $v = (-1, 2, 1)$ und $w = (0, 2, -1)$ in $\mathbb{R}^3$. Finden Sie eine orthogonale Abbildung, die v und w in die x–y–Ebene abbildet.
Anleitung: Berechnen Sie $v \times w$ und finden Sie eine Spiegelung (an einer Ebene), die diesen Vektor auf $(0, 0, \|v \times w\|)$ abbildet.