Ю. А. Неретин

Категории симметрий и бесконечномерные группы

Эдиториал УРСС
Москва
1998

Оглавление

Неретин Юрий Александрович
Категории симметрий и бесконечномерные группы
М.: Эдиториал УРСС, 1998. — 432 с.

Настоящее издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-14034)

Книга содержит систематическое изложение теории бесконечномерных групп, их представлений, а также полугрупповых и категорных оболочек. Подробно рассматриваются группа диффеоморфизмов окружности, бесконечномерные аналоги классических групп, группы преобразований пространств с мерой и некоторые группы токов. Обсуждаются также бесконечные аналоги симметрических групп и группы петель. Ряд разделов книги посвящен связанным с конечномерными группами Ли явлениям, которые стали известны лишь благодаря появлению теории бесконечномерных групп.

Изложение основано на категорной версии метода вторичного квантования.

Для математиков и математических физиков, так или иначе имеющих дело с бесконечномерными группами, а также студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Группа подготовки издания:

Директор *Доминго Марин Рикой*
Заместители директора *Наталья Финогенова, Ирина Макеева*
Компьютерный дизайн *Василий Подобед, Виктор Романов*
Верстка *Василий Подобед*
Подготовка текста *Наталия Бекетова, Дмитрий Соколов, Анна Тюрина*
Технические редакторы *Наталья Аринчева, Елена Логвинова*

Издательство «Эдиториал УРСС»
113208, г. Москва, ул. Чертановская, д. 2/11, к. пр.

Лицензия ЛР № 064418 от 24.01.96 г. Подписано к печати 12.09.98 г.
Формат 70 × 100/16. Тираж 1000 экз. Печ. л. 27. Заказ № 320.

Отпечатано в АООТ «Политех-4»
129110, г. Москва, Б. Переяславская, 46

ISBN 5-901006-71-2

Предисловие

Термин «бесконечномерная группа» не имеет строгого определения и, к тому же, не слишком точен. Он означает примерно «очень большая группа». К таким группам относятся, например, следующие классы групп:

(1) группы диффеоморфизмов многообразий;

(2) группы, связанные с алгеброй Вирасоро и алгебрами Каца—Муди;

(3) бесконечные аналоги симметрической группы;

(4) различные группы операторов в гильбертовом пространстве (например группы автоморфизмов канонических коммутационных и антикоммутационных соотношений);

(5) группы токов (т. е. группы каких-нибудь функций на чем-нибудь со значениями в какой-нибудь группе);

(6) группы автоморфизмов пространств с мерой;

Представления различных групп перечисленных типов стали изучаться в разное время, начиная примерно с 1950 г. Долгое время эти теории развивались независимо и по расходящимся направлениям, и с течением времени становилось все меньше надежды на построение какой-либо связной картины. Однако с начала 80-х годов эта картина начала составляться (что очень трудно понять по существующей литературе), и сейчас, наконец, появилась возможность эту картину описать. Это — одна из целей нашей книги.

Другая цель, тесно связанная с первой, — явное построение «скрытых структур» (мантий и шлейфов), связанных с бесконечномерными группами. Оказывается, что (по крайней мере, с точки зрения теории представлений) «главными действующими лицами» являются не группы (из списка (1)–(6)), а значительно бóльшие объекты, включающие в себя эти группы. Это немного похоже на взаимоотношения вещественных и комплексных чисел; вещественные числа есть и сами по себе, но вещественная алгебра и вещественный анализ становятся понятными лишь после выхода в комплексную область.

Эти скрытые структуры тоже имеют довольно долгую историю (начиная с 60-х годов), многие занимались ими явно, а многие — не сознавая, по-видимому, что они занимаются «скрытыми структурами». В течение сравнительно продолжительного времени описать эти структуры в удобных терминах не удавалось, положение стало проясняться лишь с конца 1987 года, и, как мне кажется, сейчас в основном прояснилось.

«Скрытые» структуры дали новую неожиданную точку зрения на ряд старых областей теории представлений. Например, оказалось, что серии классических комплексных групп $A_n \simeq SL(n,\mathbb{C})$, $B_n \simeq SO(2n+1,\mathbb{C})$, $C_n \simeq Sp(2n,\mathbb{C})$, $D_n \simeq SO(2n,\mathbb{C})$ естественным образом объединяются в четыре категории $\widehat{\mathbf{GA}}$, **B**, **C**, **D**, и теория конечномерных представлений классических групп в каком-то смысле оказывается теорией представлений 4-х «классических» категорий **A**, **B**, $\mathfrak{C}$, **D**. Подобные явления происходят и с бесконечномерными представлениями групп $U(p,q)$, $Sp(2n,\mathbb{R})$, $SO^*(2n)$ со старшим весом, и с некоторыми сериями конечных групп. Мы ограничиваемся рассмотрением категорий, связанных с комплексными классическими группами (глава III).

Наконец, еще одна цель книги (которой я добиваюсь лишь в меру возможности) — явное описание конструкций неприводимых представлений для бесконечномерных групп; мне кажется, что в существующей (мало-мальски доступной для чтения) литературе в этом месте серьезный пробел.

С другой стороны, рассмотрение большого числа разных групп вынудило меня быть крайне жестким в отборе материала. В книге почти отсутствует целый ряд естественных сюжетов, таких как классификация представлений (исключение составляют главы III и VIII), комбинаторное строение представлений, асимптотическая теория, теория сферических функций, гармонический анализ. Не рассматриваются и аффинные алгебры.

Все это, конечно, обедняет содержание, но имеет и положительную сторону, так как резко снижает требования к подготовке читателя — специальных познаний по теории представлений для чтения книги не требуется. Ряд вспомогательных вопросов и технически несложных рассуждений представлены в виде задач. Звездочка у задачи ставилась в том случае, когда я не был уверен в том, что задача достаточно проста. Как правило, такие задачи снабжены ссылками на литературу.

Две ключевые конструкции с точки зрения излагаемой теории — спинорное представление ортогональной категории (главы II, IV) и «представление Вейля» симплектической категории (главы V, VI). В этих главах сосредоточены основные технические сложности, изложение в них довольно полно в том смысле, что мне удалось сказать в них бо́льшую часть из того, что, на мой взгляд, заслуживает быть сказанным. Для обеих конструкций мы сначала рассматриваем их «конечномерную часть» (главы II и V), отчасти потому, что это представляет самостоятельный интерес, отчасти потому, что переход к бесконечномерному случаю связан со значительными аналитическими сложностями, и изложение будет более понятным, если сначала отделить «алгебраическую часть».

В заключение я должен поблагодарить всех людей, с которыми мне пришлось обсуждать бесконечномерные группы в Москве 80-х годов: Г. И. Ольшанского, Р. С. Исмагилова, А. А. Кириллова, А. М. Вершика, А. В. Карабегова, М. Л. Концевича, Д. Б. Фукса, В. Ф. Молчанова, М. Л. Назарова, А. Г. Реймана, Е. Т. Шавгулидзе, Д. В. Юрьева. Все они в большей или в меньшей степени оказали влияние на меня, а следовательно, и на эту книгу. В особенности я благодарю Г. И. Ольшанского за многолетнее сотрудничество.

Москва, 1991–1993

Русское издание книги отличается от английского (выпущенного издательством Oxford University Press в 1996 г.) в основном редакционными изменениями. Кроме того, включены предварительные сведения (добавление G), а также несколько новых пунктов в добавлении F и в § IX.6.

Я благодарю Российский фонд фундаментальных исследований и издательство Эдиториал УРСС за русское издание книги.

Москва, 1998

Обозначения

Символы

$\delta_{k,l}$	символ Кронекера; $\delta_{k,k} = 1$, $\delta_{k,l} = 0$ при $k \neq l$
$A \Leftrightarrow B$	высказывание «A» равносильно высказыванию «B»
$x \mapsto y$	x отображается в y
$\psi : A \to B$	ψ отображает A в B или ψ — морфизм $A \to B$
$x_j \to x$	последовательность x_j сходится к x
$P : A \rightrightarrows B$	линейное отношение; *с. 51*
$\varphi := \psi$	правая часть есть определение левой
$\oplus$, $\otimes$	прямая сумма, тензорное произведение
Λ^k, S^k	внешние и симметрические степени; *с. 25, 68, 405–406, 410*
$A \setminus B$	множество всех $a \in A$ таких, что $a \notin B$
$A \triangle B$	симметрическая разность множеств A и B: $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$H_1 \setminus G / H_2$	двойные классы смежности; *с. 12*
G / H	однородное пространство
dim	размерность

Множества

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$	натуральные, целые, вещественные, комплексные числа и кватернионы
$\mathbb{Z}_+$	неотрицательные целые числа
$\overline{\mathbb{C}}$	сфера Римана; $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \infty$
$\mathbb{C}^*$	группа комплексных чисел по умножению; $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus 0$

Пространства

$L^2(M)$	(гильбертово) пространство функций f на пространстве M, удовлетворяющих условию $\int_M \lvert f(m)\rvert^2 dm < \infty$ со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int_M f(m)\overline{g(m)}\, dm$
ℓ^2	(гильбертово) пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, удовлетворяющих условию $\sum \lvert x_j\rvert^2 < \infty$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum x_j \overline{y_j}$
L^1, L^∞, C^∞	стандартные функциональные пространства, см. [Reed, Simon (1972)]
Λ_n	грассманова алгебра; *с. 24*
$\Lambda, \overline{\Lambda}$	фермионное пространство Фока; *с. 99–100*
$F, F(\cdot)$	бозонное пространство Фока; *с. 136, 151*
V'	обычно пространство, двойственное к V
Gr	грассманианы; *с. 387*

Векторы и операторы

A^*, A^t	сопряженный оператор, транспонированный оператор; *с. 390–391, 399, 403*

$|A| = \sqrt{A^*A}$ *с. 400*

$b[\cdot]$ *с. 144, 162*

$B[\ ]$ *с. 141, 162, 175*

spin(·) *с. 35, 55, 120*

$\mathscr{L}_p$ классы Шаттена; *с. 401*

$\hat{a}(\cdot)$ операторы рождения-уничтожения; *с. 30, 101, 140, 154*

tr след оператора

$1, E, E_n$ единичный оператор

Линейные отношения

$P : A \rightrightarrows B$, Ker P, Im P, Dom P, Indef P, $P^{\square}$ *см. § II.4, с. 51–52*

null *с. 54*

Группы и полугруппы

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$, $\mathrm{U}(p,q)$, $\mathrm{O}(p,q)$, $\mathrm{Sp}(p,q)$, $\mathrm{U}(p)$, $\mathrm{O}(p)$, $\mathrm{Sp}(p)$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}^*(2n)$ и др. классические группы; *с. 385–386*

Diff группа диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию; *с. 192, 214*

Isom(H) группа аффинных изометрий гильбертова пространства; *с. 155*

End, Aut(·), Aut*(·) *с. 51, 68*

Γ полугруппа трубок; *с. 214*

M(G) *с. 328*

$\mathrm{O}(\infty)$, $\mathrm{U}(\infty)$, $\mathrm{Sp}(\infty)$ *с. 245, 274*

S_n, S_∞, S_∞^{fin} симметрические группы; *с. 234, 263*

$(\mathrm{G}(\infty), \mathrm{K}(\infty))$ (G, K)-пары Ольшанского; *с. 274*

Ams, Ams_∞ *с. 251, 258*

Категории

Mor(· , ·), End(·), Aut(·), Ob(·) *с. 50–51*

Aut* *с. 68*

Категории обозначаются жирными буквами, в т. ч.

A, B, C, D *с. 85–86*

$\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{C}}$ *с. 122, 247*

GA, $\overline{\mathbf{GA}}$ *с. 62, 111*

GD, $\overline{\mathbf{GD}}$ *с. 53, 119*

Sp, $\overline{\mathbf{Sp}}$, $\overline{\mathbf{Spa}}$ *с. 127–128, 161, 174*

U *с. 124*

SO* *с. 129*

Shtan *с. 224*

Mar, $\overline{\mathbf{Mar}}$ *с. 250*

G-Mar, **G-$\overline{\mathbf{Mar}}$** *с. 335–336*

Uo *с. 285*

PB, $\overline{\mathbf{PB}}$ *с. 235*

Представления

spin спинорное представление; *с. 55, 120*

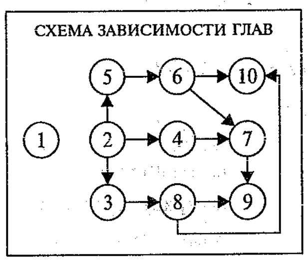
we представление Вейля; *с. 42, 163*

$\widetilde{\mathrm{we}}$ *с. 175*

Exp *с. 155*

$M(h,c)$, $L(h,c)$ модули со старшим весом над алгеброй Вирасоро; *с. 197–198*

Представления категорий (а также функторы) обозначаются рублеными буквами (A, S, T, и т. п.), пространства представления — большими латинскими буквами, операторы представления — греческими строчными буквами; *см. с. 52*



Глава I

Видимые и невидимые структуры на бесконечномерных группах

Эта глава представляет из себя что-то вроде введения, и ниже на нее нет формальных ссылок. Читателю, совсем не знакомому с предметом, эту главу лучше пропустить: глава является комментарием к теории, который без некоторого знакомства с самой теорией не слишком интересен.

Точка зрения на бесконечномерные группы, излагаемая в книге, а также техника работы с ними, по-видимому, покажется странной даже части специалистов. Она, возможно, покажется странной и людям, знакомым с теорией представлений групп Ли. Цель этой главы — на простых примерах объяснить, почему с бесконечномерными группами происходят явления, не знакомые нам по обычной теории групп Ли, излагаемой в учебниках.

Мы хотим дать априорное оправдание следующим двум высказываниям, хотя a posteriori они вполне оправдываются основным текстом книги (и поэтому априорное оправдание в итоге оказывается ненужным).

0.1. Принцип полугруппового продолжения (Г.И. Ольшанский). Пусть G — «бесконечномерная» группа, имеющая некоторый запас унитарных представлений. Тогда G — не группа, а лишь видимая часть некоторой невидимой невооруженным глазом полугруппы $\Gamma \supset$ G. При этом любое представление G продолжается однозначно до представления полугруппы Γ. Есть веские основания думать, что G плотна в Γ. Есть также некоторые основания думать, что Γ компактна, однако последнее высказывание может быть оспорено.

Сделанное нами утверждение ни в каком смысле не является теоремой, и оно ни в каком смысле не описывает полугруппу Γ. Тем не менее, в каждом частном случае оно оказывается истинным, в том числе оказывается истинным и утверждение о «невидимости»: за исключением учебных примеров, ответ всегда оказывается неожиданным. Эту полугруппу мы будем называть *мантией* (*mantle*) группы G.

0.2. Принцип категорного продолжения. Пусть, по-прежнему, G — бесконечномерная группа. Тогда G является лишь видимой частью некоторой невидимой невооруженным глазом категории **K**. Более точно, существует некоторая кате-