DIFFERENTIALGEOMETRIE 2 — WS 08/09

1. MANNIGFALTIGKEITEN UND TENSOREN

In diesem Kapitel wollen wir einige Begriffe aus der Analysis auf MFen und der Tensoralgebra bereitstellen, die im ersten Teil der VO noch nicht vorgekommen sind, für das Folgende aber von Bedeutung sein werden.

1.1 TEILMANNIGFALTIGKEITEN

In [DG1] (= 1. Teil der VO), 2.1 haben wir Teil-MF des $\mathbb{R}^n$ besprochen:

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Teil-MF der Dimension k, falls $\forall p \in M$ $\exists W$ offene Umg. von p in $\mathbb{R}^n$ $\exists U$ offen in $\mathbb{R}^k$ $\exists \varphi : U \to \mathbb{R}^n$ Immersion, sd. $\varphi : U \to \varphi(U)$ ein Homöomorphismus ist und $\varphi(U) = M \cap W$ (φ ... lokale Parametrisierung von M um p).

Nach [DG1], 2.2.8 ist ein solches M eine abstrakte MF, deren natürliche MF-Topologie gerade die Spurtop. des $\mathbb{R}^n$ auf M ist.

Wir wollen nun auch für abstrakte MFen den Begriff der Teil-MF einführen. Dazu benötigen wir zunächst einige Resultate über glatte Abb.en zwischen MFen.

1.1.1 DEF: Seien M, N MFen und $f : M \to N$ C^∞. Der Rang $rg_p(f)$ von f bei $p \in M$ ist definiert als Rang der linearen Abb. $T_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$.

Ist $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$ eine Karte von M bei p und $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ eine Karte von N bei $f(p)$, so ist die Matrix von $T_p f$ bezügl. der Basen $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}|_p\}$ von $T_p M$ und $\{\frac{\partial}{\partial y^1}|_{f(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}|_{f(p)}\}$ gerade die Jacobimatrix von $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ bei $\varphi(p)$ (→[DG1], 2.4.

Daher ist $rg_p(f) = rg(D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)))$.

1.1.2 DEF: Sei $f : M \to N$ C^∞. f heißt Immersion (Submersion) falls $\forall p \in M$ gilt: $T_p f$ ist injektiv (surjektiv).

Ist $\dim(M) = m$, $\dim(N) = n$, so ist f also genau dann eine Immersion (Submersion), wenn $\forall p \in M$ gilt: $rg_p(f) = m$ (bzw. $= n$).

Das folgende Resultat zeigt, dass Abb.en mit (lokal) konstantem Rang stets in eine besonders einfache Form gebracht werden können:

1.1.3 THEOREM: (Rangsatz) Seien M^m, N^n MFen, $f: M \to N$ C^∞, $p \in M$ und $rg(f) \equiv k$ in einer Umg. von p. Dann existieren Karten (φ, U) um p in M und (ψ, V) um $f(p)$ in N, s.d. $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$, $\psi(f(p)) = 0 \in \mathbb{R}^n$ und

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

Bew.: Da nach obigem der Rang von f unabhängig von der gewählten Kartendarstellung ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $f: \mathbb{R}^m \underset{\text{offen}}{\supseteq} W \to W' \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ C^∞, $p = 0$, $f(0) = 0$ und $rg(Df) \equiv k$ auf W. Da $rg\, Df(0) = k$, existiert eine invertierbare $k \times k$ Untermatrix von $Df(0)$ und o.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass dies die Matrix $\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_{i,j=1}^k$ ist (sonst: Koordinaten permutieren). Betrachte nun die C^∞-Abb.

$$\varphi: W \to \mathbb{R}^m, \quad \varphi(x^1, \dots, x^m) := (f^1(x^1, \dots, x^m), \dots, f^k(x^1, \dots, x^m), x^{k+1}, \dots, x^m).$$

Dann ist $\varphi(0) = 0$ und

$$D\varphi(0) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0)\right)_{i,j=1}^k & * \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix}$$

ist invertierbar. Nach dem Satz über inverse Funktionen ([DG1], 2.1.1) ist φ daher ein lokaler Diffeomorphismus von $0 \in W_1 \underset{\text{offen}}{\subseteq} W$ auf ein offenes $\underset{0}{\overset{\cup}{U_1}} \subseteq \mathbb{R}^m$. Dann ist

$$f \circ \varphi^{-1}(\underbrace{x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^m}_{=: x}) = (x^1, \dots, x^k, \bar{f}^{k+1}(x), \dots, \bar{f}^n(x)) \text{ auf } U_1.$$

Auf U_1 gilt daher:

$$D(f \circ \varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ * & \left(\frac{\partial \bar{f}^r}{\partial x^s}\right)_{\substack{r=k+1,\dots,n \\ s=k+1,\dots,m}} \end{pmatrix}$$

Da $D(f \circ \varphi^{-1}) = Df \circ D\varphi^{-1}$ und $D\varphi^{-1}$ bij. $\Rightarrow$ $rg\, D(f \circ \varphi^{-1}) = rg(Df) \equiv k$ auf U_1.

$\Rightarrow$ $\frac{\partial \bar{f}^r}{\partial x^s} = 0$ $\forall r = k+1, \dots, n$, $\forall s = k+1, \dots, m$, d.h. $\bar{f}^{k+1}, \dots, \bar{f}^n$ hängt nur von $x^1, \dots, x^k$ ab.

Sei nun

$$T(y^1, \dots, y^k, y^{k+1}, \dots, y^n) := (y^1, \dots, y^k, y^{k+1} + \bar{f}^{k+1}(y^1, \dots, y^k), \dots, y^n + \bar{f}^n(y^1, \dots, y^k)).$$

Dann ist $T(0) = 0$ und

$$DT(y) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ * & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

also ist T ein lokaler Diffeo. eines offenen $0 \in \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ auf ein offenes $0 \in V \subseteq W'$.

Wähle $\tilde{U} \subseteq U_\alpha$ offen, s.d. $f \circ \varphi^{-1}(\tilde{U}) \subseteq V$ und sei $U := \varphi^{-1}(\tilde{U})$. Setze $\psi := T^{-1}$

Dann gilt: $\tilde{U} \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \tilde{V}$

und: $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^m) = \psi(x^1, \dots, x^k, \bar{f}^{k+1}(x^1, \dots, x^k), \dots, \bar{f}^n(x^1, \dots, x^k)) =$

$= (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$ auf $\tilde{U}$. □

Der Rang einer glatten Abbildung kann lokal nicht fallen:

1.1.4 <u>LEMMA</u>: Sei $f: M^m \to N^n$ C^∞, $p \in M$ und $rg_p(f) = k$. Dann existiert eine Umgebung U von p in M, s.d. $rg_q(f) \geq k$ $\forall q \in U$. Ist insbesondere $k = \min(m,n)$, dann ist $rg_q(f) = k$ $\forall q \in U$.

<u>Bew.</u>: $rg_p(f) = k \Leftrightarrow D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ besitzt eine $k \times k$-Untermatrix mit Determinante $\neq 0$ $\underset{\text{det stet}}{\Rightarrow}$ dasselbe gilt auf einer ganzen Umg. von p. Der Rang kann also lokal nicht fallen. Ist $k = \min(m,n)$, so kann er auch nicht steigen, ist also lokal konstant. □

1.1.5 <u>THEOREM</u>: (Satz über inverse Funktionen) Sei $f: M^m \to N^m$ C^∞, $p \in M$ und $T_p f: T_pM \to T_{f(p)}N$ bijektiv. Dann existieren Umgebungen U von p in M und V von $f(p)$ in N, s.d. $f: U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. [U mit Atlas $\{(\varphi_\alpha|_{U \cap U_\alpha}, U \cap U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ wenn $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ Atlas von M ist, analog f. V.

<u>Bew.</u>: Für Karten φ von M um p und ψ von N um $f(p)$ ist $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = T_{f(p)}\psi \circ T_p f \circ T_{\varphi(p)}\varphi^{-1}$ invertierbar $\underset{\text{[DG1], 2.1.1}}{\Rightarrow}$ $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ ist lokaler Diffeo $\Rightarrow$ Bh □

1.1.6 <u>PROP</u>: (Lokale Charakterisierung von Immersionen). Sei $f: M^m \to N^n$ C^∞ und $p \in M$. TFAE:

(i) $T_p f$ ist injektiv

(ii) $rg_p(f) = m$

(iii) Ist $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)$ eine Karte um $f(p)$ in N, so existieren $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$, sodass $(\psi^{i_1} \circ f, \dots, \psi^{i_m} \circ f)$ eine Karte von M auf einer Umg. von p ist.

<u>Bew.</u>: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) ✓

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei φ eine Karte um p in M. Dann ist $rg(D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))) = m$, also existieren $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ mit $\det D((\psi^{i_1}, \dots, \psi^{i_m}) \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))) \neq 0$

$\underset{1.1.5}{\Rightarrow}$ $(\psi^{i_1}, \dots, \psi^{i_m}) \circ f \circ \varphi^{-1}$ ist lokaler Diffeo $\Rightarrow$ $(\psi^{i_1}, \dots, \psi^{i_m}) \circ f$ ist lokaler Diffeo, also Karte von M um p.

(iii) ⇒ (ii)

Es ist $D((\psi^{i_1},\dots,\psi^{i_m})\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))$ bijektiv, also $rg(D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))) = m$. □

1.1.7 PROP: (Lokale Charakterisierung von Submersionen). Sei $f: M^m \to N^n$ C^∞, $p \in M$. TFAE:

(i) $T_p f$ ist surjektiv.

(ii) $rg_p(f) = n$

(iii) Ist ψ eine Karte um $f(p)$ in N, dann existiert eine Karte φ von M um p, s.d. $(\psi^1\circ f,\dots,\psi^n\circ f,\varphi^{n+1},\dots,\varphi^m)$ eine Karte von M um p ist.

Bew.: (i) ⇔ (ii) ✓

(ii) ⇒ (iii) Seien $\tilde\varphi$, ψ Karten um p bzw. $f(p)$. Wegen $rg\, D(\psi\circ f\circ\tilde\varphi^{-1})(\tilde\varphi(p)) = n$ besitzt die Jacobimatrix $D(\psi\circ f\circ\tilde\varphi^{-1})(\tilde\varphi(p))$ n lin. unabh. Spalten. Durch Permutieren der Komponenten von $\tilde\varphi$ erhalten wir eine Karte φ, s.d. die ersten n Spalten von $D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))$ lin. unabh. sind. Sei nun $\chi := (\psi^1\circ f,\dots,\psi^n\circ f,\varphi^{n+1},\dots,\varphi^m)$. Dann ist

$$D(\chi\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial(\psi^i\circ f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j}\right)_{i,j=1}^{n} & * \\ 0 & I_{m-n} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$\underset{1.1.5}{\Rightarrow}$ $\chi\circ\varphi^{-1}$ ist lokaler Diffeo ⇒ χ ist Karte.

(iii) ⇒ (ii) Es ist $rg\, D(\chi\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)) = m \underset{(*)}{\Rightarrow} rg\, D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)) = n$. □

1.1.8 PROP: Seien M^m, N^n, R^r MFen, $f: M\to N$ stetig und $g: N\to R$ eine Immersion. Falls $g\circ f$ glatt ist, dann auch f.

Bew.: Sei $p\in M$ und wähle Karten (φ,U) von N um $f(p)$, (ψ,V) von R um $g(f(p))$, sodass

(→ 1.1.3): $g_{\psi\varphi} := \psi\circ g\circ\varphi^{-1} = (x^1,\dots,x^n) \mapsto (x^1,\dots,x^n,0,\dots,0)$ (1.1.1)

Sei (χ, W) eine Karte von M um p, $f_{\varphi\chi} = \varphi\circ f\circ\chi^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\chi"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"] & R \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "f_{\varphi\chi}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "g_{\psi\varphi}"'] & \mathbb{R}^r \end{tikzcd}$$

Dann ist $\psi\circ(g\circ f)\circ\chi^{-1}$ def. auf $\chi((g\circ f)^{-1}(V)\cap W)$

$f_{\varphi\chi}$ ist def. auf $\chi(f^{-1}(U)\cap W)$

$g_{\psi\varphi}$ – " – $\varphi(g^{-1}(V)\cap U)$

⇒ $g_{\psi\varphi} \circ f_{\varphi\chi}$ ist def. auf

$$\chi(f^{-1}(U)\cap W) \cap f_{\varphi\chi}^{-1}(\varphi(g^{-1}(V)\cap U)) = \chi(f^{-1}(U)\cap W) \cap \chi(f^{-1}(g^{-1}(V)\cap U)) =$$

$$= \chi(f^{-1}(g^{-1}(V)) \cap \underbrace{f^{-1}(U)}_{\text{offen, weil } f \text{ stetig}} \cap W)$$

⇒ $g_{\psi\varphi} \circ f_{\varphi\chi}$ ist eine Einschränkung von $\psi\circ(g\circ f)\circ\chi^{-1}$ auf eine offene Menge, also C^∞ nach Voraussetzung. Wegen (1.1.1) ist $(g_{\psi\varphi}\circ f_{\varphi\chi})^i = f_{\varphi\chi}^i$ für $1 \le i \le n$, also $f_{\varphi\chi}$ C^∞ ⇒ f glatt. □

1.1.9 <u>PROP</u>: Seien M^m, N^n, R^r MFen, $f: M \to N$ eine surjektive Submersion und $g: N \to R$ (<u>bel.</u>). Ist $g\circ f$ C^∞, dann auch g.

<u>Bew.</u>: Bezeichnungen wie im Bew. von 1.1.8. Nach 1.1.3 können wir für $p \in M$ Karten (χ, W) um p in M und (φ, U) um $f(p)$ in N wählen, sodass

$f_{\varphi\chi} = \varphi\circ f\circ\chi^{-1} = (x^1,\dots,x^m) \longmapsto (x^1,\dots,x^n)$ (es muss ja $n \le m$ sein)

Wie in 1.1.8 ist $g_{\psi\varphi}\circ f_{\varphi\chi}$ eine Einschränkung von $\psi\circ(g\circ f)\circ\chi^{-1}$ auf eine offene Menge, also C^∞. ⇒ $(x^1,\dots,x^m) \mapsto g_{\psi\varphi}(x^1,\dots,x^n)$ C^∞

⇒ $g_{\psi\varphi}$ C^∞ ⇒ g C^∞. □

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den Begriff der Teilmannigfaltigkeit einführen:

1.1.10 <u>DEF</u>: Seien M^m und N^n MFen mit $N \subseteq M$ und $j: N \hookrightarrow M$ die Inklusionsabb. N heißt immersive Teil-MF von M, falls j eine Immersion ist. N heißt Teil-MF von M (manchmal auch: reguläre Teil-MF), falls zusätzlich N ein topologischer Teilraum von M ist, d.h. N die Spurtopologie von M trägt.

Diese Def. ist eine direkte Verallgemeinerung des Begriffes der Teil-MF des $\mathbb{R}^n$ (→ [DG1], 2.1.5). Beispiel einer immersiven Teil-MF ist

, vgl. [DG1], 2.1.7.[1] Wir werden im Folgenden allerdings praktisch ausschließlich (reguläre) Teil-MFen betrachten.

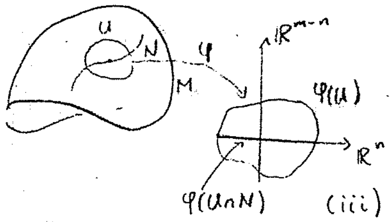
1.1.11 <u>BEM</u>: Ist N eine Teil-MF von M, so ist $\forall p \in N$ die Abb. $T_pj: T_pN \to T_pM$ injektiv. $T_pj(T_pN)$ ist also ein zu T_pN isomorpher Teilraum von T_pM. Wir werden daher stets T_pN als Teilraum von T_pM auffassen (und T_pj notationell unterdrücken).

[1] Atlas von N ist $\{(N, j^{-1})\}$

1.1.12 THEOREM: Sei N^n eine immersive Teil-MF von M^m. TFAE:

(i) N ist eine Teil-MF von M (d.h.: N trägt die Spurtop. von M).

(ii) Um jedes $p \in N$ existiert ein angepasstes Koordinatensystem, d.h.: $\forall p \in N\ \exists$ Karte (φ, U) um p in M, sodass $\varphi(p) = 0$, $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \underbrace{\{0\}}_{\in \mathbb{R}^{m-n}})$ und $\varphi|_{U\cap N}$ ist Karte von N um p.



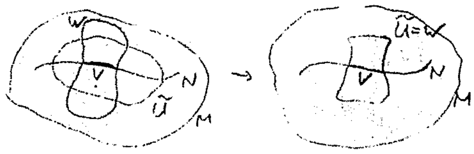
(iii) Jedes $p \in N$ besitzt eine Umgebungsbasis $\mathcal{U}$ in M, sodass $U \cap N$ zusammenhängend in N ist $\forall U \in \mathcal{U}$.

Bew.: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $p \in N$. Nach Vor. ist $j: N \hookrightarrow M$ eine Immersion. Wegen 1.1.3 existieren also Karten (ψ, V) um p in N und $(\varphi, \tilde{U})$ um $j(p) = p$ in M, sodass ($\varphi(p) = 0$)

$$\varphi \circ j \circ \psi^{-1} = (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-n})$$

Der Def.bereich von $\varphi \circ j \circ \psi^{-1}$ ist $\psi(V \cap j^{-1}(\tilde{U}))$. Da j stetig ist, ist $j^{-1}(\tilde{U})$ offen in N. Indem wir notfalls V zu $V \cap j^{-1}(\tilde{U})$ verkleinern können wir also o.B.d.A. annehmen, dass $V \subseteq j^{-1}(\tilde{U}) (= \tilde{U} \cap N)$. Der Def.bereich von $\varphi \circ j \circ \psi^{-1}$ ist dann $\psi(V)$.

Wegen (i) existiert ein $W \subseteq M$ offen, sd. $V = W \cap N$ und o.B.d.A. sei $W = \tilde{U}$ (sonst: $W_{neu} := \tilde{U} \cap W := \tilde{U}_{neu}$). Dann ist $V = \tilde{U} \cap N$.



Sei $pr_1: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ die Projektion. Es ist

$$\varphi(V) = \varphi(j(V)) = \varphi \circ j \circ \psi^{-1}(\psi(V)) = \psi(V) \times \{0\}$$

$$\Rightarrow pr_1(\varphi(V)) = \psi(V) \text{ .. offen im } \mathbb{R}^n$$

Sei nun $U := \varphi^{-1}((pr_1(\varphi(V)) \times \mathbb{R}^{n-m}) \cap \varphi(\tilde{U}))$ ... offen in M, enthält p.

Es ist also (φ, U) eine Karte von M um p und:

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$$

Bew.: $\subseteq$ $\varphi(U \cap N) \subseteq \varphi(U)$ ✓ und $U \cap N \subseteq \tilde{U} \cap N = V \Rightarrow \varphi(U \cap N) \subseteq \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^n \times \{0\}$.

$\supseteq$ Es ist $\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = (\underbrace{pr_1(\varphi(V))}_{= \psi(V)} \times \{0\}) \cap \varphi(\tilde{U})$

Sei also $\varphi(u) \in \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \Rightarrow \varphi(u) = (\psi(\overset{V}{v}), 0) = \varphi \circ j \circ \psi^{-1}(\psi(v)) = \varphi(j(v)) = \varphi(v)$

$\Rightarrow u = v \in V \subseteq N \Rightarrow \varphi(u) \in \varphi(U \cap N)$.

Schließlich ist $\varphi|_{U \cap N}$ Karte von N um p, weil $U \cap N = j^{-1}(U)$ offene Umg. v. p und

$$\varphi|_{U\cap N} \circ \psi^{-1} = \varphi|_{U \cap N} \circ j \circ \psi^{-1} = \varphi \circ j \circ \psi^{-1}|_{\psi(U \cap N)} = (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$$

Fasst man $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ als $\mathbb{R}^n$ auf, so ist dies die Identität $\Rightarrow \varphi|_{U \cap N} \circ \psi^{-1} = id$

$\Rightarrow \varphi|_{U \cap N} = \psi|_{U \cap N}$ .. Karte.

(ii) ⇒ (iii) Sei (φ, U) Karte wie in (ii). Sei $\varepsilon_0 > 0$ so, dass $B_{\varepsilon_0}(0) \subseteq \varphi(U)$ und $U_\varepsilon := \varphi^{-1}(B_\varepsilon(0))$ für $\varepsilon < \varepsilon_0$. Dann ist $\mathcal{U} := \{U_\varepsilon \mid \varepsilon < \varepsilon_0\}$ eine Umgebungsbasis von p in M und

$$\varphi(U_\varepsilon \cap N) = \varphi(U_\varepsilon \cap U \cap N) = B_\varepsilon(0) \cap \varphi(U \cap N) = B_\varepsilon(0) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$$

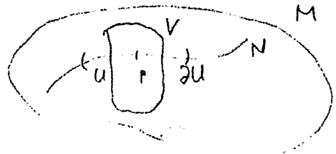
ist zusammenhängend in $\mathbb{R}^n$. Somit leistet $\mathcal{U}$ das Gewünschte.

(iii) ⇒ (i) Seien $\mathcal{T}_M$, $\mathcal{T}_N$ die Topologien von M bzw. N. z.z.: $\mathcal{T}_N = \mathcal{T}_M|_N$.

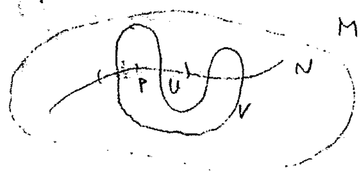
Wegen $j: N \hookrightarrow M$ stetig ist für jedes $W \in \mathcal{T}_M$ auch $j^{-1}(W) = W \cap N \in \mathcal{T}_N$, also $\mathcal{T}_M|_N \subseteq \mathcal{T}_N$. Umgekehrt zeigen wir, dass jede $\mathcal{T}_N$-Umgebung jedes $p \in N$ auch eine $\mathcal{T}_M|_N$-Umgebung ist. Sei dazu $p \in N$ und U eine Umg. von p in N, die homöomorph zu einem abg. Ball in $\mathbb{R}^n$ ist (z.B. ein Kartenurbild eines Balles). Dann ist ∂U kompakt in N $\overset{j \text{ stet.}}{\Rightarrow}$ $\partial U = j(\partial U)$ kompakt in M. Wegen $p \in U^\circ \Rightarrow p \notin \partial U$ und nach (iii) existiert ein $V \in \mathcal{U}$ mit $V \cap \partial U = \emptyset$.

Beh.: $V \cap N \subseteq U$ (dann fertig, weil $V \cap N$ Umg. v. p in $\mathcal{T}_M|_N$!)

V sieht also so aus:



, nicht so:

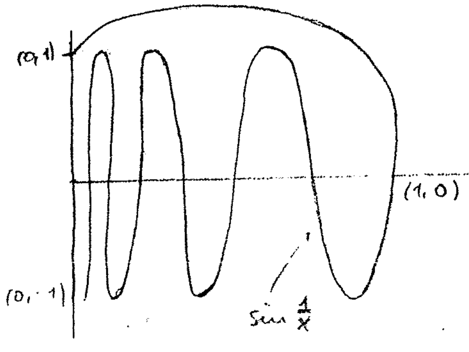


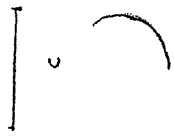
Bew.: Ang.: $V \cap N \not\subseteq U \Rightarrow (V \cap N) \cap N \setminus U \neq \emptyset$. Also: $V \cap N$ zus. hängend, $(p \in)(V \cap N) \cap U \neq \emptyset$, $(V \cap N) \cap N \setminus U \neq \emptyset \Rightarrow (V \cap N) \cap \partial U \neq \emptyset \Rightarrow V \cap \partial U \neq \emptyset$: Wid. □

□

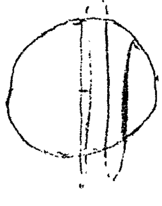
1.1.13 BEM: (i) Für $M = \mathbb{R}^m$ ist Bedingung (ii) genau (T) aus [DG1], 2.1.8 (lokale Trivialisierung). Teil-MF des $\mathbb{R}^n$ sind somit genau die Teil-MF im Sinne von 1.1.10.

(ii) Betrachte $N \subseteq \mathbb{R}^2$ wie folgt:



Graph v. $\sin \frac{1}{x}$ ∪ 

N ist immersive Teil-MF, aber nicht regulär: jeder Ball um $(0,0)$ mit Radius < 1 schneidet N in einer nicht zus. hg. Menge:



⇒ 1.1.12 (iii) ist verletzt.

[Sei $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ glatte reguläre Kurve, die N beschreibt. ⇝ Atlas von N = $\{(N, c^{-1})\}$]

1.1.14 PROP.: Sei N eine Teil-MF von M und $f: P \to M$ C^∞, sodass $f(P) \subseteq N$. Dann ist auch $f: P \to N$ C^∞.

Bew.: Da N die Spurtopologie von M trägt und $f: P \to M$ stetig ist, ist auch $f: P \to N$ stetig. $j: N \hookrightarrow M$ ist eine Immersion und $j \circ f$ ist C^∞ nach Vor. Die Beh. folgt somit aus 1.1.8. □

1.1.15 KOR: Sei M eine MF und N eine Teilmenge von M. Dann kann N auf höchstens eine Art zu einer Teil-MF von M gemacht werden.

Bew.: Zunächst muss N die Spurtopologie tragen. Seien nun $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ Atlanten, die N zu Teil-MF en N_1 bzw. N_2 von M machen. Da $j: N_i \hookrightarrow M$ jeweils C^∞ ist, folgt aus 1.1.14, dass $id: N_1 \to N_2$ und $id: N_2 \to N_1$ C^∞ sind. id ist daher ein Diffeomorphismus und somit ist $\mathcal{O}_1$ zu $\mathcal{O}_2$ äquivalent. □

1.1.16 DEF.: Seien N, M MFen. Eine Abb. $i: N \to M$ heißt Einbettung, falls i eine injektive Immersion ist und i ein Homöomorphismus ist von N auf $(i(N), \mathcal{T}_M|_{i(N)})$ (d.h. $i(N)$ mit der Spurtop. von M).

1.1.17 BEM: (i) Ist $i: N \to M$ eine Einbettung, so kann man $i(N)$ zu einer MF machen, indem man i "zum Diffeomorphismus erklärt". Die Karten von $i(N)$ sind dann die $\varphi \circ i^{-1}$, wobei φ Karte von N ist. Diese MF $i(N)$ ist dann eine Teil-MF von M, denn: Sei $j: i(N) \hookrightarrow M$ die Inklusion. Es ist $i = j \circ i$ eine Immersion und i per def. ein Diffeo., also ist j eine Immersion. $i(N)$ trägt außerdem nach Vor. die Spurtop. von M. *)

(ii) H. Whitney hat gezeigt, dass jede n-dimensionale MF in den $\mathbb{R}^{2n}$ eingebettet werden kann. Jede MF ist also diffeomorph zu einer Teil-MF eines $\mathbb{R}^n$.

Abschließend wollen wir untersuchen, wie man einer Teilmenge N von M ansehen kann, dass sie eine Teil-MF von M ist. Zunächst verallgemeinern wir die Bedingung aus 1.1.12 (ii):

*) Nach 1.1.15 ist die angegebene MF-Struktur von $i(N)$ die einzig mögliche.

1.1.18 <u>DEF</u>: Sei M^m eine MF und N eine Teilmenge von M. N besitzt die Teil-MF Eigenschaft der Dimension n, wenn gilt:

$\forall_{p \in N}$ $\exists$ Karte (φ, U) von M um p, s.d. $\varphi(p) = 0$ und $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$.
(φ, U) heißt angepasstes Koordinatensystem.

1.1.19 <u>THEOREM</u>: Sei M^m eine MF und N eine Teilmenge, die die Teil-MF Eig. der Dim n besitzt. Dann kann N auf genau eine Art zu einer n-dim Teil-MF von M gemacht werden. Ist $pr_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ die Projektion, so ist $\mathfrak{A} = \{(\tilde{\varphi} = pr_1 \circ \varphi, U \cap N) \mid \varphi$ ist angepasstes Koordinatensystem$\}$ ein C^∞-Atlas für N. Außerdem ist $j : N \hookrightarrow M$ eine Einbettung.

<u>Bew.</u>: Eindeutigkeit folgt sofort aus 1.1.15. Seien $(\varphi_1, U_1), (\varphi_2, U_2)$ angepasste Koordinatensyst. mit $U_1 \cap N \cap U_2 \cap N \neq \emptyset$. z.z.: $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ sind C^∞-verträglich.
Zunächst sind die $\tilde{\varphi}_i$ Homöomorphismen von $U_i \cap N$ mit der Spurtop. auf $\underbrace{pr_1(\varphi_i(U_i) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}))}_{\text{offen in } \mathbb{R}^n}$ (weil die φ_i Hom. sind).
Sei $\Theta : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$, $\Theta(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$. Damit ist $\tilde{\varphi}_i^{-1} = \varphi_i^{-1} \circ \Theta$.
Somit ist $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2^{-1}$ def. auf $\tilde{\varphi}_2(U_1 \cap U_2 \cap N)$ $(= pr_1(\varphi_2(U_1 \cap U_2) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}))$, also offen in $\mathbb{R}^n)$, und

$$\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2^{-1} = (pr_1 \circ \varphi_1) \circ (pr_1 \circ \varphi_2)^{-1} = pr_1 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \circ \Theta \quad C^\infty$$

$\Rightarrow \mathfrak{A}$ ist Atlas von N und nach [DG1], 2.2.7 ist die natürliche MF-Top. von N gerade die Spurtop. von M auf N.

Ist (φ, U) eine angepasste Karte, so ist $\varphi \circ j \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \Theta = (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$, also ist j eine Immersion. Da N die Spurtop. trägt ist $j : N \to j(N)$ ein Homöomorphismus, also j eine Einbettung. □

1.1.20 <u>PROP</u>: Seien M^m, N^n MFen, N kompakt und $i : N \to M$ eine injektive Immersion. Dann ist i sogar eine Einbettung und $i(N)$ ist eine zu N diffeomorphe Teil-MF von M.

<u>Bew.</u>: Es ist z.z., dass $i : N \to (i(N), \mathcal{T}_M|_{i(N)})$ ein Homöomorphismus ist. Stetigkeit ist klar, ebenso Bijektivität. Auch i^{-1} ist stetig: sei $A \subseteq N$ abg. $\Rightarrow A$ komp. $\Rightarrow (i^{-1})^{-1}(A) = i(A)$ kompakt, also abg..
Die letzte Beh. folgt aus 1.1.17 (i). □

1.1.21 <u>KOR</u>: Sei $f : N^n \to M^m$ eine Immersion. Dann besitzt jedes $p \in N$ eine Umg. U, s.d. $f|_U : U \to M$ eine Einbettung ist.
D.h.: der Unterschied zwischen Immersion und Einbettung ist also ein globaler, kein lokaler.

Bew.: Nach 1.1.3 $\exists$ lokal um p bzw. $f(p)$ Karten φ, ψ, sd. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} =$

$= (x^1, \dots, x^n) \longmapsto (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$. Somit $\exists\, V$ (o.B.d.A. kompakt), V Umg. v. p,

sd. $f|_V$ injektiv. Wie im Bew. v. 1.1.20 $\Rightarrow f|_V : V \to (f(V), \mathcal{T}_M|_{f(V)})$ ist Homöomorphismus.

Sei $U \subseteq V$ offene Umg. v. p $\Rightarrow f|_U$ ist inj. Immersion und $f: U \to (f(U), \mathcal{T}_M|_{f(U)})$ ist Hom.

$\Rightarrow f: U \to M$ ist Einbettung. □

BEM: vgl. 1.1.13 (ii).

1.1.22 THEOREM: Seien M^m, N^n MFen und $f: N \to M$ C^∞ mit $rg(f) \equiv k$ auf N ($k<n$). Sei $q \in f(N)$. Dann ist $f^{-1}(q)$ eine abgeschlossene Teil-MF von N der Dimension $n-k$.

Bew.: Da f stetig ist, ist $f^{-1}(q)$ abg. in N. Wir zeigen, dass $f^{-1}(q)$ die Teil-MF Eig. der Dim $n-k$ besitzt. Die Beh. folgt dann aus 1.1.19.

Sei $p \in f^{-1}(q)$. Nach 1.1.3 existieren Karten (φ, U) um p und (ψ, V) um $f(p)=q$, sd. $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$, $\psi(q) = 0 \in \mathbb{R}^m$ und $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) \equiv f_{\psi\varphi}(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$

$f_{\psi\varphi}$ ist dif. auf $\varphi(U \cap f^{-1}(V)) =: \varphi(W)$. Es ist (φ, W) eine Karte von N um p und

$$\varphi(f^{-1}(q) \cap W) = \varphi(f^{-1}(q)) \cap \varphi(W) = \varphi\big(f^{-1}(\psi^{-1}(\underbrace{\psi(q)}_{=0}))\big) \cap \varphi(W) = f_{\psi\varphi}^{-1}(0) \cap \varphi(W)$$
$$= (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap \varphi(W).$$
□

1.1.23 KOR: Sei $f: N^n \to M^m$ C^∞ und $m<n$. Ist $rg_p(f) = m$ $\forall p \in f^{-1}(q)$ ($q \in f(N)$), dann ist $f^{-1}(q)$ eine abg. Teil-MF von N der Dimension $n-m$.

Bew.: Sei $p \in f^{-1}(q)$. Dann hat f in p maximalen Rang $(=m)$, also nach 1.1.4 sogar in einer offenen Umg. U von p in N. Insgesamt ist der Rang von f also gleich m auf einer offenen Umg. $\tilde{N}$ von $f^{-1}(q)$ in N und wir können 1.1.22 auf $f: \tilde{N}^n \to M^m$ anwenden. □

BEM: Für $N = \mathbb{R}^n$, $M = \mathbb{R}^m$ reduziert sich dies auf die Beschreibung von Teil-MF als Nullstellenmengen regulärer Abb.en vgl. [DG1], 2.1.8 (GL).

1.1.24 PROP: Unter den Vor. von 1.1.22 sei $L := f^{-1}(q)$ und $p \in L$. Dann ist $T_pL = \ker T_pf$.

Bew.: Es ist $f|_L$ konstant gleich q, also ist $T_pf|_{T_pL} = 0$. $\Rightarrow T_pL \subseteq \ker T_pf$.

Wegen $\dim(\ker T_pf) + \underbrace{\dim(\mathrm{im}\, T_pf)}_{=k} = \dim T_pN = n$ ist $\dim \ker T_pf = n-k = \dim T_pL$ $\Big\} \Rightarrow T_pL = \ker T_pf$ □

1.1.25 BSP: Sei $\pi: TM \to M^m$ die Fußpunktabb. und sei $p \in M$. π ist C^∞ und $rg(\pi) = m$, weil lokal gilt: $\psi \circ \pi \circ T\psi^{-1} = pr: \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^m$ (*) (vgl. [DG1], 2.5.6). Nach 1.1.23 ist daher $\pi^{-1}(p) = T_pM$ eine n-dim. Teil-MF von TM. Weiters ist nach 1.1.24 für $v_p \in T_pM$: $T_{v_p}(T_pM) = \ker(T_{v_p}\pi)$. Die Teil-MF-Karten von T_pM sind nach (*) und dem Bew. v. 1.1.22 gerade die $T\psi|_{\overline{T_pM}}$ $(= \pi^{-1}(p) \cap TV)$ $= T_p\psi$. Da diese lineare Isomorphismen sind ist die Spurtop. von TM auf T_pM gerade die übliche Top. von T_pM als endlich-dim VR. $T_p\psi$ ist auch Diffeo $\Rightarrow T_pM$ hat als MF-Struktur gerade seine VR-Struktur.