Differentialgleichungen für LehramtskandidatInnen

Nach einer Vorlesung von Günther Hörmann

Michael Kunzinger

Vorwort

Das vorliegende Skriptum dient als Unterlage für die gleichnamige Vorlesung. Es soll eine erfolgreiche Beschäftigung mit dem behandelten Stoff erleichtern, kann aber selbstverständlich nicht den Besuch der Vorlesung ersetzen.

Inhaltlich handelt es sich um eine Eins-zu-eins Ausarbeitung der handschriftlichen Unterlagen von Günther Hörmann zu seiner gleichnamigen Vorlesung. Ihm gebührt daher das alleinige Verdienst für die Vorzüge der Darstellung. Für Hinweise auf Fehler, die sich in der Transkription eingeschlichen haben mögen, bin ich dankbar.

Michael Kunzinger, WS 2012/13

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundbegriffe und erste Beispiele

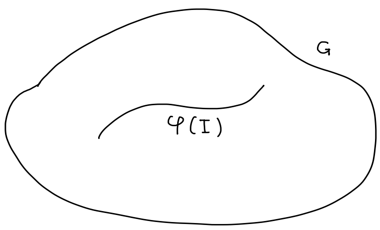
1.1 Definition. *Sei* $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *und* $f : G \to \mathbb{R}$*,* $(x, y) \mapsto f(x, y)$ *stetig. Dann heißt*

$$\boxed{y' = f(x, y)} \tag{1.1}$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung *erster Ordnung.*
Eine Lösung *von* (1.1) *ist eine differenzierbare Funktion* $\varphi : I \to \mathbb{R}$*,* I *ein Intervall, mit folgenden Eigenschaften:*

(a) Der Graph von φ *ist in* G *enthalten, d.h.*

$$\Gamma(\varphi) \subseteq \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y = \varphi(x)\} \subseteq G,$$



und

(b) $\forall x \in I$*:*

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

1.2 Bemerkung.

(i) Die unabhängige Variable wird häufig mit t bezeichnet (insbesondere, wenn sie die Zeit beschreibt). Für die abhängige Variable schreibt man dann oft x statt y. Es sind also verschiedenste Schreibweisen für DGL (Differentialgleichungen) in Verwendung: $y' = f(t, y)$, $x' = f(t, x)$, $\dot{x} = f(t, x)$, $y'(t) = f(t, y(t))$, $x'(t) = f(t, x(t))$, ...

(ii) (1.1) heißt DGL erster Ordnung, weil die höchste vorkommende Ableitungsordnung eins ist.

(iii) Beachte, dass (a) in 1.1 benötigt wird, um in (b) einen sinnvollen Lösungsbegriff zu erhalten.

1.3 Beispiel. (Extrem vereinfachtes Modell einer) **Grippeepidemie**
(*Epidemie: "ansteckende Massenerkrankung, Seuche", lat. epidemia (seit 16. Jh.); aus griech. "epidemia nosos" = "im ganzen Volk verbreitete Krankheit" (demos ... Gebiet, Volk; epi... darüber; über-hin)*)
(Fixe) Populationsgröße $N \in \mathbb{N}$, $E(t)$ ... Anzahl der Erkrankten (bzw. Angesteckten) zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$.

Modellannahmen:

0.) (Jedes Populationsmitglied kann erkranken – keine Impfung)

1.) Im betrachteten Zeitraum weder Heilungen noch Todesfälle

2.) Angesteckte Personen bewegen sich frei, pro Zeiteinheit k Kontakte

3.) Jeder Kontakt eines Angesteckten mit einem Gesunden führt zu dessen Erkrankung

1.) $\Rightarrow$ $N - E(t)$ ... zum Zeitpunkt t (noch) gesunde Mitglieder.
2.) $\Rightarrow$ In (kleiner) Zeitspanne Δt stattfindende Kontakte von Angesteckten mit Gesunden:

$$\underbrace{E(t)\cdot k}_{\substack{\text{Gesamtkontakte}\\ \text{aller Erkrankten}}} \cdot \underbrace{\frac{N-E(t)}{N}}_{\substack{\text{Bruchteil}\\ \text{der Gesunden}}} \cdot \Delta t \dots$$

3.) $\Rightarrow$ Zuwachs an Erkrankten in Zeitspanne Δt = Zahl der Gesamtkontakte Erkrankte–Gesunde in $\Delta t = \frac{k}{N} E(t) \cdot (N - E(t)) \cdot \Delta t$

$$\Rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{k}{N} E(t) \cdot (N - E(t))$$

Approximation für große N und kleine Δt:

$$\boxed{E'(t) = \frac{k}{N} E(t) \cdot (N - E(t))}$$

Erhalten also eine DGL im Sinn von 1.1 mit $f(t,y) = \frac{k}{N} \cdot y \cdot (N - y)$ (y statt E und unabhängige Variable t statt x, $G = \mathbb{R}^2$ falls $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).
Differentialgleichungen der Form $y' = \alpha \cdot y \cdot (\beta - y)$ heißen **logistische DGL** (1838 Verhulst (Bevölkerungswachstum), 1760 Daniel Bernoulli (Pockenausbreitung); Logistik: Gesamtheit der Maßnahmen für Nachschub, Infrastruktur; Prozesse für Organisation ...).

1.4 Definition. *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(x, y) \mapsto f(x, y)$. Dann heißt*

$$\boxed{y' = f(x, y)} \tag{1.2}$$

bzw. ausführlicher, in Komponenten:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}}$$

ein System von n DGL erster Ordnung. *Eine* Lösung *von* (1.2) *ist eine differenzierbare vektorwertige Abbildung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ($\varphi \dots$ Kurve, Weg), mit folgenden Eigenschaften:*

a) Der Graph von φ ist in G enthalten.

b) $\forall x \in I$: $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, bzw. ausführlicher, in Komponenten:

$$\begin{aligned} \varphi_1'(x) &= f_1(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \\ &\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \varphi_n'(x) &= f_n(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \end{aligned}$$

Die Wertebereiche sind hier also von höherer Dimension, aber auch hier gibt es nur *eine* unabhängige Variable $x \in I$, daher spricht man von einem *System von gewöhnlichen DGL* (erster Ordnung).

1.5 Beispiel. (noch immer vereinfachtes Modell einer) **Grippeepidemie**
Gesamtpopulation zur Zeit t besteht aus:
$S(t)$ ... Anzahl der Suszeptiblen (ansteckbar, dzt. nicht angesteckt)
$I(t)$ ... Anzahl der Infizierten
$R(t)$ ... Anzahl der Ausgeschiedenen (engl. 'removed', z.B. durch Immunisierung, Quarantäne oder Tod).
Modellkonstanten: $\alpha > 0$ ... Ansteckungsrate, $\beta > 0$ ... Beseitigungsrate.
Im Zeitraum Δt gibt es:
$\alpha \cdot S(t) \cdot I(t) \cdot \Delta t$ ... neue Ansteckungen (vgl. 1.3), und
$\beta \cdot I(t) \cdot \Delta t$ ... Infizierte, die ausscheiden (zu R werden).
Für die Änderungen ΔS, ΔI, ΔR in der Zeitspanne Δt gilt:

$$\begin{aligned} \Delta S &= -\alpha \cdot S(t) \cdot I(t) \cdot \Delta t \\ \Delta I &= \alpha \cdot S(t) \cdot I(t) \cdot \Delta t - \beta \cdot I(t) \cdot \Delta t \\ \Delta R &= \beta \cdot I(t) \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Approximation für große Population und kleine Δt:

$$\boxed{\begin{aligned} S'(t) &= -\alpha \cdot S(t) \cdot I(t) \\ I'(t) &= \alpha \cdot S(t) \cdot I(t) - \beta \cdot I(t) \\ R'(t) &= \beta \cdot I(t) \end{aligned}}$$

(SIR-Modell; SIR-Modelle im Schulunterricht: siehe C. Ableitinger, IMN 209 (2008), 29–39)
Wir erhalten also ein System von 3 DGL gemäß 1.4 mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ und

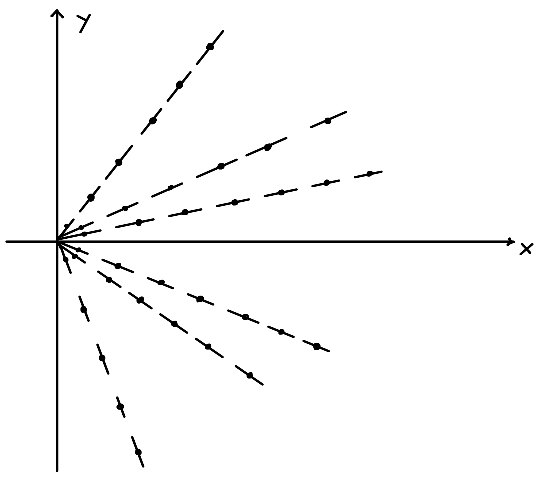
$$f(t, y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} -\alpha \cdot y_1 \cdot y_2 \\ \alpha \cdot y_1 \cdot y_2 - \beta \cdot y_2 \\ \beta \cdot y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, y_2, y_3) \\ f_2(t, y_1, y_2, y_3) \\ f_3(t, y_1, y_2, y_3) \end{pmatrix}$$

(y_1 für S, y_2 für I, y_3 für R; unabh. Variable t statt x).

1.6 Geometrische Interpretation von Differentialgleichungen

1.) n = 1 (skalare DGL): Für eine Lösung $x \mapsto y(x)$ der DGL $y'(x) = f(x, y(x))$ ist die Steigung des Graphen in jedem Punkt $(x, y(x))$ vorgegeben; wir können also schon im Vorhinein — ohne Kenntnis der Lösungen — das sogenannte **Richtungsfeld** skizzieren: an jedem Punkt $(x, y) \in G$ wird ein kurzes Geradenstück mit Richtungsvektor $(1, f(x, y))$ angeheftet.

Bsp: $G =]0, \infty[\times \mathbb{R}$, $f(x, y) = y/x$:

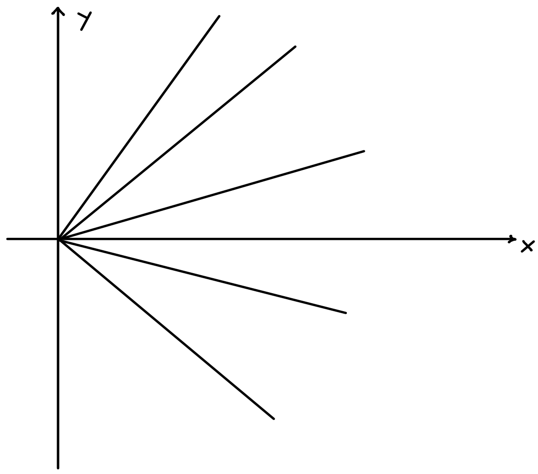


Tatsächlich ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $y(x) = c \cdot x$ eine Lösung der DGL $y' = f(x, y)$!

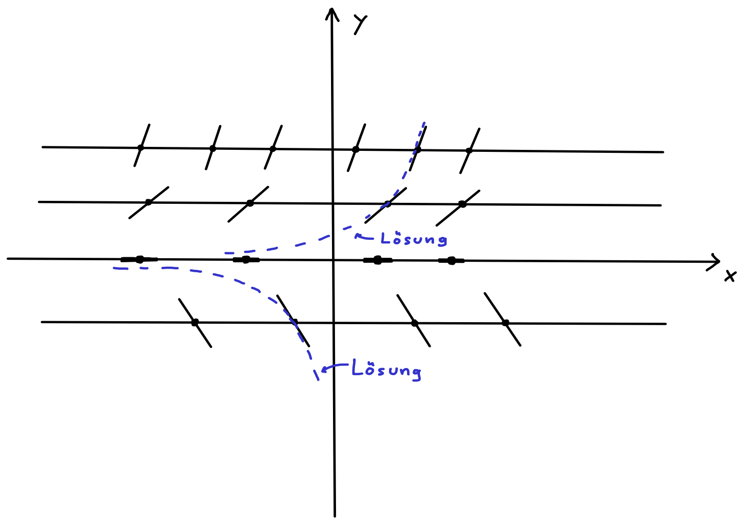
Die Niveaulinien (bzw. -mengen) zu f, also die Mengen

$$N_f(c) := \{(x, y) \in G : f(x, y) = c\}$$

ergeben (unter der Bedingung f stet. diffb., grad$f(x, y) \neq 0\, \forall (x, y)$) dabei Kurven gleicher Steigung in G, sogenannte **Isoklinen**. Im obigen Beispiel fallen diese sogar mit den Lösungsgeraden zusammen, weil y' konstant ist.



Bsp.: $f(x, y) = y$, d.h. DGL $y' = y$ (wissen: Lösungen sind $y(x) = \alpha \cdot e^x$, $\alpha \in \mathbb{R}$). In diesem Beispiel sind die Isoklinen horizontale Gerade $y = \mathit{const} = c$



2.) Allgemeiner Fall $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ (Systeme von n DGL):
$F : (x, y) \mapsto (1, f(x, y))$, $G \to \mathbb{R}^{n+1}$ ist ein **Vektorfeld** und jede Lösung $x \mapsto y(x)$, $\mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^n$ definiert eine Kurve $\gamma : I \to G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ durch $\gamma(x) := (x, y(x))$

mit der Eigenschaft:

$$\dot{\gamma}(x) := \gamma'(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y(x)) \end{pmatrix} = F(x, y(x)) = F(\gamma(x)),$$

d.h.

$$\boxed{\dot{\gamma}(x) = F(\gamma(x))} \qquad \forall x \in I$$

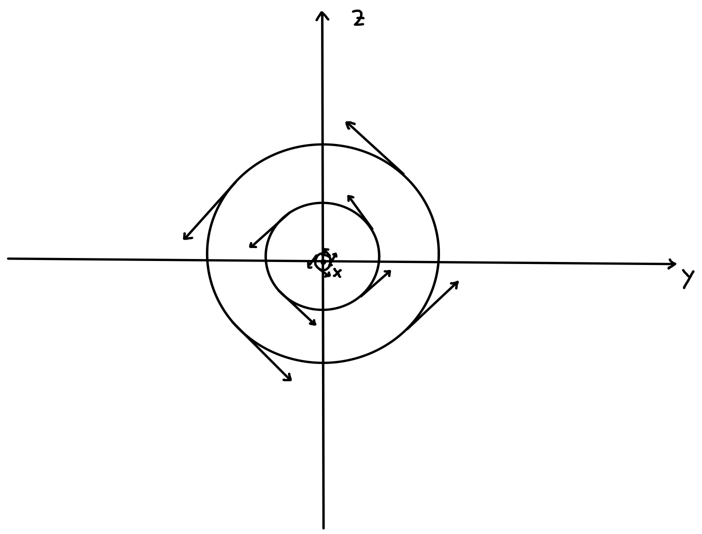
Der Tangentialvektor an die Kurve γ ist vorgegeben durch das Vektorfeld $F = (1, f)$; γ heißt **Integralkurve** zum Vektorfeld F.

Bsp.: $n = 1$ wie oben: $G =]0, \infty[\times \mathbb{R}$, $f(x, y) = y/x$.
$\gamma(x) = (x, y(x)) \ldots$ beschreibt den Graphen von $x \mapsto y(x)$.
$F(x, y) = (1, y/x) \ldots$ entspricht Richtungsvektor des Richtungsfeldes.

Bsp.: $n = 2$:

$$f(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}, \; F(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}$$

(schreibe $y = y_1$, $z = y_2$). Graphisch denken wir uns hierbei $F(x, y, z)$ als Vektor, der bei (x, y, z) angeheftet ist. Beachte: $\begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}$ ist Tangente an Kreis durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in Ebene parallel zur yz-Ebene.



1.7 Autonome Differentialgleichungen

In den Modellen 1.3 und 1.5 waren die DGL (bzw. DGL-Systeme) jeweils von der Form

$$\boxed{y' = f(y)}$$

Solche DGL bzw. Systeme heißen **autonom**, weil die rechte Seite nicht explizit von der (unabhängigen) Variable x (oder t in manchen Beispielen) abhängt. Diese Form ist also spezieller als die allgemeine gewöhnliche DGL $y'(x) = f(x, y(x))$.

Vorteile:
1.) Es gibt eine konstante Lösung $y(x) = c\ \forall x \Leftrightarrow f(c) = 0$.
Bew.: $(\Rightarrow)\ 0 = y'(x) = f(y(x)) = f(c)$.
$(\Leftarrow)\ f(c) = 0,\ y(x) := c \Rightarrow y'(x) = 0 = f(c) = f(y(x))$. □

2.) Translationsinvarianz:
Ist $y :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ eine Lösung und $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist $z(x) := y(x+\alpha)$ $(x \in]a-\alpha, b-\alpha[)$ ebenfalls eine Lösung.
Bew.: $z'(x) = y'(x + \alpha) = f(y(x + \alpha)) = f(z(x))$. □

1.8 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, $f : G \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$\boxed{y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)})}$$

eine DGL der Ordnung m.
$y : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ (I ein Intervall) heißt **Lösung** dieser DGL, wenn y m-mal differenzierbar ist, $\{(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m-1)(x)}) \in \mathbb{R}^{m+1} : x \in I\} \subseteq G$ und $\forall x \in I : y^{(m)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m-1)}(x))$.

Bsp.: $y'' = -y' - \sin(y)$ (mathematisches Pendel)
Dies ist eine DGL zweiter Ordnung, $f(x, y, y') = -y' - \sin(y)$.

Analog: **System von n DGL der Ordnung m:**

$G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m \cdot n}$, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, $y^{(m)} = f(x, y, \dots, y^{(m-1)})$; Lösung $y : I \to \mathbb{R}^n$ m-mal differenzierbar, etc. …

1.9 Lineare Differentialgleichungen

(Später gesondertes Kapitel dazu.) Eine **lineare DGL der Ordnung m** ist eine DGL der Form

$$y^{(m)} = g(x) + \underbrace{a_0(x) \cdot y + a_1(x) \cdot y' + \dots + a_{m-1}(x) \cdot y^{(m-1)}}_{\text{für festes } x \text{ linear in } (y, y', \dots, y^{(m-1)})}$$

Es liegt also folgende spezielle Form der rechten Seite vor:

$$f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) = g(x) + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x) \cdot y^{(j)}$$

(ähnlich für Systeme von n DGL mit Matrizen $a_j(x)$ und vektorwertigem $g(x)$).

Beispiele/Spezialfälle:

1.) Allgemeine lineare DGL erster Ordnung: $y' = a(x) \cdot y + g(x)$.

2.) Lineare Pendelgleichung: $y'' = -y' - y$ (lineare DGL zweiter Ordnung).

3.) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ... lineares System (von 2 DGL) erster Ordnung.

1.10 Methode der getrennten Variablen

(Leibniz 1691, Joh. Bernoulli 1694, Jak. Bernoulli 1690, I. Barrow 1670)

Speziell für $f(x, y)$ von der Form $g(x) \cdot h(y)$, wobei $g : I \to \mathbb{R}$, $h : J \to \mathbb{R}$ stetig, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $\boldsymbol{h(y) \neq 0}$ $\forall y \in J$ $(G = I \times J,\ f(x, y) = g(x)h(y))$.

$$\boxed{y' = g(x) \cdot h(y)} \tag{1.3}$$

heißt DGL erster Ordnung mit **getrennten Variablen** ('getrennt', weil in Faktoren aufgespaltet; siehe unten: getrennte Seiten der Gleichung).

Idee zum Finden einer Lösung:

$$(1.3) \Rightarrow \frac{y'}{h(y)} = g(x)$$

(Verwende hier $h(y) \neq 0$; verschiedene Variablen auf getrennten Seiten). D.h.:

$$\forall x \in I: \quad \frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x)$$

Sei nun $x_0 \in I$ beliebig und $y(x_0) = y_0 \in J$. Integration beider Seiten $\int_{x_0}^{x} \dots ds$ bedeutet:

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{h(y(s))}\, ds}_{[\text{Subst. } r = y(s)] = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dr}{h(r)}} = \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds =: G(x) \quad \text{(Stammfkt. von } g\text{)}$$

Setze nun

$$H(z) := \int_{y_0}^{z} \frac{dr}{h(r)} \quad [\text{Stammfkt. von } \frac{1}{h}] \Rightarrow \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dr}{h(r)} = H(y(x)),$$

wodurch die DGL transformiert wird in

$$H(y(x)) = G(x) \tag{1.4}$$

wegen $h(y) \neq 0 \ \forall y \in J$ ist stets $h(y) > 0$ oder $h(y) < 0$ (J ist ein Intervall!) und damit $1/h > 0$ oder $1/h < 0$, also ist H streng monoton wachsend oder fallend; Insgesamt ist also H stetig und streng monoton auf einem Intervall

$$\Rightarrow \exists H^{-1} \text{ stetig und streng monoton} \tag{1.5}$$

Damit folgt aus (1.4):

$$y(x) = H^{-1}(G(x))$$

Wir zeigen nun, dass diese Idee tatsächlich die Lösung der DGL liefert:
Satz. *Seien I, $J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ beliebig, $g : I \to \mathbb{R}$, $h : J \to \mathbb{R}$ stetig und $h(y) \neq 0 \ \forall y \in J$.*
Setze $G : I \to \mathbb{R}$, $G(x) := \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds$ $(x \in I)$, und

$$H : J \to \mathbb{R},\ H(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{h(s)}$$

Sei $I_1 \subseteq I$ ein Intervall mit $x_0 \in I_1$ und $G(I_1) \subseteq H(J)$. Dann existiert genau eine Lösung $\varphi : I_1 \to \mathbb{R}$ der DGL

$$y' = g(x) \cdot h(y),$$

die der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$ genügt. Diese Lösung ist festgelegt durch die Beziehung

$$\boxed{H(\varphi(x)) = G(x)} \quad \forall x \in I_1.$$

Beweis.
Eindeutigkeit: obige Überlegung mit $\varphi(x)$ statt $y(x)$ und $\varphi(x_0) = y_0$ ergibt gemäß (1.4) nun

$$H(\varphi(x)) = G(x) \quad \forall x \in I_1$$

Wegen der strengen Monotonie von H (siehe (1.5)!) ist somit $\varphi(x)$ eindeutig festgelegt durch $\varphi(x) = H^{-1}(G(x))$ $(x \in I_1)$.
Existenz: Wir zeigen, dass $\varphi(x) := H^{-1}(G(x))$, $x \in I_1$, tatsächlich eine Lösung der DGL mit $\varphi(x_0) = y_0$ ist.

- $\varphi(x_0) = H^{-1}(G(x_0)) = H^{-1}(0) = y_0$, weil $H(y_0) = 0$ und H stetig, streng monoton.

- Aus $H(\varphi(x)) = G(x)$ folgt durch Differentiation:

$$g(x) = G'(x) = H'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = \frac{1}{h(\varphi(x))} \cdot \varphi'(x) \Rightarrow \varphi'(x) = g(x) \cdot h(\varphi(x))$$

$\square$

Bemerkung.

- Falls $h(y_0) = 0$, so ist $y(x) = y_0 \ \forall x \in I$ eine konstante Lösung von (1.3).
- Saloppe Merkregel der Prozedur:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \quad \to \quad \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$
$$\to \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\, dx + const., \text{ nach } y \text{ auflösen}$$

1.11 Beispiel. Logistische DGL (vg. 1.3 mit $\beta = 1$, $\alpha > 0$):

$$\boxed{y' = \alpha \cdot y(1-y)}$$

Annahme: $0 < y(t) < 1 \ \forall t \in I$, $y : I \to \mathbb{R}$, $0 \in I$, $y(0) = y_0 \in]0, 1[$.

$$\frac{y'}{y(1-y)} = \alpha \Rightarrow \int_0^t \frac{y'(\tau)\, d\tau}{y(\tau)(1-y(\tau))} = \alpha \cdot t$$
$$(\text{Subst. } y(\tau) = s) \Rightarrow \alpha \cdot t = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{ds}{s(1-s)} = \int_{y_0}^{y(t)} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}\right) ds$$
$$= (\log(s) - \log(1-s)) \Big|_{s=y_0}^{s=y(t)} = \log\left(\frac{s}{1-s}\right) \Big|_{s=y_0}^{s=y(t)}$$
$$\Rightarrow \log\left(\frac{y(t)}{1-y(t)}\right) = \alpha \cdot t + \log\left(\frac{y_0}{1-y_0}\right)$$
$$\overset{\exp}{\Rightarrow} \frac{y(t)}{1-y(t)} = e^{\alpha \cdot t} \cdot \underbrace{\frac{y_0}{1-y_0}}_{=:\gamma_0} \Rightarrow y(t) = \gamma_0 e^{\alpha t}(1 - y(t))$$
$$\Rightarrow y(t) \cdot (1 + \gamma_0 e^{\alpha t}) = \gamma_0 e^{\alpha t}$$

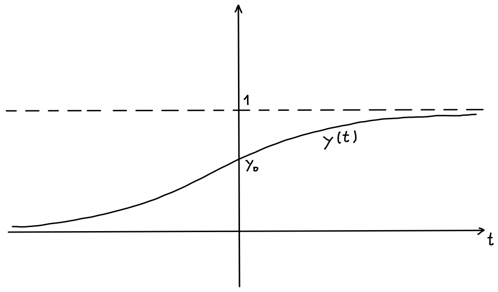
Damit erhalten wir schließlich:

$$\boxed{y(t) = \frac{\gamma_0 \cdot e^{\alpha t}}{1 + \gamma_0 e^{\alpha t}}} \quad (\gamma_0 = \frac{y_0}{1-y_0})$$

Beobachtung. Wählen $I = \mathbb{R}$, $y_0 \in]0, 1[$ beliebig.
Es gilt $\lim_{t \to -\infty} y(t) = 0$, $\lim_{t \to \infty} y(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R} :\ 0 < y(t) < 1$. Wegen

$$y'(t) = \alpha \cdot y(t) \cdot (1 - y(t)) > 0$$

ist zudem $y : \mathbb{R} \to]0, 1[$ streng monoton wachsend und bijektiv.



Bemerkung. Die logistische DGL ist außerdem ein Beispiel für eine autonome DGL mit $f(y) = \alpha \cdot y \cdot (1-y)$; wegen $f(0) = 0$ und $f(1) = 0$ sind $y_{00}(t) := 0$ und $y_1(t) := 1$ konstante (vgl. 1.7) Lösungen der DGL (mit Anfangswerten $y_0 = 0$ bzw. $y_0 = 1$).

1.12 Beispiel. $y' = \frac{y}{x}$, $G = I \times J =]0, \infty[\times]0, \infty[$ mit $y(1) = c > 0$ (vgl. Bsp. in 1.6 1.)).

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int_1^x \frac{y'(\tau)}{y(\tau)}\, d\tau = \int_1^x \frac{dr}{r} \Rightarrow \int_c^{y(x)} \frac{ds}{s} = \log(r)\Big|_{r=1}^{r=x} \Rightarrow \log(s)\Big|_{s=c}^{s=y(x)}$$
$$= \log(x) - \underbrace{\log(1)}_{=0} \Rightarrow \log(y(x)) = \log(x) + \log(c) = \log(c \cdot x) \stackrel{\exp}{\Rightarrow} y(x) = c \cdot x$$

Das ‘wussten’ wir bereits aus der Skizze des Richtungsfeldes in 1.6 1.).

1.13 Bemerkung. Autonome DGL $y' = f(y)$ können stets mit der Methode der getrennten Variablen gelöst werden, sofern $f(y) \neq 0$ gilt (1 mit $g(x) = 1$ $\forall x$ und $h(y) = f(y)$).

Kapitel 2

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Wir haben in der speziellen Situation von 1.10 und in Übungsaufgaben bereits gesehen, dass Lösungen von DGL $y' = f(x, y)$ durch Vorgabe einer **Anfangsbedingung** $y(x_0) = y_0$ **eindeutig** festgelegt werden konnten.
Die **Existenz** einer Lösung wurde in diesen Fällen jeweils durch eine explizite Konstruktion nachgewiesen.
Nun wollen wir für die allgemeine Situation einer **DGL erster Ordnung mit Anfangsbedingung**

$$\boxed{y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0} \tag{2.1}$$

($f : \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ stetig, $(x_0, y_0) \in G$ beliebig) einen Satz über **Existenz und Eindeutigkeit** von Lösungen $\varphi : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$, I ein Intervall, $x_0 \in I$, $\varphi(x_0) = y_0$ ansteuern. Es soll also gelten: $\Gamma(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) : x \in I\} \subseteq G$, und $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, $\varphi(x_0) = y_0$.

2.1 Umformung einer DGL in eine Integralgleichung

Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ Lösung des Anfangswertproblems (2.1). Dann folgt aus (2.1) durch Integration $\int_{x_0}^{x} \ldots d\tau$:

$$\varphi(x) - y_0 = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} \varphi'(\tau)\, d\tau = \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau,$$

und somit

$$\boxed{\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau} \quad \forall x \in I. \tag{2.2}$$

Umgekehrt sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ stetig und erfülle (2.2). Dann ist $\tau \mapsto f(\tau, \varphi(\tau))$ stetig $I \to \mathbb{R}$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HSDI) ist somit $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$ stetig differenzierbar und

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau\right) = f(x, \varphi(x))$$

Daher folgt aus (2.2), dass φ stetig differenzierbar ist,

$$\varphi'(x) = 0 + \frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau\right) = f(x, \varphi(x))$$

und $\varphi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} \cdots = y_0 + 0 = y_0$. Haben also gezeigt:
Satz. *Sei $f : \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ stetig, $(x_0, y_0) \in G$ und $\varphi : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ stetig, I ein Intervall, $x_0 \in I$, $\Gamma(\varphi) \subseteq G$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1.) φ ist eine Lösung der DGL $y' = f(x, y)$ mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ($\Leftrightarrow$ (2.1)).

2.) φ erfüllt die Integralgleichung

$$\forall x \in I : \quad \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau \quad (\Leftrightarrow (2.2)).$$

Wenn wir also im Folgenden die eindeutige Lösbarkeit der Integralgleichung (2.2) zeigen, so impliziert dies gleichzeitig die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems (2.1).
Bemerkung. Die Umformung der DGL in eine Integralgleichung ist vor allem für beweistechnische Zwecke und für die numerische Analyse nützlich. Beim Aufsuchen von expliziten Lösungen in konkreten Beispielen hilft diese in der Regel allerdings wenig.

2.2 Picard-Iteration

Die grundlegende Idee für die Lösung der Integralgleichung (2.2)

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$$

durch die Methode der sukzessiven Approximation geht auf Picard (in den 1890ern) zurück:
"0. Approximation": $\varphi_0(x) := y_0 \ \forall x \in I$.
"Verbesserung" durch

$$\varphi_1(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi_0(\tau))\, d\tau = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_0)\, d\tau,$$

dann

$$\varphi_2(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi_1(\tau))\, d\tau, \ldots$$

Allgemein ist $\varphi_k : I \to \mathbb{R}$ **stetig** ($k \in \mathbb{N}$), definiert durch **Iteration**:

$$\boxed{\begin{aligned} &\varphi_0(x) := y_0 \ \forall x \in I, \\ &\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi_k(\tau))\, d\tau \ \forall x \in I \end{aligned}} \tag{2.3}$$

Warum ist das hilfreich?:
Falls $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **gleichmäßig** konvergiert gegen ein φ, so folgt:

$$\begin{array}{rl} & \varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi_k(\tau))\, d\tau \\ & \quad\downarrow \qquad\qquad \downarrow \\ (k\to\infty) & \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau, \end{array}$$

Also löst φ die Integralgleichung (2.2).

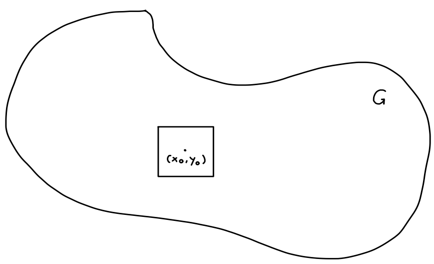
2.3 Lipschitz-Bedingung

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : G \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ eine Funktion. Wir sagen, f sei in G (lokal) **Lipschitz-stetig bezüglich $\boldsymbol{y}$**, wenn gilt: jeder Punkt in G besitzt eine Umgebung U, sodass es ein $L \geq 0$ gibt (eine sog. (lokale) Lipschitzkonstante), mit dem für alle (x, y), $(x, \tilde{y}) \in G \cap U$ gilt:

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L \cdot |y - \tilde{y}| \tag{2.4}$$

Eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit einer lokalen Lipschitz-Bedingung gibt das folgende
Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : G \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig und bezüglich y stetig partiell differenzierbar. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig bezüglich y.*
Beweis. Sei $(x_0, y_0) \in G$ beliebig. Da G offen ist, existiert ein $r > 0$, sodass

$$U := [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r] \subseteq G$$



U ist eine kompakte (d.h. beschränkte und abgeschlossene) Umgebung von (x_0, y_0). Laut Voraussetzung ist $\partial_y f$ stetig, also ist

$$L := \max_{(x,z)\in U} |\partial_y f(y, z)| < \infty$$

(Stetige Funktionen auf Kompakta sind beschränkt). Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (bzgl. der y-Variable) gilt somit für (x, y), $(x, \tilde{y}) \in U$:

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq \underbrace{\max_{(\bar{x},z)\in U} |\partial_y f(\bar{x}, z)|}_{=:L} \cdot |y - \tilde{y}| = L \cdot |y - \tilde{y}|$$

$\square$

Beispiele:

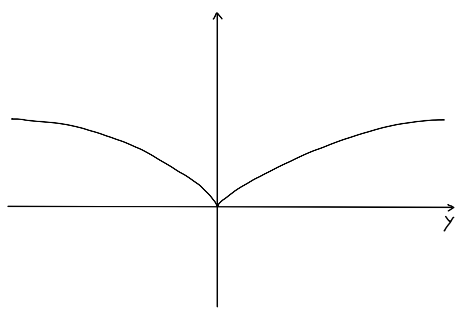
1.) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Nach dem Lemma ist $(x, y) \mapsto f(y)$ (unabhängig von x) in $\mathbb{R} \times I$ Lipschitz-stetig bzgl. y.
2.) $f : (x, y) \mapsto |y|$ ist Lipschitz-stetig bzgl. y (in $\mathbb{R}^2$), weil

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| = ||y| - |\tilde{y}|| \leq |y - \tilde{y}|$$

(umgekehrte Dreiecksungleichung). Allerdings ist f nicht partiell differenzierbar bezüglich y.
3.) $f : (x, y) \mapsto y^{2/3}$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist **nicht** Lipschitz-stetig bei Punkten der Form $(x, 0)$, denn wäre $\forall \tilde{y} \neq 0$

$$\underbrace{|f(x, 0) - f(x, \tilde{y})|}_{=|\tilde{y}|^{2/3}} \leq L \cdot |0 - \tilde{y}| = L \cdot |\tilde{y}|,$$

so würde $1 \leq L \cdot |\tilde{y}|^{1/3}$ folgen, was für $\tilde{y} \to 0$ auf einen Widerspruch führt. Tatsächlich sind die Differenzenquotienten von $y \mapsto y^{2/3}$ nahe 0 unbeschränkt:

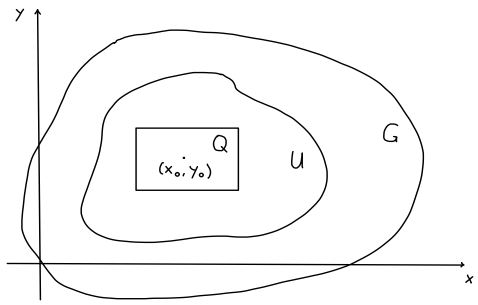


2.4 Der Satz von Picard-Lindelöf

Satz. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f : G \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig und (lokal) Lipschitz-stetig bzgl. y. Dann besitzt für jedes $(x_0, y_0) \in G$ das Anfangswertproblem (2.1):

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0$$

eine eindeutig bestimmte Lösung auf einem Intervall $[x_0 - \beta, x_0 + \beta]$ mit geeignetem $\beta > 0$.
Beweis. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten:
Vorbereitung (Reduktion auf Rechteck statt G)



Aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von f existiert eine Umgebung U von (x_0, y_0), sodass eine Abschätzung (2.4) in $U \cap G$ gilt. Da G offen ist, können wir $U \subseteq G$ erreichen. Wähle nun $a, b > 0$ so klein, dass $Q := [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq U$. Auf Q gilt natürlich ebenfalls die Lipschitz-Bedingung (2.4) mit einer Lipschitz-Konstanten $L \geq 0$. Somit genügt es, die Aussage des Satzes mit Q statt G zu beweisen.

Setze $M := \max_{(x,y) \in Q} |f(x, y)|$; es ist $0 \leq M < \infty$. Falls $M = 0$, so ist $f|_Q = 0$ und die einzige Lösung $\varphi : [x_0 - a, x_0 + a] \to \mathbb{R}$ ist die konstante Lösung $\varphi(x) := y_0$ $(\forall x)$. Wir dürfen daher im Folgenden annehmen, dass $M > 0$. Setze $\beta := \min(a, \frac{b}{M})$; es ist also $0 < \beta \leq a$, $0 < M\beta \leq b$.

1. Schritt (Picard-Iteration)

Setze $I := [x_0 - \beta, x_0 + \beta]$ und definiere stetige Funktionen $\varphi_k : I \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ durch Picard-Iteration (vgl. (2.3)): Für $x \in I$ sei

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &:= y_0 \\ \varphi_{k+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi_k(\tau))\, d\tau \end{aligned}$$

Diese Definition ist sinnvoll, weil $\forall x \in I$: $\varphi_k(x) \in [y_0 - b, y_0 + b] =: J$ (somit $(x, \varphi_k(x)) \in Q$!), wie aus folgender Überlegung ersichtlich ist:

$$\begin{aligned} |\varphi_k(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi_{k-1}(\tau))\, d\tau \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} \underbrace{|f(\tau, \varphi_{k-1}(\tau))|}_{\leq M}\, d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} M\, d\tau \right| = M \cdot |x - x_0| \leq M \cdot \beta \leq b \end{aligned}$$

2. Schritt (Abschätzung der Differenzen)

Behauptung: $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$:

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \leq M \cdot L^k \cdot \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \qquad (A_k)$$

Beweis: induktiv:

$k=0$:

$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)| = |\varphi_1(x)-y_0| = \left|\int_{x_0}^x f(\tau,y_0)\,d\tau\right|$$
$$\le \left|\int_{x_0}^x \underbrace{|f(\tau,y_0)|}_{\le M}\,d\tau\right| \le M\cdot|x-x_0|$$

$k\to k+1$:

$$|\varphi_{k+2}(x)-\varphi_{k+1}(x)| = \left|\int_{x_0}^x (f(\tau,\varphi_{k+1}(\tau))-f(\tau,\varphi_k(\tau)))\,d\tau\right|$$
$$\le \left|\int_{x_0}^x |f(\tau,\varphi_{k+1}(\tau))-f(\tau,\varphi_k(\tau))|\,d\tau\right|$$

Aufgrund der Lipschitz-Bedingung ist hierbei

$$|f(\tau,\varphi_{k+1}(\tau))-f(\tau,\varphi_k(\tau))| \le L\cdot|\varphi_{k+1}(\tau)-\varphi_k(\tau)| \overset{(A_k)}{\le} L\cdot\frac{M\cdot L^k\cdot|\tau-x_0|^{k+1}}{(k+1)!},$$

sodass insgesamt

$$|\varphi_{k+2}(x)-\varphi_{k+1}(x)| \le \frac{M\cdot L^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\left|\int_{x_0}^x |\tau-x_0|^{k+1}\,d\tau\right| = M\cdot L^{k+1}\cdot\frac{|x-x_0|^{k+2}}{(k+2)!}$$

(folgt mittels Fallunterscheidung $x\ge x_0$ und $x<x_0$).

3. Schritt (gleichmäßige Konvergenz von $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$)

$$\varphi_k(x)-y_0 = \varphi_k(x)-\varphi_0(x) = \sum_{l=0}^{k-1}(\varphi_{l+1}(x)-\varphi_l(x))$$

(Teleskopsumme). Die Funktionenreihe $\sum_{l=0}^{\infty}(\varphi_{l+1}(x)-\varphi_l(x))$ ist aber nach dem Satz von Weierstraß (→ Analysis-Vorlesung) gleichmäßig konvergent, weil nach (A_k) gilt:

$$\sup_{x\in I}|\varphi_{l+1}(x)-\varphi_l(x)| \le M\cdot L^l\cdot\frac{\beta^{l+1}}{(l+1)!}$$

und $\sum_{l=0}^{\infty} M\cdot L^l\cdot\frac{\beta^{l+1}}{(l+1)!}$ konvergent ist (Quotiententest). Also ist $(\varphi_k-y_0)_{k\in\mathbb{N}}$ und damit auch $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ selbst gleichmäßig konvergent.
Setze $\varphi(x) := \lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)$ $(x\in I)$. Dann ist φ stetig als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen und nach Schritt 1 ist

$$|\varphi(x)-y_0| = \lim_{k\to\infty}|\varphi_k(x)-y_0| \le b$$

4. Schritt (φ ist Lösung)
Behauptung: $(f(\,.\,,\varphi_k(\,.\,)))_{k\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig konvergent gegen $f(\,.\,,\varphi(\,.\,))$.
Beweis: Da f die Lipschitz-Bedingung erfüllt, gilt

$$|f(x,\varphi_k(x)) - f(x,\varphi(x))| \le L \cdot |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \to 0 \quad \text{gleichmäßig}$$

Daher folgt:

$$\int_{x_0}^{x} f(\tau,\varphi_k(\tau))\,d\tau \to \int_{x_0}^{x} f(\tau,\varphi(\tau))\,d\tau \quad (k\to\infty)$$

und somit:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{k+1}(x) &=& y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(\tau,\varphi_k(\tau))\,d\tau \\ \downarrow & & \qquad\quad \downarrow \\ (k\to\infty) \quad \varphi(x) &=& y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(\tau,\varphi(\tau))\,d\tau, \end{array}$$

Das heißt, dass φ die Integralgleichung (2.2) erfüllt, also nach dem Satz aus 2.1 das Anfangswertproblem (2.1) löst.

5. Schritt (Eindeutigkeit)
Angenommen $\psi : I \to \mathbb{R}$ ist eine weitere Lösung des Anfangswertproblems (2.1). Dann löst ψ auch die Integralgleichung (2.2) (nach dem Satz in 2.1). Wir zeigen durch Induktion, dass $\forall k\in\mathbb{N}\ \forall x\in I$:

$$|\varphi_k(x) - \psi(x)| \le M \cdot L^k \cdot \frac{|x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \qquad (D_k)$$

$k=0$:

$$\begin{aligned} |\varphi_0(x) - \psi(x)| &= |y_0 - \psi(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(\tau,\psi(\tau))\,d\tau\right| \\ &\le \left|\int_{x_0}^{x} \underbrace{|f(\tau,\psi(\tau))|}_{\le M}\,d\tau\right| \le M\cdot|x-x_0| \end{aligned}$$

$k\to k+1$:

$$\begin{aligned} |\varphi_{k+1}(x) - \psi(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} (f(\tau,\varphi_k(\tau)) - f(\tau,\psi(\tau)))\,d\tau\right| \\ &\le \left|\int_{x_0}^{x} |f(\tau,\varphi_k(\tau)) - f(\tau,\psi(\tau))|\,d\tau\right| \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Lipschitz-Bedingung für f ist hierbei

$$|f(\tau,\varphi_k(\tau)) - f(\tau,\psi(\tau))| \leq L \cdot |\varphi_k(\tau) - \psi(\tau)| \overset{(D_k)}{\leq} L \cdot \frac{M \cdot L^k \cdot |\tau - x_0|^{k+1}}{(k+1)!},$$

sodass insgesamt wie im 2. Schritt folgt:

$$|\varphi_{k+1}(x) - \psi(x)| \leq M \cdot L^{k+1} \cdot \frac{|x - x_0|^{k+2}}{(k+2)!}$$

Aus (D_k) folgt nun $\forall x \in I$:

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = \lim_{k\to\infty} |\varphi_k(x) - \psi(x)| \leq \lim_{k\to\infty} M \cdot L^k \cdot \frac{\beta^{k+1}}{(k+1)!} = 0$$

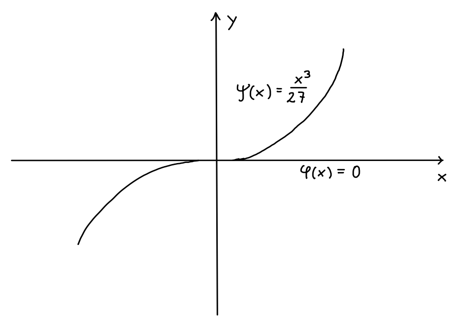
(Summand einer konvergenten Reihe!). Also ist tatsächlich $\varphi = \psi$. $\square$

2.5 Bemerkung. (Nichteindeutigkeit ohne Lipschitz-Bedingung)

Wenn im Anfangswertproblem (AWP) $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ die rechte Seite f nicht Lipschitz-stetig bezüglich y ist, so kann die eindeutige Lösbarkeit tatsächlich verloren gehen: betrachte den Fall $f(y) = y^{2/3}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, d.h. das AWP $y' = y^{2/3}$, $y(0) = 0$ (mit $G = \mathbb{R}^2$), vgl. Bsp. 3.) in 2.3.

- Eine Lösung ist sicherlich durch $\varphi(x) := 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ gegeben.
- Aber auch $\psi(x) := \frac{1}{27}x^3$ ist eine Lösung, denn

$$\psi(0) = 0, \ \psi'(x) = \frac{1}{9}x^2 = \psi(x)^{2/3}$$



Tatsächlich gibt es in diesem Beispiel sogar unendlich viele Lösungen mit Anfangswert 0 (→ Übungen).

2.6 Bemerkung. (Existenz ohne Lipschitz-Bedingung)

Für die Existenz (mindestens) einer Lösung des AWP $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ ist schon die Stetigkeit von f hinreichend (Satz von Peano, s. z.B. Aulbach, §2.2 oder Heuser, §11).

2.7 Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Systeme erster Ordnung

Der Satz 2.4 gilt völlig gleichlautend auch für Systeme, d.h. $f : \mathbb{R}^{n+1} \supseteq G \to \mathbb{R}^n$ stetig, wobei die Bedingung (2.4) der Lipschitz-Stetigkeit bezüglich y ($\in \mathbb{R}^n$) nun so aussieht:

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L \cdot \|y - \tilde{y}\|$$

mit $\|\ \|$ der (euklidischen) Norm von Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Auch der Beweis in 2.4 kann gleichlautend durchgeführt werden, wenn an entsprechenden Stellen Beträge $|\ |$ durch Normen $\|\ \|$ ersetzt werden. Dabei wird $\int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$ komponentenweise verstanden, d.h. für $f = (f_1, \ldots, f_n)$ ist

$$\int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau = \begin{pmatrix} \int_{x_0}^{x} f_1(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau \\ \vdots \\ \int_{x_0}^{x} f_n(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

und die Konvergenz $\varphi_k \to \varphi$ $(k \to \infty)$ findet in jeder Komponente gleichmäßig statt. (Beweise sind in Forster §12 oder Aulbach §2.3 direkt für Systeme formuliert; in Heuser §56 ebenso durch "Übertragung")

2.8 Bedeutung des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für Theorie und Praxis

Theorie:
Auf Basis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes kann in der weiteren Entwicklung der Theorie der Fokus auf die Erforschung qualitativer Eigenschaften von Lösungen gelegt werden, die nicht explizit bekannt sind; Dies führt auf eine Fülle von Approximationsmethoden (Numerik) und bildet einen gesicherten Hintergrund für Computerstudien (Konvergenz und numerische Fehlerschranken) $\leftrightarrow$ Praxis.

Praxis einfacher Modelle:
Wenn eine explizite Lösung mittels irgendeiner Methode gefunden wird, so muss es eben **die** (eindeutige) Lösung sein; vgl. Methode der getrennten Variablen bzw. später weitere spezifische Methoden für gewisse Typen von DGL.

2.9 Reduktion von DGL höherer Ordnung auf Systeme von DGL erster Ordnung

Betrachte eine DGL n. Ordnung:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{2.5}$$

Trick: setze $z_1 := y$, $z_2 := y'$, $\dots$, $z_n := y^{(n-1)}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} z_1' &=& z_2 \\ z_2' &=& z_3 \\ &\vdots& \\ z_{n-1}' &=& z_n \\ z_n' &=& f(x, z_1, \dots, z_n) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ f(x, z_1, \dots, z_n) \end{pmatrix}$$

Mit $z = (z_1, \dots, z_n)$ und $F(x, z) = (z_2, z_3, \dots, z_n, f(x, z_1, \dots, z_n))$ lässt sich dies kurz als

$$z' = F(x, z) \tag{2.6}$$

schreiben.
Beh. 1: Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ Lösung von (2.5), so ist $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

eine Lösung von (2.6).
Beweis. Klar nach obiger Umschreibung. □

Beh. 2: Sei $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n) : I \to \mathbb{R}^n$ Lösung von (2.6). Dann ist $\varphi := \Phi_1 : I \to \mathbb{R}$ ist eine Lösung von (2.5).
Beweis. (2.6) $\Rightarrow \Phi_2 = \Phi_1'$, $\Phi_3 = \Phi_2' = \Phi_1'', \dots, \Phi_n = \Phi_1^{(n-1)}$ (aus Zeilen 1 bis $n-1$).
n. Zeile: $\Phi_1^{(n)} = \Phi_n' = f(x, \Phi_1, \Phi_1', \dots, \Phi_1^{(n-1)})$, d.h. $\varphi^{(n)} = f(x, \varphi, \dots, \varphi^{(n-1)})$, somit (2.5). □

Anfangsdaten:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{2.7}$$

entspricht

$$z(x_0) = (y_0, \dots, y_{n-1}) \tag{2.8}$$

Folgerung: Die Lösungstheorie von (2.5) mit (2.7) ist äquivalent zur Lösungstheorie von (2.6) mit (2.8). Somit gilt ein entsprechender **Existenz- und Eindeutigkeitssatz** stets auch für **DGL höherer Ordnung**, wenn $f(x, z_1, \dots, z_n)$ Lipschitz-stetig bzgl. $(z_1, \dots, z_n)$ ist.

Beispiel:

$$y'' = -y,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$$

$z_1 = y$, $z_2 = y'$; $z_1(0) = y(0) = 1$, $z_2(0) = y'(0) = 2$ ergibt:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} z_2 \\ -z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dieses System ist linear, weil auch die ursprüngliche Gleichung linear ist.
Bemerkung: Entsprechende Reduktion auf System erster Ordnung kann auch auf Systeme von DGL höherer Ordnung angewendet werden: aus N Gleichungen der Ordnung n wird dann ein $N \cdot n$ System erster Ordnung (vgl. z.B. Aulbach §1.4.1).

Kapitel 3

Klassische Methoden für skalare Differentialgleichungen

3.0 Erinnerung an die Methode der getrennten Variablen
Hatten in 1.10: $y' = g(x) \cdot h(y)$, $h(y) \neq 0 \ \forall y \in J$.
Eindeutige Lösung mit $y(x_0) = y_0$ bestimmt durch

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{h(s)} = \int_{x_0}^{x} g(r)\, dr$$

Dies ist eine der klassischen Methoden (spätestens 2. Hälfte des 17. Jahrhunderts).

3.1 Lineare DGL und Variation der Konstanten

Wir betrachten die allgemeine Form einer skalaren linearen DGL erster Ordnung (vgl. 1.9, Bsp. 1):

$$y' = a(x) \cdot y + g(x),$$

wobei a, $g : I \to \mathbb{R}$ stetig, mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ($x_0 \in I$ fix).
Obige DGL heißt **homogene** (lineare) DGL, falls $g = 0$, sonst **inhomogen** (vgl. lineare Gleichungssysteme in der linearen Algebra).

A) Homogene Gleichung

$$y' = a(x) \cdot y, \ y(x_0) = y_0$$

- Kann für $y_0 \neq 0$ durch Trennung der Variablen gelöst werden:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = a(x) \Rightarrow \int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{s} &= \int_{x_0}^{x} a(r)\, dr \\ \Rightarrow \log(y(x)) &= \log(y_0) + \int_{x_0}^{x} a(r)\, dr \\ \Rightarrow y(x) &= y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(r)\, dr} \end{aligned}$$

  Wie man durch Differentiation verifiziert, liefert dies eine Lösung $\forall x \in I$.

- für $y_0 = 0$ ist $y(x) := 0 \ \forall x \in I$ konstante Lösung, die sich auch mit obiger Formel erfassen lässt.

Eindeutigkeit: Setze $\varphi(x) := e^{-\int_{x_0}^{x} a(r)\,dr}$ (sodass also $\varphi'(x) = -a(x) \cdot \varphi(x)$, $\varphi(x_0) = 1$). Angenommen $\psi : I_1 \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls Lösung, $x_0 \in I_1$, $\psi(x_0) = y_0$. Betrachte $\mu(x) := \psi(x) \cdot \varphi(x)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \mu'(x) &= \psi'(x) \cdot \varphi(x) + \psi(x) \cdot \varphi'(x) \\ &= a(x) \cdot \psi(x) \cdot \varphi(x) + \psi(x) \cdot (-a(x) \cdot \varphi(x)) = 0 \\ &\Rightarrow \mu = const = \psi(x_0) \cdot \varphi(x_0) = y_0 \cdot 1 = y_0 \\ &= \psi(x) = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(r)\,dr} \end{aligned}$$

Haben damit gezeigt:
Satz. *Das Anfangswertproblems $y' = a(x) \cdot y$, $y(x_0) = y_0$ ist eindeutig lösbar durch*

$$y(x) = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(r)\,dr}$$

Spezialfall: $\alpha \in \mathbb{R}$, $y' = \alpha \cdot y \Rightarrow y(x) = c \cdot e^{\alpha \cdot (x - x_0)}$, wobei $c = y(x_0)$ beliebig vorgegeben werden kann.

B) Inhomogene Gleichung

$$y' = a(x) \cdot y + g(x), \quad y(x_0) = y_0$$

Idee: $\varphi(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(r)\,dr}$ löst $\varphi'(x) = a(x) \cdot \varphi$, $\varphi(x_0) = 1$.
Ansatz:

$$y(x) = c(x) \cdot \varphi(x).$$

Dabei ist φ eine Lösung der homogenen Gleichung. Statt eines konstanten Faktors wird nun jedoch mit einer Funktion $x \mapsto c(x)$ multipliziert zur Anpassung an die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$: **Variation der Konstanten** (Lagrange 1777). Differenzieren nun diesen Ansatz:

$$\begin{aligned} y'(x) &= c' \cdot \varphi + c \cdot \varphi' = c'\varphi + \underbrace{c \cdot a \cdot \varphi}_{=a \cdot y} \\ &\stackrel{!}{=} a \cdot y + g \ (= a \cdot c \cdot \varphi + g) \\ &\Rightarrow c' \cdot \varphi = g \Rightarrow c'(x) = g(x) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a(r)\,dr} = g(x) \cdot \frac{1}{\varphi(x)} \\ &\Rightarrow c(x) = c_0 + \int_{x_0}^{x} g(s) \underbrace{e^{-\int_{x_0}^{s} a(r)\,dr}}_{=1/\varphi(s)} ds \\ &\Rightarrow y(x) = c(x) \cdot \varphi(x) = \left(c_0 + \int_{x_0}^{x} g(s) e^{-\int_{x_0}^{s} a(r)\,dr}\, ds \right) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(r)\,dr} \end{aligned}$$

Beachte, dass somit $y(x)$ die Summe aus der Lösung $c_0 \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(r)\,dr}$ der homogenen DGL und der Lösung $\int_{x_0}^{x} g(s) e^{-\int_{x_0}^{s} a(r)\,dr}\, ds \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(r)\,dr}$ der inhomogenen DGL ist.

Mittels

$$y_0 \overset{!}{=} y(x_0) = (c_0 + 0) \cdot 1 = c_0$$

erhalten wir schließlich notwendigerweise

$$y(x) := \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} g(s) e^{-\int_{x_0}^{s} a(r)\, dr}\, ds \right) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(r)\, dr}$$

Tatsächlich ist dieses y eine (und damit die) Lösung:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= (y_0 + 0) \cdot 1 = y_0 \text{ und} \\ y'(x) &= (\dots)' \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(r)\, dr} + \underbrace{(\dots) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(r)\, dr}}_{=y(x)} \cdot a(x) \\ &= \left(0 + g(x) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a(r)\, dr} \right) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(r)\, dr} + a(x) \cdot y(x) = g(x) + a(x) \cdot y(x) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

Satz. *Das Anfangswertproblem $y' = a(x) \cdot y + g(x)$, $y(x_0) = y_0$ ist eindeutig lösbar durch die obige Formel bzw. mittels Variation der Konstanten.*

Bemerkung: Merkregel für dieses Verfahren:

1. (Eine) Lösung der homogenen Gleichung ist $e^{\int_{x_0}^{x} a(r)\, dr} =: \varphi(x)$.

2. Variation der Konstanten $y(x) := c(x) \cdot \varphi(x)$ für Lösung der Gleichung $y' = a(x) \cdot y + g(x)$

Beispiel:

$$y' = 2x \cdot y + x^3, \quad y(0) = \beta$$

($\beta \in \mathbb{R}$ beliebig). Hier ist also $a(x) = 2x$, $g(x) = x^3$.
1. Lösung der homogenen Gleichung:

$$y' = 2x \cdot y : \quad \varphi(x) = e^{\int_0^x 2r\, dr} = e^{x^2}$$

2. Variation der Konstanten: $y(x) = c(x) \cdot \varphi(x)$.

$$
\begin{aligned}
y' &= c' \cdot \varphi + c \cdot \varphi' = c' \cdot \varphi + c \cdot 2x \cdot \varphi = e^{x^2} \cdot c' + 2x \cdot y \\
y' &\overset{!}{=} 2x \cdot y + x^3 \Rightarrow e^{x^2} \cdot c' + 2x \cdot y \overset{!}{=} 2x \cdot y + x^3 \\
&\Rightarrow c'(x) = x^3 \cdot e^{-x^2} \Rightarrow c(x) = c_0 + \underbrace{\int_0^x s^3 \cdot e^{-s^2}\, ds}_{Subst: t=s^2,\ dt=2s\,ds} \\
&= c_0 + \int_0^{x^2} e^{-t} \cdot \frac{1}{2} t\, dt \overset{p.I.}{=} c_0 + \frac{1}{2} \cdot (-te^{-t}\Big|_0^{x^2} - \int_0^{x^2} 1 \cdot (-e^{-t})\, dt) \\
&= c_0 + \frac{1}{2}\left(-x^2 e^{-x^2} + \int_0^{x^2} e^{-t}\, dt\right) = c_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-x^2}(1 + x^2) \\
&\Rightarrow y(x) = (c_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-x^2}(1 + x^2)) e^{x^2} \\
\beta &\overset{!}{=} y(0) = (c_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + 0)) \cdot 1 = c_0,
\end{aligned}
$$

somit insgesamt

$$y(x) = (\beta + \frac{1}{2}) \cdot e^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

3.2 Transformationen

Häufig können komplizierte DGL durch geeignete Variablentransformationen in eine Form gebracht werden, die mit Standardmethoden behandelt werden kann. Wir illustrieren dies in zwei speziellen Situationen:

A) Lineare Substitution
Beispiel:

$$y' = 1 - \frac{1}{\cos(y - x + \pi/2)} = g(y - x + \pi/2),$$

wobei $g(r) = 1 - \frac{1}{\cos(r)}$. Setze $z(x) := y(x) - x + \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow z' = y' - 1 = 1 - \frac{1}{\cos(z)} - 1 = -\frac{1}{\cos(z)}$$

Trennung der Variablen:

$$\int \cos(z)\, dz = -x + c \Rightarrow \sin(z) = -x + c$$

Daher (auf geeignetem Intervall abh. von c): $z = \arcsin(c - x)$. Rücksubstitution:

$$
\begin{aligned}
y - x + \frac{\pi}{2} &= \arcsin(c - x) \\
\Rightarrow y(x) &= x - \frac{\pi}{2} + \arcsin(c - x)
\end{aligned}
$$

Allgemein:

$$\boxed{y' = g(\alpha x + \beta y + \gamma)} \qquad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$$

Subst.: $z = \alpha x + \beta y + \gamma \Rightarrow z' = \alpha + \beta \cdot y' = \alpha + \beta \cdot g(z)$, d.h.
$z' = \alpha + \beta \cdot g(z)$ ... autonome DGL, durch Trennung der Variablen lösbar.
Achtung: bei Anfangswertproblemen müssen (x_0, y_0) mittransformiert werden $(z(x_0) = \alpha x_0 + \beta \cdot y_0 + \gamma)$.

B) Homogene Substitution

Beispiel:

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

wobei $g(z) = 1 + z + z^2$. Setze $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, dann folgt:

$$\begin{aligned} z'(x) &= \frac{y'(x) \cdot x - y(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \left(y' - \frac{y}{x}\right) \overset{DGL}{=} \frac{1}{x} \cdot \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \left(1 + z^2\right) \Rightarrow z' = \frac{1 + z^2}{x} \end{aligned}$$

Trennung der Variablen:

$$\int \frac{dz}{1 + z^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \arctan z = \log x + c, \quad z = \tan(\log x + c)$$

Rücksubstitution:

$$\frac{y}{x} = \tan(\log x + c) \Rightarrow y = x \cdot \tan(\log x + c)$$

Allgemein: homogene DGL (nicht verwechseln mit linearer hom. DGL!)

$$\boxed{y' = g\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Substitution:

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow z' = \frac{y' \cdot x - y \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \left(y' - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot (g(z) - z)$$

D.h.:

$$z' = \tfrac{1}{x} \cdot (g(z) - z) \text{ ... mit Trennung der Variablen lösbar.}$$

Anfangswertproblem: aus $y(x_0) = y_0$ wird $z(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$

3.3 Exakte DGL

Idee: DGL für die Niveaulinien einer (stetig differenzierbaren) Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (Höhenlinien, Isobaren, Isothermen, ...), d.h. $x \mapsto y(x)$ so, dass $f(x, y(x)) = const.$

Differentiation: $\partial_x f(x, y(x)) + \partial_y f(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0$. Mit $g := \partial_y f$, $h := \partial_x f$ löst y also eine DGL der Form

$$y' \cdot g(x, y) + h(x, y) = 0$$

Falls $g(x, y) \neq 0$, so können wir dies auch schreiben als

$$y' = -\frac{h(x, y)}{g(x, y)}$$

(Für $y \mapsto x(y)$ ergibt sich analog $\partial_x f \cdot x' + \partial_y f = 0$, d.h. $x' \cdot h(x, y) + g(x, y) = 0$.)

Erinnerung: Im Fall $h = \partial_x f$, $g = \partial_y f$ heißt f **Stammfunktion** für das Vektorfeld (h, g).

Definition. *Seien I, $J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $R := I \times J$ und g, $h : R \to \mathbb{R}$ stetig. Die DGL*

$$\boxed{y' \cdot g(x, y) + h(x, y) = 0}$$

(oft auch geschrieben als $h \cdot dx + g \cdot dy = 0$) heißt **exakt***, falls (h, g) eine Stammfunktion auf R besitzt.*

Aus der Analysis-Vorlesung wissen wir:

1. R ist ein sternförmiges Gebiet (bzw. einfach zusammenhängend). Für g, h stetig differenzierbar existiert daher eine Stammfunktion f für (h, g) genau dann, wenn das Integrabilitätskriterium $\partial_y h = \partial_x g$ erfüllt ist.

2. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt: Für $(x_0, y_0) \in R$ ist die Gleichung $f(x, y) = c$ nahe (x_0, y_0) eindeutig auflösbar mittels $x \mapsto y(x)$, falls $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$.

Lösungsmethode für (exakte) DGL $\boldsymbol{y' \cdot g(x, y) + h(x, y) = 0}$
(auf offenem Rechteck $R = I \times J$)

0. Schritt: Exaktheit prüfen: ist $\partial_y h = \partial_x g$? Wenn ja: weiter.

1. Schritt: Stammfunktion f zu (h, g) suchen: entweder erraten oder konstruieren ($\to$ Analysis-VO!):
Ansatz: $f(x, y) = \int h(x, y)\, dx + \varphi(y) \Rightarrow \partial_x f = h$.
φ anpassen: $\partial_y f = \int \partial_y h\, dx + \varphi'(y) \stackrel{!}{=} g(x, y) \to \varphi$.

2. Schritt: Gleichung $f(x, y) = c$ auflösen nach y.

Bem.: für Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ist $c = f(x_0, y_0)$!

Beispiele:

(1)

$$6x^2 \cdot y' + 12xy + 3 = 0, \quad y(1) = 1$$

in $R =]0, \infty[\times \mathbb{R}$, d.h. $g(x,y) = 6x^2$, $h(x,y) = 12xy + 3$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

0. Schritt: $\partial_y h = 12x$, $\partial_x g = 12x$: OK!

1. Schritt:

$$f(x,y) = \int (12xy + 3)\, dx + \varphi(y) = 6x^2 y + 3x + \varphi(y)$$

$$(\partial_x f = 12xy + 3 \text{ klar}) \quad \partial_y f = 6x^2 + \varphi'(y) \stackrel{!}{=} 6x^2 \Rightarrow \varphi' = 0$$

Somit ist $\varphi = const.$ und wir können $\varphi = 0$ wählen, d.h. eine Stammfunktion ist $f(x,y) = 6x^2 y + 3x$.

2. Schritt:
$f(1,1) = 6 + 3 = 9$. Auflösen von $6x^2 y + 3x = 9$ nach y ergibt $y(x) = \frac{3-x}{2x^2}$.

(2)

$$(x^2 e^y + 1) \cdot y' + 2xe^y - 1 = 0, \quad y(1) = 0$$

d.h., $g(x,y) = x^2 e^y + 1$, $h(x,y) = 2xe^y - 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

0. Schritt: $\partial_y h = 2xe^y$, $\partial_x g = 2xe^y$: OK!

1. Schritt:

$$f(x,y) = \int (2xe^y - 1)\, dx + \varphi(y) = x^2 e^y - x + \varphi(y)$$

$$\partial_y f = x^2 e^y + \varphi'(y) \stackrel{!}{=} x^2 e^y + 1 \Rightarrow \varphi'(y) = 1,$$

wir wählen $\varphi(y) = y$, sodass $f(x,y) = x^2 e^y - x + y$.

2. Schritt: $f(1,0) = 1 - 1 + 0 = 0$,

$$f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 e^y - x + y = 0 \tag{3.1}$$

Wegen $\partial_y f(1,0) = g(1,0) = 1 + 1 = 2 \neq 0$ ist (3.1) zwar theoretisch eindeutig auflösbar nach y als Funktion von x, aber nicht explizit. In diesem Beispiel kann aber statt dessen die Umkehrfunktion $y \mapsto x(y)$ nahe $x(0) = 1$ explizit aufgelöst werden:

$$\begin{aligned}
&x^2 - e^{-y} \cdot x + e^{-y} \cdot y = 0 \\
&x_\pm = \frac{1}{2} e^{-y} \pm \sqrt{\frac{e^{-2y}}{4} - e^{-y} \cdot y} \\
&x_\pm(0) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 0} \Rightarrow x_+(0) = 1,\ x_-(0) = 0
\end{aligned}$$

Die Lösung x_- scheidet daher aus, also ist $x(y) = x_+(y)$ nahe $y = 0$, d.h.:

$$x(y) = \frac{e^{-y}}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 - 4ye^y}\right)$$

Bem.: Jede DGL mit getrennten Variablen ist eine exakte DGL, denn

$$y' = f_1(x)f_2(y), \; f_2(y) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f_2(y)} \cdot y' - f_1(x) = 0, \; \text{d.h.}$$
$$g(x,y) = \frac{1}{f_2(y)}, \; h(x,y) = -f_1(x) \Rightarrow \partial_y h = 0 = \partial_x g$$

3.4 Integrierende Faktoren

Was tun, wenn $y' \cdot g(x,y) + h(x,y) = 0$ nicht exakt ist?

Manchmal funktioniert folgender Trick: suche Funktion $m : R \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto m(x,y)$, $m(x,y) \neq 0 \; \forall (x,y) \in R$ so, dass

$$y' \cdot g \cdot m + h \cdot m = 0 \tag{3.2}$$

exakt ist. Ein solches m heißt **integrierender Faktor** (oder Eulerscher Multiplikator). Die Bedingung an m lautet also:

$$\partial_y(h \cdot m) = \partial_x(g \cdot m) \tag{3.3}$$

Das ist eine partielle DGL für m — in manchen Fällen kann jedoch eine besonders einfache Lösung m (z.B. nur von x oder nur von y abhängig) explizit gefunden werden.

Beispiel.

$$2xy \cdot y' + 4x + 3y^2 = 0, \quad R =]0,\infty[\times \mathbb{R},$$

d.h.: $g(x,y) = 2xy$, $h(x,y) = 4x + 3y^2$. Hier ist $\partial_y h = 6y$, $\partial_x g = 2y \Rightarrow$ nicht exakt.

Suchen daher ein $m(x)$, das (3.3) erfüllt, also

$$\begin{aligned} \partial_y(m \cdot h) &= \partial_x(m \cdot g) \\ m(x) \cdot \partial_y h &= m(x) \cdot \partial_x g + m'(x) \cdot g(x,y) \\ m(x) \cdot 6y &= m(x) \cdot 2y + m'(x) \cdot 2xy \end{aligned}$$
$$\Rightarrow 4y \cdot m(x) = 2xy \cdot m'(x) \overset{\forall y}{\Rightarrow} x \cdot m'(x) = 2 \cdot m(x)$$

Eine Lösung ist $m(x) = x^2$ (erraten oder Trennung der Variablen; $x > 0$). (3.2) lautet nun

$$2x^3 y \cdot y' + 4x^3 + 3x^2y^2 = 0$$

und ist exakt:

$$\partial_y(4x^3 + 3x^2y^2) = 6x^2y = \partial_x(2x^3y)$$

Eine Stammfunktion ist $f(x,y) = x^4 + x^3y^2$. Die Lösungen erfüllen also $x^4 + x^3y^2 = c$.

Kapitel 4

Lineare Differentialgleichungen und Systeme

Wir teilen dieses Kapitel in drei Abschnitte:

4.A Allgemeine lineare Theorie

Wegen 2.9 beschränken wir uns auf lineare Systeme von DGL 1. Ordnung, d.h.:

$$y' = A(x) \cdot y + b(x),$$

wobei $A : I \to M(n, \mathbb{R})$ (Raum der $n \times n$-Matrizen) stetig, I ein Intervall, $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig.

4.B Skalare lineare DGL beliebiger Ordnung n mit konstanten Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), d.h.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 \cdot y = b(x)$$

Wir verlangen $a_n \neq 0$, daher o.B.d.A. $a_n = 1$ (sonst: dividieren). Wir behandeln diesen Fall gesondert, weil er wichtig für viele Anwendungen ist (Schwingungen, Balkenbiegung,...)

4.C Lineare Systeme von DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, d.h.

$$y' = A \cdot y + b(x),$$

wobei $A \in M(n, \mathbb{R})$ (konstant), $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig.

4.A Allgemeine lineare Theorie

4.1 Definition. *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $b : \overline{I} \to \mathbb{R}^n$ stetig und*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} : \overline{I} \to M(n, \mathbb{R})$$

stetig (d.h. jedes a_{ij} stetig). Dann heißt

$$y' = A(x) \cdot y \tag{4.1}$$

ein **homogenes** *lineares DGL-System und*

$$y' = A(x) \cdot y + b(x) \tag{4.2}$$

ein **inhomogenes** *lineares DGL-System.* (4.1) *heißt auch das dem System* (4.2) *zugeordnete homogene System.*

4.2 Existenz und Eindeutigkeit globaler Lösungen

Die Abbildung $f(x,y) := A(x) \cdot y + b(x)$ erfüllt stets eine Lipschitz-Bedingung (auf jedem beschränkten Teilintervall von I, somit I o.B.d.A. beschränkt):

$$\|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\| = \|A(x) \cdot (y - \tilde{y})\| \leq \|A(x)\|_{op} \cdot \|y - \tilde{y}\| \leq \underbrace{\sup_{z \in \overline{I}} \|A(z)\|_{op}}_{=:L} \cdot \|y - \tilde{y}\|$$

global auf ganz I (mit $\| \ \|_{op}$ der Operatornorm). Somit kann der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf (siehe 2.4) auf $\overline{I} \times \mathbb{R}^n$ statt Q geführt werden. (Genauer: ersetze dort in Schritt 1 $[x_0 - \beta, x_0 + \beta]$ durch das jetzige I und setze in Schritt 2 $M := \sup_{x \in I} |f(x, y_0)|$. In Schritt 3 ersetze β durch die Länge von I. In Schritt 5 sei schließlich $M := \sup_{\tau \in I} |f(\tau, \psi(\tau))|$ und erneut β die Länge von I). Damit folgt: $\forall x_0 \in I \ \forall y_0 \in \mathbb{R}^n$ existiert genau eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ von (4.2) mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$. Insbesondere existiert die Lösung also auf ganz I!

4.3 Homogene Gleichungen

Satz: Es sei L_H die Menge aller Lösungen der homogenen Gleichung (4.1)

$$y' = A(x) \cdot y$$

(d.h. $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar mit $\varphi'(x) = A(x) \cdot \varphi(x)$). Dann ist L_H ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Beweis.

1.) L_H ist ein Teil-VR des VR aller Abb. $I \to \mathbb{R}^n$:

- Offenbar ist $0 \in L_H$.
- $\varphi, \ \psi \in L_H \Rightarrow \varphi + \psi$ ist differenzierbar und

  $$(\varphi + \psi)'(x) = \varphi'(x) + \psi'(x) = A(x) \cdot \varphi(x) + A(x) \cdot \psi(x) = A(x) \cdot (\varphi + \psi)(x),$$

  also ist $\varphi + \psi \in L_H$.

- $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi \in L_H \Rightarrow \lambda \cdot \varphi$ ist differenzierbar und

$$(\lambda\varphi)'(x) = \lambda\varphi'(x) = \lambda \cdot A(x) \cdot \varphi(x) = A(x) \cdot (\lambda\varphi)(x),$$

  sodass $\lambda \cdot \varphi \in L_H$.

2.) Seien $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in L_H$, dann sind äquivalent:

(a) $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ ist linear unabhängig über $\mathbb{R}$.

(b) $\exists x_0 \in I$: $\{\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_k(x_0)\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$.

(c) $\forall x_0 \in I$: $\{\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_k(x_0)\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$.

Bew.: Beachte: (a) bedeutet:

$$[\forall x \in I: \ \lambda_1\varphi_1(x) + \cdots + \lambda_k\varphi_k(x) = 0] \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$$

Daher ist (c)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(a) klar.
(a)$\Rightarrow$(c): indirekt: ang. $\exists x_0 \in I$: $\{\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_k(x_0)\}$ linear abhängig. Dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, nicht alle 0, sodass $\lambda_1\varphi_1(x_0) + \cdots + \lambda_k\varphi_k(x_0) = 0$. Sei nun $\varphi := \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_k\varphi_k$. Dann ist $\varphi \in L_H$ nach 1.) und $\varphi(x_0) = 0$.
Aufgrund der Eindeutigkeit in 4.2 ist somit $\varphi \equiv 0$, im Widerspruch zu (a).
3.) $\dim L_H = n$:
Bezeichne $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und sei $x_0 \in I$. Nach 4.2 existieren Lösungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L_H$ mit $\varphi_j(x_0) = e_j$. Da $\{e_1, \ldots, e_n\}$ linear unabhängig ist, ist nach 2.) auch $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ linear unabhängig. Somit ist $\dim L_H \geq n$.
Wäre andererseits $\dim L_H > n$ $\exists \psi_1, \ldots, \psi_{n+1} \in L_H$: $\{\psi_1, \ldots, \psi_{n+1}\}$ linear unabhängig. Nach 2.) folgt daraus für $x_0 \in I$: $\{\psi_1(x_0), \ldots, \psi_{n+1}(x_0)\}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$, ein Widerspruch. $\square$

Eine Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ von L_H heißt (Lösungs-) **Fundamentalsystem** der homogenen DGL $y' = A(x) \cdot y$. Eine beliebige Lösung $\varphi \in L_H$ lässt sich dann mit geeigneten Konstanten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ darstellen durch

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + \cdots + c_n \cdot \varphi_n.$$

Schreiben wir die φ_j als Spaltenvektoren einer Matrix

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

so ergibt sich kurz

$$\boxed{\varphi = \Phi \cdot c}$$

Bem: (i) Es gilt

$$\Phi' = (\varphi_1' \dots \varphi_n') = (A \cdot \varphi_1 \dots A \cdot \varphi_n) = A \cdot \Phi$$

(ii) Sind $\psi_1, \dots, \psi_n \in L_H$, dann gilt [mit Hilfe von 2.) im obigen Beweis]

$$\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \text{ linear unabhängig} \Leftrightarrow \exists x_0 \in I : \ \det(\psi_1(x_0) \dots \psi_n(x_0)) \neq 0.$$

Beispiel: Betrachte für $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y_1' &= -\omega \cdot y_2 \\ y_2' &= \omega \cdot y_1, \end{aligned}$$

d.h.,

$$y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Wie man leicht nachrechnet, sind

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos(\omega x) \\ \sin(\omega x) \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega x) \\ \cos(\omega x) \end{pmatrix}$$

Lösungen. Wegen

$$\det(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \det \begin{pmatrix} \cos(\omega x) & -\sin(\omega x) \\ \sin(\omega x) & \cos(\omega x) \end{pmatrix} = 1$$

ist $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein Fundamentalsystem und für alle $\varphi \in L_H$ gilt: $\exists\ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos(\omega x) & -\sin(\omega x) \\ \sin(\omega x) & \cos(\omega x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega x) \\ \sin(\omega x) \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\omega x) \\ \cos(\omega x) \end{pmatrix}$$

4.4 Inhomogene Gleichungen

Satz: *Es sei L_I die Menge aller Lösungen der inhomogenen Gleichung* (4.2)

$$y' = A(x) \cdot y + b(x).$$

Dann gilt für $\psi_0 \in L_I$ beliebig: $L_I = \{\psi_0\} + L_H$, d.h.: die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL (4.2) *ist Summe einer (beliebigen) speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung.*

Beweis.
1.) $L_I \subseteq \{\psi_0\} + L_H$:
Sei $\psi \in L_I$ beliebig und setze $\varphi := \psi - \psi_0$. Dann folgt:

$$\varphi' = \psi' - \psi_0' = (A\psi + b) - (A\psi_0 + b) = A(\psi - \psi_0) = A \cdot \varphi.$$

Somit ist $\varphi \in L_H$, also $\psi = \psi_0 + \varphi \in \{\psi_0\} + L_H$.
2.) $\{\psi_0\} + L_H \subseteq L_I$: Sei $\psi \in \{\psi_0\} + L_H$, d.h. $\exists \varphi \in L_H$ mit $\psi = \psi_0 + \varphi$; dann gilt:

$$\psi' = \psi_0' + \varphi' = A \cdot \psi_0 + b + A \cdot \varphi = A \cdot (\psi_0 + \varphi) + b = A \cdot \psi + b,$$

also ist $\psi \in L_I$. $\square$

Somit stellt sich die Frage, wie wir ein $\psi \in L_I$ finden können:

Variation der Konstanten

Sei $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ein Lösungs-Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $y' = A(x) \cdot y$.
Ansatz: $\psi(x) := \Phi(x) \cdot u(x)$ mit $u : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Wegen Bem. (i) in 4.3 gilt:

$$\psi' = \Phi' \cdot u + \Phi \cdot u' = A \cdot \Phi \cdot u + \Phi \cdot u'$$

Außerdem soll gelten:

$$\psi' \stackrel{!}{=} A\psi + b = A \cdot \Phi \cdot u + b,$$

sodass also $\Phi \cdot u' = b$ sein soll. Nun ist $\Phi(x)$ invertierbar (weil $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ lin. unabh. $\Rightarrow \det \Phi(x) \neq 0 \ \forall x \in I$), also folgt $u'(x) = \Phi(x)^{-1} \cdot b(x)$ und damit:

$$u(x) = \text{const} + \int_{x_0}^{x} \Phi(r)^{-1} \cdot b(r) \, dr$$

(komponentenweises Integral). Eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist also gegeben durch

$$\psi(x) = \Phi(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \Phi(r)^{-1} \cdot b(r) \, dr$$

(Probe durch Differentiation!).

Beispiel: $I = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$, $n = 2$ und

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1 + x, \end{aligned}$$

d.h.,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A(x)} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}}_{b(x)}$$

Nach dem Bsp. in 4.3 mit $\omega = 1$ ist ein Fundamentalsystem gegeben durch

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad \text{und daher } \Phi(x)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Daher gilt:

$$\Phi(r)^{-1}\cdot b(r) = \begin{pmatrix} \cos r & \sin r \\ -\sin r & \cos r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin r \\ r\cos r \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u(x) = \int_0^x \begin{pmatrix} r\sin r \\ r\cos r \end{pmatrix} dr = \begin{pmatrix} \int_0^x r\sin r\, dr \\ \int_0^x r\cos r\, dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\cos x + \sin x \\ x\sin x + \cos x \end{pmatrix}$$

Somit ist eine spezielle Lösung gegeben durch

$$\psi(x) = \Phi(x)\cdot u(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x\cos x + \sin x \\ x\sin x + \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung ist

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \qquad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

4.5 Ein Wort zu skalaren DGL der Ordnung n

Betrachte:

$$Ly := y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\cdot y' + a_0(x)\cdot y = b(x)$$

Dabei sind $a_0, \dots, a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ stetig. Für $b = 0$ erhalten wir die entsprechende homogene Gleichung. Gemäß 2.9 ist obige DGL äquivalent zu dem linearen System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -a_0\cdot y_1 - a_1\cdot y_2 - \dots - a_{n-1}\cdot y_n + b \end{aligned}$$

Jeder Lösung $(y_1, \dots, y_n)$ entspricht $y_j = \varphi^{(j-1)}$, wobei $\varphi = y_1$ Lösung der skalaren DGL (und umgekehrt).

Somit gilt:

1. $L_H = \{\varphi : I \to \mathbb{R}$ n-mal diff.bar : $L\varphi = 0\}$ ist n-dimensionaler Vektorraum.

2. $L_I = \{\varphi : I \to \mathbb{R}$ n-mal diff.bar : $L\varphi = b\} \Rightarrow \forall \psi_0 \in L_I :\ L_I = \{\psi_0\} + L_H$.

3. Für $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_H$ gilt: $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ linear unabhängig

$$\Leftrightarrow \exists x \in I :\ W(x) := \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

[$\Leftrightarrow \forall x \in I : W(x) \neq 0$ wegen 4.3, Punkt 2. im Bew. des Satzes]. W heißt **Wronski-Determinante**.

Beispiel:
a)
$$y'' - \frac{1}{2x} \cdot y' + \frac{1}{2x^2} \cdot y = 0 \qquad (I =]0, \infty[)$$
besitzt die Lösungen $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = \sqrt{x}$ (nachrechnen). Es ist
$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & \sqrt{x} \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{x}}{2} \neq 0$$
auf $]0, \infty[$ $\Rightarrow$ $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ist Basis von L_H, d.h. $\forall \varphi \in L_H \ \exists! c_1,\ c_2 \in \mathbb{R} : \varphi(x) = c_1 \cdot x + c_2 \cdot \sqrt{x}$.
b)
$$y'' - \frac{1}{2x} \cdot y' + \frac{1}{2x^2} \cdot y = 1 \qquad (I =]0, \infty[)$$
Dies ist eine inhomogene Gleichung. Die zugehörige homogene Gleichung wurde in a) behandelt. Wir benötigen daher nur noch eine spezielle Lösung. Wir versuchen es mit $\psi_0(x) = \gamma \cdot x^\alpha$, $\alpha > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir:
$$\begin{aligned} 1 &\overset{!}{=} \psi_0'' - \frac{1}{2x}\psi_0' + \frac{1}{2x^2} \cdot \psi_0 = \gamma\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - \gamma\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-2} + \gamma\frac{1}{2}x^{\alpha-2} \\ &= \gamma(\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}) \cdot x^{\alpha-2} \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow \gamma = \frac{2}{3} \end{aligned}$$
Durch Nachrechnen bestätigt man leicht, dass $\psi_0(x) = \frac{2}{3} \cdot x^2$ tatsächlich eine Lösung ist. Somit lautet die allgemeine Lösung:
$$\psi(x) = \frac{2}{3}x^2 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot \sqrt{x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

4.B Skalare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten

4.6 Fallstudie: Schwingungen mit Dämpfung

Vorbemerkung: in Naturwissenschaft und Technik werden (eindimensionale) Schwingungen durch Auslenkung $u(t)$ zur Zeit t beschrieben. Sie gehorchen einer DGL der Form
$$\ddot{u}(t) + a \cdot \dot{u}(t) + b \cdot u(t) = f(t)$$
Dabei ist
$\ddot{u}(t)$ ... Beschleunigung
$a \cdot \dot{u}(t)$ ... Reibung
$b \cdot u(t)$ ... Rückstellkraft
$f(t)$ ... (äußere) Zwangskraft (für $f = 0$ liegt eine freie Schwingung vor)
Spezialfall $f = 0$, $a = 0$: $\ddot{u} = -b \cdot u$ ... **harmonischer Oszillator**

Beispiel: $\alpha \geq 0$,

$$\ddot{u} + 2\alpha \cdot \dot{u} + u = 0$$

Diese DGL beschreibt eine freie Schwingung mit Dämpfungsfaktor 2α (normierte Rückstellkraft). Da sie linear, homogen und 2. Ordnung ist, genügt es, zwei linear unabhängige Lösungen zu kennen.

Ansatz:

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$ (vgl.: $e^{it} = \cos t + i \sin t$ ...typ. Schwingung). Einsetzen in die DGL ergibt

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + 2\alpha \cdot \lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t} \overset{!}{=} 0$$

Wegen $e^{\lambda t} \neq 0$ muss λ daher eine Nullstelle des **charakteristischen Polynoms**

$$\lambda^2 + 2\alpha \cdot \lambda + 1$$

sein, das man erhält, indem man in der DGL $u^{(k)}$ durch λ^k ersetzt. Somit ist

$$\lambda_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$$

und wir haben 4 Fälle zu unterscheiden: $\alpha = 0$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, sowie $\alpha > 1$.

1. Fall: $\boldsymbol{\alpha = 0}$ (keine Dämpfung): $\boldsymbol{\lambda_{\pm} = \pm i}$

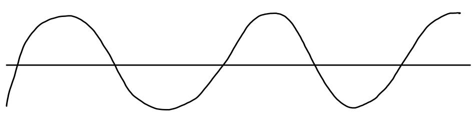
Es ist dann $\varphi_+(t) = e^{it}$, $\varphi_-(t) = e^{-it} \rightsquigarrow$ 'reell machen' ($\overline{\varphi_-} = \varphi_+$): setze

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \mathrm{Re}(\varphi_+(t)) = \frac{1}{2}(\varphi_+(t) + \varphi_-(t)) = \cos t \\ \varphi_2(t) &= \mathrm{Im}(\varphi_+(t)) = \frac{1}{2i}(\varphi_+(t) - \varphi_-(t)) = \sin t \end{aligned}$$

Diese Lösungen sind linear unabhängig (nachrechnen oder Wronski-Determinante). Die allgemeine Lösung lautet daher:

$$u(t) = c_1 \cdot \cos t + c_2 \cdot \sin t$$

Sie ist periodisch!



2. Fall: $0 < \alpha < 1$ (schwache Dämpfung): $\lambda_\pm = -\alpha \pm i\sqrt{1-\alpha^2}$

Wir setzen $\omega := \sqrt{1-\alpha^2} > 0$. Dann ist $\varphi_+(t) = e^{-\alpha t} \cdot e^{i\omega t}$, $\varphi_-(t) = e^{-\alpha t} \cdot e^{-i\omega t}$. Wie im ersten Fall ist $\overline{\varphi_-} = \varphi_+$ und wir setzen

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \mathrm{Re}(\varphi_+(t)) = \frac{1}{2}(\varphi_+(t) + \varphi_-(t)) = e^{-\alpha t}\cos(\omega t) \\
\varphi_2(t) &= \mathrm{Im}(\varphi_+(t)) = \frac{1}{2i}(\varphi_+(t) - \varphi_-(t)) = e^{-\alpha t}\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

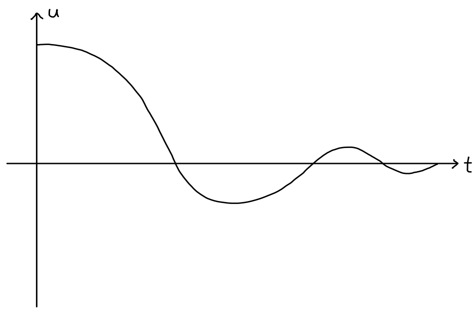
Diese Lösungen sind linear unabhängig, weil für die Wronski-Determinante gilt:

$$\begin{aligned}
W(t) &= \det\begin{pmatrix} e^{-\alpha t}\cos(\omega t) & e^{-\alpha t}\sin(\omega t) \\ -\alpha e^{-\alpha t}\cos(\omega t) - \omega e^{-\alpha t}\sin(\omega t) & -\alpha e^{-\alpha t}\sin(\omega t) + \omega e^{-\alpha t}\cos(\omega t) \end{pmatrix} \\
&= e^{-2\alpha t} \cdot \det\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) & \omega\cos(\omega t) \end{pmatrix} = \omega e^{-2\alpha t} \neq 0
\end{aligned}$$

Somit lautet die allgemeine Lösung:

$$u(t) = e^{-\alpha t} \cdot (c_1\cos(\omega t) + c_2 \cdot \sin(\omega t))$$

Hier stellt der erste Faktor die Amplitude dar, die gegen 0 strebt (Dämpfung), während der zweite periodisch ist.



3. Fall: $\alpha = 1$ (aperiodischer Grenzfall): $\lambda_\pm = -1$

In diesem Fall erhalten wir wegen $\varphi_+(t) = \varphi_-(t) = e^{-t}$ zunächst nur eine Lösung. Idee: Betrachte

$$\lambda_\pm = -1 = \lim_{\alpha \searrow 1}(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1})$$

als Grenzfall des 4. Falles ($\alpha > 1$). [Beachte: Grenzfall des 2. Falles

$$-1 = \lim_{\alpha \nearrow 1}(-\alpha \pm i\sqrt{1-\alpha^2})$$

ist weniger geeignet, weil hier eine Folge aus dem Komplexen zur reellen Achse konvergiert.]

Werden diesen Fall daher nach dem 4. Fall nochmals behandeln.

4. Fall: $\boldsymbol{\alpha > 1}$ (starke Dämpfung): $\boldsymbol{\lambda_\pm = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}}$

Hier ist $\lambda_- < \lambda_+ < 0$, und $\varphi_+(t) = e^{\lambda_+ \cdot t}$, $\varphi_-(t) = e^{\lambda_- \cdot t}$ sind reell. $\{\varphi_+, \varphi_-\}$ ist linear unabhängig:

$$\begin{aligned} W(t) &= \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_- \cdot t} & e^{\lambda_+ \cdot t} \\ \lambda_- \cdot e^{\lambda_- \cdot t} & \lambda_+ \cdot e^{\lambda_+ \cdot t} \end{pmatrix} = e^{(\lambda_- + \lambda_+) \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_- & \lambda_+ \end{pmatrix} \\ &= e^{(\lambda_- + \lambda_+) \cdot t} (\lambda_+ - \lambda_-) \neq 0 \end{aligned}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung in diesem Fall:

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_- \cdot t} + c_2 e^{\lambda_+ \cdot t}$$

(sog. **Kriechfall**).

Nochmals Fall 3: $\boldsymbol{\alpha = 1}$ (aperiodischer Grenzfall): $\boldsymbol{\lambda_\pm = -1}$

$\varphi_1(t) = \varphi_+(t) = \varphi_-(t) = e^{-t}$ und wir versuchen eine zweite Lösung φ_2 aus einem Grenzwert $\alpha \searrow 1$ von Linearkombinationen von Lösungen gemäß dem 4. Fall zu gewinnen.
Für jedes $\alpha > 1$ ist

$$\psi_\alpha(t) := \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \cdot \left(e^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})t} - e^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})t} \right)$$

eine Lösung von $\ddot{u} + 2\alpha \dot{u} + u = 0$. Setze $\beta := \sqrt{\alpha^2 - 1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(t) &= e^{-\alpha t} \cdot \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2\beta} = e^{-\alpha t} \cdot \frac{\sinh(\beta t)}{\beta} = e^{-\alpha t} \cdot t \cdot \frac{\sinh(\beta t) - \sinh(0)}{\beta t} \\ &\to e^{-t} \cdot t \cdot \sinh'(0) = t \cdot e^{-t} \qquad [\alpha \searrow 1,\ \beta \searrow 0] \end{aligned}$$

D.h., $\varphi_2(t) := \lim_{\alpha \searrow 1} \psi_\alpha(t) = t \cdot e^{-t}$.

- φ_2 ist tatsächlich Lösung von $\ddot{u} + 2\dot{u} + u = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi_2'(t) &= e^{-t} - te^{-t} = (1-t)e^{-t} \\ \varphi_2''(t) &= -e^{-t} - e^{-t} + te^{-t} = -2e^{-t} + te^{-t} \\ &\Rightarrow \varphi_2'' + 2\varphi_2' + \varphi_2 = e^{-t}(-2 + t + 2(1-t) + t) = 0 \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} W(t) &= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & (1-t) \end{pmatrix} = e^{-2t}(1 - t + t) = e^{-2t} \neq 0 \end{aligned}$$

  Somit ist $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ linear unabhängig.

Somit ist die allgemeine Lösung

$$u(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-t}$$

Zusammenfassend:

Seien λ_-, λ_+ die (i.A. komplexen!) Nullstellen von $\lambda^2 + 2\alpha \cdot \lambda + 1$.

- $\lambda_- \neq \lambda_+$: Grundlösungen $\varphi_-(t) = e^{\lambda_- \cdot t}$, $\varphi_+(t) = e^{\lambda_+ \cdot t}$. Falls λ_-, λ_+ reell $\Rightarrow \varphi_1 := \varphi_-$, $\varphi_2 := \varphi_+$ sind linear unabhängige Lösungen. Andernfalls können sie durch Übergang zu Real- und Imaginärteil reellwertig gemacht werden (beachte $\overline{\lambda_-} = \lambda_+ \Rightarrow \overline{\varphi_-} = \varphi_+$) durch

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \mathrm{Re}(\varphi_+) = \frac{1}{2}(\varphi_+ + \varphi_-) \\ \varphi_2(t) &= \mathrm{Im}(\varphi_+) = \frac{1}{2i}(\varphi_+ - \varphi_-) \end{aligned}$$

- $\lambda_- = \lambda_+ =: \lambda_0$ (doppelte Nullstelle; muss reell sein): dann sind $\varphi_1(t) = e^{\lambda_0 \cdot t}$, $\varphi_2(t) = t \cdot e^{\lambda_0 \cdot t}$ linear unabhängige Lösungen.

4.7 Homogene Gleichung der Ordnung $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$

Seien $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Wir studieren die DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0 \tag{4.3}$$

Mit $D = \frac{d}{dx}$ können wir die linke Seite dieser Gleichung schreiben als

$$\begin{aligned} D^n y + &a_{n-1} \cdot D^{n-1} y + \cdots + a_1 \cdot Dy + a_0 \cdot y \\ &= (D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0) y =: P(D) y \end{aligned}$$

Hierbei ist $P(D)$ ein Polynom in der 'Variable' D.

Idee: versuche Lösungsansatz mit $\varphi(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
Beobachtung: $D\varphi = \lambda \cdot \varphi$, $D^2 \varphi = \lambda^2 \cdot \varphi$, etc., daher:

$$P(D)\varphi = P(\lambda) \cdot \varphi$$

Daher gilt:

$$\boxed{e^{\lambda x} \text{ (komplexe) Lösung von (4.3)} \Leftrightarrow P(\lambda) = 0}$$

Definition. *$P(\lambda)$ heißt charakteristisches Polynom für die DGL* (4.3).

Wegen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ ist $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow P(\overline{\lambda}) = 0$. Somit können aus zwei (echt) komplexen Lösungen $e^{\lambda x}$, $e^{\overline{\lambda} x}$ stets die zwei Lösungen $\mathrm{Re}(e^{\lambda x})$, $\mathrm{Im}(e^{\lambda x})$ gewonnen werden, d.h. für $\lambda = \mu + i\nu$ mit $\nu \neq 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \mathrm{Re}(e^{\lambda x}) = \mathrm{Re}(e^{\mu x} \cdot e^{i\nu x}) = e^{\mu x} \cdot \cos(\nu x) \\ \varphi_2(x) &= \mathrm{Im}(e^{\lambda x}) = \mathrm{Im}(e^{\mu x} \cdot e^{i\nu x}) = e^{\mu x} \cdot \sin(\nu x) \end{aligned}$$

Wir konstruieren nun ein Lösungs-Fundamentalsystem für (4.3) durch Betrachtung aller (verschiedenen) Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ $(1 \le m \le n)$ des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$: λ_j habe Vielfachheit k_j $(1 \le k_j \le n)$. Es ist $k_1 + \dots + k_m = n$ (Fundamentalsatz der Algebra!).

1. Einfache Nullstellen: d.h. jene λ_j mit $k_j = 1$

a) λ_j reell: setze $\varphi_{j0}(x) := e^{\lambda_j x}$.

b) $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: dann ist auch $\overline{\lambda_j}$ Nullstelle und einfach. Weiters ist $\lambda_j \neq \overline{\lambda_j}$, weil $\lambda_j \notin \mathbb{R}$. Daher existiert ein l mit $\overline{\lambda_j} = \lambda_l$ in obiger Aufzählung. Setze $\varphi_{j0}(x) := \mathrm{Re}(e^{\lambda_j x})$, $\varphi_{l0}(x) := \mathrm{Im}(e^{\lambda_j x})$ $(= -\mathrm{Im}(e^{\lambda_l x}))$.

Dadurch erhalten wir insgesamt für jede einfache Nullstelle λ_j eine entsprechende Lösung φ_{j0}.

2. Mehrfache Nullstellen: d.h. jene λ_j mit $k_j > 1$

Erinnere: μ Nullstelle von $P(\lambda)$ der Vielfachheit $k \Leftrightarrow \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^q P(\lambda)\Big|_{\lambda=\mu} = 0$ für $q = 0, \dots, k-1$. Beobachtung: $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^l (e^{\lambda x}) = x^l e^{\lambda x}$.

Behauptung: $\tilde{\varphi}_{jl}(x) := x^l \cdot e^{\lambda_j x}$ $(0 \le l \le k_j - 1)$ sind Lösungen von (4.3).

Beweis.

$$\begin{aligned}
P(D)\tilde{\varphi}_{jl}(x) &= P(D_x)(x^l e^{\lambda_j x}) = P(D_x)\left(\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^l (e^{\lambda x})\Big|_{\lambda=\lambda_j}\right) \\
&= \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^l \left(P(D_x)(e^{\lambda x})\right)\Big|_{\lambda=\lambda_j} = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^l \left(e^{\lambda x} \cdot P(\lambda)\right)\Big|_{\lambda=\lambda_j} \\
&= \sum_{q=0}^{l} \binom{l}{q} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{l-q} (e^{\lambda x})\Big|_{\lambda=\lambda_j} \cdot \underbrace{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^q P(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_j}}_{=0 \text{ weil } q \le l < k_j} = 0
\end{aligned}$$

□

Wir unterscheiden folgende Fälle:

a) λ_j reell: setze $\varphi_{jl} := \tilde{\varphi}_{jl}$ $(l = 0, 1, \dots, k_j - 1)$

b) $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: wie in 1. ist $\overline{\lambda_j} = \lambda_r$ für passendes r (und es ist dann $k_r = k_j$). In diesem Fall setzen wir

$$\begin{aligned}
\varphi_{jl} &:= \mathrm{Re}(\tilde{\varphi}_{jl}) \ (l = 0, \dots, k_j - 1), \\
\varphi_{rl} &:= \mathrm{Im}(\tilde{\varphi}_{jl}) \ (l = 0, \dots, k_r - 1)
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir $k_1+\cdots+k_m = n$ Lösungen $\{\varphi_{jl} : j = 1, \ldots, m;\ 0 \leq l \leq k_j - 1\} =: \mathcal{L}$.

Behauptung: $\mathcal{L}$ ist linear unabhängig und somit eine Basis des Lösungsraumes L_H der DGL (4.3).

Beweis. [Für den Fall $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Analog für komplexe λ_j]
Jede $\mathbb{R}$-Linearkombination von Funktionen aus $\mathcal{L}$ lässt sich schreiben in der Form

$$\Phi(x) := \sum_{j=1}^{m} p_j(x) \cdot e^{\lambda_j x},$$

wobei p_j Polynom vom Grad $\leq k_j - 1$ [eig.: $\mathbb{C}$-Linearkombination der $\tilde{\varphi}_{jl}$: Übersetzung wie oben...].

Wir zeigen induktiv: $\Phi = 0$ (Nullfunktion) $\Rightarrow p_1 = \cdots = p_m = 0$.

$m = 1 : p_1(x) \cdot e^{\lambda_1 x} = 0\ \forall x \Rightarrow p_1(x) = 0\ \forall x \Rightarrow p_1 = 0$.

$m \to m + 1 : \sum_{j=1}^{m+1} p_j(x)e^{\lambda_j x} = 0\ \forall x$. Multiplizieren mit $e^{-\lambda_{m+1} \cdot x}$:

$$0 = \sum_{j=1}^{m} p_j(x)e^{\nu_j x} + p_{m+1}(x) \quad \forall x, \tag{4.4}$$

wobei $\nu_j = \lambda_j - \lambda_{m+1}$ $(j = 1, \ldots, m)$. Alle λ_j verschieden $\Rightarrow \nu_j \neq 0\ \forall j$ und $\nu_1, \ldots, \nu_m$ verschieden. Beachte:

$$\frac{d}{dx}(p(x)e^{\lambda x}) = (p'(x) + \lambda \cdot p(x)) \cdot e^{\lambda x},$$

sodass

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^l (p_j(x)e^{\nu_j x}) = q_j(x) \cdot e^{\nu_j x}, \tag{4.5}$$

wobei q_j vom selben Grad wie p_j ist.

$\left(\frac{d}{dx}\right)^l$ in (4.4) mit $l > \text{Grad}(p_{m+1})$ ergibt dann

$$0 = \sum_{j=1}^{m} q_j(x)e^{\nu_j x} \quad \forall x$$

und die Induktionsannahme (mit q_j statt p_j, ν_j statt λ_j) ergibt $q_1 = \cdots = q_m = 0$. Da q_j vom selben Grad wie p_j ist, müssen die p_j konstant sein für $1 \leq j \leq m$. Damit folgt aus (4.5), dass $p_j = 0$ für $1 \leq j \leq m$. Mit (4.4) folgt daraus schließlich $p_{m+1} = 0$. $\square$

Beispiel:

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + 8y' + 16y = 0$$

Hier ist

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^5 + 4\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda + 16 \\ &= (\lambda+2)^3(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = (\lambda+2)^3(\lambda - 1 + i)(\lambda - 1 - i), \end{aligned}$$

d.h.:
$\lambda_1 = -2 \ldots$ Vielfachheit $k_1 = 3$
$\lambda_2 = 1 - i \ldots$ einfach
$\lambda_3 = 1 + i \ldots$ einfach
$\varphi_{10} = e^{-2x}$, $\varphi_{11}(x) = xe^{-2x}$, $\varphi_{12}(x) = x^2 e^{-2x}$
$\varphi_{20}(x) =$Re$(e^x e^{-ix}) = e^x \cos(x)$
$\varphi_{30}(x) =$Im$(e^x e^{-ix}) = -e^x \sin(x)$ (kann auch $+e^x \sin(x)$ nehmen)
Dies ergibt ein Fundamentalsystem L_H, $\dim L_H = 5$. Die allgemeine Lösung lautet

$$y = c_1\varphi_{10} + c_2\varphi_{11} + c_3\varphi_{12} + c_4\varphi_{20} + c_5\varphi_{30}$$

4.8 Inhomogene Gleichungen

Sei $P(D) = a_0 + a_1 D + \cdots + a_{n-1}D^{n-1} + D^n$ mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ (wie in 4.7). Die inhomogene lineare DGL

$$P(D)y = b(x) \tag{4.6}$$

kann prinzipiell mittels der Methoden aus 4.7, 4.5, 4.4 gelöst werden, d.h.

1. Bestimme ein Fundamentalsystem von Lösungen der assoziierten homogenen Gleichung $P(D)y = 0$ (vgl. 4.7, (4.3)).

2. Führe (4.6) auf ein lineares System von DGL erster Ordnung zurück (vgl. 4.5).

3. Finde eine spezielle Lösung durch Variation der Konstanten (vgl. 4.4)

Oft hat man aber für die Funktion $b(x)$ eine spezielle Form vorliegen (z.B. Winkelfunktion, Polynom oder Exponentialfunktion) und einfache Lösungsansätze führen rascher zu einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung (4.6).

Bemerkung: Hilfreich bei der Suche nach speziellen Lösungen ist oft auch das sogenannte **Superpositionsprinzip** (Physik!), das aus der Linearität des Differentialoperators folgt: ist $b(x) = b_1(x) + \cdots + b_N(x)$ $\forall x$ und ψ_j Lösung von $P(D)y = b_j$ $(j = 1, \ldots, N)$, so ist $\psi := \psi_1 + \cdots + \psi_N$ eine Lösung von $P(D)y = b$, weil ja

$$P(D)\psi = P(D)(\psi_1 + \cdots + \psi_N) = P(D)\psi_1 + \cdots + P(D)\psi_N = b_1 + \cdots + b_N = b$$

Ebenso ist $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) $\lambda\psi$ Lösung von $P(D)y = \lambda b$, falls $P(D)\psi = b$.

(A) b Polynom

Aufgrund des Superpositionsprinzips genügt es, den Fall $b(x) = x^m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) zu betrachten.

A 1.) $a_0 \neq 0$, d.h. $P(0) \neq 0$

Ansatz:

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j \cdot x^j$$

(Polynom m-ten Grades).

Beh.: $c_0, \ldots, c_m$ können so gewählt werden, dass ψ eine Lösung von $P(D)y = b = x^m$ ist.

Beweis. durch Induktion:

$m = 0$: $b(x) = x^0 = 1 \overset{!}{=} P(D)(c_0) = a_0 \cdot c_0 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{a_0}$.

$m \to m+1$: $\varphi := P(D)\psi$ ist ein Polynom vom Grad $m+1 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \tilde{b} := b - \lambda\varphi$ ist ein Polynom vom Grad m. Laut Induktionsvoraussetzung existiert daher ein Polynom $\tilde{\psi}$ vom Grad m, sodass $P(D)\tilde{\psi} = \tilde{b} = b - \lambda\varphi$. Daher folgt:

$$b = P(D)\tilde{\psi} + \lambda\varphi = P(D)\tilde{\psi} + \lambda P(D)\psi = P(D)(\tilde{\psi} + \lambda\psi),$$

wobei $\tilde{\psi} + \lambda\psi$ ein Polynom vom Grad $m+1$ ist. □

A 2.) $a_0 = 0$, d.h. $P(0) = 0$

Sei 0 eine k-fache Nullstelle. Ansatz:

$$\psi(x) = \sum_{j=k}^{m+k} c_j x^j = c_k x^k + \cdots + c_{m+k} x^{m+k}$$

Beh.: $c_k, \ldots, c_{m+k}$ können so gewählt werden, dass ψ eine Lösung von $P(D)y = b = x^m$ ist.

Beweis. Es ist $P(\lambda) = Q(\lambda) \cdot \lambda^k$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - k$ mit $Q(0) \neq 0$ ist. Daher ist

$$P(D)\psi = Q(D) \cdot D^k\psi = Q(D) \sum_{j=k}^{m+k} c_j \cdot j \cdot \ldots (j - k + 1) \cdot x^{j-k},$$

und wir können Fall A 1.) mit Q statt P anwenden. □

Beispiele:

1.)
$$y''' - y = x$$
Hier ist $P(\lambda) = \lambda^3 - 1$. Ansatz: $\psi(x) = ax + b$.
$$\Rightarrow x \overset{!}{=} \psi''' - \psi = 0 - ax - b \Rightarrow b = 0,\ a = -1,$$
d.h., $\psi(x) = -x$. [Probe: $\psi''' - \psi = 0 - (-x) = x$.]

2.)
$$y''' - y' = x,$$
$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = (\lambda^2 - 1) \cdot \lambda$; $k = 1$, $m = 1$. Ansatz: $\psi(x) = ax + bx^2$.
$$x \overset{!}{=} \psi''' - \psi' = 0 - a - 2bx \Rightarrow a = 0,\ b = -\frac{1}{2},$$
d.h. $\psi(x) = -\frac{x^2}{2}$. [Probe: $\psi''' - \psi' = 0 - (-\frac{1}{2} \cdot 2x) = x$.]

(B) $\boldsymbol{b(x) = e^{\mu x}}$: $\boldsymbol{\mu \in \mathbb{C},\ \mu = r + i\omega}$: $\boldsymbol{b(x) = e^{rx} \cdot (\cos(\omega x) + i \sin(\omega x))}$

B 1.) $\boldsymbol{P(\mu) \neq 0}$ - keine Resonanz

Beh.: $\psi(x) = \frac{1}{P(\mu)} \cdot e^{\mu x}$ ist Lösung von $P(D)y = e^{\mu x}$.

Beweis.
$$P(D)\psi = \frac{1}{P(\mu)} \cdot P(D)(e^{\mu x}) = \frac{1}{P(\mu)} \cdot P(\mu) \cdot e^{\mu x} = e^{\mu x}$$
(vgl. Beobachtung in 4.7). □

Folgerung: Für $b(x) = \mathrm{Re}(e^{\mu x})$ (bzw. $b(x) = \mathrm{Im}(e^{\mu x})$) ist $\varphi(x) = \mathrm{Re}(\psi(x))$ [$= \mathrm{Re}(\frac{1}{P(\mu)} \cdot e^{\mu x})$] (bzw. $\varphi(x) = \mathrm{Im}(\psi(x))$) eine reellwertige Lösung von $P(D)y = b$.
Beweis. Da die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ von $P(D)$ reell sind, gilt $P(D)(\mathrm{Re}(\psi))$ $= \mathrm{Re}(P(D)\psi)$ (und analog für $\mathrm{Im}\psi$). □

Beispiel:
$$y''' - 2y'' - 2y' + 2y = 2 \sin x$$
Es ist $2 \sin x = (2\mathrm{Im}(e^{ix}) =)\ \mathrm{Im}(2 \cdot e^{ix})$. Betrachte also zunächst
$$y''' - 2y'' - 2y' + 2y = 2e^{ix}$$
Dann ist $\mu = 0 + i$, $P(\mu) = \mu^3 - 2\mu^2 - 2\mu + 2 = -i + 2 - 2i + 2 = 4 - 3i \neq 0$.
$$\psi(x) = 2 \cdot \frac{1}{P(i)} \cdot e^{ix} = \frac{2}{4 - 3i} e^{ix} = \frac{8 + 6i}{25} (\cos x + i \sin x)$$
$$= \frac{8}{25} \cos x - \frac{6}{25} \sin x + i(\frac{8}{25} \sin x + \frac{6}{25} \cos x)$$

Also ist $\varphi(x) = \operatorname{Im}(\psi(x)) = \frac{8}{25}\sin x + \frac{6}{25}\cos x$ eine spezielle Lösung. [Probe durch Nachrechnen]

B 2.) $P(\mu) = 0$ - Resonanzfall

μ sei eine k-fache Nullstelle. Dann ist $P^{(l)}(\mu) = 0$ $(l < k)$, $P^{(k)}(\mu) \neq 0$; Ansatz:

$$\psi(x) = \frac{1}{P^{(k)}(\mu)} \cdot x^k \cdot e^{\mu x} \qquad \left[= \frac{1}{P^{(k)}(\mu)} \left(\frac{d}{d\mu}\right)^k (e^{\mu x}) \right]$$

ψ ist eine Lösung, denn

$$P(D)\psi = \frac{1}{P^{(k)}(\mu)} \left(\frac{d}{d\mu}\right)^k (\underbrace{P(D_x)e^{\mu x}}_{=P(\mu)\cdot e^{\mu x}}) = \frac{1}{P^{(k)}(\mu)} \cdot P^{(k)}(\mu) \cdot e^{\mu x} = e^{\mu x}.$$

Für $b = \operatorname{Re}(e^{\mu x})$ etc. wie in B 1.): $\varphi(x) = x^k \cdot \operatorname{Re}(e^{\mu x})$ etc.. . .

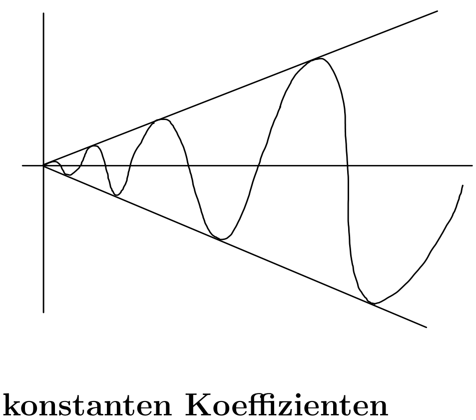
Beispiel: Schwingung mit Zwangskraft, ohne Reibung:

$$y'' + 4y = 3\cos(2x)$$

Es ist $3\cos(2x) = \operatorname{Re}(3 \cdot e^{2ix})$, $\mu = 2i$. $P(\mu) = \mu^2 + 4 = -4 + 4 = 0$, also Resonanzfall. $P'(\mu) = 2\mu = 4i \neq 0$: einfache Nullstelle. Daher:

$$\psi(x) = 3 \cdot \frac{1}{P'(\mu)} \cdot x \cdot e^{2ix} = \frac{3x}{4i} e^{2ix} = \frac{3x}{4}\sin(2x) - i\frac{3x}{4}\cos(2x)$$
$$\Rightarrow \varphi(x) = \operatorname{Re}(\psi(x)) = \frac{3x}{4}\sin(2x)$$

[Probe: $\varphi'' + 4\varphi = \cdots = 3\cos(2x)$]
Beachte: $\varphi(x)$ ist unbeschränkt: sog. **Resonanzkatastrophe**, weil die Amplituden der Schwingung $\sim \frac{3}{4}|x| \to \infty$.



4.C Systeme mit konstanten Koeffizienten

(Beinhaltet vermöge 4.5 auch eine Methode für 4. B und vice versa).

Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$. Wir betrachten lineare Systeme von DGL erster Ordnung (für $y : I \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar)

$$y' = A \cdot y \tag{4.7}$$

Idee: Im skalaren Fall $y' = a \cdot y$ ist die Lösung von der Form $y(x) = e^{a \cdot x} \cdot c$ und $e^{ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \cdot x^k}{k!}$. Dieser Ausdruck ist auch für Matrizen A statt Zahlen a sinnvoll!

4.9 Matrix-Exponentialfunktion

Definition: Für $B \in M(n, \mathbb{C})$ setze

$$e^B = \exp(B) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$$

Dabei sei $B^0 := I_n$ die $n \times n$-Einheitsmatrix. Die Reihe für e^B konvergiert in $M(n, \mathbb{C})$, weil in i-ter Zeile und j-ter Spalte jeweils eine konvergente Reihe steht: Sei $\beta := \max_{1 \le i,j \le n} |b_{ij}|$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{N} \left| \left(\frac{B^k}{k!} \right)_{ij} \right| \le \sum_{k=0}^{N} \frac{(n\beta)^k}{k!} \le e^{n\beta}$$

Speziell für $B = x \cdot A$ erhalten wir:

$$e^{x \cdot A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot A^k$$

Eigenschaften von $e^{x \cdot A}$

1.) $x \mapsto e^{x \cdot A}$ ist differenzierbar und

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^{x \cdot A}) = A \cdot e^{x \cdot A} = e^{x \cdot A} \cdot A}$$

Beweis. Seien $a_{ij}^{(k)}$ $(1 \le i, j \le n)$ die Matrixelemente von A^k. Dann ist

$$(e^{xA})_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} a_{ij}^{(k)}$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ (weil $|a_{ij}^{(k)}| \le \|A\|_{op}^k$). Sie ist daher (unendlich oft) differenzierbar und die Ableitung kann gliedweise gebildet werden.

$$\left(\frac{d}{dx} e^{xA}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k x^{k-1}}{k!} a_{ij}^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} a_{ij}^{(k+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^{k+1} = A \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k = A \cdot e^{xA} \;\; (= (\textstyle\sum \dots) \cdot A)$$

$\square$

2.)

$$\boxed{e^{(s+t)A} = e^{sA} \cdot e^{tA} \qquad \forall s,t \in \mathbb{R}}$$

Beweis. Bezeichne mit $L(t)$ bzw. $R(t)$ die linke bzw. rechte Seite der Gleichung. Dann ist $L(0) = e^{sA} = R(0)$ und

$$\begin{aligned} L'(t) &= \frac{d}{dx} e^{xA}\Big|_{x=s+t} = A \cdot e^{xA}\Big|_{x=s+t} = A \cdot L(t) \\ R'(t) &= \frac{d}{dt}(e^{sA} \cdot e^{tA}) = e^{sA} \cdot \frac{d}{dt}(e^{tA}) = e^{sA} \cdot Ae^{tA} = A \cdot R(t) \end{aligned}$$

Somit lösen sowohl L als auch R die DGL $y' = A \cdot Y$ mit Anfangsbedingung $Y(0) = e^{sA}$, also ist $L(t) = R(t)$. $\square$

3.) Folgerung:

$$e^{x \cdot A} \cdot e^{-x \cdot A} = e^0 \left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} \right) = I$$

4.) Ist S invertierbar, so gilt

$$\boxed{S^{-1} \cdot e^B \cdot S = e^{S^{-1}BS}}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} e^{S^{-1}BS} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(S^{-1}BS)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{(S^{-1}BS)(S^{-1}BS)\dots(S^{-1}BS)}_{k \text{ Faktoren}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^{-1}B^kS}{k!} = S^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \cdot S = S^{-1} \cdot e^B \cdot S \end{aligned}$$

$\square$

Satz: *Sei $A \in M(n,\mathbb{R})$ [oder $A \in M(n,\mathbb{C})$] und $c \in \mathbb{R}^n$ [oder $c \in \mathbb{C}^n$]. Dann ist das Anfangswertproblem*

$$y' = A \cdot y, \quad y(0) = c$$

eindeutig lösbar durch $y(x) = e^{x \cdot A} \cdot c$.

Beweis. Eindeutigkeit folgt aus der Theorie, siehe 4 A. Außerdem ist

$$y'(x) = \frac{d}{dx}(e^{xA}) \cdot c \overset{1.)}{=} A \cdot e^{xA} \cdot c = A \cdot y(x),$$

und $y(0) = e^0 \cdot c = c$. $\square$

Beispiel:
1.) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ (Diagonalmatrix). Dann ist

$$e^{x\cdot A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 x)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2 x)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}$$

Allgemein folgt ebenso:

$$\boxed{\exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}}$$

Achtung!: Im Allgemeinen (also für Nicht-Diagonalmatrizen) ist

$$\boxed{\exp \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & e^{a_{12}} \\ e^{a_{21}} & e^{a_{22}} \end{pmatrix}}$$

2.)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier ist $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (A ist nilpotent).

$$e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot A^k = \sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{k!} \cdot A^k = I + \frac{x}{1!} A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.10 Transformation auf Diagonal- oder Normalform

Beobachtung: Sei $S \in GL(n, \mathbb{R})$. Dann löst $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ die DGL $y' = Ay$ (mit AB $y(0) = c$) dann und nur dann wenn $\psi := S^{-1} \cdot \varphi : I \to \mathbb{R}^n$ die DGL $z' = (S^{-1}AS) \cdot z$ (mit AB $z(0) = S^{-1} \cdot c$) löst.
Beweis.

$$\psi'(x) = S^{-1} \cdot \varphi'(x) = S^{-1} \cdot A \cdot \varphi(x) = S^{-1} \cdot A \cdot S \cdot S^{-1} \cdot \varphi(x) = (S^{-1}AS)\psi(x)$$

□

(Alternativ: $e^{S^{-1}ASx} = S^{-1}e^{Ax}S$ nach 4.9 4.).

Erinnere an Lineare Algebra: A heißt ähnlich zu B, in Zeichen $A \sim B$, falls $\exists S \in GL(n,\mathbb{R}) : \; B = S^{-1}AS$. Für ähnliche Matrizen sind also die Lösungen der entsprechenden DGL-Systeme gemäß obiger Beobachtung einfach ineinander überführbar. Daher genügt es, die konkrete Lösungsstruktur für A in Normalform (Diagonal- oder Jordansche Normalform) zu studieren bzw. e^{Ax} für solche Matrizen zu bestimmen.
Erinnere: A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn es eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ aus **Eigenvektoren** zu A gibt. Dabei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die (reellen) **Eigenwerte** von A (mit Vielfachheiten). In diesem Fall heißt A **diagonalisierbar**.

Satz: *Ist $A \sim D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von Eigenvektoren zu A, so bilden die*

$$\varphi_j(x) := e^{\lambda_j \cdot x} \cdot v_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

ein Lösungs-Fundamentalsystem von (4.7).
Beweis. $\{\varphi_1(0), \ldots, \varphi_n(0)\} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist linear unabhängig und

$$\varphi_j'(x) = (e^{\lambda_j \cdot x})' \cdot v_j = e^{\lambda_j \cdot x} \cdot \underbrace{\lambda_j v_j}_{=A \cdot v_j} = A \cdot (e^{\lambda_j \cdot x} v_j) = A\varphi_j(x)$$

$\square$

(Alternativ: sei $S^{-1}AS = D$; $z' = D \cdot z$ hat Lösungen $\psi_j(x) = e^{xD} \cdot e_j$ mit $\psi_j(0) = e_j$ und es ist $e^{xD} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}) \Rightarrow \psi_j(x) = e^{\lambda_j x} \cdot e_j$. Beob. $\Rightarrow$ $\varphi_j(x) = S\psi_j(x) = e^{\lambda_j x} \cdot \underbrace{Se_j}_{v_j}$ ist Lösung).

Im Allgemeinen ist A nicht diagonalisierbar, kann aber auf die sog. Jordansche Normalform transformiert werden. In dieser gibt es entlang der Diagonalen Jordan-Blöcke für jeden reellen und komplexen Eigenwert, woraus jeweils geeignet Lösungen konstruiert werden können. Für den allgemeinen Fall von $n \times n$-Matrizen siehe z.B. [1, S. 232-241,§6.3].
Wir diskutieren im Folgenden den Fall von 2×2-Matrizen (entspricht den skalaren Schwingungsgleichungen) $A \in M(2,\mathbb{R})$ (reelle 2×2-Matrizen).

Fall I: A besitzt zwei linear unabhängige Eigenvektoren v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^2$ mit **reellen Eigenwerten** λ_1, λ_2 (nicht notwendigerweise $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Die Matrix $S = (v_1 \; v_2)$ mit den Spalten v_1, v_2 liefert eine Transformation auf

$$\boxed{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}$$

denn:

$$A \cdot S = (Av_1, Av_2) = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2) = S \cdot D \Rightarrow AS = SD \Rightarrow S^{-1}AS = D$$

Satz $\Rightarrow \varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} \cdot v_1$, $\varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} \cdot v_2$ ist ein Lösungs-Fundamentalsystem.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ein Lösungs-Fundamentalsystem ist daher gegeben durch $\varphi_1(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\varphi_2(x) = e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Fall II: A besitzt zwei **konjugiert-komplexe Eigenwerte** $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (A komplex diagonalisierbar). Es existieren dann linear unabhängige komplexe Eigenvektoren $\tilde{w}_1, \ \tilde{w}_2 \in \mathbb{C}^2$ mit der Eigenschaft

$$\tilde{w}_1 = v_1 + iv_2, \ \tilde{w}_2 = v_1 - iv_2,$$

wobei $\{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ linear unabhängig ist (Löse das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda_j) \cdot \tilde{w}_j = 0$; da A reell und $\overline{\lambda_1} = \lambda_2$ folgt dann $\overline{\tilde{w}_1} = \tilde{w}_2$. Außerdem ist $-2i \det(v_1, v_2) = \det_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2, v_1 - iv_2) = \det_{\mathbb{C}}(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \neq 0$.) Es ist

$$\begin{aligned} Av_1 + iAv_2 = A\tilde{w}_1 = \lambda_1 \cdot \tilde{w}_1 = (\mu + i\omega) \cdot (v_1 + iv_2) = \mu v_1 - \omega v_2 + i(\omega v_1 + \mu v_2) \\ \Rightarrow Av_1 = \mu v_1 - \omega v_2, \ Av_2 = \omega v_1 + \mu v_2 \end{aligned}$$

D.h., mit $S = (v_1 \ v_2)$ $[\Leftrightarrow Se_j = v_j \ (j = 1, 2)]$:

$$S^{-1}A \underbrace{Se_1}_{v_1} = S^{-1}Av_1 = S^{-1}(\mu v_1 - \omega v_2) = \mu \underbrace{S^{-1}v_1}_{e_1} - \omega \underbrace{S^{-1}v_2}_{e_2} = \mu e_1 - \omega e_2$$

und

$$S^{-1}ASe_2 = S^{-1}Av_2 = S^{-1}(\omega v_1 + \mu v_2) = \omega e_1 + \mu e_2$$

$$\Rightarrow S^{-1}AS = \boxed{\begin{pmatrix} \mu & \omega \\ -\omega & \mu \end{pmatrix} =: C}$$

Dies ist die Normalform für A im Fall II.

- Komplexes Analogon des obigen Satzes (mit demselben Beweis):

$$\psi_1(x) = e^{\lambda_1 x} \cdot \tilde{w}_1, \ \psi_2(x) = e^{\lambda_2 x} \cdot \tilde{w}_2$$

ist ein komplexes Fundamentalsystem.

- A reell $\Rightarrow \mathrm{Re}(A\psi_1) = A \cdot \mathrm{Re}(\psi_1)$, $\mathrm{Im}(A\psi_1) = A \cdot \mathrm{Im}(\psi_1)$, etc. Setze

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &:= \mathrm{Re}\, \psi_1(x) = e^{\mu x}(\cos(\omega x) \cdot v_1 - \sin(\omega x) \cdot v_2) \\ \varphi_2(x) &:= \mathrm{Im}\, \psi_1(x) = e^{\mu x}(\sin(\omega x) \cdot v_1 + \cos(\omega x) \cdot v_2) \end{aligned}$$

Dann ist $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein reelles Lösungs-Fundamentalsystem für (4.7): $y' = A \cdot y$ und

$$\tilde{\varphi}_1(x) := S^{-1}\varphi_1(x) = e^{\mu x}(\cos(\omega x) \cdot e_1 - \sin(\omega x) \cdot e_2) = e^{\mu x} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega x) \\ -\sin(\omega x) \end{pmatrix}$$
$$\tilde{\varphi}_2(x) := S^{-1}\varphi_2(x) = e^{\mu x}(\sin(\omega x) \cdot e_1 + \cos(\omega x) \cdot e_2) = e^{\mu x} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\omega x) \\ \cos(\omega x) \end{pmatrix}$$

liefert ein (reelles) Lösungs-Fundamentalsystem für $z' = C \cdot z$.

Für die Praxis: Eigenwerte λ_1, λ_2 berechnen, $\overline{\lambda_1} = \lambda_2$, $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$ sind dadurch bereits bestimmt! φ_1, φ_2 sind gegeben durch die Transformation $\varphi_j = S\tilde{\varphi}_j$, wobei $S = (v_1\ v_2)$ mit $v_1 = \mathrm{Re}(\tilde{w}_1)$, $v_2 = \mathrm{Im}(\tilde{w}_1)$.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ besitzt die konjugiert komplexen Eigenwerte $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i$ mit zugehörigen komplexen Eigenvektoren $\tilde{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ und $\tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, also $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $S = I$. Allein aus der Kenntnis der Eigenwerte erhalten wir das folgende reelle Lösungs-Fundamentalsystem: $\varphi_1(x) = S\tilde{\varphi}_1(x) = \tilde{\varphi}_1(x) = e^{-x/2}\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$, $\varphi_2(x) = S\tilde{\varphi}_2(x) = \tilde{\varphi}_2(x) = e^{-x/2}\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$. Ein komplexes Fundamentalsystem ist gegeben durch $\psi_1(x) = e^{(-1/2+i)x}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\psi_2(x) = e^{(-1/2-i)x}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Fall III: A besitzt **nur einen Eigenwert** $\lambda \in \mathbb{R}$ mit algebraischer Vielfachheit 2, aber geometrischer Vielfachheit 1, d.h. nur einen linear unabhängigen Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^2$.

Sei $w \in \mathbb{R}^2$ so gewählt, dass $\{v, w\}$ linear unabhängig, also eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Es ist $Av = \lambda v$ und $\exists \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$: $Aw = \alpha \cdot v + \beta \cdot w$. Dabei ist $\alpha \neq 0$, sonst wäre w ein weiterer Eigenvektor.

Behauptung: $\beta = \lambda$

Beweis. Indirekt: ang.: $\beta - \lambda \neq 0$

$$\Rightarrow A \cdot \left(w + \frac{\alpha}{\beta - \lambda} v\right) = Aw + \frac{\alpha}{\beta - \lambda} \cdot Av = \alpha \cdot v + \beta \cdot w + \frac{\alpha}{\beta - \lambda} \cdot \lambda \cdot v$$
$$= \beta \cdot w + \left(1 + \frac{\lambda}{\beta - \lambda}\right) \cdot \alpha \cdot v = \beta \cdot \left(w + \frac{\alpha}{\beta - \lambda} v\right)$$

Somit ist $w + \frac{\alpha}{\beta - \lambda} v$ ein EV zum EW β, der linear unabhängig ist zu v, ein Widerspruch. □

Setze $v_1 := v$, $v_2 := \frac{1}{\alpha} \cdot w$. Dann ist

$$\begin{aligned} Av_1 &= Av = \lambda v = \lambda \cdot v_1 \\ Av_2 &= \frac{1}{\alpha} \cdot Aw = \frac{1}{\alpha}(\alpha v + \lambda w) = v + \lambda \frac{1}{\alpha} w = v_1 + \lambda \cdot v_2, \end{aligned}$$

d.h. mit $Se_1 := v_1$, $Se_2 := v_2$ $[S = (v_1\ v_2)]$ ist

$$\begin{aligned} S^{-1}ASe_1 &= \lambda S^{-1} v_1 = \lambda e_1 \\ S^{-1}ASe_2 &= S^{-1}(v_1 + \lambda v_2) = e_1 + \lambda e_2 \end{aligned}$$

Daher ist

$$\boxed{S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} =: L}$$

die Normalform für A im Fall III. Wir berechnen $e^{x \cdot L}$ mittels folgendem 'Trick':

$$L = \lambda I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier ist der erste Summand diagonal und der zweite nilpotent, also exp in beiden Fällen leicht zu berechnen (s. Bsp. 1.), 2.) in 4.9).

Lemma: *Seien X, $Y \in M(n, \mathbb{C})$ mit der Eigenschaft $X \cdot Y = Y \cdot X$. Dann gilt:*

$$e^X \cdot e^Y = e^{X+Y} = e^Y \cdot e^X$$

Beweis. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist $X^k \cdot Y = Y \cdot X^k$, daher gilt $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$e^{tX} \cdot Y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k \cdot Y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Y \cdot X^k = Y \cdot e^{tX}$$

Setze $M(t) := e^{tX} \cdot e^{tY}$. Dann ist

$$M'(t) = X \cdot e^{tX} \cdot e^{tY} + e^{tX} \cdot Y \cdot e^{tY} = (X+Y) \cdot e^{tX} e^{tY} = (X+Y) M(t)$$

Wegen $M(0) = I$ muss also $M(t) = e^{t(X+Y)}$ gelten $\Rightarrow e^{X+Y} = M(1) = e^X e^Y$. Durch Vertauschen von X und Y und $X + Y = Y + X$ folgt die Behauptung. □

Da $I_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot I_2$, erhalten wir also

$$e^{xL} = e^{x\lambda I_2} \cdot e^{x\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ 0 & e^{\lambda x} \end{pmatrix}$$

Somit lautet ein Lösungs-Fundamentalsystem $\tilde{\varphi}_1(x) := e^{xL} \cdot e_1$, $\tilde{\varphi}_2(x) := e^{xL} \cdot e_2$ für $z' = L \cdot z$:

$$\boxed{\tilde{\varphi}_1(x) = e^{\lambda x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \tilde{\varphi}_2(x) = e^{\lambda x} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}}$$

und $\varphi_j = S\tilde{\varphi}_j$ ist das entsprechende Fundamentalsystem für $y' = Ay$.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ besitzt nur einen Eigenwert $\lambda = 2$. Der zugehörige Eigenraum hat Dimension 1, ein Eigenvektor ist $v = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wir ergänzen v durch den Vektor $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^2$ und bestimmen α aus

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daher ist $\alpha = -1$ und $v_2 = \frac{1}{\alpha} w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und wir erhalten

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ein Lösungs-Fundamentalsystem für $z' = L \cdot z$ ist:

$$\tilde{\varphi}_1(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \tilde{\varphi}_2(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das entsprechende Fundamentalsystem für $y' = Ay$ ist

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \tilde{\varphi}_1(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \tilde{\varphi}_2(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} x \\ -1 - x \end{pmatrix}$$

4.11 Phasenporträts für 2×2-Systeme in Normalform

Zur Vorbereitung auf dynamische Aspekte der Lösungskurven verwenden wir nun t als unabhängige Variable (Zeit) und bezeichnen die Komponentenfunktionen mit $x(t)$ und $y(t)$ (statt y_1 und y_2); $z = (x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ stellt eine Lösungskurve dar mit Anfangswert $z(0) = c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.

Zeichnungen einer Familie von repräsentativen Lösungen (verschiedene Anfangswerte, verschiedenes Langzeitverhalten von Lösungen, etc.) im $\mathbb{R}^2$ nennen wir ein **Phasenporträt** für ein System $z' = A \cdot z$.

Wir betrachten die Normalformenfälle für A, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \mu & \omega \\ -\omega & \mu \end{pmatrix}, \quad \text{oder } A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1.)

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}} \quad z' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot z, \quad z(0) = c$$

EV e_1, e_2 zu EW λ_1, λ_2. Somit (4.10, Fall I) lautet die Lösung

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

- $c = (0,0) \Rightarrow z(t) = (0,0)\ \forall t$
- $c = (c_1, 0) \Rightarrow y(t) = 0\ \forall t,\ x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$

  $\lambda_1 = 0$: $x(t) = c_1\ \forall t$

  $\lambda_1 < 0$: $x(t) \to 0\ (t \to \infty)$

  $\lambda_1 > 0$: $|x(t)| \to \infty\ (t \to \infty)$

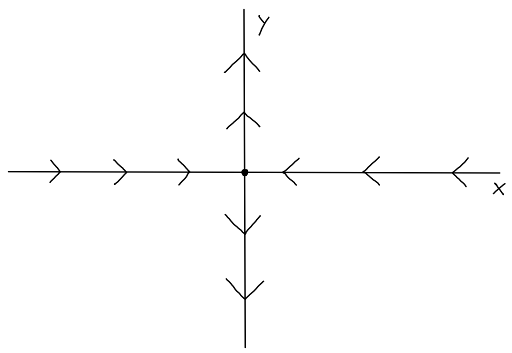
- $c = (0, c_2) \Rightarrow x(t) = 0\ \forall t,\ y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$

  $\lambda_2 = 0$: $y(t) = c_2\ \forall t$

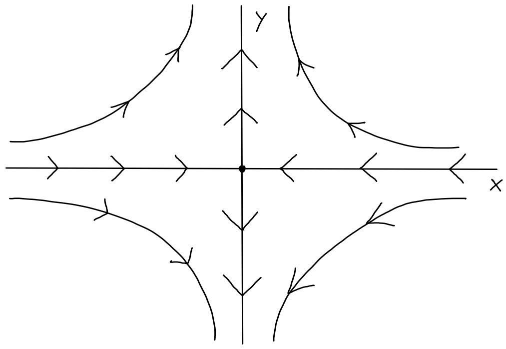
  $\lambda_2 < 0$: $y(t) \to 0\ (t \to \infty)$

  $\lambda_2 > 0$: $|y(t)| \to \infty\ (t \to \infty)$

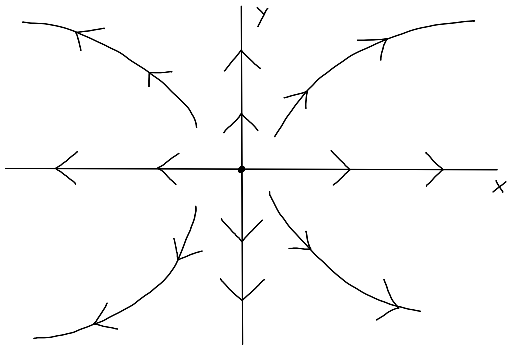
  Z.B. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$:



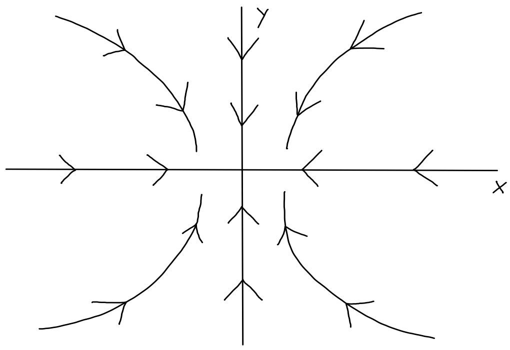
- $c = (c_1, c_2)$ mit $c_1 > 0,\ c_2 > 0$ (1. Quadrant)
  $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$, $y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$. Verhalten für $t \to \infty$ jeweils abhängig von Vorzeichen von λ_1, λ_2 wie oben.
  Z.B. für $\underline{\lambda_1 < 0 < \lambda_2}$: $x(t) \to 0$, $y(t) \to +\infty$ $(t \to \infty)$ im 1. Quadranten (im 2. Quadranten $x(t) \to 0$, $y(t) \to -\infty$, etc.), sog. **Sattelpunkt**



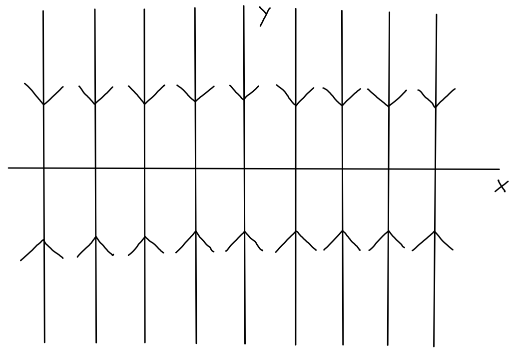
Z.B. für $\underline{\lambda_1 > \lambda_2 > 0}$: (**instabil** in $(0,0)$)



$\underline{\lambda_1 < \lambda_2 < 0}$: **stabiler Knoten** in $(0,0)$:



ausgeartet: z.B. $\underline{\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 < 0}$:
$x(t) = c_1 =$const.
$y(t) = c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \to 0\ (t \to \infty)$



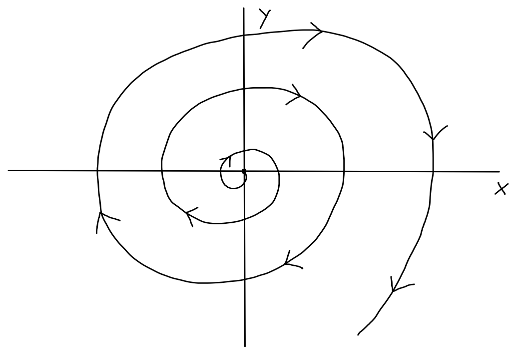
2.)

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \mu & \omega \\ -\omega & \mu \end{pmatrix}} \quad \omega \neq 0, \quad z' = A \cdot z, \quad z(0) = c$$

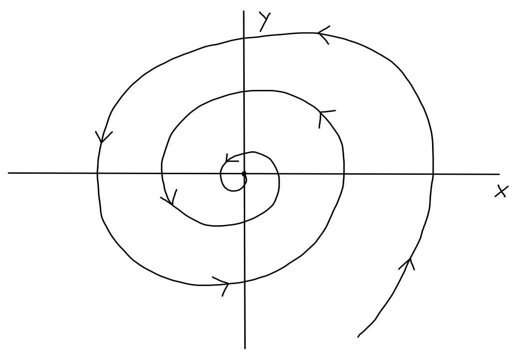
Gemäß 4.10 Fall II:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{e^{\mu t}}_{\text{Dehnung/Stauchung } \mu \gtrless 0, t>0} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}}_{\text{Drehung um Winkel} -\omega t} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

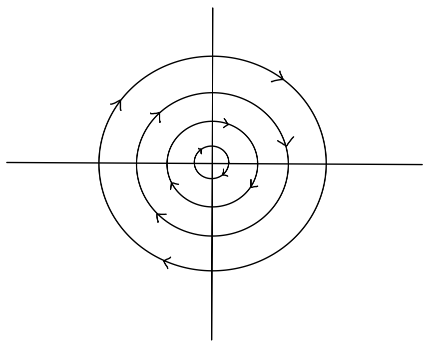
Z.B.: $\underline{\mu > 0}$, $t > 0$, $\omega > 0$: **instabiler Strudel**



Z.B.: $\underline{\mu < 0}$, $t > 0$, $\omega < 0$: **stabiler Strudel**



Z.B.: $\underline{\mu = 0}$, $t > 0$, $\omega > 0$: **Wirbel** (Lösungen auf Kreisbahnen)



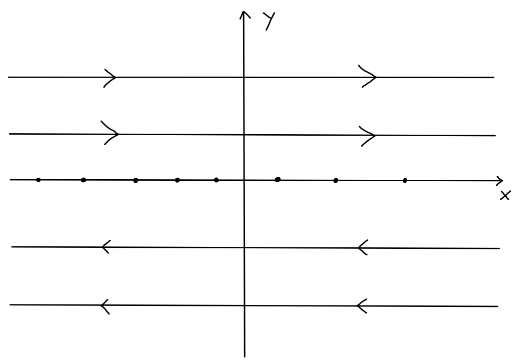
3.)

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} \quad z' = A \cdot z, \quad z(0) = c$$

hat gemäß 4.10 Fall III die Lösung

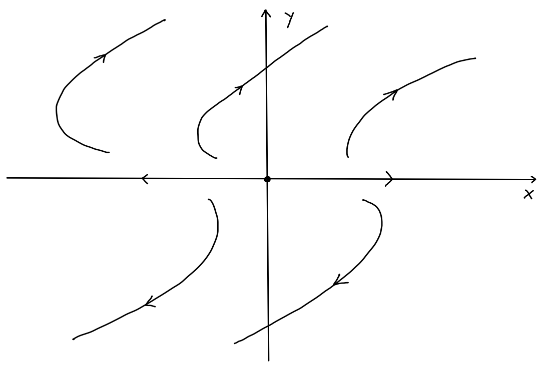
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = 0}$: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{pmatrix}$. Falls $c_2 = 0 \Rightarrow z(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \forall t$

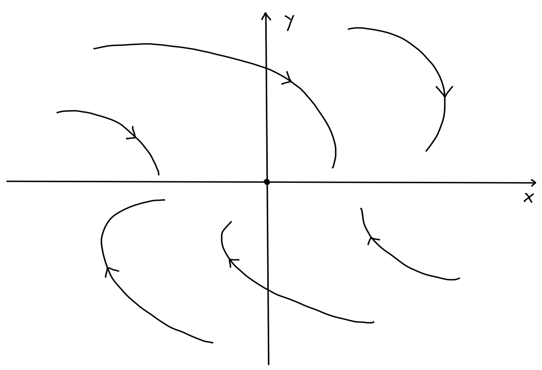


$\underline{\lambda > 0}$:

1. Quadrant: $c_1,\ c_2 > 0$: $x(t) \to \infty$, $y(t) \to \infty$
2. Quadrant: $c_1 < 0, c_2 > 0$: $x(t) \to \infty$, $y(t) \to \infty$, etc.



$\underline{\lambda < 0}$:



Für allgemeines A**:** finde S für Normalform $S^{-1}AS =: A_0$. Das Phasenporträt für die Lösung $z' = Az$ ist dann das Bild von jenem für A_0 (siehe oben) unter S!

Kapitel 5

Nichtlineare Systeme und dynamische Aspekte

Wir diskutieren in diesem Kapitel exemplarisch einige Aspekte der sogenannten **qualitativen Theorie** nichtlinearer Systeme von DGL; dabei wird in der Begriffsbildung und Darstellung der Standpunkt der **dynamischen Systeme** bevorzugt eingenommen.

Entsprechend bezeichnen wir wieder die unabhängige Variable mit t (Zeit). Zur Vereinfachung beschränken wir uns auf autonome 2×2-Systeme mit Komponentenfunktionen der Lösungen $x(t)$, $y(t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= f_2(x(t), y(t)) \end{aligned}}$$

Mit AB $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, kurz

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = f(x, y), \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}$$

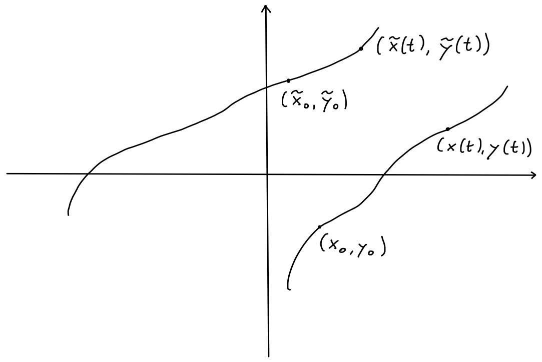
Zusätzlich nehmen wir an, dass $t \in \mathbb{R}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar [somit (lokal) eindeutige Lösbarkeit garantiert]. Weitere Annahme: stets global eindeutige Lösung für jedes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

5.1 Fluss eines autonomen Systems

Für jedes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existiert eine eindeutige Lösung von

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = f(x, y), \quad \text{mit} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Die Lösungskurve $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ hängt somit auch von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ab. Daher schreiben wir $\Phi(x_0, y_0; t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.



Es gilt also

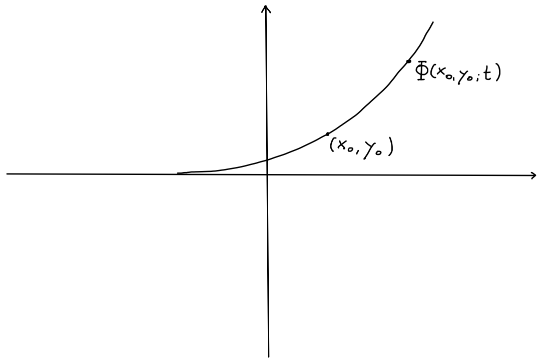
- $\Phi(x_0, t_0; t) \ldots$ Punkt der eindeutig bestimmten Lösungskurve durch den Anfangswert $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ zur Zeit t
- speziell $\Phi(x_0, y_0; 0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$
- für $t \in \mathbb{R}$ fix: $(x_0, y_0) \mapsto \Phi(x_0, t_0; t)$ gibt an, wohin der Punkt (x_0, y_0) in der Zeit t 'transportiert' wurde; diese Abbildung ist bijektiv: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (folgt aus der global eindeutigen Lösbarkeit des DGL-Systems).

$\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ heißt **Fluss** des DGL-Systems, $(\mathbb{R}^2, \Phi)$ ist ein **dynamisches System**.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

besitzt den Fluss $\Phi(x_0, y_0; t) = (x_0 e^{2t}, y_0 e^{3t})$.



Definition. *Sei Φ_f der Fluss zu* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = f(x,y)$ *und Φ_g der Fluss zu* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = g(x,y)$. *Die dynamischen Systeme $(\mathbb{R}^2, \Phi_f)$ und $(\mathbb{R}^2, \Phi_g)$ heißen* **äquivalent**, *falls gilt: $\exists h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig, bijektiv mit h^{-1} stetig (Homöomorphismus) und $\Phi_g(h(x_0,y_0);t) = h(\Phi_f(x_0,y_0;t))$ $\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ $\forall t \in \mathbb{R}$.*

5.2 Definition. *Ein Punkt $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ heißt* **Gleichgewichtspunkt** *für das System* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = f(x,y)$, *falls* $f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *In diesem Fall ist* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ *eine konstante Lösung und $\Phi(x_0,y_0;t) = (x_0,y_0)$ $\forall t$.*

5.3 Linearisierung nahe eines Gleichgewichtspunktes

Es sei (x_0,y_0) ein Gleichgewichtspunkt, d.h. $f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, und $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ eine Lösung, die für kleine t nahe $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ verläuft. Dann gilt für

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x(t) - x_0 \\ y(t) - y_0 \end{pmatrix}$$

die Relation

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'(t) = f(x(t),y(t)) &\overset{\text{Taylor}}{\approx} \underbrace{f(x_0,y_0)}_{(0,0)} + Df(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x(t) - x_0 \\ y(t) - y_0 \end{pmatrix} \\
&= Df(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mit $A := Df(x_0,y_0) \in M(2,\mathbb{R})$ (Jacobimatrix) erfüllt $(u(t),v(t))$ also näherungsweise das DGL-System

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Definition. *Das lineare DGL-System* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *mit $A = Df(x_0,y_0)$ heißt das aus* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = f(x,y)$ *nahe des Gleichgewichtspunktes (x_0,y_0) linearisierte System.*

Beispiel: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ -y \end{pmatrix}$, d.h. $f(x,y) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ -y \end{pmatrix}$. Es ist $f(x_0,y_0) = (0,0) \Leftrightarrow (x_0,y_0) = (0,0)$, also ist $(0,0)$ der einzige Gleichgewichtspunkt. Außerdem gilt

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Df(x_0,y_0) = Df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

das linearisierte System nahe $(0,0)$ lautet also:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

5.4 Satz von Hartmann-Grobmann (ohne Beweis)

Sei (x_0, y_0) ein Gleichgewichtspunkt von $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = f(x,y)$ und $A := Df(x_0, y_0)$ habe nur Eigenwerte mit nicht verschwindendem Realteil (sog. **hyperbolischer** Gleichgewichtspunkt). Dann ist der Fluss Φ des Systems $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = f(x,y)$ nahe (x_0, y_0) äquivalent zum Fluss des linearisierten Systems $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (nahe $(0,0)$).

5.5 Isoklinen

Für das DGL-System

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

beschreiben die Isoklinen-Mengen (meistens Kurvenstücke)

$$\begin{aligned} I_{\text{ost}} &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_2(x,y) = 0,\ f_1(x,y) > 0\} \\ I_{\text{west}} &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_2(x,y) = 0,\ f_1(x,y) < 0\} \\ I_{\text{nord}} &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x,y) = 0,\ f_2(x,y) > 0\} \\ I_{\text{sued}} &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x,y) = 0,\ f_2(x,y) < 0\} \end{aligned}$$

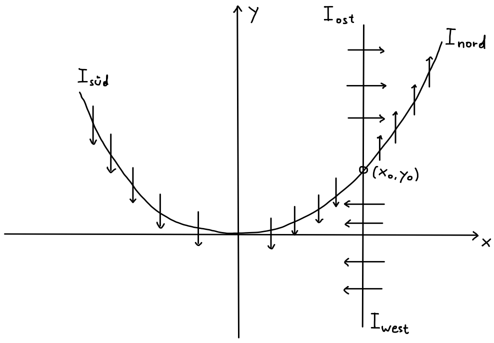
jeweils, wo das Vektorfeld f – und somit die Tangente an die Lösungskurven – nach Osten, Westen, Norden oder Süden zeigt.

$$\begin{aligned} I_{\text{ost}} \cup I_{\text{west}} &= \{f_2(x,y) = 0\} \ldots y\textbf{-Nullklinen}\ [y' = 0] \\ I_{\text{nord}} \cup I_{\text{sued}} &= \{f_1(x,y) = 0\} \ldots x\textbf{-Nullklinen}\ [x' = 0] \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y - x^2 \\ x - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = f(x,y)$$

$f_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = x^2 \ldots x$-Nullklinen
$f_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \ldots y$-Nullklinen
Gleichgewichtspunkt $(x_0, y_0) = (2,4)$
$I_{\text{ost}} = \{x = 2, y > 4\}$, $I_{\text{west}} = \{x = 2, y < 4\}$
$I_{\text{nord}} = \{y = x^2, x > 2\}$, $I_{\text{sued}} = \{y = x^2, x < 2\}$



$$Df(2,4) = \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Big|_{x=2,y=4} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: A$$

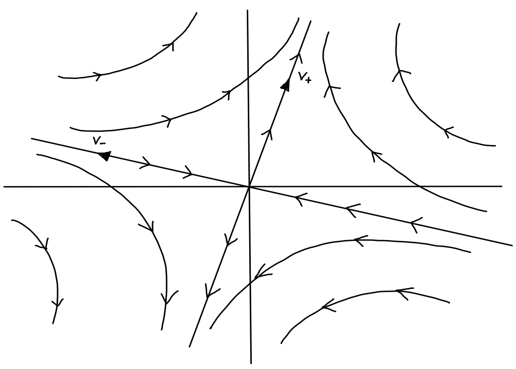
$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+4 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - 1$$

Eigenwerte: $\lambda_\pm = -2 \pm \sqrt{5}$, $\lambda_- < 0 < \lambda_+$. Somit ist $(2,4)$ ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt und nahe $(2,4)$ ist das Phasenporträt approximativ gegeben durch jenes für

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

nahe $(0,0)$. (EV: $v_- = (-2-\sqrt{5}, 1)$ zu λ_-, $v_+ = (-2+\sqrt{5}, 1)$ zu λ_+)

Sattelpunkt:



5.6 Nochmals die Grippeepidemie (vgl. 1.5)

Gesamtpopulation zur Zeit t besteht aus:
$S(t)$ ... Suszeptible
$I(t)$ ... Infizierte
$R(t)$ ... Ausgeschiedene
$\alpha > 0$ ... Ansteckungsrate, $\beta > 0$ ... Beseitigungsrate.
Gesamtzahl $N = S(t) + I(t) + R(t) = const$

$$\boxed{\begin{aligned} S'(t) &= -\alpha \cdot S(t) \cdot I(t) \\ I'(t) &= \alpha \cdot S(t) \cdot I(t) - \beta \cdot I(t) \\ R'(t) &= \beta \cdot I(t) \end{aligned}}$$

(SIR-Modell). Beachte: $R(t)$ ist durch Kenntnis von $I(t)$ und $S(t)$ bereits festgelegt. Erste und zweite Gleichung enthalten nur $S(t),\ I(t)$. Erhalten daher ein 2×2-System für $(S,\ I)$:

$$\boxed{\begin{aligned} S' &= -\alpha \cdot S \cdot I \\ I' &= \alpha \cdot S \cdot I - \beta \cdot I \end{aligned}}$$

Gleichgewichtspunkte:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(S, I) = \begin{pmatrix} -\alpha S I \\ \alpha S I - \beta I \end{pmatrix}$$

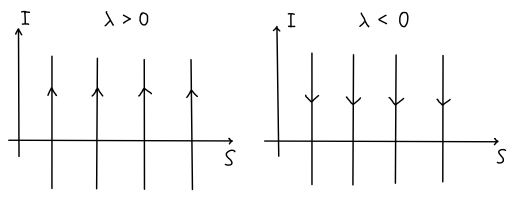
$\Leftrightarrow\ S \cdot I = 0\ \wedge I(\alpha S - \beta) = 0 \Leftrightarrow I = 0\ \vee (S = 0\ \wedge\ \alpha S = \beta) \Leftrightarrow I = 0$, d.h. $\forall S \geq 0$: $(S, 0)$ Gleichgewichtspunkt. Somit existieren konstante Lösungen für $I_0 = 0$, $S_0 \geq 0$ beliebig.

Linearisierung nahe $(S, 0)$:

$$Df(S, I) = \begin{pmatrix} -\alpha I & -\alpha S \\ \alpha I & \alpha S - \beta \end{pmatrix} \Rightarrow Df(S, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha S \\ 0 & \alpha S - \beta \end{pmatrix}$$

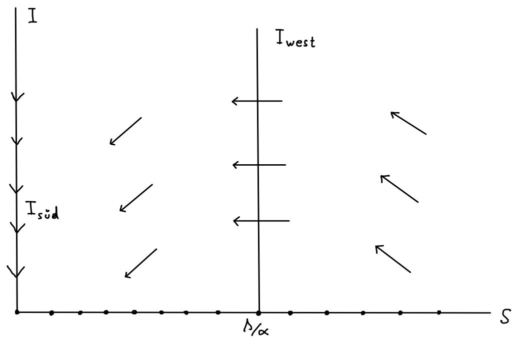
hat Eigenwerte 0, $\alpha S - \beta =: \lambda$ (Gleichgewichtspunkt ist nicht hyperbolisch).

$$\lambda > 0 \Leftrightarrow S > \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \lambda < 0 \Leftrightarrow 0 \leq S < \frac{\beta}{\alpha}$$



$f_1(S, I) = 0 \Leftrightarrow S = 0 \vee I = 0$
$f_2(S, I) = 0 \Leftrightarrow I = 0 \vee S = \frac{\beta}{\alpha}$

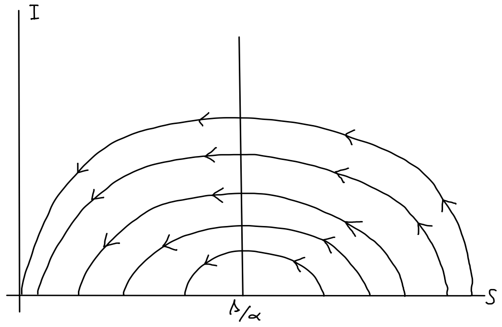
$$\begin{aligned} I_{\text{ost}} &= \{I = 0 \vee S = \frac{\beta}{\alpha},\ -\alpha S I > 0\} = \emptyset \\ I_{\text{west}} &= \{I = 0 \vee S = \frac{\beta}{\alpha},\ -\alpha S I < 0\} = \{S = \frac{\beta}{\alpha},\ I > 0\} \\ I_{\text{nord}} &= \{S = 0 \vee I = 0,\ I(\alpha S - \beta) > 0\} = \emptyset \\ I_{\text{sued}} &= \{S = 0 \vee I = 0,\ I(\alpha S - \beta) < 0\} = \{S = 0,\ I > 0\} \end{aligned}$$



Zusätzlich erkennt man, dass die Richtung von $f(S,I)$ in $S > \frac{\beta}{\alpha}$ nordwestlich und in $S < \frac{\beta}{\alpha}$ südwestlich ist. Dies suggeriert die folgende prinzipielle Gestalt der Lösungskurven:

- für $S_0 < \frac{\beta}{\alpha}$: str. mon. Verschwinden von $I \to 0$
- für $S_0 > \frac{\beta}{\alpha}$: Anstieg von I bis zum Maximum, dann Abnahme.

Es ist also $\frac{\beta}{\alpha}$ entscheidend für den Verlauf der Lösungkurven!



Die nach dieser Skizze erwarteten Eigenschaften der Lösungen können einfach bewiesen werden: für ein Intervall mit $S'(t) \neq 0$ ist

$$\frac{I'}{S'} = \frac{\alpha SI - \beta I}{-\alpha SI} = -1 + \frac{\beta}{\alpha S}$$

und $t \mapsto S(t)$ ist streng monoton,

$$\frac{I'(t)}{S'(t)} = \frac{1}{S'(t)} \cdot I'(t(S)) = t'(S) \cdot I'(t(S)) = \frac{d}{dS} I(t(S))$$
$$\Rightarrow \frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\beta}{\alpha S} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dI}{dS} + 1 - \frac{\beta}{\alpha S} = 0$$

Diese DGL ist von der Form $g(S,I) \cdot I' + h(S,I) = 0$ mit $g(S,I) = 1$, $h(S,I) = 1 - \frac{\beta}{\alpha S}$, also eine exakte DGL, denn $\partial_S g = 0 = \partial_I h$.

Stammfunktion F für (h, g): $\partial_I F = 1$, $\partial_S F = 1 - \frac{\beta}{\alpha S}$. Ansatz:

$$F(S, I) = \int \left(1 - \frac{\beta}{\alpha S}\right) dS + \varphi(I) = S - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \log S + \varphi(I)$$

$$1 \overset{!}{=} \partial_I F = \varphi'(I). \text{ Setze } \varphi(I) = I$$

$$\Rightarrow F(S, I) = I + S - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \log S$$

Die Lösungskurven sind gegeben durch:

$$I(S) + S - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \log S = F(S_0, I_0) =: c_0$$

$$\Rightarrow I(S) = c_0 - S + \frac{\beta}{\alpha} \cdot \log S$$

Dann: Kurvendiskussion.

Literaturverzeichnis

[1] Aulbach, B., Gewöhnliche Differenzialgleichungen (2. Aufl., Elsevier 2004)

[2] Forster, O., Analysis 2 (8. Aufl., Vieweg/Teubner 2008)

[3] Grüne, L., Junge, O., Gewöhnliche Differentialgleichungen (Vieweg/Teubner 2009)

[4] Handrock-Meyer, S., Differenzialgleichungen für Einsteiger (Hanser 2007)

[5] Heuser, H., Gewöhnliche Differentialgleichungen (4. Aufl., Teubner 2004)

[6] Hirsch, M. W., Smale, S., Devaney, R. L:, Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos (Elsevier 2004)

[7] Jänich, K., Analysis für Physiker und Ingenieure (4. Aufl., Springer 2001)

Index