Глава III. Комплексная оболочка группы диффеоморфизмов окружности и представления категории римановых поверхностей.

Обозначения. Пусть $\overline{\mathbb{C}}$ - сфера Римана $(\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty)$, Пусть $\mathcal{D}_+ \subset \overline{\mathbb{C}}$ - круг $|z| \leq 1$, а $\mathcal{D}_- \subset \overline{\mathbb{C}}$ - область $|z| \geq 1$. Пусть $\mathcal{D}_+^0$ и $\mathcal{D}_-^0$ - соответственно, внутренность $\mathcal{D}_+$ и $\mathcal{D}_-$. Пусть $S^1 \subset \overline{\mathbb{C}}$ - окружность $|z|=1$. Голоморфная функция в некоторой открытой области называется однолистной, если $f(z_1) \neq f(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$. Функцию f, определенную в замкнутой области Ω мы будем называть голоморфной (соответственно, однолистной) вплоть до границы, если f голоморфно(однолистно) продолжается в некоторую открытую область, содержащую Ω.

Под словами "риманова поверхность" подразумевается одномерное комплексное многообразие. Слова "риманова поверхность с краем" означают двумерное вещественно аналитическое многообразие M с краем K с комплексной структурой на $M \setminus K$ (естественно, комплексная и вещественно аналитическая структуры согласованы).

Если $\tau : M \to N$ отображение римановых поверхностей и q - геометрический объект (обычно дифференциал) на M, через $\tau_* q$ мы обозначим образ объекта τ на N. Если же γ - геометрический объект на N, то $\tau^* \gamma$ - его прообраз.

§II. Алгебра Вирасоро $\mathcal{L}$ и группа $\mathcal{D}iff$ диффеоморфизмов окружности

Этот параграф содержит сводку необходимых далее результатов о представлениях алгебры Вирасоро. Подробности можно найти в [52], [37].

II.I. Алгебра Вирасоро. Пусть $Vect$ - алгебра Ли векторных полей на окружности. Пусть $Vect_{\mathbb{C}}$ - комплексификация $Vect$. Выберем в $Vect_{\mathbb{C}}$ базис $L_n = e^{in\varphi}\frac{\partial}{i\partial\varphi}$

Эти векторные поля удовлетворяют соотношениям коммутации

$$[L_n, L_m] = (m-n) L_{m+n}$$

Как известно, алгебра $Vect_{\mathbb{C}}$ имеет единственное центральное расширение (построенное И.М.Гельфандом и Д.Б.Фуксом в 1968), которое и называется алгеброй Вирасоро. Это алгебра с базисом $L_n (n \in \mathbb{Z})$, ζ и с соотношениями коммутации

$$[L_n, L_m] = (m-n) L_{m+n} + \frac{1}{12}(n^3 - n)\delta_{m,-n}\zeta$$

$$[L_n, \zeta] = 0$$

II.2. Модули со старшим весом. Модулем Верма $M(h,c)$ со старшим весом (h,c) над алгеброй Вирасоро называется единственный модуль, удовлетворяющий условиям

1. Существует ненулевой вектор $v \in M(h,c)$ такой, что $L_{-k} v = 0$ для всех $k \geqslant 0$, $L_0 v = hv$, $\zeta v = cv$.

2. Векторы вида $v_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots} = L_1^{\alpha_1} L_2^{\alpha_2} \ldots L_\mu^{\alpha_\mu} v$ линейно независимы.

Модулями со старшим весом обычно называются фактормодули модуля $M(h,c)$. Известно (см. [52], [37]), что в $M(h,c)$ существует единственный максимальный собственный подмодуль Q. Фактормодуль $M(h,c)/Q$ неприводим, это единственный неприводимый модуль со старшим весом (h, c).

Известно, что в точках (h, c) общего положения модуль $M(h, c)$ неприводим. Согласно известной теореме В.Г.Каца (см. [79], [52]) модуль $M(h, c)$ приводим тогда и только тогда, когда существуют натуральные α, β такие, что

$$\Phi_{\alpha,\beta}(h,c)=\left(h+\frac{c-13}{24}(\beta^2-1)+\frac{1}{2}(\alpha\beta-1)\right)\times$$
$$\times\left(h+\frac{c-13}{24}(\alpha^2-1)+\frac{1}{2}(\alpha\beta-1)\right)+\frac{1}{16}(\alpha^2-\beta^2)^2=0$$

<u>II.3. Условие унитаризуемости.</u> Представление V алгебры Вирасоро в евклидовом пространстве называется унитаризуемым, если для любого k выполнено $L_k^*=L_{-k}$.

Необходимые условия унитаризуемости представлений $L(h,c)$ были получены независимо автором в [33] и Фриданом, Киу, Шенкером в [66], достаточность этих условий была получена Годдардом, Оливом, Кентом в [68]. Представление $L(h,c)$ унитаризуемо, если выполнено одно из двух условий

1. $h\geqslant 0,\ c\geqslant 1$
2. $c=1-\frac{6}{p(p+1)}\ ;\ h=\frac{(\alpha p-\beta(p+1))^2-1}{4p(p+1)}$

где $\alpha, \beta, p\in\mathbb{Z}$, $p\geqslant 2$, $1\leqslant\alpha\leqslant p$, $1\leqslant\beta\leqslant p-1$.

<u>II.4. Интегрируемость.</u> Представления алгебры Вирасоро естественно рассматривать как проективные представления $Vect_{\mathbb{C}}$, а $Vect_{\mathbb{C}}$ естественно рассматривать как алгебру Ли группы $\mathcal{D}iff$ диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию.

Естественно, встает вопрос о том, интегрируются ли проективные представления алгебры $Vect_{\mathbb{C}}$ со старшим весом до представлений группы $Diff$.

Замечание. Естественно встает вопрос о степени гладкости диффеоморфизмов. Нам будет удобно считать диффеоморфизмы аналитическими (на самом деле, достаточно меньшей гладкости). ●

Для большинства унитаризуемых представлений теорема интегрируемости была доказана автором в [32], общая теорема интегрируемости для унитарных представлений была получена Гудманом и Воллахом в [72]. Наконец, в [34] автор доказал интегрируемость всех, не обязательно унитарных представлений со старшим весом.

II.5. Конструкции представлений алгебры Вирасоро (см. [37]).

а) "Конструкция с двумя коциклами". Рассмотрим бозонное пространство Фока, состоящее из голоморфных функций от переменных z_1, z_2, ... Введем операторы $(k>0)$

$$\hat{a}_k f = z_k \sqrt{k} f \quad ; \quad \hat{a}_{-k} = \sqrt{k}\frac{\partial}{\partial z_k} f$$

Пусть

$$L_k = \sum_{m+n=k} :a_m a_n: + (\alpha + i\beta k) a_k + \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\delta_{k,0}$$

$$\zeta = 1 + 12\beta^2$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Двоеточия означают, что "операторы уничтожения" a_{-n} выполняются раньше "операторов рождения" a_ℓ $(n, \ell > 0)$. Эти операторы образуют представление алгебры $\mathcal{L}$, которое мы будем обозначать через $N_{\alpha,\beta}$. Вакуумный вектор (единичная функция) являетсявектором старшего веса

$$h = \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2) \qquad c = 1+12\beta^2$$

В точках (α, β) общего положения представления $N_{\alpha,\beta}$ являются модулями Верма. При исключительных значениях α, β эти модули имеют те же факторы ряда Жордана-Гельдера, что и модули Верма. Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, наше представление унитарно.

б) <u>Универсальная фермионная конструкция</u>. Путсь p пробегает все числа вида $p = n+\mu$, где $n \in \mathbb{Z}$, а μ - фиксированное число. Рассмотрим фермионное пространство Фока, состоящее из функций от антикоммутирующих переменных ξ_p. Введем операторы

$$A_p f = \begin{cases} \xi_p f, & \text{если } p>0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi_p} f, & \text{если } p \le 0 \end{cases}; \quad A_p^* = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi_p} f, & \text{если } p>0 \\ \xi_p f, & \text{если } p \le 0 \end{cases}$$

Тогда операторы

$$L_k = \sum_p \left(p + \frac{1+is}{2}k\right) A_{p+k} A_p^*$$

образуют проективное представление алгебры Вирасоро. Эти представления были построены в [52], [33] (на разных языках), в физической литературе они, кажется, появились несколько раньше. Все эти представления приводимы по очень простой причине. Пусть $\lambda = \xi_{p_1} \dots \xi_{p_k}$ - некоторый моном. Положим $deg(\lambda)$ есть разность числа тех p_j, которые больше 0 и числа тех p_j которые не положительны. Тогда операторы L_k сохраняют величину $deg\,\lambda$. Тем самым наше представление разлагается в счетную прямую сумму представлений $\oplus Q_\theta$, нумерующихся целыми числами $\theta = \deg \lambda$. Для нас будет важно, что среди подфакторов этих представлений содержатся все представления алгебры Вирасоро со старшим весом. Представления Q_θ совпадают с представлениями $N_{\alpha,\beta}$ (Б.Л.Фейган).

в) Вырожденные фермионные конструкции. Рассмотрим фермионное пространство Фока, состоящее из функций от переменных ξ_k, где $k = 1/2, 3/2, \ldots$. Положим

$$L_n = \sum_{k \geq 0} \left(k + \frac{n}{2}\right) \xi_{n+k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} + \frac{1}{4} \sum_{\alpha+\beta=n} (\alpha - \beta) \xi_\alpha \xi_\beta$$

при $n > 0$, $L_{-n} = L_n^*$, а

$$L_0 = \sum k \xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \qquad \zeta = 1/2$$

Эти операторы образуют унитарное представление $L(0, \frac{1}{2}) \oplus L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ алгебры Вирасоро. Существует очень похожая конструкция для модуля $L(1/16, 1/2)$ (эти конструкции независимо были найдены Р.С.Исмагиловым и автором, см. [32], работа Исмагилова не опубликована, они были первыми примерами особых унитарных представлений и опровергали ошибочное утверждение В.Г.Каца о классификации унитарных представлений.

В пунктах II.6, II.7, II.9 строим представления группы Diff, соответствующие представлениям алгебры Вирасоро из этого пункта (эти конструкции получены автором в [30]-, [32], [36], [37]), часть из них была независимо получена Р.С.Исмагиловым, представление $N_{0,0}$ было также независимо построено Д.Кажданом и Гр.Сигалом, см. [86]).

II.6. Бозонная конструкция. Мы вложим группу Diff

в группу автоморфизмов объекта категории $\overline{SpH}$, (далее ограничивая представление Вейля на $\mathcal{D}iff$ мы получим представление $N_{\alpha,\beta}$).

Вложение $\mathcal{D}iff$ в группу аффинных симплектических преобразований строится следующим образом.

Пусть V - пространство функций на окружности $|z|=1$ $(z=e^{i\varphi})$, определенных с точностью до прибавления константы. Введем в V структуру объекта категории $\overline{SpH}$. Для этого определим

I. Скалярное произведение в V.

$$\langle \sum c_k z^k, \sum d_k z^k \rangle = \sum |k| c_k \overline{d}_k$$

или, что то же самое

$$\langle f(\varphi), g(\varphi) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} ctg\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) f(\varphi) g'(\psi)\, d\varphi\, d\psi$$

2. Фиксированное разложение $V = V_+ \oplus V_-$. Пространство V_+ состоит из функций, голоморфно продолжимых внутрь круга $|z|<1$ (т.е. функций вида $\sum_{k>0} c_k z^k$), а V_- - из функций, голоморфно продолжимых в область $|z|>1$ на сфере Римана (т.е. функций вида $\sum_{k>0} c_k z^{-k}$).

3. Кососимметричную билинейную форму

$$\{f(z), g(z)\} = \int_{|z|=1} f(z) g'(z)\, dz \qquad (11.1)$$

4. Эрмитову индефинитную форму

$$\Theta(f,g) = i \int_{|z|=1} f(z)\, d\overline{g(z)}$$

Теперь построим серию вложений $T_{\alpha,\beta}$ группы $Diff$ в группу $Aut(V) = Aut_{\overline{SpH}}(V)$. Пусть $q \in Diff$. Положим

$$T_{\alpha,\beta}(q)f(\varphi) = f(q(\varphi)) + \alpha(q(\varphi) - \varphi) + \beta \ln q'(\varphi)$$

(см. [32], [37]), или, полагая $z = e^{i\varphi}$, $p(e^{i\varphi}) = e^{iq(\varphi)}$

$$T_{\alpha,\beta}(p)f(z) = f(p(z)) - (\beta + i\alpha)\ln(p(z)/z) + \beta \ln p'(z) \tag{11.3}$$

Ограничивая представление Вейля группы $Aut(V)$ на $Diff$, мы и получаем серию представлений $N_{\alpha,\beta}$ группы $Diff$. Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то построенные представления унитарны, в противном случае ($\alpha \notin \mathbb{R}$ или $\beta \notin \mathbb{R}$) операторы $N_{\alpha,\beta}(q)$, где $q \in Diff$ не являются ограниченными операторами в гильбертовом пространстве.

<u>II.7. Универсальная накрывающая</u> $Diff^{\sim}$ <u>группы</u> $Diff$.

Рассмотрим группу $Diff^{\sim}$ диффеоморфизмов $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $q(x + 2\pi) = q(x) + 2\pi$. Ее центр состоит из всех преобразований вида $x \to x + 2\pi k$. Факторгруппа группы $Diff^{\sim}$ по центру, очевидно, изоморфна $Diff$.

Обозначим через H_γ, где $\gamma \in \mathbb{C}$ пространство всех функций на прямой $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$f(x + 2\pi) = e^{2\pi i \gamma} f(x)$$

Функции $e_n = \exp(i(n+\gamma)x)$ образуют базис в H_γ. Определим представление $T_{\gamma,\nu}$ группы $Diff$ в H_γ

по формуле

$$T_{\gamma,\nu} f(x) = f(q(x))\, q'(x)^{\nu}$$

II.8. Универсальная фермионная конструкция. Снабдим пространство H_γ структурой объекта категории $\overline{GA}$, а именно, положим, что пространство $(H_\gamma)_-$ натянуто на все векторы e_n с $n \leqslant 0$, а $(H_\gamma)_+$ натянуто на все векторы e_n с $n > 0$. При этом операторы (II.4) являются автоморфизмами пространства H_γ. Ограничивая спинорное представление группы $Aut(H_\gamma)$ на $\mathcal{D}iff$ мы получаем серию представлений $\mathcal{D}iff$, соответствующих представлениям алгебры Вирасоро из п.II.5.б $\left(\gamma = p,\ \nu = \frac{1+is}{2}\right)$

II.9. Вырожденные фермионные конструкции. Нам осталось описать представления $\mathcal{D}iff$, связанные с представлениями п. II.5.в). Сначала рассмотрим представление $T_{1/2,0}$. Снабдим $H_{1/2}$ структурой объекта категории $\overline{G\mathcal{D}}$ положив

$$\{f,g\} = \int_0^{2\pi} f(\varphi) g(\varphi)\, d\varphi$$

Тогда $\mathcal{D}iff$ действует автоморфизмами объекта $H_{1/2}$ категории $\overline{G\mathcal{D}}$. Ограничивая спинорное представление $\overline{G\mathcal{D}}$ на $\mathcal{D}iff$ мы получаем представление $L(0,\frac12)\oplus L(\frac12,\frac12)$.

Чтобы построить модуль $L(1/16, 1/2)$ рассмотрим пространство H_0, разложим его в сумму трех подпространств $(H_0)_- \oplus \mathbb{C}e_0 \oplus (H_0)_+$ положив, что $(H_0)_-$ натянуто на все e_k с $k<0$, а $(H_0)_+$ на все e_k с $k>0$. Наконец, введем в H_0 симметричную билинейную форму

$$\{f,g\}=\int_0^{2\pi} f(\varphi)g(\varphi)d\varphi$$

Тогда H_0 становится объектом категории $\overline{B}$, а операторы $T_{0,0}(q)$ являются автоморфизмами H_0.

§12. Полугруппа Γ.

Обозначения. Через S^1 мы обозначим окружность $|z|=1$ на комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, через $\mathcal{D}_+$ - круг $|z|\leq 1$, через $\mathcal{D}_-$ - область $|z|\geq 1$ на сфере Римана, через $\mathcal{D}^0_\pm$ - внутренности этих областей. Слова "риманова поверхность" означают одномерное комплексное многообразие. Голоморфные взаимно однозначные отображения мы будем называть, как обычно, однолистными. Мы будем называть функцию в замкнутой области Ω однолистной, если она однолистно продолжается в некоторую открытую область, содержащую Ω.

12.1. Косвенные указания на существование полугруппы Γ. Пусть G - вещественная группа Ли, $\mathfrak{g}$ - ее алгебра Ли, $G_\mathbb{C}$ - комплексификация группы G. Пусть ρ - унитарное представление группы ρ. Представление ρ является аналитической функцией на G и естественно встает вопрос о ее продолжении в комплексную область, т.е. на группу $G_\mathbb{C}$. Если ρ конечномерно, то, как х хорошо известно, такое продолжение существует - на нем основан "унитарный трюк" Вейля. Причины, по которым в бесконечномерном случае это не так, видно на следующем простом примере. Рассмотрим представление группы $\mathbb{R}$ в $L^2(\mathbb{R})$ с помощью операторов

$$T_h f(x) = f(x+h) = e^{h\frac{\partial}{\partial x}} f(x)$$

Если $h \in \mathbb{C}$, но $h \notin \mathbb{R}$, то определение таких операторв наталкивается на некоторые трудности. Известно, что если группа G нильпотентна (см. [70]), то любое унитарное представление G может быть продолжено до представления группы $G_{\mathbb{C}}$ неограниченными операторами (в случае группы Гейзенберга такое продолжение неявно обсуждалось в §5). Любопытно,что подобная ситуация не может возникать в случае полупростых групп, но встречается в бесконечномерном случае, в таких терминах может трактоваться спинорное представление группы $Aut_{\overline{GD}}(V), \dim V = \infty$. Похожая ситуация возникает и в случае представлений групп, связанных с аффинными алгебрами (это было независимо выяснено Гудманом и Валлахом [71] и автором [35], см. также [37]).

Если группа G полупроста, то представление ρ вообще говоря, может быть продолжено голоморфно лишь на малую окрестность подмногообразия G в $G_{\mathbb{C}}$, операторы представления являются однако, неограниченными, и их область определения катастрофически убывает при удалении от группы G.

Существует, однако, замечательное исключение, а именно, когда ρ - представление со старшим весом. В этом случае представление продолжается на некоторую открытую подполугруппу $\Gamma \subset G_{\mathbb{C}}$. В алгебре Ли $\mathfrak{g}$ в этом случае существует G -инвариантный выпуклый конус C и полугруппа Γ обязательно имеет вид $\Gamma = G \cdot \exp(iC)$ ([10], [44])

Теперь вспомним, что группа диффеоморфизмов окружности имеет представления со старшим весом. несложно указать и $\mathcal{D}iff$ -инвариантный выпуклый конус $C \subset Vect$: он состоит из всех векторных полей, направленных по часовой стрелке. Есть, однако, существенное отличие от конечномерного случая: группы $\mathcal{D}iff_{\mathbb{C}}$ не существует. Итак, наша полугруппа Γ должна быть существующей частью несуществующей группы $\mathcal{D}iff_{\mathbb{C}}$.

Можно предложить две неявных конструкции этой полугруппы (они действительно дают нашу полугруппу, хотя это и не очевидно).

Пусть ρ -представление $\mathcal{D}iff$ со старшим весом. Тогда можно попытаться определить Γ как множество всех операторов вида $\lambda \rho(g_1) \exp(t\rho(L_0))\rho(g_2)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, g_1, $g_2 \in \mathcal{D}iff$, $t > 0$. Неясно, однако, замкнуто ли это множество относительно умножения.

Во-вторых, полугруппу Γ можно было бы определить как замыкание множества всех операторов вида $\rho(g)$, $g \in \mathcal{D}iff$ в слабой операторной топологии. Ясно, что это замыкание является полугруппой, но не ясно, имеет ли она какое-либо отношение к искомой полугруппе.

<u>I2.2. Локальная полугруппа</u> $L\Gamma$. Элементом этой полугруппы является вещественно аналитическое отображение μ из окружности S^1 в круг $\mathcal{D}_+^0 = \{z : |z| < 1\}$, такое, что

1. $\mu'(e^{i\varphi}) \neq 0$
2. $\mu(e^{i\varphi})$ - жорданов контур, проходимый против часовой стрелки.

Если $\mu_1, \mu_2 \in L\Gamma$, то иногда определено их произведение $\mu_1\mu_2$, а именно, может оказаться, что отображение μ_1 продолжается по голоморфности до конформного отображения области ограниченной контурами S^1 и $\mu_2(e^{i\varphi})$. Тогда $\mu_1\mu_2$ определяется как произведение отображений.

Кажется очевидным, что эта локальная полугруппа не может быть продолжена до глобальной полугруппы. На самом деле это не так.

<u>12.3. Первая конструкция полугруппы</u> Γ. Элементом Γ является тройка (R, r_+, r_-), где R - риманова поверхность, конформно эквивалентная кольцу, а $r_\pm : S^1 \to R$ - аналитические параметризации компонент края, причем при проходе контура $r_+(e^{i\varphi})$ поверхность остается слева, а при проходе контура $r_-(e^{i\varphi})$ —справа.

Два элемента полугруппы (R, r_+, r_-) и (R', r'_+, r'_-) считаются совпадающими, если существует биголоморфное отображение $\theta: R \to R'$ такое, что $r'_\pm(e^{i\varphi}) = r_\pm(e^{i\varphi})$.

Пусть (R, r_+, r_-), $(Q, q_+, q_-) \in \Gamma$. Определим их произведение $(P, p_+, p_-) \in \Gamma$. Риманова поверхность P получается "склейкой" римановых поверхностей R и Q путем отождествления точек $r_-(e^{i\varphi})$ и $q_+(e^{i\varphi})$ для всех $\varphi \in [0, 2\pi)$. Далее $p_+(e^{i\varphi}) = r_+(e^{i\varphi})$, $p_-(e^{i\varphi}) = q_-(e^{i\varphi})$. Чтобы увидеть комплексную структуру на Γ, мы дадим еще одно определение этой полугруппы.

<u>12.4. Вторая конструкция полугруппы</u> Γ. Элементом Γ является тройка $[M, m_+, m_-]$, где M - риманова поверхность, конформно эквивалентная сфере, $m_+ : \mathcal{D}_+ \to M$, $m_- : \mathcal{D}_- \to M$ - однолистные отображения, причем множест-

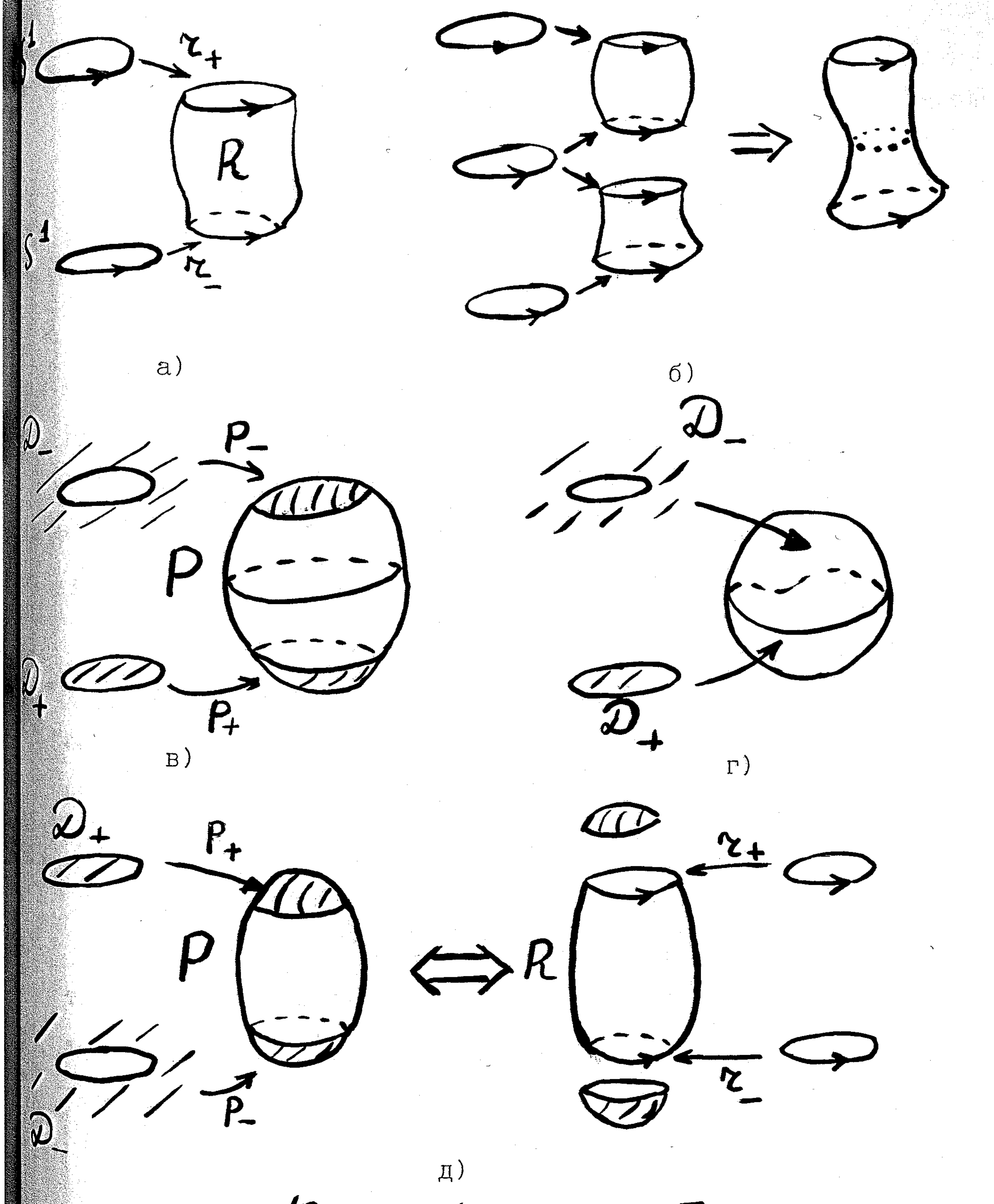


Рис. I. а) Элемент (R, τ_+, τ_-) полугруппы Γ . б) Умножение
г) Второе определение Γ д) Элемент группы $\mathcal{D}iff \subset \Gamma$
д) Эквивалентность определений: $[P, P_+, P_-] =$
$= (R, \tau_+, \tau_-)$

ва $m_+(\mathcal{D}_+)$ и $m_-(\mathcal{D}_-)$ не пересекаются (Дабы не возникало путаницы, мы используем квадратные скобки). Два элемента $[M, m_+, m_-]$ и $[M', m'_+, m'_-]$ мы будем считать совпадающими, если существует биголоморфное отображение $\tau: M \to M'$ такое, что $m'_\pm(z) = \tau m_\pm(z)$.

Пусть $[M, m_+, m_-]$, $[N, n_+, n_-] \in \Gamma$. Определим их произведение $[K, k_+, k_-] \in \Gamma$. Риманова поверхность K получается склейкой римановых поверхностей $M \setminus m_-(\mathcal{D}_-^0)$ и $N \setminus n_+(\mathcal{D}_+^0)$ путем отождествления точек $m_-(e^{i\varphi})$ и $n_+(e^{i\varphi})$. При этом
$k_+(z) = m_+(z)$, $k_-(z) = m_-(z)$.

Установим изоморфизм этих двух моделей. Пусть $[M, m_+, m_-]$ - элемент полугруппы Γ в смысле второго определения, построим по нему элемент (R, τ_+, τ_-) полугруппы Γ в смысле первого определения. Для этого положим

$$R = M \setminus (m_+(\mathcal{D}_+^0) \cup m_-(\mathcal{D}_-^0)), \quad \tau_+(e^{i\varphi}) = m_+(e^{i\varphi}),$$
$$\tau_-(e^{i\varphi}) = m_-(e^{i\varphi}).$$

Сама группа $\mathcal{D}iff$ строго говоря (если придерживаться точно нашего определения) в полугруппе Γ не содержится. Элементам группы $\mathcal{D}iff$ соответствуют тройки $[L, \ell_+, \ell_-]$, где L - риманова поверхность, конформно эквивалентная сфере, $\ell_\pm : \mathcal{D}_\pm \to L$ - однолистные функции, причем области $\ell_+(\mathcal{D}_+^0)$ и $\ell_-(\mathcal{D}_-^0)$ не пересекаются, а области $\ell_+(\mathcal{D}_+)$ и $\ell_-(\mathcal{D}_-)$ покрывают всю сферу L. Эквивалентность троек и их произведение определяются так же, как и выше. Нам будет удобно дополнить полугруппу Γ элементами группы $\mathcal{D}iff$. Такую пополненную полугруппу мы будем обозначать через $\underline{\Gamma}$.

<u>Замечания</u>. Полугруппа Γ обладает рядом свойств (см. [39]),

которые, на первый взгляд, воспринимаются как странные: например, группа $Diff$ плотна в $\overline{\Gamma}$ (в смысле единственной разумной топологии на Γ). Дифференциал сдвига на полугруппе Γ инъективен, но не сюръективен. Мы не будем останавливаться на этом подробнее.

<u>I2.5. Каноническое разложение в</u> Γ. Любой элемент $\gamma\in\Gamma$ представим в виде

$$\gamma = g_1 \mathcal{L}_t g_2$$

где $g_1, g_2 \in Diff$, а $\mathcal{L}_t$ - это тройка (R, τ_+, τ_-), где R - кольцо $e^{-t}\leq|z|\leq 1$, $\tau_+(e^{i\varphi})=e^{-t+i\varphi}$, $\tau_-(e^{i\varphi})=e^{i\varphi}$.

Произведение (I2.I) понимается как произведение в полугруппе $\dot{\Gamma}$. Если

$$\gamma = g_1\mathcal{L}_t g_2 = g_1'\mathcal{L}_{t'}g_2'$$

то $t=t'$ и существует поворот окружности ℓ такой, что

$$g_1' = g_1\ell \qquad g_2' = \ell^{-1}g_2$$

Проверим истинность сформулированных утверждений. Пусть $(Q, q_+, q_-)\in\Gamma$. Так как любая риманова поверхность, топологически эквивалентная кольцу, конформно эквивалентна кольцу вида $e^{-t}\leq|z|\leq 1$ ([12]), то мы без ограничения общности можем считать, что Q - это кольцо. Но тогда $g_2(e^{i\varphi}) = \tau_-(e^{i\varphi})$, $g_1^{-1}(e^{i\varphi}) = e^{t}\tau_+(e^{i\varphi})$.

Наконец, утверждение о единственность канонического разложения (с точностью до преобразований (II.2)) вытекает из того, что t - инвариант римановой поверхности, а любой голоморфный автоморфизм кольца есть вращение (см. [12], [14])

12.6. Универсальная накрывающая $\tilde{\Gamma}$ над Γ. Элементом полугруппы $\tilde{\Gamma}$ является четверка $(K, \varkappa, k_+, k_-)$, где

I. K – риманова поверхность с краем, конформно эквавалентная кругу (Удобно представлять себе K как полосу $-t \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 0$)

2. $\varkappa$ – гиперболический автоморфизм поверхности K (удобно считать, что $\varkappa$ – сдвиг полосы: $z \to z + 2\pi$). На крае поверхности K есть две неподвижные точки, они делят край на две части, которые мы будем называть компонентами.

3. $k_\pm$ – аналитические диффеоморфизмы прямой $\mathbb{R}$ в компоненты края K, удовлетворяющие условию $k_\pm(x+2\pi) = \varkappa k_\pm(x)$, при этом, при проходе кривой $k_+(x)$ поверхность K остается слева, а при проходе кривой $k_-(x)$ поверхность остается справа.

Пусть $(K, \varkappa, k_+, k_-)$, $(L, \lambda, \ell_+, \ell_-) \in \tilde{\Gamma}$. Их произведение есть четверка (M, μ, m_+, m_-), где

I. M получается склейкой K и L путем отождествления точек $k_-(x)$ и $\ell_+(x)$, автоморфизм μ получается склейкой автоморфизмов $\varkappa$ и λ

2. $m_+(x) = k_+(x)$, $m_-(x) = \ell_-(x)$

Осталось построить канонический гомоморфизм $\tilde{\Gamma} \to \Gamma$. Пусть $(K, \varkappa, k_+, k_-) \in \tilde{\Gamma}$. Выкинем из края поверхности K неподвижные точки автоморфизма $\varkappa$ и полученную риманову поверхность профакторизуем по действию автоморфизма $\varkappa$. Тогда мы получим искомый элемент из Γ.

§13. Конструкции представлений полугруппы Γ.

Этот параграф содержит конструкции всех представлений полугруппы Γ со старшим весом. Эти представления могут быть реализованы как в бозонном (п.13.6), так и в фермионном (п.13.7) пространстве Фока. Сначала мы разберем простейшую бозонную конструкцию (п.13.1 - 13.3), остальные конструкции можно рассматривать как вариацию этой. Кроме того, в параграфе содержится абстрактная теорема интегрируемости на полугруппу для унитарных представлений алгебры Вирасоро (п.13.4).

<u>13.1. Простейшая конструкция.</u> Рассмотрим пространство V функций с нулевым средним на окружности $S^1: |z|=1$ и снабдим V структурой объекта симплектической категории, так как это сделано в п.11.6. Рассмотрим естественное действие $T(q)=T_{0,0}(q)$ группы $\mathcal{D}iff$ в V. Как мы уже говорили ранее (п.11.6), операторы $T(q)$ являются автоморфизмами объекта V. Естественно попытаться продолжить это вложение на Γ, т.е. попытаться вложить полугруппу Γ в полугруппу $End(V)$ эндоморфизмнов пространства V.

Пусть $\mathcal{R}=(R,\tau_+,\tau_-)$ - элемент полугруппы Γ в смысле первого определения (п.11.3). Пусть $P(\mathcal{R})\subset V\oplus V$ - это множество всех пар $(v_1,v_2)\in V\oplus V$ таких, что существует голоморфная функция F на R такая, что ее ограничение f_1 на контур $\tau_+(e^{i\varphi})$ есть $v_1\circ(\tau_+)^{-1}$, а ограничение функции f_2 на $\tau_-(e^{i\varphi})$ есть $v_2\circ(\tau_-)^{-1}$. Оказывается, что $P(\mathcal{R})\in End(V)$. Отображение $\mathcal{R}\mapsto P(\mathcal{R})$ является вложением полугруппы Γ в полугруппу $End(V)$. Ограничивая представление Вейля на полугруппу Γ, мы получаем представление полугруппы Γ . Это представление соответствует представлению $N_{0,0}$ группы $\mathcal{D}iff$ (см. п.II.5, II.6).

<u>I3.2. Аккуратное изложение конструкции предыдущего пункта.</u> Прежде всего, заметим, что операция ограничения голоморфной функции на край-операция не вполне безобидная, чтобы ее аккуратно определить, мы должны наложить какие-либо условия на поведение функции F при подходе к краю . Кроме того, не совсем ясно, почему функция, голоморфная по обе стороны линии склейки римановых поверхностей, и имеющая одинаковые граничные значения на линии склейки (при подходе с обеих сторон) голоморфна. Эти трудности можно преодолеть в лоб, используя элементарную граничную теорию аналитических функций, но проще эти трудности обойти. Для этого мы заново определим отношение $P(\mathcal{R})$.

Сначала мы построим линейное отношение $P_0(\mathcal{R}) \subset V \oplus V$, оно состоит из всех $(v_1, v_2) \in V \oplus V$ таких, что существует голоморфная аналитическая вплоть до границы функция F на $\mathcal{R}$ такая, что ограничение F на контур $\tau_+(e^{i\varphi})$ суть $v_1 \circ \tau_+^{-1}$, а ограничение F на контур $\tau_-(e^{i\varphi})$ суть $v_2 \circ \tau_-^{-1}$. Пусть теперь $P(\mathcal{R})$ - это замыкание подпространства $P_0(\mathcal{R})$.

<u>Лемма I3.I</u>. Отображение $\mathcal{R} \mapsto P_0(\mathcal{R})$ является гомоморфизмом из Γ в полугруппу линейных отношений в пространстве V.

<u>Доказательство</u>: очевидно.

<u>Теорема I3.I</u>. Отображение $\mathcal{R} \mapsto P(\mathcal{R})$ является гомоморфизмом Γ в $End(V)$.

Теорема вытекает из леммы I3.I и следующей леммы I3.2.

Лемма I3.2. $P(\mathcal{R}) \in End(V)$.

Доказательство. Пусть L_t – кольцо вида $e^{-t} \leq |z| \leq 1$. Пусть $\mathcal{L}_t = (L_t, e^{-t}e^{i\varphi}, e^{i\varphi}) \in \Gamma$. Покажем сначала, что $P(\mathcal{L}_t) \in End(V)$. Выберем в V_+ ортонормальный базис $e_k = z^k/\sqrt{k}$, $k>0$, а в V_- ортонормальный базис $f_k = z^{-k}/\sqrt{-k}$, $k>0$. Тогда $P_0(\mathcal{L}_t)$ состоит из всех пар $(v_1, v_2) = ((v_1^+, v_1^-), (v_2^+, v_2^-)) \in V \oplus V$ имеющих в базисе $e_1, e_2, \ldots, f_1, f_2, \ldots$ вид

$$((\alpha_1 e^{-t}, \alpha_2 e^{-2t}, \ldots; \beta_1, \beta_2, \ldots), (\alpha_1, \alpha_2, \ldots; \beta_1 e^{-t}, \beta_2 e^{-2t}, \ldots)) \quad (13.1)$$

причем α_j, β_j удовлетворяют условию: существует $\varepsilon>0$ такое, что ряды

$$\sum \alpha_k (1+\varepsilon)^k \quad ; \quad \sum \beta_k (1+\varepsilon)^k$$

сходятся. Замыкание $P(\mathcal{L}_t)$ линейного пространства $P_0(\mathcal{L}_t)$ состоит из всех векторов вида (I3.I), удовлетворяющих условию $\sum|\alpha_j|^2<\infty, \sum|\beta_j|^2<\infty$. Преобразование Потапова-Гинзбурга линейного отношения $P_0(\mathcal{L}_t)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ где

$$A = \begin{pmatrix} e^{-t} & & & \\ & e^{-2t} & & \\ & & e^{-3t} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (13.2)$$

Теперь утверждение $P(\mathcal{L}_t) \in End(V)$ очевидно.

Пусть теперь $\mathcal{R} \in \Gamma$ произвольно. Тогда (см. п.I2.5) $\mathcal{R}$ представимо в виде $\mathcal{R} = g_1 \mathcal{L}_t g_2$, где $g_1, g_2 \in Diff$

Тем самым $P_0(\mathcal{R}) = P_0(g_1)P_0(\mathcal{L}_t)P_0(g_2)$,
при этом операторы $P_0(g_i) = T_{0,0}(g_i)$ обратимы и сохраняют пространство аналитических функций. Поэтому

$$P_0(\mathcal{R}) = P(g_1)P_0(\mathcal{L}_t)P(g_2)$$

Взяв замыкание обеих частей равенства, получаем

$$P(\mathcal{R}) = P(g_1)P(\mathcal{L}_t)P(g_2)$$

Но правая часть равенства содержится в $End(V)$. емма I3.2 доказана, а вместе с ней доказана и теорема I3.I

I3.3. Дополнения к п.I3.2. Пусть We - представление Вейля (см. §2). Мы видели, что операторы $We(P)$ могут быть неограниченными, поэтому встает вопрос об ограниченности операторов $We(P(\mathcal{R}))$.

Предложение I3.I. Пусть $\mathcal{R} \in \Gamma$. Тогда операторы $We(P(\mathcal{R}))$ ограничены. Более того, эти операторы ядерны.

Доказательство. Мы сразу докажем ядерность. Пусть $\mathcal{R} = g_1\mathcal{L}_t g_2$ - каноническое разложение $\mathcal{R}$. Тогда

$$We(P(\mathcal{R})) = We(P(g_1))We(P(\mathcal{L}_t))We(P(g_2))$$

Так как крайние сомножители этого произведения унитарны с точностью до умножения на константу, нам достаточно доказать ядерность оператора $We(P(\mathcal{L}_t))$. В силу вычислений, проведенных в доказательстве леммы I3.2, мы получаем

$$We(P(\mathcal{L}_t))f(u) = f(Au) \tag{13.3}$$

где A задается матрицей (I3.2). Оператор $f(u) \to f(Au)$ очевидно ограничен и самосопряжен, его собственные векторы - это одночлены $u_1^{k_1}\dots u_n^{k_n}$ а соответствующие собственные числа суть $exp(-t\Sigma_j k_j)$. Поэтому след оператора (13.3) равен $\prod_{j=1}^{\infty}(1-e^{-tj})<\infty$, если $t>0$, что и требовалось доказать.

Естественно встает вопрос о вычислении характера представления $We(P(\mathcal{R}))$, т.е. следа оператора $We(P(\mathcal{R}))$. Ответ на этот вопрос будет дан в п.13.

Следующее утверждение нам понадобится в §17.

Лемма 13.3. Преобразование Потапова-Гинзбурга линейного отношения $P(\mathcal{R})$ является оператором Гильберта-Шмидта с нормой строго меньше 1.

Доказательство. Из формулы (2.5) видно, что преобразование Потапова-Гинзбурга линейных отношений $P(g_1\mathcal{L}_{t/2})$ и $P(\mathcal{L}_{t/2}g_2)$ являются операторами Гильберта-Шмидта с нормой меньше <1. Теперь из той же формулы следует и наше утверждение$(P(g_1\mathcal{L}_t g_2)=P(g_1\mathcal{L}_{t/2})P(\mathcal{L}_{t/2}g_2))$.

13.4. Абстрактная теория о продолжении унитарных представлений.

Теорема 13.2. Пусть ρ - унитарное проективное представление группы $\mathcal{D}iff$ со старшим весом. Пусть $d\rho$ - соответствующее представление алгебры $\mathcal{L}$. Тогда ρ продолжается до представления полугруппы Γ по формуле

$$\rho(\mathcal{R})=\rho(g_1)exp(t\,d\rho(L_0))\rho(g_1) \qquad (13.4)$$

где $\mathcal{R}=g_1\mathcal{L}_t g_2$ - каноническое разложение $\mathcal{R}$. ☑

Мы будем доказывать эту теорему в следующей формулировке.

Теорема 13.2'. Путсь ρ - унитарное проективное представление группы $\mathcal{D}iff$, разлагающееся в прямую сумму представлений со старшим весом. Тогда формула (I3.4) задает представление полугруппы Γ.

Лемма I3.4. Если теорема I3.2$'$ верна для представлений ρ_1, ρ_2, то она верна и для $\rho_1 \otimes \rho_2$.

Доказательство очевидно.

Лемма I3.5. Пусть ρ_1, ρ_2 унитарные представления $Diff$ со старщим весом и пусть теорема I3.2$'$ верна для $\rho_1 \otimes \rho_2$. Тогда она верна и для ρ_1 и ρ_2.

Доказательство. Итак, мы знаем, что

$$\rho_1(R_1R_2)\otimes\rho_2(R_1R_2)=\lambda\rho_1(R_1)\rho_1(R_2)\otimes\rho_2(R_1)\rho_2(R_2)$$

для некоторого скаляра λ. Мы хотим показать, что

$$\rho_j(R_1)\rho_j(R_2)=\mu\rho_j(R_1R_2)$$

для некоторых μ_1, μ_2. Т.е. мы должны убедитться в том, что для любых ненулевых операторов A, B, A', B' в гильбертовом пространстве равенство

$$A\otimes B=\lambda A'\otimes B' \qquad (13.5)$$

влечет $A=\nu A'$, $B=\mu B'$. Пусть a_{ij}, b_{ij}, a'_{ij}, b'_{ij} - матричные элементы этих операторов. Равенство (I3.5) влечет $a_{ij}b_{kl}=a'_{ij}b'_{kl}$ для любых i, j, k, l. Отсюда, в частности, следует, что a_{ij} и a'_{ij} (соответственно b_{kl} и b'_{kl}) обращаются в 0 одновременно. Далее для любых i, j, k, l таких, что $a_{ij}\neq 0$, $b_{kl}\neq 0$ выполнено $a_{ij}/a'_{ij}=b_{kl}/b'_{kl}$, что и требовалось доказать. ☒

Сформулируем несколько замечаний о тензорных произведениях представлений со старшим весом. Пусть $L(h_1,c_1)$ и $L(h_2,c_2)$ - неприводимые унитарные представления $\mathcal{D}iff$. Тогда

$$L(h_1,c_1)\otimes L(h_2,c_2)=\bigoplus_{p=0}^{\infty}\mu_p L(h_1+h_2+p,c_1+c_2) \tag{13.6}$$

где μ_p - неотрицательные целые числа, причем $\mu_0=1$ (в самом деле, произведение модулей со старшим весом может разлагаться лишь в прямую сумму модулей со старшим весом, в силу унитаризуемости эти модули неприводимы). Пусть теперь $M(h_1,c_1)= = L(h_1,c_1)$, $M(h_2,c_2)=L(h_2,c_2)$ - унитаризуемые модули Верма (если $h>0$, а $c>1$, то $M(h,c)=L(h,c)$ унитаризуем, см., например, [37]). Тогда

$$M(h_1,c_1)\otimes M(h_2,c_2)=\bigoplus_{p=0}^{\infty}c(p)L(h_1+h_2+p,c_1+c_2)$$

где $c(p)$ число разбиений числа p (чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить размерности весовых L_0 - подпространств)

<u>Доказательство теоремы I3.2'</u>. В пп. I3.I и I3.2 мы убедились, что теорема I3.2' верна для $\rho=N_{0,0}$. Как известно, $N_{0,0}=\bigoplus_{k=0}^{\infty}L(k^2,1)$ (см. [37]), в частности, теорема I3.2' верна для $L(0,1)$ и $L(1,1)$. Значит она верна и для $L(0,1)\otimes L(1,1)$, а это представление, в свою очередь, содержит подмодуль $L(1,2)=M(1,2)$. Итак, теорема верна для модулей $M(1,2)^{\otimes k}$, а значит и для всех модулей вида $M(k,2\ell)$ при $k\geq \ell$. Значит она верна и для сумм таких модулей, т.е для всех модулей вида

$$\bigoplus_{p=0}^{\infty} \nu_p M(k+p, 2k) \qquad (13.7)$$

где ν_p - неотрицательные числа. Из условий унитаризуемости (п.II.3) видно, что для любого унитаризуемого модуля $L(h,c)$ найдется унитаризуемый модуль $L(h',c')$ такой, что $L(h,c)\otimes L(h',c')$ имеет вид (13.7). Осталось применить лемму I3.5. ☒

Представления $N_{\alpha,\beta}$ группы $\mathcal{D}iff$ получаются с помощью вложений $\mathcal{D}iff$ в группу $Aut_{\underline{SpH}}(V)$ автоморфизмов объекта категории SpH. Естественно ожидать, что соответствующие представления полугруппы Γ можно построить с помощью вложений Γ в полугруппу $End_{\underline{SpH}}(V)$. Это действительно так, но перед тем как переходить к конструкции вложения мы обсудим одну вспомогательную конструкцию.

<u>I3.5. Логарифмические формы</u>. Тензорные плотности на римановых поверхностях можно рассматривать как набор функций на картах, меняющихся при помощи подходящих линейных преобразований при замене переменных. Объекты, которые мы сейчас введем, меняются при замене переменных при помощи аффинных преобразований.

Пусть $R\subset \mathbb{C}\setminus 0$ - связная двусвязная (кольцеобразная) область, причем R не стягиваема в $\mathbb{C}\setminus 0$ (т.е. кольцо R охватывает 0). Мы будем рассматривать R как комплексное многообразие, но в качестве карт мы будем рассматривать лишь однолистные отображения. $\psi: R'\to R$, где

1. R' - кольцеобразная область в $\mathbb{C}\setminus 0$, не стягиваемая в $\mathbb{C}\setminus 0$.

2. Если $\gamma: S^1\to R'$ - контур, охватывающий 0,

проходимый против часовой стрелки, то контур $\psi\circ\gamma$ охватывает O и проходится против часовой стрелки.

Мы скажем, что в области R задана логарифмическая форма F типа (μ,ν) если

I. В каждой карте Q задано формальное выражение $F_Q = f(z)+\mu \ln z + \nu \ln dz$, где $f(z)$ – функция, определенная с точностью до прибавления константы.

2. Пусть Q_1, Q_2 – две карты, $\psi_1 : Q_1 \to R$, $\psi_2 : Q_2 \to R$ – соответствующие отображения, причем $\psi_1(Q_1)$ и $\psi_2(Q_2)$ пересекаются по кольцеобразной области. Пусть $F_{Q_j} = f_j(z)+\mu \ln z + \nu \ln dz$ и пусть $\varphi = \psi_1^{-1}\circ\psi_2$ – функция перехода. Тогда

$$f_1(z) = f_2(\varphi(z)) + \mu \ln(\varphi(z)/z) + \nu \ln \varphi'(z)$$

Замечание. Пространство всех логарифмических форм типа (μ,ν) не имеет естественной структуры линейного пространства. Оно является аффинным пространством. ●

Пусть далее R_1 и R_2 – кольцеобразные области, охватывающие O. Пусть $p : R_1 \to R_2$ – однолистное отображение, которое переводит контур, охватывающий O, проходимый против часовой стрелки в охватывающий O контур, проходимый против часовой стрелки. Пусть F – логарифмическая форма в R_2. Определим логарифмическую форму p^*F в R_1. А именно, пусть $\psi : Q \to R_1$ – карта в R_1. Тогда соответствующее выражение $f(z)+\mu \ln z + \nu \ln dz$ совпадает с записью формы F в карте $p\circ\psi : Q \to R_2$.

Далее, рассмотрим жорданов аналитический контур R на плоскости, охватывающий O. Нам ничего не мешает распространить определение логарифмической формы и на такие "бесконечно узкие" римановы поверхности.

13.6. Представления $N_{\alpha,\beta}$ полугруппы Γ. Поставим каждому элементу $f(z)$ пространства V логарифмическую форму

$$f(z)-(\beta+i\alpha)\varphi+\beta\ln d\varphi \tag{13.8}$$

на окружности S^1 ($\varphi=\frac{1}{i}\ln z,\ \ln d\varphi=\frac{1}{i}(-\ln z+\ln dz)$) типа $(-i\alpha-\beta,\beta)$. Таким образом, мы отождествили пространство V с некоторым пространством логарифмических форм типа $(-i\alpha-\beta,\beta)$.

Действие (11.3) группы $\mathcal{D}iff$ в V отвечает естественному действию $\mathcal{D}iff$ в пространстве логарифмических форм на окружности $|z|=1$.

Пусть $\mathfrak{R}=(R,\tau_+,\tau_-)\in\Gamma$. Пусть $P^0_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R})\subset\subset V\oplus V$ - это множество всех пар $(v_1,v_2)\in V\oplus V$ таких, что существует такая голоморфная аналитическая вплоть до границы логарифмическая форма F типа $(-\beta-i\alpha,\beta)$, такая, что $\tau_+^*F=v_1$, $(\tau_-)^*F=v_2$. Пусть $P_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R})$ - замыкание $P^0_{\alpha,\beta}$ в $V\oplus V$.

Теорема 13.1'. Отображение $\mathfrak{R}\mapsto P^0_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R})$ является гомоморфизмом Γ в $\mathrm{End}_{\overline{SpH}}(V)$. ∎

Доказательство совпадает с доказательтвом теоремы 13.1.

Ограничивая представление Вейля полугруппы $\mathrm{End}_{\overline{SpH}}(V)$ на Γ мы получаем серию представлений $N_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R})=$ $=We(P_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R}))$ полугруппы Γ.

Предложение 13.1. Пусть $\mathfrak{R}\in\Gamma$. Операторы $N_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R})$ ограничены. Более того, эти операторы - ядерные.

Замечание. Если $\mathfrak{R}\in\overline{\Gamma}\setminus\Gamma=\mathcal{D}iff$, то операторы $N_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R})$ вообще говоря неограничены.

Доказательство. Начнем с ограниченности. Оператор $N_{\alpha,\beta}(\mathcal{R})$ имеет вид

$$B[\mathcal{Y}(\mathcal{R})|\nu(\mathcal{R})]=B\left[\begin{array}{cc|c} K(\mathcal{R}) & L(\mathcal{R}) & \varkappa(\mathcal{R})^t \\ L^t(\mathcal{R}) & M(\mathcal{R}) & \mu(\mathcal{R})^t \end{array}\right]$$

Важно заметить, что подставив вместо $\varkappa$ и μ нули, мы получим операторы $N_{0,0}(\mathcal{R})$, уже изученные выше. Пусть $\mathcal{R}=g_1\mathcal{L}_t g_2$ – каноническое разложение $\mathcal{R}$. Тогда

$$\mathcal{Y}(\mathcal{R})=\mathcal{Y}(g_1)\circ\mathcal{Y}(\mathcal{L}_t)\circ\mathcal{Y}(g_2)$$

где умножение $\circ$ определяется формулой (5.1). Но $\mathcal{Y}(\mathcal{L}_t)= =\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0\end{pmatrix}$, где A задается формулой (13.2). Отсюда получаем $\|\mathcal{Y}(\mathcal{R})\|<1$. Применяя теорему 5.I мы получаем ограниченность операторов $N_{\alpha,\beta}(\mathcal{R})$.

Докажем ядерность. Для этого заметим, что $N_{\alpha,\beta}(\mathcal{L}_t)$ не зависит от α, β, поэтому $N_{\alpha,\beta}(\mathcal{L}_t)$ – ядерный оператор (в силу предложения 13.I). Далее, пусть $t=t_1+t_2+t_3$, где $t_j>0$. Тогда

$$N_{\alpha,\beta}(\mathcal{R})=[N_{\alpha,\beta}(g_1)N_{\alpha,\beta}(\mathcal{L}_{t_1})]\times$$
$$\times N_{\alpha,\beta}(\mathcal{L}_{t_2})[N_{\alpha,\beta}(\mathcal{L}_{t_3})N_{\alpha,\beta}(g_2)]$$

Сомножители, стоящие в квадратных скобках, как мы только что доказали, ограничены, а средний сомножитель – ядерный оператор. Предложение доказано. $\varnothing$

13.7. Универсальная фермионная конструкция. В п.II.8 мы построили серию вложений группы $\mathcal{D}iff$ в группу $Aut_{\overline{GA}}(H_\gamma)$

автоморфизмов некоторого объекта категории $\overline{GA}$. Теперь мы продолжим эти вложения до вложений полугруппы $\widetilde{\Gamma}$ в полугруппу $End_{\overline{GA}}(V)$.

Пусть $\gamma, \mu \in \mathbb{C}$, а $\widetilde{\gamma} = (S, \sigma, s_+, s_-) \in \widetilde{\Gamma}$ Построим по $\widetilde{\gamma}$ линейное отношение $T_{\gamma,\mu}(\widetilde{\gamma}) \in End_{\overline{GA}}(H_\gamma)$ Введем сначала линейное отношение $T^0_{\gamma,\mu}(\widetilde{\gamma}) \subset H_\gamma \oplus H_\gamma$. Оно состоит из всех $(f_1, f_2) \in H_\gamma \oplus H_\gamma$ таких, что существует голоморфная форма F веса μ на S, удовлетворяющая условиям.

I. $\sigma_* F = e^{2\pi i \gamma} F$

2. F аналитична вплоть до границы на всей S, кроме быть может, неподвижных точек автоморфизма σ.

3. Ограничение F на кривую $s_+(x)$ суть $(s_+)_*(f_1(x)(dx)^\mu)$, а ограничение F на кривую $s_-(x)$ суть $(s_-)_*(f_2(x)(dx)^\mu)$

Наконец $T_{\gamma,\mu}(\widetilde{\gamma})$ - это замыкание $T^0_{\gamma,\mu}(\widetilde{\gamma})$.

<u>Теорема I3.3</u>. Отображение $\widetilde{\gamma} \mapsto T_{\gamma,\mu}(\widetilde{\gamma})$ является гомоморфизмом полугруппы Γ в полугруппу $End(H_\gamma)$.

<u>Доказательство</u> почти дословно повторяет доказательство теоремы I3.I. Во-первых, мы замечаем, что $T^0_{\gamma,\mu}(\widetilde{\gamma}_1 \widetilde{\gamma}_2) = T^0_{\gamma,\mu}(\widetilde{\gamma}_1) T^0_{\gamma,\mu}(\widetilde{\gamma}_2)$. Далее, нам нужно проверить, что $T_{\gamma,\mu}(\widetilde{\gamma}) \in End(H_\gamma)$.

Для этого, как и ранее, мы представим $\widetilde{\gamma}$ в виде произведения

$$\widetilde{\gamma} = g_1 \mathcal{L}_t g_2$$

где $g_1, g_2 \in \mathcal{D}iff^\sim$, а $\mathcal{L}_t = (L_t, \lambda, \ell_+, \ell_-)$, где L_t - полоса $-t \le \operatorname{Im} z \le 0$, $\lambda(z) = z + 2\pi$,

$l_+(x) = x - it$, $l_-(x) = x$. В силу п.II.8 $T_{\gamma,\mu}(g_i) \in End(H_\gamma)$, а условие $\mathcal{L}_t \in End(H_\gamma)$ очевидно. Доказательство завершают те же аргументы, что и в теореме I3.I. ∅

Ограничивая спинорное представление полугруппы $End_{\overline{GA}}(H_\gamma)$ на Γ мы получаем серию представлений полугруппы Γ, эти представления мы обозначаем через $\rho_{\gamma,\mu}$.

Предложение I3.2. Операторы $\rho_{\gamma,\mu}(\gamma)$ ограничены в топологии гильбертова фермионного пространства Фока.

Доказательство. Сначала заметим, что любой элемент $\gamma \in \tilde{\Gamma}$ представим в виде $\gamma = \mathcal{L}_\varepsilon \gamma'$, где $\mathcal{L}_\varepsilon$ то же, что и в доказательстве предыдущей теоремы, $\varepsilon > 0$ достаточно мало, а $\gamma' \in \tilde{\Gamma}$ (это вытекает из аналитичности $S_\pm(x)$) ...). Оператор $\rho_{\gamma,\mu}(\mathcal{L}_\varepsilon)$ имеет ядро вида

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(\xi\ \bar{\eta})\begin{pmatrix}0 & \Lambda\\ \Lambda & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^t\\ \eta^t\end{pmatrix}\right\}$$

где Λ - ... диагональная матрица с собственными числами $e^{-(n\pm\gamma)\varepsilon}$, где $n \geqslant 0$. Или, иными словами

$$\rho_{\gamma,\mu}(\mathcal{L}_\varepsilon) f(\xi) = f(\Lambda\xi) \qquad (13.8)$$

Оператор $\rho_{\gamma,\mu}(\gamma')$ - это некоторый оператор Березина. Но произведение любого оператора Березина с оператором (13.8) ограничено, по теореме 9.3. В самом деле, матрица L (в обозначениях теоремы 9.3) в этом случае представляется в виде $L = M\Lambda$, где M - ограничена. Поэтому оператор L компактен, а значит и удовлетворяет условиям теоремы 9.3. Итак, $\rho_{\gamma,\mu}(\gamma) = \rho_{\gamma,\mu}(\mathcal{L}_\varepsilon)\rho_{\gamma,\mu}(\gamma')$ - ограниченный оператор, что и требовались доказать.

13.8. Вырожденные фермионные конструкции. Они добавляют очень немного к уже имеющейся у нас информации, поэтому мы скажем об этом лишь вкратце.

Рассмотрим гомоморфизм $T_{0,1/2}$ полугруппы Γ в $\mathrm{End}_{\overline{GA}}(H_{1/2})$. Как мы уже отмечали (см. п.II.9) в этом случае в пространстве $H_{1/2}$ существует естественная структура объекта категории $\overline{B}$. Несложно проверить, что операторы $T_{0,1/2}(\tilde{\gamma})$ лежат в $\mathrm{End}_{\overline{B}}(H_0)$. Ограничивая спинорное представление полугруппы $\mathrm{End}_{\overline{B}}(H_0)$ на Γ, мы получаем проективное представление Γ, отвечающее модулю $L(1/16, 1/2)$.

Далее, рассмотрим гомоморфизм $T_{1/2,1/2}$ полугруппы $\widetilde{\Gamma}$ в $\mathrm{End}_{\overline{GA}}(H_{1/2})$. Введем в $H_{1/2}$ структуру объекта категории $\overline{GD}$ (см. п.II.9). Тогда, как несложно проверить $T_{1/2,1/2}(\tilde{\gamma}) \in \mathrm{End}_{\overline{GD}}(H_{1/2})$ и мы можем ограничить спинорное представление $\mathrm{End}_{\overline{GD}}(H_{1/2})$ на $\widetilde{\Gamma}$ (полученное представление отвечает модулю $L(0,1/2) \oplus L(1/2, 1/2)$)

13.9 Замечания об абстрактной теореме интегрируемости.

Во-первых, мы выяснили, что любой модуль $L(h, c)$ (не обязательно унитаризуемой) над алгеброй Вирасоро интегрируется до представления полугруппы Γ ограниченными операторами в некотором пространстве Фреше: (Мы это выяснили дважды: в п.13.6 и в п.13.8 (в обоих случаях мы построили запас представлений, среди подфакторов которых содержатся все модули $L(h, c)$). Фермионная конструкция имеет небольшое преимущество перед бозонной: а именно в полинормированном фермионном пространстве Фока ограниченными операторами задается представление всей полугруппы $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \mathrm{Diff}$.

Во-вторых, мы доказали абстрактную теорему интегрируемости унитаризуемых представлений $L(h,c)$ (см. п.I3.4). Любопытно, что эта теорема не вытекает из общей теоремы интегрируемости.

§I4. Явные формулы.

Здесь мы приводим явные форммулы для бозонных представлений полугруппы Γ со старшим весом (п.I4.I., фермионные формулы пишутся аналогично и мы их опускаем). Кроме того, мы вычисляем сферическую функцию представлений со старшим весом (представления являются проективными, чтобы не говорить о сферической функции расширенной группы мы говорим о "канонических коциклах" п.I4.2 - I4.3, это эквивалентно). Наконец, в п.I4.4 мы вычисляем характеры представлений.

<u>I4.I. Формула для оператора</u> $N_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R})$.

$\mathfrak{R}=[R,\tau_+,\tau_-]\in\Gamma$. Без ограничения общности можно считать, что $R=\overline{\mathbb{C}}$, $\tau_+(0)=0$, $\tau_-(\infty)=\infty$. Тогда

$$N_{\alpha,\beta}(\mathfrak{R})=B\left[\begin{array}{cc|c} K(\tau_+) & L(\tau_+,\tau_-) & -(\beta+i\alpha)l_1^t(\tau_+)+\beta m_1^t(\tau_+) \\ L^t(\tau_+,\tau_-) & M(\tau_-) & -(\beta+i\alpha)l_2^t(\tau_-)+\beta m_2^t(\tau_-) \end{array}\right] \qquad (14.1)$$

где матричнозначные функции K , L , M и векторнозначные функции l_1 , l_2 , m_1 , m_2 определены ниже.

Пусть $f\in V_+$. Тогда функция $f\circ\tau_-^{-1}$, определенная на контуре $\tau_-(e^{i\varphi})$ представима в виде $f\circ\tau_-^{-1}=F_1+F_2$

где F_1 голоморфна в области $\tau_-(\mathcal{D}_-)$, а F_2 - голоморфна в области $\mathbb{C} \setminus \tau_-(\mathcal{D}_-^0)$. Тогда

$$Kf = F_1 \circ \tau_- \qquad L^t f = F_2 \circ \tau_+ \qquad (14.2)$$

Пусть, далее, $g \in V_-$. Тогда функция $g \circ \tau_+^{-1}$, определенная на контуре $\tau_+(e^{i\varphi})$ представима в виде $g \circ \tau_+^{-1} = G_1 + G_2$, где G_1 голоморфна в области $\tau_+(\mathcal{D}_+)$ а G_2 голоморфна в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \tau_+(\mathcal{D}_+)$. Тогда

$$Mg = G_1 \circ \tau_+ \qquad Lg = G_2 \circ \tau_- \qquad (14.3)$$

Наконец,

$$\ell_1(\tau_+) = \ln(\tau_+(z)/z) \qquad \ell_2(\tau_-) = \ln(\tau_-(z)/z)$$
$$m_1(\tau_+) = \ln(\tau_-'(z)) \qquad m_2(\tau_-) = \ln \tau_-'(z) \qquad (14.4)$$

Замечание I. Правые части всех формул (I4.2) - (I4.4) определены лишь с точностью до прибавления константы. Но, в силу определения пространства V, нам это не существенно.

Замечание 2. Пусть f - аналитическая функция на контуре $\gamma \subset \mathbb{C}$. Пусть $f = f_+ + f_-$, где f_+ голоморфна внутри γ, а f_- голоморфна вне γ в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда

$$f_\pm(v) = \pm \int_\gamma \frac{f(u)}{u-v}\,du$$

(см., например, [14], III.3.II)

Замечание 3. Оператор $K(\mathcal{R}) = K(\tau_+)$

$$K(\tau_+)f(z)=\int\limits_{|z|=1}\ln\frac{\tau_+(z)-\tau_+(u)}{z-u}f(u)\,du$$

как заметил Д.В.Юрьев, совпадает с так называемым оператором Грунского (см. [73],[12],[64]) - одним из основных объектов в геометрической теории функций. Неравенство $\|K(\tau_+)\|<1$ (это условие 2 п.I.4) - это "теорема площадей" Грунского.

Вывод формулы (I4.I). Явный вид операторов K, L, M ясен непосредственно из конструкции вложения $\Gamma\to End(V)$ из п.I3.I. Остается найти два оставшихся элемента матрицы. Рассмотрим логарифмическую форму типа $(-i\alpha+\beta,\beta)$ на $\overline{\mathbb{C}}\setminus(\tau_+(\mathcal{D}_+^0)\cup\tau_-(\mathcal{D}_-^0))$, равную тождественно нулю в стандартной карте на $\mathbb{C}\setminus 0$. Ее прообразы при отображениях τ_+ и τ_- из кольца $1-\varepsilon\le|z|\le1+\varepsilon$ в $\overline{\mathbb{C}}$ суть формы

$$[-(i\alpha+\beta)\ln(\tau_+(z)/z)+\beta\ln\tau_+'(z)]-\\-(i\alpha+\beta)\ln z+\beta\ln dz \tag{14.5}$$

и

$$[-(i\alpha+\beta)\ln(\tau_-(z)/z)+\beta\ln\tau_-'(z)]-\\-(i\alpha+\beta)\ln z+\beta\ln dz \tag{14.6}$$

Отождествляя логарифмические формы (I4.5), (I4.6) с функциями (т.е. рассматривая выражения в квадратных скобках) в (I4.5) мы получаем функцию из V_+, а в (I4.6) - функцию из V_-, к чему мы и стремились.

<u>14.2. Канонические коциклы.</u> Мы построили серию проективных представлений $N_{\alpha,\beta}(\mathcal{R})$ полугруппы Γ со старшим весом. Операторы $N_{\alpha,\beta}(\mathcal{R})$ определены лишь с точностью до умножения на константу. Мы потребуем, чтобы операторы $N_{\alpha,\beta}(\mathcal{R})$ имели в точности вид (14.1) или, что эквивалентно равенству

$$\langle N_{\alpha,\beta}(\mathcal{R})\psi, \psi\rangle = 1$$

где через ψ обозначена функция $\psi(z)\equiv 1$ – вектор старшего веса. Назовем каноническим коциклом $\varkappa_{\alpha,\beta}: \Gamma\times\Gamma \to \mathbb{C}\setminus 0$ функцию, определяемую из равенства

$$N_{\alpha,\beta}(\mathcal{R}_1)N_{\alpha,\beta}(\mathcal{R}_2)=\varkappa_{\alpha,\beta}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)N_{\alpha,\beta}(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2)$$

Пусть теперь T – произвольное проективное представление полугурппы Γ со старшим весом (h, c) и вектором старшего веса S. Отнормируем операторы $T(\mathcal{R})$ из условия: проекция вектора $T(\mathcal{R})s$ на прямую $\mathbb{C}s$ совпадает с S (заметим, что проекция на весовое подпространство корректно определена для всех (не обязательно унитарных) представлений Diff со старшим весом). Если $T = N_{\alpha,\beta}$, то эта нормировка совпадает с предыдущей. Канонические коциклы мы определяем по формуле

$$T(\mathcal{R}_1)T(\mathcal{R}_2)=\varkappa^{h,c}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)T(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2)$$

Так как представление $N_{\alpha,\beta}$ имеет старший вес $(h,c)=\left(\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2), 1+12\beta^2\right)$ мы получаем

$$\varkappa_{\alpha,\beta} = \varkappa^{\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2),\, 1+12\beta^2} \qquad (14.7)$$

С другой стороны, очевидно

$$\varkappa^{h,c}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)\varkappa^{h',c'}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)=\varkappa^{h+h',c+c'}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)$$

Чуть позже мы увидим, что выражение $\varkappa^{h,c}$ голоморфно по h и c. Поэтому $\varkappa^{h,c}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)$ имеет вид

$$\varkappa^{h,c}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)=\exp(h\lambda(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)+c\mu(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)) \qquad (14.8)$$

таким образом, проблема состоит в вычислении функций $\lambda(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)$, и $\mu(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)$.

<u>I4.3. Вычисление канонических коциклов.</u> Пусть $\mathcal{R}=(\overline{\mathbb{C}},r_+,r_-)$, $\mathcal{P}=(\overline{\mathbb{C}},p_+,p_-)$, $r_+(0)=0$, $r_-(\infty)=\infty$. $p_+(0)=0$, $p_-(\infty)=\infty$. В силу формулы (5.2)

$$\varkappa_{\alpha,\beta}(\mathcal{R},\mathcal{P})=\varkappa_{\alpha,\beta}(r_-,p_+)=\det[(1-MK)^{1/2}]\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{2}(-(i\alpha+\beta)l_1+\beta m_1;-(i\alpha+\beta)l_2+\beta m_2)\times\right.$$

$$\left.\times\begin{pmatrix}-K & 1\\ 1 & -M\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-(i\alpha+\beta)l_1^t+\beta m_1^t\\ -(i\alpha+\beta)l_2^t+\beta m_2^t\end{pmatrix}\right\} \qquad (14.9)$$

где $K=K(p_+)$, $M=M(r_-)$, $l_1=l_1(p_+)$, $l_2=l_2(r_-)$, $m_1=m_1(p_+)$, $m_2=m_2(r_-)$.

Из этой формулы следует обещанная ранее голоморфность $\varkappa_{\alpha,\beta}$ по α, β .

Сравним теперь три равенства (I4.7), (I4.8), (I4.9). Подставляя в них $\alpha=\beta=0$ получаем

$$\det(1-M(\tau_-)K(p_+))^{-1/2}=\exp\mu(\tau_-,p_+) \qquad (14.10)$$

Это тождество для определителей Фредгольма выглядит интересным само по себе.

Далее, так как правая часть (I4.9) должна иметь вид

$$\exp\left(\tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\lambda(\tau_-,p_+)+(1+12\beta^2)\mu(\tau_-,p_+)\right)$$

мы получаем, что член с $\alpha\beta$ в фигурных скобках в выражении (I4.9) отсутствует. Кроме того

$$\lambda(\tau_-,p_+)=-(\ell_1\ \ \ell_2)\begin{pmatrix}-K & 1\\ 1 & -M\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\ell_1^t\\ \ell_2^t\end{pmatrix}$$

$$\mu(\tau_-,p_+)=\frac{1}{12}(m_1\ \ m_2)\begin{pmatrix}-K & 1\\ 1 & -M\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}m_1^t\\ m_2^t\end{pmatrix}$$

Эти формулы нельзя еще считать явными, так как они содержат обращение интегрального оператора.

Учитывая, что

$$\begin{pmatrix}-K & 1\\ 1 & -M\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}M(1-KM)^{-1} & (1-MK)^{-1}\\ (1-KM)^{-1} & K(1-MK)^{-1}\end{pmatrix}$$

мы должны вычислить выражение

$$\ell_1\left[M(1-KM)^{-1}\ell_1^t+(1-MK)^{-1}\ell_2^t\right]+$$

$$+ \ell_2 \left\{ (1-KM)^{-1} \ell_1^t + K(1-MK)^{-1} \ell_2^t \right\} \tag{14.11}$$

а также аналогичное выражение для m_1, m_2.

Вспомним, что наши выражения не зависят от τ_+ и p_-, а поэтому, без ограничения общности, мы их можем выбрать так, что $\mathcal{R}, \mathcal{P} \in \mathcal{D}iff$. Пусть $\mathcal{Q} = \mathcal{R}\mathcal{P} = (\bar{\mathbb{C}}, q_+, q_-)$, $q_+(0)=0$, $q_-(\infty)=\infty$. Обозначим диффеоморфизмы, соответсвующие $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ через γ_1 и γ_2.

Теперь мы готовы применить второе решающее соображение в этом вычислении: в силу формулы (5.I) мы получаем (подставляя в (I4.II) $\beta = 0$), что

$$\ell_1(q_+) = \ell_1(\tau_+) + L(\tau_+, \tau_-)\Big\{ (1 - K(p_+)M(\tau_-))^{-1} \times$$

$$\times \big(\ell_1(\tau_+) + K(p_+)\ell_2(p_-) \big) \Big\} \tag{14.12}$$

$$\ell_2(q_-) = \ell_2(p_-) + L^t(p_+, p_-)\Big[(1 - M(\tau_-)K(p_+))^{-1} \times$$

$$\times \big(\ell_2(\tau_-) + M(\tau_-)\ell_-(p_+) \big) \Big]$$

(мы имеем мложение Γ в полугруппу $End_{\overline{Sp}}(V)$, вводя параметры α, β мы превращаем вложение во вложение Γ в $End_{\overline{SpH}}(V)$. Тем самым (ℓ_1, ℓ_2) - не произвольный вектор, он представляет из себя что-то вроде 1 -коцикла и должен удовлетворять соответствующему уравнению)

Теперь сравним выражения в квадратных и фигурных скобках соответственно в (I4.II) и (I4.I2). Удивительным образом эти выражения совпадают. Итак,

$$\lambda(r_+,p_-)=\ell_2(r_-)L(r_+,r_-)^{-1}(\ell_1(q_+)-\ell_1(r_+))+$$

$$+\ell_1(p_+)L^t(p_+,p_-)^{-1}(\ell_2(q_-)-\ell_2(p_-))$$

Теперь мы должны вычислить L^{-1}. Это совсем просто (см. формулу (2.4)).

$$L^{-1}(r_+,r_-)f(z)=P_+f(\gamma_1(z))$$

$$L^{-1}(p_+,p_-)f(z)=P_+f(\gamma_2(z))$$

где P_+ - проектор на V_+. Учитывая, что для $g\in V_-$ выполнено

$$\int\limits_{|z|=1} g\,d(P_+f)=\int\limits_{|z|=1} g\,df$$

Мы можем написать окончательные формулы для λ,μ. Итак

$$\lambda(r_+,p_-)=\int\limits_{|z|=1}\left(\ln\frac{r_-(z)}{z}\,d\ln\frac{q_+(\gamma_1(z))}{r_+(\gamma_1(z))}+\right.$$

$$\left.+\ln\frac{p_+(z)}{z}\,d\ln\frac{q_-(\gamma_2(z))}{p_-(\gamma_2(z))}\right) \qquad (14.13)$$

$$\mu(r_+,p_-)=\frac{1}{12}\int\limits_{|z|=1}\left(\ln r_-'(z)\,d\ln\frac{q_+'(\gamma_1(z))}{r_+'(\gamma_1(z))}+\right.$$

$$+\ln p_+'(z)\, d \ln \frac{q_-'(\gamma_2(z))}{p_-'(\gamma_2(z))}$$

14.4. Формула для характеров. Мы видели (предложение 13.1 и 13.1), что операторы $N_{\alpha,\beta}(R)$ для $R \in \Gamma$ являются ядерными. Тем самым определен характер представления в буквальном смысле этого слова

$$\chi_{\alpha,\beta}(R) = \mathrm{tr}\, N_{\alpha,\beta}(R)$$

где $N_{\alpha,\beta}(R)$ нормировано так же, как в п.14.2. След интегрального оператора в пространстве Фока (если он существует) может быть вычислен с помощью стандартной процедуры интегрирования ядра по диагонали). Применяя формулу (1.3) для гауссова интеграла, мы получаем

$$\mathrm{tr}\, N_{\alpha,\beta}(R) = \det(iR) \exp\left\{\frac{1}{2}\left(-(i\alpha+\beta)\ell+\beta m\right) \times \right.$$
$$\left. \times R\left(-(i\alpha+\beta)\ell^t+\beta m^t\right)\right\} \tag{14.14}$$

где $\ell = (\ell_1, \ell_2)$, $m = (m_1, m_2)$, $R = \begin{pmatrix} -K & 1-L \\ 1-L^t & -M \end{pmatrix}^{-1}$

Введем для характеров также обозначение

$$\chi^{h,c}(R) = \chi_{\alpha,\beta}(R)$$

если

$$h = \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2) \quad ; \quad c = 1+12\beta^2 \tag{14.15}$$

Вспомним, что при $h > 0$, $c > 1$ модуль $N_{\alpha,\beta}$ является модулем Верма. Так как при $h > 0$, $h' > 0$, $c > 1$, $c' > 1$ выполнено

$$M(h,c) \otimes M(h',c') = \bigoplus_{k=0}^{\infty} p(k) M(h+h'+k, c+c')$$

где $p(k)$ - число разбиений, мы получаем, что

$$\chi^{h_1,c_1}(\mathcal{R})\chi^{h_2,c_2}(\mathcal{R}) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)\chi^{h_1+h_2+k,\, c+c'}(\mathcal{R}) \qquad (14.16)$$

при $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $c_1 > 1$, $c_2 > 1$.

Учитывая (I4.I4) - (I4.I6) мы получаем

$$\sum p(k)\det(iR)\exp\Big\{-\Big(h_1+h_2+k-\frac{1}{24}(c_1+c_2-1)\Big)\ell R\ell^t + \\ +\Big[\Big(2h_1+2h_2+2k-\frac{1}{2}(c_1+c_2-1)\Big)\frac{1}{12}(c_1+c_2-1)\Big]^{1/2}(-i\ell R\ell^t - \\ -i\ell R m^t)+\frac{1}{24}(c_1+c_2-1)(\ell R\ell^t+mRm^t)\Big\} =$$

$$= \exp\Big\{-\Big(h_1+h_2-\frac{1}{24}(c_1+c_2-2)\Big)\ell R\ell^t + \\ +\Big[\Big(2h_1-\frac{1}{12}(c_1-1)\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{12}(c_1-1)\Big)^{1/2}+\Big(2h_2-\frac{1}{2}(c_2-1)\Big)^{1/2} \times \\ \times\Big(\frac{1}{12}(c_2-1)\Big)^{1/2}\Big](-i\ell R\ell^t-i\ell Rm^t)+ \\ +\frac{1}{24}(c_1+c_2-2)(\ell R\ell^t+mRm^t)\Big\} \times \\ \times \det(iR)^2$$

Проводя очевидные сокращения, получаем

$$\exp\left\{\frac{1}{24} mRm^t\right\} \sum p(k) \exp\left\{-k\,\ell R\ell^t\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{\left(2h_1+2h_2+2k-\frac{1}{12}(c_1+c_2-1)\right)^{1/2}\left(\frac{1}{12}(c_1+c_2-1)^{1/2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(-i\ell Rm^t - i\ell R\ell^t\right)\right\} =$$
$$= \det(iR)\left\{\left[\left(2h_1+\frac{1}{12}(c_1-1)\right)^{1/2}\left(\frac{1}{12}(c_1-1)\right)^{1/2}+\right.\right.$$
$$\left.+\left(2h_2+\frac{1}{12}(c_2-1)^{1/2}\right)\left(\frac{1}{12}(c_2-1)\right)^{1/2}\right]\times$$
$$\left.\times\left(-i\ell Rm^t - i\ell R\ell^t\right)\right\}$$

Левая часть этого равенства зависит лишь от h_1+h_2 и c_1+c_2, а не от h_1, h_2, c_1, c_2 в отдельности. Значит этим свойством обладает и правая часть. Но это возможно лишь в случае, когда

$$\ell Rm^t + \ell R\ell^t = 0$$

что в свою очередь влечет

$$\det(iR) = \exp\left\{\frac{1}{24} mRm^t\right\} \times$$
$$\times \sum p(k) \exp\left\{-k\,\ell R\ell^t\right\}$$

Ввдя обозначение

$$P(t) = \sum_{k\geq 0} p(k)t^k = \prod_{n\geq 1} (1-t^n)^{-1}$$

мы получаем окончательный ответ

$$\chi_{\alpha,\beta}(\mathcal{R}) = P\left(\exp\{\ell R \ell^t\}\right) \times \exp\left\{\frac{1}{24} m R m^t\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha^2 \ell R \ell^t + \frac{1}{2}\beta^2 m R m^t\right\} \qquad (14.17)$$

Наше доказательство проводилось при условии, что $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $c_1 > 1$, $c_2 > 1$. Однако, учитывая голоморфность (I4.I4) и (I4.I7) по h, c, мы получаем, что равенство (I4.I7) выполнено при всех α, β.

Замечание. Слова "формула для характеров" имеют два связанных между собой, но не совпадающих смысла: формула для следа $\mathrm{tr}\,\rho(g)$ с одной стороны и производящая фонкция для размерностей весовых подпространств с другой. В случае "формулы Г.Вейля для характеров" эти два смысла совпадают, потому что почти любой элемент компактной группы сопряжен элементу картановской подгруппы. Далее аналоги формулы Вейля начали применяться для обощенных модулей Верма и отсюда началось раздвоение терминологии. Формула (I4.I7), конечно, содержит в себе формулу для размерностей весовых подпространств, в случае модулей $N_{\alpha,\beta}$, впрочем, тривиальную:

$$\sum (\dim V_k)\, t^k = P(t)$$

Формулы для характеров вырожденных модулей, конечно, легко выводятся из (14.17) ●

I4.5. О фермионном случае. Формулы типа (I4.I) здесь пишутся аналогично через проекторы Коши в пространствах голоморфных дифференциалов данного веса. Мы эти формулы опускаем.

§15. Категория $Shtan$ Концевича-Сигала.

<u>15.1. Определение.</u> Объектом категории $Shtan$ является неотрицательное целое число. Морфизм $n \to m$ это набор $\mathcal{R} = (R, r_i^+, r_j^-)$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, где

1. R – компактная (быть может, несвязная) риманова поверхность с краем, причем край состоит из $m+n$ окружностей (компоненты края упорядочены).

2. $r_\alpha^\pm : S^1 \to R$ – фиксированные параметризации компонент края, причем при проходе контуров r_i^+ поверхность R остается слева, а при проходе контуров r_j^- – справа.

Два морфизма (R, r_i^+, r_j^-) и (Q, q_i^+, q_j^-) считаются совпадающими, если существует биголоморфное отображение $\mu : R \to Q$, такое, что $q_\alpha^\pm = \mu \circ r_\alpha^\pm$.

Мы будем говорить, что морфизм $\mathcal{R} = (R, r_i^+, r_j^-)$ имеет род 0, если R – несвязное объединение поверхностей рода , т.е. поверхностей, которые реализуются как области в сфере Римана.

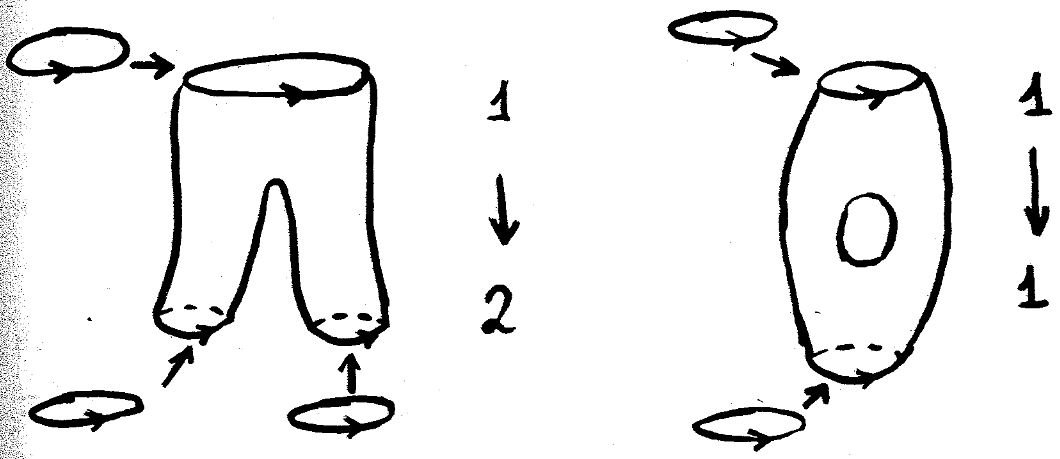
Пусть $\mathcal{R} = (R, r_i^+, r_j^-) : m \to n$,

$\gamma = (S, s_j^+, s_\alpha^-) : n \to K$ – морфизмы категории $Shtan$.

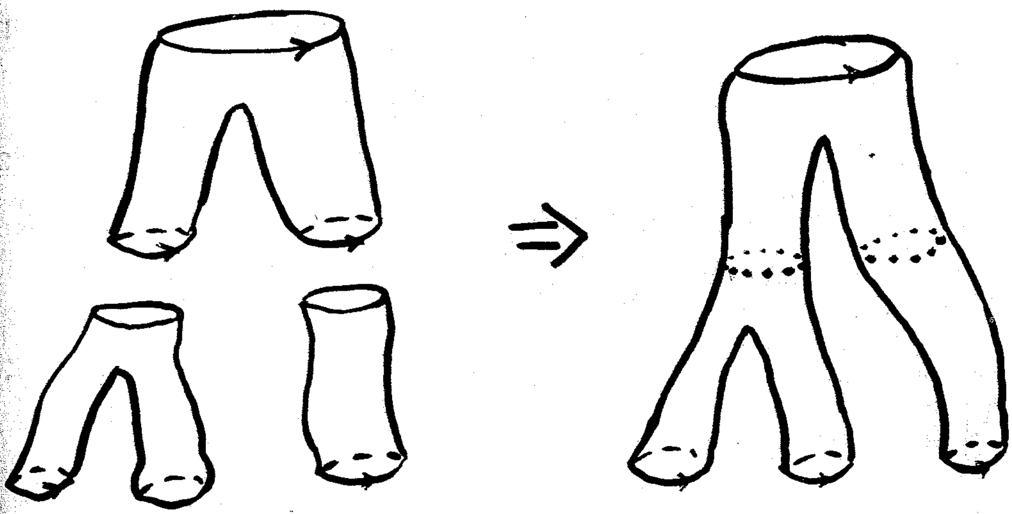
Определим их произведение $\mathcal{B} = (B, b_i^+, b_\alpha^-)$. Риманова поверхность B получается склейкой R и S, при склейке отождествляются всевозможные пары точек $r_j^-(e^{i\varphi})$ и $s_j^+(e^{i\varphi})$, где $1 \le j \le n$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Далее

$$b_i^+(e^{i\varphi}) = r_i^+(e^{i\varphi}), \quad b_\alpha^-(e^{i\varphi}) = s_\alpha^-(e^{i\varphi})$$

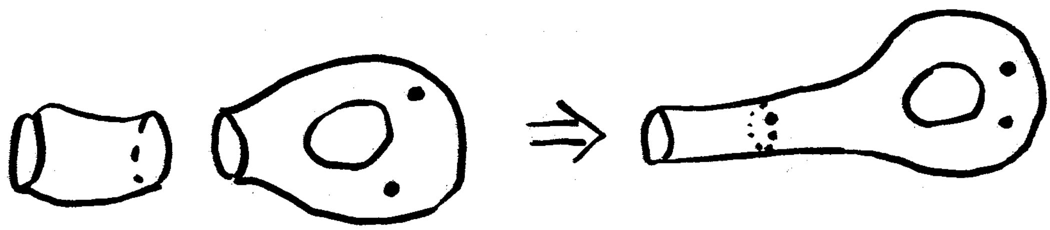
<u>15.2. Второе определение категории $Shtan$</u>. Объекты категории по-прежнему, неотрицательные целые числа. Морфизм $n \to m$, это набор $\mathcal{U} = [V, u_i^+, u_j^-]$,



а)



б)



в)

Рис.2. а) Морфизмы категории Shtan.

б) Умножение морфизмов.

в) Действие Γ на $\Omega_{1,2}$.

$1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, где

1. U - компактная замкнутая (быть может, несвязная) риманова поверхность,

2. $u_i^+ : \mathcal{D}_+ \to U$, $u_j^- : \mathcal{D}_- \to U$ - однолистные вплоть до границы отображения (напомним, что $\mathcal{D}_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, $\mathcal{D}_- = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| \geq 1$), причем $m+n$ област $\tau_i^+(\mathcal{D}_+)$, $\tau_j^-(\mathcal{D}_-)$ попарно не пересекаются

Два морфизма $[U, u_i^+, u_j^-]$ и $[W, \omega_i^+, \omega_j^-]$ считаются одинаковыми, если существует биголоморфное отображение $\tau : U \to W$, такое, что $\omega_\alpha^\pm = \tau \circ v_\alpha^\pm$.

Пусть $\mathcal{U} = [U, u_i^+, u_j^-] : m \to n$, $\mathcal{V} = [V, v_j^+, v_\alpha^-] : n \to k$ - морфизмы категории $Shtan$. Определим их произведение $\mathcal{W} = [W, \omega_i^+, \omega_\alpha^-] : m \to k$. Риманова поверхность W получается склейкой римановых поверхностей $U \setminus \bigcup_{j=1}^{n} u_j^-(\mathcal{D}_-)$ и $V \setminus \bigcup_{j=1}^{m} v_j^+(\mathcal{D}_+)$ путем отождествления пар точек $u_j^-(e^{i\varphi})$ и $v_j^+(e^{i\varphi})$ ($1 \leq j \leq n$, $\varphi \in [0, 2\pi]$)

Эквивалентность определений очевидна. В самом деле, пусть $\mathcal{U} = [U, u_i^+, u_j^-]$ - морфизм категории $Shtan$ в смысле второго определения. Построим по нему морфизм $\mathcal{R} = (R, \tau_i^+, \tau_j^-)$ категории $Shtan$ в смысле первого определения. Для этого положим

$$R = U \setminus \left(\left(\bigcup_i u_i^+(\mathcal{D}_+^0) \right) \cup \left(\bigcup_j u_j^-(\mathcal{D}_-^0) \right) \right),$$

$$\tau_i^+(e^{i\varphi}) = u_i^+(e^{i\varphi}), \quad \tau_j^-(e^{i\varphi}) = u_j^-(e^{i\varphi}).$$

<u>15.3. Физическая интерпретация</u>. Струна - замкнутый контур -

при движении заметает цилиндрическую поверхность. Принято считать, что на этой поверхности есть каноническая риманова метрика, а значит, есть и каноническая комплексная структура. Таким образом движению одной струны отвечают цилиндрообразные римановы поверхности. Далее, струны могут сталкиваться (взаимодействовать), при этом две струны могут сливаться в одну. Такое движение описывается морфизмом из 2 в I и т.д. М.Л.Концевич (1987) и Гр.Сигал (1988) переформулировали конформную теорию поля в терминах теории представлений категории Shtan. К этому моменту ряд "кусков" категории Shtan уже встречался в математической литературе, это полугруппа $\Gamma \subset \mathrm{Mor}(1,1)$, введенная автором, область $\mathrm{Diff}/U(1)$ Кириллова, повышающие подалгебры Кричевера-Новикова. Их мы обсудим чуть позже.

<u>I5.4. Вариации определения</u>. категория Shtan, при всей своей элегантности, по-видимому, сама представляет собой лишь часть какой-то большей правильной категории. Для почти всех бесконечномерных групп автору известны категорные оболочки, т.е. такие категории, на которые продолжаются любые представления данной группы. В этом смысле категория Shtan, строго говоря, категорной оболочкой группы Diff не является. Ее главный недостаток - то, что на эту категорию не продолжаются представления [37], §5, близкие к представлениям со старшим весом. В настоящей работе мы интересуемся лишь представлениями Diff со старшим весом, но и здесь, как показывает п.I6.I категория Shtan не совсем достаточна. Перечислим некоторые категории, близкие к категории Shtan.

<u>а) Категория</u> Shtan^*. Ее объекты - те же, что и у Shtan, а морфизмы - это наборы

$\mathcal{R}=(R, r_i^+, r_j^-, v_\alpha)$, где (R, r_i^+, r_j^-) - морфизм категории $Shtan$, а v - конечный набор точек на поверхности R.

б) Категория $Shtan^\sim$. Ее объекты - те же, что и у $Shtan$. Морфизм $m \to n$ - это набор $\gamma=(S, s_i^+, s_j^-, \sigma)$, где (S, s_i^+, s_j^-) - морфизм $m \to n$ в смысле категории $Shtan$, а σ - максимальная изотропная подгруппа в пространстве $H_1(R, \mathbb{Z})$ первых целочисленных гомологий римановой поверхности R. (Напомним, что в группе $H_1(R, \mathbb{Z})$ определена естественная кососимметричная форма - индекс пересечения. Ядро этой формы порождено циклами $r_\alpha^\pm(e^{i\varphi})$, тем самым все эти циклы содержатся в подгруппе σ). Пусть теперь $\gamma=(S, s_i^+, s_j^-, \sigma): m \to n$, $\mathcal{B}=(B, b_j^+, b_\alpha^-, \beta): n \to k$ -морфизмы категории $Shtan^\sim$, тогда определено их произведение $\mathcal{L}=(L, l_i^+, l_\alpha^-, \lambda): m \to k$ при этом (L, l_i^+, l_α^-) - это произведение (S, s_i^+, s_j^-) и (B, b_j^+, b_α^-) в смысле категории $Shtan$; а подгруппа λ - это сумма подгрупп σ и β.

Замечание. Пусть риманова поверхность R описывает движение струны. Положения струны в разные моменты времени не пересекаются, тем самым все положения струны порождают максимальную изотропную подгруппу в $H_1(R, \mathbb{Z})$. Таким образом, подгруппу $v \subset H_1(R, \mathbb{Z})$ можно рассматривать как "воспоминание" о топологии движения струны, полностью же эта тополигия по решетке, конечно, не восстанавливается. С другой стороны, все максимальные изотропные подгруппы в $H_1(R, \mathbb{Z})$ могут быть построены таким образом.

Лемма I5.I. Любой морфизм $\gamma=(S, s_i^+, s_j^-, \sigma)$ категории $Shtan^\sim$ может быть разложен в произведение морфизмов рода 0.

Доказательство. Пусть R – компактная замкнутая риманова поверхность. Группа G автоморфизмов $H_1(R,\mathbb{Z})$ сохраняющих форму пересечения, очевидно, изоморфна $Sp(2g,\mathbb{Z})$, где g – род R. Естественное отображение модулярной группы Тейхмюллера (т.е. группы компонент группы диффеоморфизмов R) в группу G, как известно (см. [60]) сюръективно. Таким образом, любые две максимальные изотропные подгруппы в $H_1(R,\mathbb{Z})$ переводятся друг в друга посредством диффеоморфизма R. Поэтому в любой максимальной изотропной подгруппе есть базис из попарно непересекающихся (и не самопересекающихся) кривых. разрезая R вдоль этих кривых, мы получаем поверхность рода 0. Отсюда вытекает, что такой же базис есть и в случае компактных поверхностей с краем. Итак, разрезая S вдоль кривых, лежащих в σ мы можем получить поверхность рода 0. Теперь не составляет труда провести еще несколько дополнительных разрезов в S так, что S распадется в произведение морфизмов рода 0.

в) Категория $G\text{-}Shtan$. Пусть G – коплексная группа Ли. Объекты категории $G\text{-}Shtan$, те же, что и у $Shtan$. Морфизм $m\to n$ – это набор

$\gamma=[S,\Sigma,s_i^+,s_j^-]$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$

1. S – компактная замкнутая риманова поверхность.

2. Σ – главное комплексное G-расслоение над S, пусть $\sigma:\Sigma\to S$

3. $s_\alpha^\pm : \mathcal{D}_\pm\times G\to\Sigma$ – морфизмы главных

$G-$ расслоений, причем образы всех $m+n$ отображений $s_\alpha^\pm : \mathcal{D}_\pm \times G \to \Sigma$ попарно не пересекаются, а отображения $\sigma \circ s_\alpha^\pm : \mathcal{D}_\pm \to S$ однолистны вплоть до границы. Морфизмы $[S, \Sigma, s_i^+, s_j^-]$ и $[L, \Lambda, \ell_i^+, \ell_j^-]$ считаются совпадающими, если существует биголоморфный морфизм главных расслоений $\tau : \Sigma \to \Lambda$ такой, что $\ell_\alpha^\pm = \tau \circ s_\alpha^\pm$

Пусть $[S, \Sigma, s_i^+, s_j^-] : m \to n$, $[X, \Xi, x_j^+, x_\mu^-] : n \to k$ – морфизмы категории $G\text{-}Shtan$. Тогда определено их произведение $[L, \Lambda, \ell_i^+, \ell_\mu^-] : m \to k$. Пространство L получается склейкой $\Sigma \setminus (\cup s_\alpha^- (\mathcal{D}_-^0 \times G))$ и $\Xi \setminus (\cup x_\beta^+ (\mathcal{D}_+^0 \times G))$ путем отождествления всевозможных пар точек $s_j^-(e^{i\varphi}, g)$, $x_j^+(e^{i\varphi}, g)$, где $1 \leq j \leq n$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $g \in G$. Далее, $\ell_i^+ = s_i^+$, $\ell_j^- = x_j^-$.

Замечание. Эта категория связана не с алгеброй Вирасоро, а с аффинными алгебрами. В самом деле, рассмотрим группу $Aut(1)$. Эта группа, строго говоря, пуста. Однако, если мы заменим в определении категории $G\text{-}Shtan$ слова "образы отображений $s_\alpha^\pm : \mathcal{D}_\pm \times G \to \Sigma$ попарно не пересекаются " на чуть-чуть более слабое условие: "образы отображений $s_\alpha^\pm : \mathcal{D}_\pm^0 \times G \to \Sigma$ попарно не пересекаются", то группа $Aut(1)$ перестает быть пустой. Легко видеть, что $Aut(1)$ изоморфна полупрямому произведению группы $Diff$ и группы $\widetilde{G}$, состоящей из всех аналитических отображений окружности в группу G .Естественным объектом теории представлений, собственно, и является это полупрямое произведение, а не группа токов $\widetilde{G}$ (см. [37]) ●

15.5. Полугруппа $\mathrm{End}_{\mathrm{Shtan}}(1)$ как полугруппа эндоморфизмов алгебры Вирасоро. Как известно, группа автоморфизмов полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является соответствующей группой Ли. Естественно подумать, что будет в случае, когда $\mathfrak{g}$ - алгебра Вирасоро

Пусть $\gamma = [S, s^+, s^-] : 1 \to 1$ - морфизм категории Shtan. Рассмотрим векторное поле $v(\varphi)\partial/\partial\varphi = v$ на окружности $|z| = 1$. Рассмотрим поле $(S^-)_* v$, продолжим его голоморфно (если это, конечно, возможно) на риманову поверхность $S \setminus (s_+(\mathcal{D}_+^0) \cup s_-(\mathcal{D}_-^0))$, затем ограничим это поле на контур $S_i^+(e^{i\varphi})$ и возьмем его прообраз при отображении S_i^+. Таким образом мы получили неограниченный плотно определенный оператор $A(\gamma): \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ (векторные поля на замкнутой римановой поверхности с двумя выколотыми точками плотны на любом контуре разделяющем эти точки, см. [25], поэтому оператор $A(\gamma)$ плотно определен). Далее, легко понять, что $A(\gamma)$ сохраняет операцию коммутирования.

Здесь удобнее перейти на язык линейных отношений. Пусть $\gamma \in \mathrm{End}(1)$. Построим по γ линейное $T(\gamma)$ отношение в $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \oplus \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$. Для этого положим, что $(v_1, v_2) \in T(\gamma)$, если существует такое голоморфное, аналитическое вплоть до границы, векторное поле V на $S \setminus (s_+(\mathcal{D}_+^0) \cup s_-(\mathcal{D}_-^0))$ такое, что прообразы V при отображениях S_+ и S_- суть v_1 и v_2. Отношение $T(\gamma)$ сохраняет операцию коммутирования в следующем смысле этого слова: если (v_1, v_2), $(w_1, w_2) \in T(\gamma)$, то $([v_1, w_1], [v_2, w_2]) \in T(\gamma)$. Таким образом, полугруппу $\mathrm{End}(1)$ можно рассматривать как полугруппу линейных отношений в $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$, сохраняющих операцию коммутирования.

15.6. Пространства $\Omega_{g,n}$ и обобщенные повышающие подалгебры Кричевера-Новикова. Обозначим через $\Omega_{g,n}$ множество всех морфизмов $\gamma=(S, s^+, p_\alpha): 1\to 0,\ 1\le\alpha\le n$ категории $Shtan^*$ таких, что род поверхности S равен g. Полугруппа Γ действует на $\Omega_{g,n}$ очевидным образом:
$$R(\gamma)=R\gamma \quad , \text{ где } R\in\Gamma \quad ,\gamma\in\Omega_{g,n} .$$

Каждому элементу γ пространства $\Omega_{g,n}$ мы можем поставить в соответствие подалгебру $B(\gamma)\subset Vect_{\mathbb{C}}$, состоящую из всех векторных полей v на окружности, для которых существует голоморфное векторное поле V на S такое, что

1. Прообраз V при отображении s_+ суть v.
2. V обращается в 0 в точках p_α.

Классическая борелевская подалгебра в $Vect_{\mathbb{C}}$ (она натянута на $L_0, L_1, L_2, \ldots$) отвечает точке $(\mathcal{D}_+, e^{i\varphi}, 0)\in\Omega_{0,1}$. Остальные подалгебры $B(\gamma)$, как было осознано в [25], столько же заслуживают названия борелевских, как и классическая. О старших векторах относительно таких подалгебр пока известно очень мало (конструкция 16.7 дает примеры таких векторов). Сами пространства $\Omega_{g,n}$ тем самым естественно рассматривать как пространство флагов (или как страты единого пространства флагов, как предлагает И.М.Кричевер).

Замечание. Может быть, вместо слова "борелевская" лучше говорить "повышающая" или "параболическая" или что-либо еще, это вопрос терминологии.

Замечание. Каждому элементу пространства $Mor(n,0)$ мы можем аналогичным образом поставить в соответствие "повышающую" подалгебру в $\bigoplus_{i=1}^{n} Vect_{\mathbb{C}}$.

15.7 Пространство однолистных функций $\Omega_{0,1}$. Обозначим через S пространство однолистных вплоть до границы функций $f(z)$ в круге $|z|\leqslant 1$, представимых в виде

$$f(z)=z+\sum_{k\geqslant 2} c_k z^k \tag{15.1}$$

Каждой такой функции можно поставить в соответствие элемент $\gamma_f=(\bar{\mathbb{C}}\setminus f(\mathcal{D}_+^0), f, \infty)$ пространства $\Omega_{0,1}$. Легко видеть, что отображение $f\mapsto\gamma(f)$ является биекцией.

Как мы уже говорили, полугруппа Γ действует на $\Omega_{0,1}$. Более того, на $\Omega_{0,1}$ действует полугруппа $\bar{\Gamma}=\Gamma\cup\mathcal{D}iff$: группа $\mathcal{D}iff$ действует с помощью замены параметра на границе круга. Легко видеть, что область $\Omega_{0,1}$ однородна относительно группы $\mathcal{D}iff$. (Стабилизатор точки $(\mathcal{D}_-, e^{i\varphi}, \infty)$ состоит из вращений (т.е. преобразований вида $z\to e^{i\theta}z$)). Таким образом, как однородное пространство, $\Omega_{0,1}$ изоморфно $\mathcal{D}iff/\mathbb{T}$, где $\mathbb{T}$ - группа вращений окружности. Тем самым и пространство S однолистных функций оказывается однородным пространством. Удивительно, но этот факт был обнаружен лишь в 1986 году А.А.Кирилловым [23], хотя пространством однолистных функций занималась целая (и весьма содержательная) область математики - теория однолистных функций.

Явные формулы для действия алгебры Ли векторных полей на $\Omega_{0,1}$ были получены в [24]. Векторному полю $v(z)\frac{\partial}{\partial z}$ отвечает следующеё векторное поле на пространстве однолистных функций

$$(\mathfrak{L}_v f)(z)=-i f^2(z)\int_{|w|=1}\left[\frac{wf'(w)}{f(w)}\right]^2\frac{v(w)}{f(w)-f(z)}\,\frac{dw}{w} \tag{15.2}$$

Если $p \geqslant 0$, генераторам $L_{-p} = e^{-ip\varphi}\frac{\partial}{i\partial\varphi}$ алгебры $Vect_{\mathbb{C}}$ отвечают векторные поля

$$B_{-p} = \frac{\partial}{\partial c_p} + \sum_{k\geqslant 0}(k+1)c_k\frac{\partial}{\partial c_{k+p}} \qquad (p>0)$$

$$B_0 = \sum k c_k \frac{\partial}{\partial c_k}$$

Формулы для B_p при $p>0$ могут быть получены из (I5.2) Эти формулы заметно сложнее.

I5.8. Реализация представлений со старшим весом в пространстве голоморфных функций на $\Omega_{0,1}$. Введем на $\Omega_{0,1}$ координаты c_k - коэффициенты ряда Тейлора однолистной функции (см.(I5.I)). Функци F на $\Omega_{0,1}$ мы будем называть голоморфной, если для любого голоморфного отображения ψ из области Λ в $\mathbb{C}^n$ в $\Omega_{0,1}$ функция $F\circ\psi$ голоморфна на Λ. Пространство всех голоморфных функций на $\Omega_{0,1}$ мы обозначим через $\mathcal{T}$.

Известно (см., например, [81]), что бесконечномерные представления полупростых групп Ли со старшим весом могут быть реализованы на однородных областях Картана (=эрмитовых симметрических пространствах). Сейчас мы построим аналогичную реализацию для представлений $\mathcal{D}iff$ со старшим весом (правда, у нас получатся представления с младшим весом).

Пусть $\gamma = [\bar{\mathbb{C}}, p_+, p_-] \in \Gamma$,

$x = [\bar{\mathbb{C}}, q_+, \infty] \in \Omega_{0,1}$. Операторы $T_{h,c}(\gamma)$ в $\mathcal{T}$ задаются формулой

$$T_{h,c}(\gamma)f(x) = F(\gamma x)\exp(h\lambda(p_-, q_+) + c\mu(p_-, q_+))$$

где функции λ и μ задаются формулой (I4.I3), см. также (I4.I8).

Проверим, что операторы $T_{h,c}$ задают представление. Это эквивалентно равенству

$$\varkappa^{h,c}(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_3)\varkappa^{h,c}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)=$$
$$=\varkappa^{h,c}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3)\varkappa^{h,c}(\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_3)$$

которое, в свою очередь, выполнено в силу самого определения канонического коцикла.

Замечание I. Рассмотрим оператор $I_{\alpha,\beta}$ из $F(V_+)$ в $\mathcal{T}$, заданный формулой

$$I_{\alpha,\beta}\psi(x)=$$
$$=\langle \ell[K(q_+)|-(\beta+i\alpha)\ell_1^t(q_+)+\beta m_1^t(q_+)],\psi\rangle$$

(Обозначения из п.I4.I и п.I.3). Можно показать, что в точках $h=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$, $c=1+12\beta^2$ общего положения этот оператор устанавливает изоморфизм представления $T_{h,c}$ и представления, сопряженного к $N_{\alpha,\beta}$. ●

Замечание 2. Можно показать, что на уровне алгебры Ли (алгебры Вирасоро) представление $T_{h,c}$ задается операторами

$$L_n f(q_+)=B_n f(q_+)+$$
$$+\left(\int_{|z|=1} z^{-n+2}\left[h\frac{q_+'(z)^2}{q_+(z)^2}+\frac{c}{24}\left(\frac{2q_+'''(z)}{q_+'(z)}-\frac{3q_+''(z)^2}{q'(z)^2}\right)\right]dz\right)f(q_+)$$

(операторы B_n введены в предыдущем пункте).

§16. Представления категории $Shtan$

16.1. Бозонная конструкция для категории $\widetilde{Shtan}$. Мы начнем с того, что построим функтор $P: \widetilde{Shtan} \to \overline{Sp}$. Каждому объекту m категории $\widetilde{Shtan}$ (т.е. числу) мы поставим в соответствие пространство $V^{(m)} = \bigoplus_{i=1}^{m} V$, где V - пространство из п.11.6. Снабдим $V^{(m)}$ структурой объекта категории $\overline{Sp}$, положив $V_{\pm}^{(m)} = \bigoplus_{i=1}^{m} V_{\pm}^{(m)}$. Пусть, далее $\gamma^{\sim} = (S, s_i^+, s_j^-, \sigma): m \to n$ - морфизм категории $\widetilde{Shtan}$. Построим по $\gamma^{\sim}$ линейное отношение $P^0(\gamma^{\sim}) \subset V^{(m)} \oplus V^{(n)}$. Пусть $\varphi^+ = (f_1^+, \ldots, f_m^+) \in V^{(m)}$,

$\varphi^- = (f_1^-, \ldots, f_n^-) \in V^{(n)}$. Пара (φ^+, φ^-) содержится в $P^0(\gamma^{\sim})$, если существует голоморфная на S вплоть до границы 1-форма F такая, что

1. $\int F$ по любому циклу из решетки σ равен нулю.
2. Прообраз F при отображениях $s_\alpha^\pm$ суть $df_\alpha^\pm$. Мы будем называть форму F связывающей формой для (φ^+, φ^-).

Пусть $P(\gamma^{\sim})$ - замыкание пространства $P^0(\gamma^{\sim})$.

Теорема 16.1 а) отображение $\gamma^{\sim} \mapsto P(\gamma^{\sim})$ является функтором из категории $\widetilde{Shtan}$ в симплектическую категорию $\overline{Sp}$.

б) $\gamma^{\sim} \mapsto We(P(\gamma^{\sim}))$ - представление категории $\widetilde{Shtan}$ ограниченными операторами. ☒

Доказательство теоремы занимает три следующих пункта.

16.2. Доказательство теоремы в случае, когда род S равен 0. В этом случае комплексная поверхность S может быть реализована как область на плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, ограниченная набором непересекающихся окружностей (см., например, [12], глава V)

Лемма I6.1. Пространство $P_0(\gamma)$ изотропно, т.е. для любых $(f_1^+,\dots,f_m^+,f_1^-,\dots f_n^-),(h_1^+,\dots,h_m^+,h_1^-,\dots,h_n^-)\in P_0(\gamma)$ выполнено

$$\sum_{i=1}^{m}\{f_i^+,h_i^+\}-\sum_{j=1}^{n}\{f_j^-,h_j^-\}=0$$

Доказательство, в сущности, очевидно. Пусть F и H - связывающие формы для элементов $(f_1^+,\dots,f_n^-)$ и $(h_1^+,\dots,h_n^-)$. Эти формы в нашем случае (т.е. в случае рода 0)точны. Пусть $F=d\Phi$, $f_\alpha^\pm=d\psi_\alpha^\pm$. Тогда форма ΦH голоморфна в S и тоже точна (потому что она замкнута), а поэтому

$$0=\sum_{\alpha=1}^{m}\int_{\tau_\alpha^+(e^{i\varphi})}\Phi H-\sum_{j=1}^{n}\int_{\tau_j^-(e^{i\varphi})}\Phi H=$$

$$=\sum_\alpha\int_0^{2\pi}\psi_\alpha^+h_\alpha^+d\varphi-\sum_j\int_0^{2\pi}\psi^-_j h_j^-d\varphi$$

что и требовалось доказать.

Лемма I6.2. Линейное отношение $P_0(\gamma)$ сжимает эрмитову форму Θ, т.е. для любого $(f_1^+,\dots,f_m^+,f_1^-,\dots,f_n^-)\in P_0(\gamma)$ выполнено

$$\sum_{i=1}^{m}\Theta(f_i^+,f_i^+)\geq\sum_{j=1}^{n}\Theta(f_j^-,f_j^-)$$

Доказательство. (Эта лемма - одна из версий теоремы площадей Лебедева [27]). Ввиду простоты доказательства, мы его приведем. Пусть F - связывающая форма, $f_\alpha^\pm=d\psi_\alpha^\pm$

$$0\leq\iint_S dF\,d\bar F=i\sum_{j=1}^{m}\int_{\tau_j^+(e^{i\varphi})}FdF-i\sum_{\alpha=1}^{n}\int_{\tau_\alpha^-(e^{i\varphi})}FdF$$

$$= i\sum_{j=1}^{m}\int_0^{2\pi}\psi_j^+\overline{f_j^+}\,dx - i\sum_{\alpha=1}^{n}\int_0^{2\pi}\psi_\alpha^-\overline{f_\alpha^-}\,d\varphi$$

что и требовалось доказать.

Лемма I6.3. Пространство $P(\gamma)$ – максимальное изотропное пространство.

Доказательство. Лемма основывается на простых прямых вычислениях. Так как преобразование $f \mapsto f\circ q$ содержится в $Aut(V)$ для любого $q \in \mathcal{D}iff$ (см.II.6), мы без ограничения общности можем считать, что окружности, ограничивающие область S, имеют стандартную параметризацию $(\varphi \mapsto a + r e^{\pm i\varphi})$. Естественно выяснить, как устроено преобразование Потапова-Гинзбурга отношения $P(\gamma)$. Рассмотрим следующую блочную матрицу A размера $(m+n)\times(m+n)$, действующую из $V_-^{(m)} \oplus V_+^{(n)}$ в $V_+^{(m)} \oplus V_-^{(n)}$. Ее блоки суть следующие операторы $A_{k,l}^{\alpha,\beta} : V_\beta \to V_\alpha$, где $\alpha, \beta = \pm$, а k, l – целые числа.

$$A_{k,l}^{\alpha,\beta}\,\sigma = (\tau_k^\alpha)^*(\tau_l^\beta)_*\,\sigma$$

Эта формула нуждается в некоторых пояснениях. Функция $(\tau_l^\beta)_*\sigma$ формально определена лишь на окружности $\tau_l^+(e^{i\varphi})$, эта окружно сть делит плосткость на две области. Но функция $(\tau_l^\beta)_*\sigma$ голоморфно продолжается в ту область, которая содержит область S. Теперь к этой, продолженной функции мы можем применить преобразование $(\tau_k^\alpha)_*$.

Если все функции набора $\omega=(v_{1,+}, v_{2,+}, \dots, v_{m,+}, v_{1,-}, \dots, v_{n,-})$ аналитичны на окружности, то вектор $\omega \oplus A\omega \in (V_-^{(m)} \oplus V_+^{(n)}) \oplus (V_+^{(m)} \oplus V_-^{(n)}) = V^{(m)} \oplus V^{(n)}$ содержится в $P^0(\gamma)$. В силу леммы I3.I $\|A\omega\| \leq \|\omega\|$. Поэтому $P(\gamma)$ состоит из всех векторов вида $\omega \oplus A\omega$, где $\omega \in V_-^{(m)} \oplus V_+^{(n)}$, причем A ограничен $(\|A\| \leq 1$. Но любое изотропное пространство такого вида является максимальным изтропным

Лемма I6.4. Операторы $A_{i\,j}^{\alpha\beta}$ из доказательства леммы I6.3. являются ядерными.

Доказательство. Пусть, для определенности $\alpha, \beta = +$, пусть, для определенности, $r_j^+(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}$, $r_i^+(e^{i\varphi}) = a + ce^{i\varphi}$ $(|a|+|c|<1)$. Тогда в ортогональном (но не нормированном)базисе z^k оператор $A_{i\,j}^{\alpha\beta}$ задается матрицей

$$Q(a,c) = \begin{pmatrix} c & 2ac & 3a^2c & 4a^3c & \dots \\ 0 & c^2 & 3ac^2 & 6a^2c^2 & \dots \\ 0 & 0 & c^3 & 4ac^3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & c^4 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \end{pmatrix} \qquad (16.1)$$

Перейдем в ортонормированный базис $z^k/\sqrt{k}$. Мы видим, что сумма модулей матричных коэффициентов сходится, а поэтому матрица ядерна.

Лемма I6.5. а) $P(\gamma) \in Mor_{\overline{Sp}}(V^{(m)}, V^{(n)})$

б) Операторы $We(P(\gamma))$ ограничены.

Доказательство. Как и в лемме I6.3 нам достаточно рассмотреть случай круговой области со стандартной параметризацией границ. В этом случае преобразование Потапова-Гинзбурга отношения $P(\gamma)$ мы уже вычислили при доказательстве леммы I6.3, в с силу леммы I6.2 оно является ядерным оператором. Это сразу доказывает утверждение а) (нам оставалось проверить условие 4 из п.2.6), а вместе с ним (в силу теоремы 4.2) и утверждение б).

I6.3. Лемма о стирании особенностей. Главная цель этого пункта - доказать следующую лемму.

Лемма I6.6. Пусть $\mathcal{R}=(R, r_i^+, r_j^-): m \to n$, , $\gamma=(S, s_j^+, s_\alpha^-)\, n \to k$ - морфизмы категории $Shtan^\sim$, причем род поверхностей R и S равен 0. Пусть $\omega=(v_1,\dots,v_n)\in V^{(n)}$ - такой набор функций, что $\omega\in \operatorname{Im} T(\mathcal{R})\cap \mathcal{D}(\gamma)$. Тогда все формы v_j аналитичны.

Доказательство потребует некоторых дополнительных рассмотрений.

Прежде всего, заметим; что $V\subset L^2/\mathbb{C}$, где через $L^2/\mathbb{C}$ обозначено фактор-пространство $L^2(S^1)$ по пространству констант. Сходимость в V влечет сходимость в $L^2/\mathbb{C}$.

Лемма I6.7.Пусть R - круговая область в $\mathbb{C}$. Пусть $F_1, F_2, \dots$ - последовательность голоморфных функций в R, аналитических вплоть до границы. Пусть f_j^i - ограничение F_i на j -ую компоненту границы и пусть f_j^i сходится к f_j при $i\to\infty$ в смысле $L^2/\mathbb{C}$. Тогда существует голоморфная функция $F\in H^2(R)$, такая, что для некоторых констант c_i последовательность функций F_i+c_i

сходится к F в смысле $H^2(R)$, а ограничение F на j-ую компоненту границу суть $f_j + \alpha_j$, где α_j - набор констант.

Доказательство. Обозначим через $H^2(S, a)$ пространство Харди функций класса H^2 в области S, обращающихся в 0 в точке a (О пространствах Харди в многосвязных областях см., например, [85])

Без ограничения общности мы сможем считать, что $F_i \in H^2(R, a)$. Пусть ℓ_α - контуры, ограничивающие область R. Рассмотрим изометрическое отображение $\tau : H^2(R, a) \to \oplus L^2(\ell_\alpha)$, которое ставит в соответствие каждой функции из $H^2(R)$ набор ее ограничений на контуры ℓ_α. Пусть $\psi : \bigoplus_\alpha L^2(\ell_\alpha) \to \bigoplus_\alpha L^2(\ell_\alpha)/\mathbb{C}$ - отображение проекции. Ядро проекции ψ конечномерно, поэтому ψ переводит замкнутое подпространство $\tau(H^2(R, a))$ в $\oplus L^2(\ell_\alpha)$ в замкнутое подпространство. Так как ядро ψ не пересекается с $\tau(H^2(R, a))$, то по теореме Банаха об обратном операторе, оператор $(\psi \circ \tau)^{-1}$ ограничен на пространстве $\psi\tau(H^2(R, a))$. Отсюда следует, что последовательность F_j сходится в H^2 и теперь утверждение очевидно. $\boxtimes$

Лемма I6.8. Пусть R и S - кольцеобразные неперекрывающиеся области на плоскости $\mathbb{C}$, имеющие в качестве общей компоненты границы аналитическую кривую ℓ. Пусть $F_1 \in H^2(R)$, $F_2 \in H^2(S)$ и пусть ограничения F_1 и F_2 на ℓ совпадают. Тогда функция

$$F(z)=\begin{cases} F_1(z), & z\in R\\ F_2(z), & z\in S\\ F_1(z)=F_2(z), & z\in \ell\end{cases}$$

голоморфна. ■

Доказательство. Достаточно доказать голоморфность F в малой окрестности контура ℓ. Поэтому, в силу аналитичности ℓ, мы, без ограничения общности, можем считать, что ℓ - это окружность $|z|=1$, R лежит внутри ℓ, а S - снаружи. В силу совпадения граничных значений коэффициенты ряда Лорана функции F в области $1-\varepsilon<|z|<1$ совпадают с коэффициентами ряда Лорана F в области $1<|z|<1+\delta$ $(\varepsilon,\delta>0)$. Теперь утверждение очевидно. ☒

Лемма I6.6 сразу следует из лемм I6.7 и I6.8

I6.4. Доказательство теоремы I6.I. Мы уже видели, (лемма I5.I) что любой морфизм $\tilde\gamma$ категории $\widetilde{Shtan}$ представим в виде произведения морфизмов $\tilde\gamma=\mathcal{R}_1\ldots\mathcal{R}_n$, отвечающих римановым поверхностям рода 0. Очевидно

$$T^0(\tilde\gamma)=T^0(\mathcal{R}_1)\ldots T^0(\mathcal{R}_n)$$

В силу леммы I6.6 отсюда следует, что

$$T(\tilde\gamma)\supset T(\mathcal{R}_1)\ldots T(\mathcal{R}_n)$$

Но в правой части стоит максимальное изотропное подпространство, поэтому $T(\tilde\gamma)$ - максимальное изотропное подпространство, а значит $T(\tilde\gamma)$ - морфизм симплектической категории. Теперь равенство $T^0(\tilde\gamma_1)T^0(\tilde\gamma_2)=T^0(\tilde\gamma_1\tilde\gamma_2)$ влечет $T(\tilde\gamma_1)T(\tilde\gamma_2)=T(\tilde\gamma_1\tilde\gamma_2)$

I6.5. Явные формулы. Итак, по каждому морфизму $\tilde\gamma$ категории

Shtan~ мы построили оператор $B[\Omega(\gamma)]$ (обозначения из §I) в бозонном пространстве Фока. Сейчас мы выпишем явную формулу для матрицы $\Omega(\gamma)$, которая, по определению, есть преобразование Потапова-Гинзбурга от $T(\gamma)$.

Итак, пусть $\gamma=[S, s_i^+, s_j^-, \sigma]\in Mor(m,n)$. Напомним, что квадратные скобки обозначают, что S - замкнутая компактная риманова поверхность, $s_\alpha^\pm : \mathcal{D}_\pm \to S$ - однолистные отображения, а σ - максимальная изотропная подгруппа в $H_1(S \setminus \cup s_\alpha^\pm(\mathcal{D}_\pm^0), \mathbb{Z})$. Матрица $\Omega : V_-^{(m)} \oplus V_+^{(n)} \to V_+^{(m)} \oplus V_-^{(n)}$ тем самым является блочной $(m+n)\times(m+n)$-матрицей, ее блоки мы будем обозначаьт через $\Omega_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}$, где $\varphi,\psi=\pm$, а α, β - натуральные индексы, блок $\Omega_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}$ отображает β-ый экземпляр пространства V_ψ в α-тый экземпляр пространства V_φ. Опишем эти блоки явно.

Пусть $v\in V_\psi$. Рассмотрим 1-форму $q=(s_\beta^\psi)_* dv$, которая определена на кривой $s_\beta^\psi(e^{i\varphi})$ на S. Представим q в виде суммы $q=q_+ + q_-$, где q_+ голоморфна в области $s_\beta^\psi(\mathcal{D}_+)$ а q_- - в дополнении этой области. Тогда

$$d[\Omega_{\beta\beta}^{\psi\psi} v] = (s_\beta^\psi)^* q_+$$

$$d[\Omega_{\alpha\beta}^{\theta\psi} v] = (s_\alpha^\theta) q_-$$

если пара (θ,α) отлична от пары (ψ,β).

<u>Теорема I6.2.</u> ("теорема площадей") $\|\Omega\|<1$.

Доказательство: $\Omega(\gamma)$ есть преобразование Потапова-Гинзбурга $T(\gamma)$.

Замечание. Если род S равен 0, то сформулированное утверждение, по существу, совпадает с "теоремой площадей" Лебедева (см. [27]).

16.6. Фермионная конструкция для $\widetilde{Shtan}$. Как мы уже отмечали в §10 симплектическая категория $\overline{Sp}$ вкладывается в категорию $\overline{C}$. Итак, конструкцию п.16.1. можно рассматривать как вложение $\widetilde{Shtan}$ в $\overline{C}$, категория $\overline{C}$ в свою очередь вкладывается в $\overline{GA}$. Ограничивая спинорное представление $\overline{GA}$ на $\widetilde{Shtan}$ мы получаем представление категории $\widetilde{Shtan}$.

16.7. Фермионные конструкции для $Shtan$. Пусть H - это пространство H_0 из п.11.7, т.е. пространство $L^2(S^1)$, снабженное структурой объекта категории $\overline{GA}$, пространство H_+ натянуто на функции $e^{in\varphi}$ с $n \geqslant 0$, а H_- - на функции $e^{in\varphi}$ с $n<0$.

Пусть k - целое число. Построим вложение T_k категории $Shtan$ в категорию $\overline{GA}$. Каждому $n \in Ob(Shtan)$ мы поставим в соответствие пространство
$H^{(n)} = \bigoplus_{i=1}^{n} H \in Ob(\overline{GA})$ (мы полагаем,
$H_+^{(n)} = \oplus H_+$, $H_-^{(n)} = \oplus H_-$) Пусть
$\gamma = (S, s_i^+, s_j^-): m \to n$ - морфизм категории $Shtan$.
Введем линейное отношение $T_k^0(\gamma) \subset H^{(m)} \oplus H^{(n)}$, положив что $(v_1^+, \dots, v_m^+, v_1^-, \dots, v_n^-) \in H^{(m)} \oplus H^{(n)}$ содержится в $T_k^0(\gamma)$ тогда и только тогда, когда существует голоморфный дифференциал F степени k на S такой, что
$(s_\alpha^\pm)^* F = v_\alpha^\pm(\varphi)(d\varphi)^k$. Наконец, $T_k(\gamma)$ - это за-

мыкание $T_K^0(\gamma)$.

Замечание. Дадим эквивалентное, в некоторых отношениях более приятное, определение $T_K(\gamma)$ (мы не будем им пользоваться). Введем сначала гильбертово пространство $H^2(\gamma,(dz)^k)$ голоморфных дифференциалов степени k на S, положив

$$\|F\|^2_{H^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\sum_{i=1}^{m}\|((\gamma_\alpha^+)_\varepsilon)^* F\|^2_{L^2} + \sum_{j=1}^{n}\|((\gamma_\alpha^-)_\varepsilon)^* F\|^2_{L^2}\Big)$$

где $(\gamma_\alpha^\pm)_\varepsilon(\varphi)=\gamma_\alpha^\pm(\varepsilon,\varphi)\in C^\infty([0,\delta]\times[0,2\pi])$ причем $\gamma_\alpha^\pm(\varepsilon,\varphi)=\gamma_\alpha^\pm(\varepsilon,2\pi)$, $\gamma_\alpha^\pm(0,\varphi)=s_\alpha^\pm(e^{i\varphi})$, если же $\varepsilon>0$, то $\gamma_\alpha^\pm(\varepsilon,\varphi)$ лежит во внутренней части S. Наконец, мы, по определению, полагаем

$$\|f(\varphi)(d\varphi)^k\|_{L^2} = \|f(\varphi)\|_{L^2[0,2\pi]}$$

Теперь набор $(\sigma_1^+,\ldots,\sigma_m^+,\sigma_1^-,\ldots,\sigma_n^-)$ содержится в $T(\gamma)$, если существует голоморфный дифференциал F из $H^2(\gamma,(dz)^k)$ такой, что граничные значания F на компонентах края суть $(s_\alpha^\pm)^*(\sigma_\alpha^\pm(\varphi)(d\varphi)^k)$.

Теорема I6.3. $T_K(\gamma)$ - морфизм категории $\overline{GA}$.

Доказательство напоминает доказательство теоремы I6.I, но намного проще.

Лемма I6.3. Пусть γ - круговая область в $\mathbb{C}$ стандартной параметризацией границ $\varphi\to a+re^{\pm i\varphi}$, ограниченная одной, двумя, или тремя окружностями. Тогда $T_K(\gamma)\in Mor_{\overline{GA}}$.

Доказательство. Разберем, например, случай области

$\gamma \in Mor(0,3)$. Пусть $\bar{\mathbb{C}} \setminus S$ есть объединение дисков Q_1, Q_2, Q_3. Отождествим дифференциалы степени k с функциями (т.е. отождествим $F(dz)^k$ с F). Тогда преобразование Потапова-Гинзбурга отношения $T(\gamma)$ является графиком оператора с матрицей

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

где Ω_{ij} - отображение ограничения из пространства H^2 функций, голоморфных внутри области $\mathbb{C} \setminus Q_i$ в пространство H^2 функций, голоморфных внутри Q_j. Этот оператор является ядерным (и даже лежит в любом операторном $\mathcal{L}_p$, $p>0$), проще всего в этом убедиться, выписав его матрицу (мы это, по существу уже делали, в формуле (16.1), нужно добавить сверху нулевую строку). Таким образом матрица Ω ядерна. Случаи, когда $\gamma \in Mor(1,2)$, $Mor(2,1)$, $Mor(3,0)$, почти не отличаются от рассмотренного. Случаи, когда S - круг или кольцо, еще проще. $\boxtimes$

Доказательство теоремы 16.3. Из леммы сразу следует, что теорема верна в случае, когда риманова поверхность - это сфера с одно, двумя или тремя дырками (напомним, что $Diff \subset Aut(H)$ см. п.11.7). Далее, любой морфизм представляется в виде произведения морфизмов $\mathcal{R}_k = (R_k, (r_k)_i^+, (r_k)_j^-)$, где каждая риманова поверхность R_k есть объединение сфер с одной, двумя или тремя дырками. Далее мы дословно повторяем рассуждения п. 16.4. $\boxtimes$

Ограничивая спинорное представление категорий GA на

$Shtan$ мы получаем серию представлений $\rho_k (k \in \mathbb{Z})$ категории $Shtan$.

Предложение I6.I. Операторы $\rho_k(\gamma)$ ограничены для всех $\gamma \in Shtan$.

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы I4.2.

I6.8. Примеры представлений категории $Shtan^*$. Чтобы привести пример представления $Shtan^*$ достаточно рассмотреть конструкцию I6.7, только в определении $T_k^0(\gamma)$ потребовать, чтобы дифференциал F имел нули кратности $s \geqslant 0$ в отмеченных точках.

I6.9. Примеры представлений категории $G-Shtan$.

Здесь, тоже можно чуть-чуть видоизменить конструкцию п I6.7. Пусть $\gamma = [S, \Sigma, s_i^+, s_j^-]$ - морфизм. А именно фиксируем голоморфное представление ρ группы G, построим по ρ линейное расслоение над S ассоциированное с Σ и далее вместо k -дифференциалов (рассматривающихся в п.I6.7) рассмотрим голоморфные сечения ρ. Роль пространства H играет пространство функций на окружности $|z| = 1$ со значениями в пространстве представления ρ.

Глава IУ. Представления категорий $\mathcal{GA}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$.

В главе II были введены категории $\overline{\mathcal{GA}}, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathcal{GD}}$. Здесь нас интересуют не сами эти категории, а лишь их конечномерные части $\mathcal{GA}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{GD}$ т.е. подкатегории, состоящие из конечномерных объектов. Мы начнем с того, что дадим независимое определение этих категорий.

§I7. Формулировки классификационных теорем.

I7.0. Предварительные замечания о представлениях категорий. Определения подпредставления, неприводимого представления, прямой суммы представлений, тензорного произведения представлений, вполне приводимого представления (представления, разлагающегося в прямую сумму неприводимых) в комментариях не нуждаются. Определим аналог сплетающего оператора. Пусть (T, τ) и (S, σ) – представления категории $\mathcal{K}$. Сплетающим преобразованием $A : (T, \tau) \to (S, \sigma)$ мы назовем набор операторов $A(V)$, где $V \in Ob(\mathcal{K})$ такой, что для любых $V, W \in Ob(\mathcal{K})$ и для любого $P \in Mor(V, W)$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
T(V) \arrow[r, "\tau(P)"] \arrow[d, "A(V)"'] & T(W) \arrow[d, "A(W)"] \\
S(V) \arrow[r, "\sigma(P)"] & S(W)
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Определим также циклическую оболочку. Пусть $V \in Ob(\mathcal{K})$ Пусть $L \subset T(V)$. Обозначим через $S(W) \subset T(W)$ набор подпространств, натянутых на векторы вида $\tau(P)v$, где $P \in Mor(V, W)$, $v \in L$. Легко видеть, что S – под-