АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГИКИ В НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

С. А. Яновская

О НЕКОТОРЫХ ЧЕРТАХ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ОТНОШЕНИИ ЕЕ К ТЕХНИЧЕСКИМ ПРИЛОЖЕНИЯМ[1]

§ 1. Развитие математической логики и область ее технических приложений нельзя обрисовать, хотя бы в самых общих чертах, в кратком докладе. Я попытаюсь здесь поэтому наметить только некоторые основные черты этого развития, имея в виду осветить, насколько это мне удастся, два следующих круга вопросов.

Зарождение математической логики относится к тому же времени, что и возникновение дифференциального и интегрального исчисления [2]. Лейбниц, которому принадлежит общепринятая теперь символика этого исчисления и первые его алгоритмы, был и творцом первых логических исчислений. Однако подлинное развитие последних, как и вообще всей математической логики, происходит только в последние 100 лет. Более того, оно становится особенно характерным для математики XX в., когда темпы развития математической логики настолько убыстряются, что обзор, например, работ и результатов, полученных в СССР за последние 10 лет, значительно превосходит

---

[1] Доклад, прочитанный на Всесоюзном совещании по теории релейных устройств 3 октября 1957 г.

[2] Именно как *исчисления*, оперирующего с характерными для него символами дифференциалов, интегралов и др.

и по объему и по содержанию аналогичный обзор за предыдущие 30 лет.

В чем состоят причины этого? Почему именно в наше время математическая логика и ее значение для математики и техники столь быстро растут? Не связано ли оно само с созданием новой техники, машин нового типа, с широким развитием автоматики?

Второй круг вопросов, связанный с первым, носит более специальный характер. Известно, что в технике, в частности в устройствах релейного действия, применяется прежде всего алгебра логики или, как иначе говорят, булева алгебра, которая является вовсе и не логикой, а некоторой алгеброй. Этой алгебры часто бывает недостаточно и ее заменяют другими алгебрами. Может быть, в современной технике, или хотя бы в устройствах релейного действия, вообще не нужна математическая логика? Может быть, правомерно говорить только о технических приложениях алгебры, а не логики?

§ 2. На первый взгляд быстрота темпов развития математической логики в XX в. не имеет как будто никакого отношения к машинной технике и вообще к машинам. Нетрудно убедиться в том, что уже в са́мом начале века развитие математической логики было связано с трудными задачами обоснования математики.

При помощи развитой к этому времени теории множеств задачу обоснования математического анализа удалось свести к задаче обоснования арифметики натуральных чисел, трактуемой в свете теории множеств, то есть с допущением построений любых множеств натуральных чисел, множеств множеств таких чисел и т. д.

К этой же проблематике привело и начавшееся с трудов Лобачевского, Бойяи, Гаусса и Римана развитие неевклидовых геометрий. Как известно, вопрос о непротиворечивости этих геометрий был сведен к вопросу о непротиворечивости евклидовой геометрии, который, в свою очередь, оказался тем же вопросом о непротиворечивости математического анализа, т. е. арифметики действительных чисел или трактуемой теоретико-множественно арифметики натуральных чисел. Последнюю при этом стали уже излагать по образцу геометрии, то есть аксиоматически, трактуя содержательно, в аксиомах, вводящих основные понятия арифметики («число», «нуль» и «следующее» в системе аксиом Пеано), только термины из области логики и теории множеств. Аксиоматический метод, в той именно его форме, в которой он был столь успешно применен Гильбертом в его «Основаниях геометрии», с характерными для этого метода проблемами непротиворечивости, полноты и независимости аксиом, становится вообще рабочим инструментом математика, а связанная с ним, неявно предполагаемая при этом в каждой системе аксиом, теория множеств в 20-х годах текущего столетия проникает буквально во все разделы математики, которые она при этом творчески оплодотворяет.

Возвращаясь к началу XX в., мы можем констатировать, что трудная задача обоснования математики представляется математикам того времени окончательно решенной: оставалось-то ведь «только» обосновать не математический анализ, а арифметику натуральных чисел, трактуемую в свете такой, казалось бы, естественной, «наивной», как ее теперь называют, теории множеств! Со всею серьезностью и убеждением в непростоте задачи этим занялся, однако, создатель первой логико-математической системы Готтлоб Фреге, работу которого в начале никто из математиков не оценил: зачем, казалось, было осложнять столь трудным логико-математическим аппаратом (аппарат у Фреге требует весьма громоздких формальных выкладок с символами) такие простые, всем понятные вещи, как натуральные числа и операции с ними? Но в это самое время, точнее в конце XIX — начале XX в., в теории множеств,— в той самой теории множеств, с помощью которой и в самóй математике и в ее обосновании были достигнуты столь значительные успехи,— были обнаружены противоречия.

Как можно было думать о доказательстве непротиворечивости теоретико-множественной арифметики, если в последней заведомо получались противоречия? Не следовало ли поставить крест над всеми уже полученными доказательствами непротиворечивости, сводящими исследуемый вопрос к вопросу о непротиворечивости арифметики? Не вытекало ли из этого заключение о неправомерности самой классической математики?

Такое заключение и было сделано интуиционистами (Брауэром и Вейлем), которые со всей остротой поставили вопрос о неправомерности не только канторовской теории множеств, но и классического математического анализа и даже элементарной геометрии Евклида, использовав при этом действительные трудности в обосновании математики для своих идеалистических философских выводов.

Но подавляющее большинство математиков отказалось от такого заключения, надеясь все же доказать непротиворечивость математики и так уточнить (исправить) наивную (канторовскую) теорию множеств, чтобы она оказалась непротиворечивой и в то же время достаточной для всех нужд математики. Так и возникли в XX в. основные труды по математической логике. Именно этому посвящены знаменитые «Principia Mathematica» Рассела и Уайтхеда [1]. Этим же занимаются Гильберт и Бернайс в своих «Основаниях математики» [2], Куайн в «Новых основаниях математической логики» [3], в [4] и др., Г. Генцен [5] и П. С. Новиков [6] в доказательствах непротиворечивости арифметики (рациональных чисел), К. Гёдель в работе «Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множества» [7] и многие другие.

Но задача оказалась исключительно трудной. Более того, было обнаружено, что эти трудности носят принципиальный характер, связанный с самим существом дела. В 1931 г. К. Гёдель в своей знаменитой работе «О формально неразрешимых предложениях Principia Mathematica и родственных систем» [8] строго доказал, что в логико-математических системах типа Principia Mathematica принципиально нельзя формализовать всю содержательную арифметику (теорема Гёделя о неполноте), что вообще непротиворечивость достаточно богатой средствами вывода формальной системы нельзя доказать средствами этой же формальной системы (теорема Гёделя о непротиворечивости).

К чести математиков и математических логиков — прежде всего самого К. Гёделя — нужно сказать, что они не сложили оружия после этих открытий, что последние заставили их только глубже задуматься над сущностью математической бесконечности и операций с бесконечными множествами, в том числе и операций логического характера (закон исключенного третьего).

Заметим, что еще в 20-х — начале 30-х годов советские математики А. Н. Колмогоров и В. И. Гливенко, исходя из диалектико-материалистических представлений о сущности математики, обнаружили рациональное ядро в проблематике, связанной с вопросом о применимости закона исключенного третьего в математике. Уже в 1925 г. А. Н. Колмогоров показал, что классическая арифметика может быть вложена в интуиционистскую (переведена на ее язык), последняя должна трактоваться не как опровергающая первую, а, наоборот, как обосновывающая ее. Через 7 лет после А. Н. Колмогорова это же, в несколько более полном виде, было сделано К. Гёделем. В наши дни круг вопросов, связанных с наиболее рациональным вложением классической арифметики в «интуиционистскую», которую, как было обнаружено к этому времени, естественнее называть «конструктивной», был исследован особенно полно Н. А. Шаниным [9]. В 1932 г. А. Н. Колмогоров показал, что, независимо от философских установок Брауэра, «интуиционистская» логика может быть истолкована как исчисление задач (поскольку в задаче речь идет не об (объективной) истинности или ложности предложения, а о *построении* объекта, уже это дает некоторое основание говорить о «конструктивной» логике).

Другой способ конструктивного истолкования «интуиционистской логики» был предложен в 1945 г. Клини («реализация» Клини). Убедительную критику некоторых недостатков «реализации» Клини и новый способ конструктивного истолкования математических суждений предложил недавно Н. А. Шанин [10]. В основе этих способов лежит отнюдь не понимаемая в смысле Канта праинтуиция — они исходят из имеющих материалистический смысл понятий нормального алгорифма (по А. А. Маркову) [3] и вычислимой функции (по С. К. Клини), т. е. из основных понятий, относящихся к области конструктивных объектов и методов математики.

---

[3] Когда будет идти речь о нормальных алгорифмах (специально или по преимуществу), мы будем писать, следуя А. А. Маркову, «алгорифм»; в других случаях будем употреблять более привычный для многих математиков термин «алгоритм».

В связи с теоремами Гёделя вопрос о соотношении конструктивных и неконструктивных элементов в математике выплыл вообще на первый план. Важнейшее место в математической логике стала занимать проблематика теории вычислимых функций и операторов (Клини, Пост) и связанные с нею понятия примитивно-рекурсивных, обще-рекурсивных и частично-рекурсивных функций и операторов. Другим аспектом той же проблематики оказалась теория алгоритмов. А при помощи теории алгоритмов можно было по-новому поставить вопрос и об основаниях математики, выделяя в ней наиболее легко поддающиеся обоснованию конструктивные теории: разные виды конструктивного математического анализа в смыслах Гудстейна, Маркова или Шанина, для которых ряд теорем классического математического анализа неверен; более близкие к классическому математическому анализу, строящиеся как последовательно расширяющиеся («пухнущие»), системы математического анализа Лоренцена и Хао Вана, где конструктивно строятся не са̀мые математические объекты, а их имена или определения; аксиоматические системы математического анализа с правилом бесконечной индукции (вплоть до некоторого трансфинитного числа) Аккермана и Шютте, непротиворечивость которых доказана; иерархия формальных систем Клини-Мостовского; арифметика с конструктивным (в определенном смысле) правилом бесконечной индукции, для которой, как показал А. В. Кузнецов, теорема Гёделя о неполноте уже не имеет места; и другие результаты и теории, явно ставящие вопрос о соотношении конструктивных и неконструктивных моментов математики.

Конечно, было бы преувеличением отождествлять конструктивный математический анализ — хотя бы в смысле Гудстейна, Маркова или Шанина — с таким анализом, который особенно удобен в практических приложениях. Однако связь этой проблематики с общей теорией машин (автоматов) нетрудно показать. Тот характер развития математической логики, который это развитие приобрело даже в са̀мой абстрактной области обоснования математики, невольно заставляет задуматься над вопросами о связи этих абстрактных проблем с теорией автоматов. Но об этом еще впереди.

§ 3. Другой круг вопросов (тесно связанный с первым, но имеющий и самостоятельное значение), обусловивший развитие математической логики в нашем веке, связан с некоторыми трудными, упорно не поддававшимися усилиям математиков задачами самой математики. К их числу принадлежит, например, уже упоминавшаяся выше в связи с Гёделем проблема континуума (в теории множеств). Таких трудных задач в дескриптивной теории множеств оказалось вообще не мало. Анализируя их, советский математик Н. Н. Лузин высказал предположение, что трудность этих задач обусловлена не тем, что они требуют какой-либо особой изощренности ума от математика, а их логической природой: что обычных средств теории множеств вообще недостаточно для того, чтобы на соответствующие этим задачам вопросы можно было дать ответ «да» или «нет»; что в этих задачах мы имеем дело с так называемыми неразрешимыми предложениями, природа которых может быть вскрыта лишь средствами математической логики. Ряд важных результатов на пути выяснения этой природы был получен при помощи математической логики П. С. Новиковым [11] и его учениками.

Особое значение в связи с развитием математической логики имеет круг задач, связанных с доказательствами несуществования алгоритмов. К их числу принадлежит, например, знаменитая проблема тождества слов в теории групп, за решение которой П. С. Новикову была присуждена в 1957 г. Ленинская премия. Ряд других алгебраических задач того же рода был решен учеником П. С. Новикова С. И. Адяном. Еще ранее ряд аналогичных задач для так называемых ассоциативных исчислений, в том числе известная задача Туэ, были решены независимо друг от друга советским математиком А. А. Марковым и американским математиком Э. Постом [4].

---

[4] *Примечание при подготовке к печати.* В самом начале 1958 г. А. А. Марков решил трудную аналогичную проблему из области топологии (проблему гомеоморфизма полиэдров). Обзор результатов этого рода, полученных советскими математиками А. А. Марковым, П. С. Новиковым и их учениками, см. в написанном С. И. Адяном § 9 (стр. 72—80) статьи «Математическая логика и основания математики» в сб. «Математика в СССР за 40 лет».

Начиная с глубокой древности математики строили алгоритмы («стратагемы действия», как любил в таких случаях говорить Маркс) для решения целых классов задач определенного рода. Таковы, например: всем известный алгоритм Евклида, представляющий собой программу действий, которые нужно выполнить, чтобы, имея любые два целых числа a и b, отыскать их общий наибольший делитель; алгоритм Штурма, позволяющий по заданию коэффициентов многочлена отделить его корни; многие другие алгоритмы алгебры, теории чисел, теории дифференциальных уравнений и многие, многие другие.

Когда какой-нибудь алгоритм отыскан, то всем ясно, что он уже *есть*: его существование не приходится доказывать. Но если алгоритм упорно ищут и не находят, то естественно возникает вопрос, возможен ли он вообще? Разве обязательно должен существовать *единый* прием, позволяющий механически решить (по *одной и той же* программе) *любую* из всего класса задач, отличающихся друг от друга значениями каких-либо параметров? Но как доказать несуществование алгоритма, его принципиальную невозможность?

Для этого нужно знать, что́, собственно, ищут; нужно иметь четкое определение алгоритма, позволяющее оперировать с этим понятием, как с математическим объектом. Такое определение алгоритма и было дано в математической логике. Вообще говоря, был даже дан ряд таких определений, которые, однако, все — в определенном смысле — оказались эквивалентными между собой. Особое место среди этих определений — по легкости их применения, наглядности и простоте — принадлежит так называемой машине Тьюринга и понятию нормального алгорифма, введенному А. А. Марковым [5]. При помощи определения нормального алгорифма А. А. Марков и получил свои многочисленные результаты, относящиеся к доказательствам несуществования тех или иных алгорифмов.

Само собою разумеется, что и результаты Новикова и Адяна, опирающиеся, кстати сказать, на некоторые результаты Мар-

[5] Очень интересное топологическое определение алгоритма, теория которого более детально разработана В. А. Успенским, принадлежит А. Н. Колмогорову.

кова, стали возможны лишь благодаря тому, что в математической логике было дано точное определение алгоритма и разработана — наиболее полно А. А. Марковым [12] — теория алгорифмов.

Ситуация, аналогичная той, которая имеет место с определением алгоритма, возникает и в ряде других случаев. Когда теорема доказана, никто не сомневается в том, что соответствующее предложение есть теорема. Но если предложение упорно не удается доказать, то встает вопрос о его доказуемости, о его праве вообще называться «теоремой». А для ответа на такой вопрос нужно иметь четкое определение понятия *теорема*. Нужно знать, что такое «теорема» вообще, что вообще значит «доказать теорему». Попытки дать удовлетворительный ответ на эти вопросы содержатся в работах многих современных представителей математической логики (Тарского, Клини и др.).

Аналогично обстоит дело с вопросами о том, что такое «задача», что значит «решить задачу».

Все эти вопросы относятся к математической логике и возникают в последней, когда идет речь о трудных вопросах или задачах самой математики или ее обоснования, когда приходится задумываться над причиною упорных неудач в их решении. В таких случаях к рассмотрению привлекаются не только те предметы, к которым эти вопросы относятся, но и те средства обращения с этими предметами, которыми располагает математика: предметом изучения становится структура самой математической теории.

Теория, предметом изучения которой является некоторая другая теория, называется *метатеорией*. В развитии математической логики важнейшее значение принадлежит именно проблемам метаматематики — одной из наиболее развитых к настоящему времени метатеорий. Но какое отношение эти проблемы могут иметь к вопросам техники или теории машин?

§ 4. Чтобы ответить на этот вопрос, мне придется начать издалека, с глубокой древности.

Уже на самой заре своего возникновения и развития математика имела дело с вещами особого рода: с зарубками, палочками, костями — вообще с объектами, из которых можно эффективно образовывать множества и оперировать с этими множествами — складывать, вычитать из одних другие, подразделять на части и т. п. И притом оперировать так, что эти операции могут быть выполнены всегда по одному и тому же плану (программе), то есть, что они носят алгоритмический характер. Поэтому для облегчения их выполнения люди еще в давнее время смогли придумать разные вспомогательные инструменты: абак, китайские и русские счеты и многие другие. Этого рода объекты по праву могут быть названы *конструктивными объектами*. И сами они и их множества легко порождаются на практике, и операции с этими множествами носят также эффективный характер.

В геометрии положение обстоит несколько более сложно. Однако и здесь мы имеем дело с объектами, которые порождаются эффективно — при помощи некоторых инструментов. Вспомним, что геометрия Евклида, как она изложена им в «Началах», есть, как известно, геометрия циркуля и линейки — геометрия задач на построение при помощи циркуля и линейки. Задачи, которыми занимается Евклид, суть, так же как и в арифметике, массовые задачи в том смысле, что ищется общий метод, позволяющий решить по одному и тому же плану (программе) любую из задач некоторого рода (некоторого класса задач). Так, в «Началах» Евклида требуется, например, найти прием (программу действий, алгоритм), который позволил бы разделить любой отрезок пополам, провести (на плоскости) из любой точки, лежащей вне данной окружности, касательные к этой окружности и т. д., и т. п. Для облегчения задачи составить такую — совершенно общую — программу действий производится некоторая идеализация. Предполагается, например, что мы имеем дело не с каким-нибудь данным куском плоскости, а с таким, который всегда можно по произволу увеличить (так именно обстоит дело у самого Евклида); что точка вообще не имеет никаких измерений; что циркуль и линейка — это идеальные циркуль и линейка, при помощи которых можно соединить прямой линией любые две точки пространства или описать окружность сколь угодно большого или сколь угодно малого радиуса. Но в таком случае алгоритм решения массовой задачи, например какой-нибудь из упомянутых нами выше, приобретает уже не абсолютный, а относительный характер: он решает данную задачу эффективно, *если* эффективно решаются задачи, принятые с самого начала за решенные нашим допущением о существовании идеальных циркуля и линейки. Он является так называемым алгоритмом сводимости. «Решить задачу» теперь означает свести ее решение к (конечной) последовательности шагов, каждый из которых представляет одну из задач, принятых за решенные.

Напомним еще раз, что допущение о существовании идеальных циркуля и линейки могло быть сделано (непосредственно) в целях облегчения и обобщения задачи,— для того, чтобы не надо было для каждых данных циркуля, линейки и куска плоскости составлять особую геометрию и особые правила решения задач [6]. Но со всякой такой идеализацией неизбежно связаны трудности, которые не замедлили обнаружиться уже в античной древности в виде парадоксов Зенона или открытия несоизмеримости диагонали идеально точного квадрата [7] с его стороной: трудности связаны с математической бесконечностью, в том или ином виде неизбежно входящей в математику вместе со всяким общим (с абстракцией) и с идеализацией. Именно этими трудностями и обусловлена, начиная еще с античной древности, т. е. с момента возникновения первых математических теорий, задача обоснования математики. Уже в этих первых теориях математика выступает как некоторое единство конструктивных (эффективных) и неконструктивных (эффективно не всегда осуществимых) предметов и операций с ними. Такой характер она сохраняет на протяжении всей своей истории. В са́мой абстрактной теории множеств, где принимается за решенную — в применении к бесконечному множеству — любая задача, которую можно было бы решить путем (заведомо неосуществимого) перебора *всех* элементов множества. Даже в этой теории множеств тоже есть некоторые конструктивные моменты.

---

[6] С этим уже связано, однако, то обстоятельство, что таким образом лучше выявляется более глубоко лежащее математическое существо дела.

[7] Такой квадрат обязательно существует при наличии идеальных циркуля и линейки, соответствующих требованиям геометрии Евклида, сформулированным еще самим Евклидом в виде постулатов в его «Началах».

Теоремы, в доказательстве которых употребляются и столь неэффективные предложения, как, например, пресловутая аксиома выбора, тем не менее эффективно проверяемы: если эта аксиома верна, то должно быть верно и вытекающее из нее следствие. Само доказательство при этом является конструктивным предметом, настолько поддающимся проверке, что когда математик утверждает, что теорема им доказана, никто не сомневается в том, что можно либо безапелляционно установить правильность предложенного доказательства, либо конкретно указать допущенную в нем ошибку.

Чтобы разобраться в том, чтó такое математика, как происходит ее развитие, чтó значит «решить задачу» или «доказать теорему», естественно обратиться к сущности конструктивных предметов математики и выяснить, как происходит постепенно — исторически и логически — внедрение в нее неконструктивных элементов, в чем именно состоит столь характерное для математики единство конструктивного и неконструктивного.

§ 5. Наилучшим аппаратом для изучения конструктивных элементов математики является теория алгоритмов (как уже было отмечено, в этой теории советским математикам принадлежит ряд заслуг первостепенной важности). Но, как известно, самое основное понятие этой теории — понятие алгоритма — может быть определено в терминах общей теории машин дискретного действия как «машина» Тьюринга. В терминах теории машин определял это понятие и Э. Пост. Я думаю, что это не случайно. Недаром конструктивные моменты математики с самого возникновения этой науки были связаны с теми или иными приборами и инструментами. Не случайно, на мой взгляд, и то обстоятельство, что теория автоматов (конечных или «машин» Тьюринга) оказывается тесно связанной и с общей теорией логических исчислений; что логические исчисления в свою очередь оказываются применимыми в технике и, наоборот, техника оплодотворяет проблематику логических исчислений. Но об этом подробнее впереди. Сейчас для нас существенно только, что теория алгоритмов органически, естественно связана с теорией автоматов.

Характерное для математики единство конструктивного и неконструктивного находит выражение прежде всего в так называемых алгоритмах сводимости. Изучение последних имеет поэтому особое значение и не случайно становится одним из самых увлекательных и трудных разделов современной математической логики. Заметим, что и здесь советским математикам принадлежит ряд крупных достижений. Таково, прежде всего, решение учеником П. С. Новикова А. А. Мучником очень важной для всей математической логики знаменитой проблемы сводимости Поста, упорно не поддававшейся усилиям математиков. Таков ряд важных результатов Б. А. Трахтенброта и А. В. Кузнецова. Такова предложенная учеником А. Н. Колмогорова Ю. Т. Медведевым теория степеней трудности массовых задач (в смысле Медведева), основанная на принадлежащем ему обобщенном определении термина «массовая задача» и соответствующем установлении смысла того, что значит «решить массовую задачу», а также «свести» решение одной массовой задачи к решению другой (или других). Такова разработанная В. А. Успенским общая теория вычислимых операций над множествами.

Перевод теории алгоритмов сводимости на язык теории машин и связь с последними (хотя бы идеализированными) естественно не представляются уже столь само собой разумеющимися, как это имеет место в отношении теории алгоритмов или теории рекурсивных (вычислимых) функций. Однако и здесь существенно отметить наличие уже сейчас ряда исследований [13], относящихся к так называемым вероятностным машинам, т. е. машинам со случайными элементами, возможности которых, по сравнению с машинами Тьюринга, становятся ясными в свете теории алгоритмов сводимости.

§ 6. Если правильно заключение, которое мне хотелось бы сделать из уже изложенного и которое состоит в том, что не случайна органическая связь основной проблематики математической логики с теорией автоматов, то становится однозначным и ответ на второй из поставленных в начале доклада вопросов: правомерно ли говорить о технических приложениях именно математической логики, а не алгебры? Ведь из этого заключения с неизбежностью следует, что правомерно; что, более того, подлинное существо дела в общей теории машин вскрывается именно средствами математической логики. Конечно, из этого отнюдь не следует, будто другие математические науки не имеют отношения к теории машин. Ведь и сама математическая логика связана со всеми другими областями математики: и с теорией множеств, и с алгеброй, и с топологией, и с математическим анализом, и со многими другими, результаты и методы которых она использует. Но особое значение для автоматики имеет все же математическая логика как таковая, а не просто как некоторая алгебра. В дополнение к общим соображениям, приведенным выше, я сейчас попытаюсь пояснить это на нескольких примерах.

Известно, что задачи анализа и синтеза контактных схем, содержащих только параллельно-последовательные соединения, решаются при помощи аппарата исчисления высказываний. Если, однако, схема содержит, помимо параллельно-последовательных, мостиковые соединения, то аппарата исчисления высказываний («булевой алгебры логики») оказывается, как известно, недостаточно. Естественно встает вопрос, нельзя ли так усилить эту алгебру, чтобы она уже была в состоянии охватить как параллельно-последовательные, так и мостиковые соединения, чтобы с ее помощью можно было столь же просто и легко решать задачи анализа и синтеза мостиковых схем, как это делается с помощью булевой алгебры для схем с одними только параллельно-последовательными соединениями. Попытки отыскать такую алгебру были действительно предприняты. Однако безуспешно. В чем же дело? В плохом знакомстве техников с алгеброй или алгебраистов с техникой?

Средствами математической логики А. В. Кузнецов показал, что дело не в этом, что вообще невозможно так усовершенствовать обычный булев аппарат алгебры логики (добавив к нему конечное число операций), чтобы он стал содержать средства, достаточные для адекватного описания строения не только параллельно-последовательных, но и мостиковых схем (адекватного в определенном смысле, предполагающем, что математический аппарат, описывающий какое-либо устройство, не должен быть намного сложнее самого этого устройства). Я не имею возможности более полно осветить здесь результат А. В. Кузнецова; замечу только, что с его помощью выявляется конкретная причина неудач поисков удобной простой алгебры, пригодной и для мостиковых соединений.

Второй пример относится к теории конечных автоматов, развитой в статьях Клини и Медведева в сборнике «Автоматы». Речь идет о принадлежащем Б. А. Трахтенброту усилении (и упрощении) основного результата этой теории, относящегося к вопросу о реализуемости операторов посредством конечных автоматов.

Когда автомат уже построен, то его анализ дает описание реализуемого в нем оператора в виде некоторой системы уравнений определенного вида. Наоборот, задача синтеза автомата, реализующего нужный оператор, немедленно решается заданием такой системы уравнений. Однако описание, задающее оператор, например обычное словесное, может быть отнюдь не этой формы. Если бы можно было придумать алгоритмический прием, который позволил бы переводить любое задание оператора в нужную форму, то вопрос о реализуемости оператора конечным автоматом (задача синтеза последнего) был бы полностью решен. Ясно, что в общем случае такого рода алгоритм заведомо не существует. Однако, если учесть, что при описании конечных автоматов существенной свободной переменной является только время, и притом такое, которое можно предполагать для каждой данной задачи ограниченным сверху (по существу, можно ограничиться даже отрезком времени), то из всех возможных описаний оказывается естественным выделить класс описаний, формализуемых средствами логического исчисления одноместных предикатов, но уже не узкого, а расширенного: с кванторами по предикатам, но зато лишь с ограниченными кванторами по предметным переменным. Для формул этого исчисления, как показал Б. А. Трахтенброт, можно построить алгоритм, переводящий их в эквивалентную систему уравнений нужной формы, т. е. решить полностью вопрос о реализуемости конечным автоматом. Ясно, что здесь именно логика (а не алгебра) относится к делу по самому существу его. Ведь речь идет о логическом анализе описания оператора, высказанного, например, словесно. Формула логического исчисления, формализующая это описание, представляет собой не что иное, как результат такого логического анализа, выраженный средствами, приспособленными именно для целей логики,— с помощью логических связок, предикатов и кванторов.

Третий пример (точнее, ряд примеров) я хочу заимствовать опять из теории контактных схем. Как известно, для этой теории, в связи с ее практическими приложениями, особую роль играет вопрос о контактных схемах релейного действия с минимальным числом контактов. (Замечу, что в этой области, в разработке которой — после трудов Шеннона — принимали участие советские математики Г. Н. Поваров, О. Б. Лупанов и другие, наиболее сильный результат, окончательно решивший вопрос, поставленный Шенноном,—асимптотически точная оценка минимального числа контактов схемы, реализующей «наихудшую» из булевых функций от n переменных,— был получен в 1957 г. молодым советским ученым О. Б. Лупановым). Но в связи с такого рода задачей возникает и ряд проблем, принадлежащих уже к собственной области математической логики. Таковы прежде всего вопросы о сокращенной нормальной форме для формул исчисления высказываний и способах получения из нее минимальных (по числу знаков) выражений, которыми за рубежом занимались Куайн, Нельсон и другие, а из наших логиков — С. В. Яблонский и его ученики, А. В. Кузнецов, Е. К. Войшвилло; об упрощении записи условий, которым должна удовлетворять синтезируемая релейная схема (а, следовательно, и об упрощении структурной формулы схемы) с помощью учета неиспользуемых состояний (В. Н. Рогинский); а также связанные с задачами минимизации числа контактов в схеме вопросы систематики булевых функций и изучения классов функций, особенно удобных для описания условий работы релейных схем, наиболее часто встречающихся на практике, каковы класс функционально разделимых булевых функций, изученный Шенноном и Г. Н. Поваровым, класс симметрических булевых функций (Шеннон, Поваров, В. Н. Рогинский, А. В. Кузнецов и др.), класс особенных и совершенно особенных функций (Г. Н. Поваров). Именно так, например, возник ряд интересных результатов в области исчисления высказываний, связанных с представлением функций алгебры логики через симметрические или им подобные (Г. Н. Поваров, В. Н. Рогинский, А. В. Кузнецов). Таков и вопрос о минимизации числа отрицаний в формулах исчисления высказываний, которым занимался А. А. Марков. Таковы вопросы, возникающие в связи с необходимостью отразить в описании релейной схемы специфическую роль реле по отношению к контактам (В. Н. Рогинский, Т. Л. Майстрова). Таков ряд вопросов, связанных с многозначными логиками (у нас ими занимались В. И. Шестаков, С. В. Яблонский, А. В. Кузнецов и др.).

Заметим, что во всех этих вопросах речь идет прежде всего о *форме* некоторого символического выражения (формулы) логического исчисления; о замене одного выражения, возникающего непосредственно в результате логического анализа описания схемы, другим, удовлетворяющим определенным требованиям, но в то же время эквивалентным первому *логически*. Суть дела, таким образом, именно в логическом анализе описания схемы (предъявляемых к ее действию требований) и логических преобразованиях результатов этого анализа.

Мне представляется в связи с этим необходимым напомнить здесь, что наши заслуженные советские работники в области теории схем релейного действия, такие, как М. А. Гаврилов и В. И. Шестаков, не побоялись связать свои работы с математической логикой еще в те времена, когда эта наука отнюдь не пользовалась популярностью ни у математиков, ни у техников.

§ 7. В заключение позволю себе привести еще некоторые соображения в пользу важности — необходимости даже — не только алгебры, но и логики для техники. Именно логики, как таковой, с характерной для логики проблематикой. Дело в том, что до сих пор мы говорили только об определенных логических исчислениях: исчислении высказываний, исчислении предикатов. Но в современной математической логике есть ряд разделов, относящихся к общей теории логических исчислений, к вопросам о предмете и его имени, о знаке — его значении и смысле, о синонимах, т. е. словах с одинаковым смыслом, о таких вспомогательных знаках, как, например, скобки; разделов, относящихся к понятиям истины, логического следствия, вывода (из посылок) и доказательства; ко многим другим вопросам, близким к проблемам общей (философской) логики или языкознания, но, казалось бы, совсем не имеющим отношения к вопросам техники. Мне хотелось бы несколько остановиться на опровержении такого представления.

Семиотика (наука о знаке и его значении) заведомо относится к области логики. Но вопросы кодирования и перекодирования имеют самое непосредственное отношение к теории автоматов. Так, программы для автоматов приходится кодировать и для этого требуется выбирать систему обозначений. Не говорю уже специально о машинах, систематизирующих информацию или осуществляющих перевод с одного языка на другой. Но как поступить, если машина, например, должна уметь составить более сложную программу, комбинируя уже имеющиеся в ней простые программы, с тем чтобы затем самой же осуществить работу по новой программе? Ведь ей во всяком случае придется выбрать код для этой новой программы, а может быть, частично перекодировать и старые. Как осуществить это наилучшим образом? Как вообще взяться за это? Ясно, что тут неизбежно возникает ряд вопросов, относящихся к области науки о знаках и их значении.

Логические вопросы, в каком-то смысле близкие к лингвистике не только по терминологии («алфавит», «слово», «язык»), но и по проблематике (вопрос о смысле «слова», об образовании сложных «слов» из простых, о переводе на другой «язык», о частях «слова» и др.), могут иметь непосредственное отношение к теории машин и к способам практического их осуществления. Не случайно именно в лингвистических терминах («алфавит», «слово») формулируется и теория нормальных алгорифмов Маркова. Правда, с «алфавитом» и «словом» мы имеем дело и в современной алгебре. Однако общая теория «алфавитов», «букв», «слов» в формализованных «языках» относится не к области алгебры, а к математической логике и связанной с ней математической лингвистике, которой успешно занимаются А. А. Марков, В. А. Успенский, Р. Добрушин и ряд лингвистов, особенно учеников А. А. Ляпунова.

Тема, о которой мне пришлось здесь говорить, практически неисчерпаема. Об очень и очень многом, весьма важном и значительном в развитии математической логики и ее технических приложениях мне не удалось даже упомянуть.

Но основные положения, в защиту которых мне здесь хотелось выступить, представляются мне лично ясными до тривиальности. Будем же ратовать за то, чтобы техники все больше и лучше овладевали математической логикой, а математические логики все больше и лучше работали в области технических приложений.

Литература

1. A. N. Whitehead a. B. Russell. Principia Mathematica. Ed. 2, v. 1, 1925; v. 2, 1927.
2. D. Hilbert u. P. Bernays. Grundlagen der Mathematik, B. 1. Berlin, 1934; B. 2, 1939.
3. W. V. Quine. New foundations for mathematical logic. Math. Monthly, v. 44, 1937, p. 70—80.
4. W. V. Quine. Mathematical Logic. Rev. ed., Harvard University Press, 1955.
5. G. Gentzen. Die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie. Math. Ann., v. 112, 1936, S. 493—565.
6. П. С. Новиков. On the consistency of certain logical calculus. «Матем. сб.», 12 (54), стр. 231—261.
7. Русский перевод см. в журн. «Успехи математических наук», 1948, т. III, вып. 1, стр. 96—149.
8. K. Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der «Principia Mathematica» und verwandeter Systeme. Mn. Math. Physik, v. 38, 1931, p. 173—198.
9. Н. А. Шанин. О некоторых логических проблемах арифметики. «Труды Матем. ин-та АН СССР», т. 43, 1955.
10. Н. А. Шанин. О конструктивном понимании математических суждений. «Труды Матем. ин-та АН СССР», т. 52, 1958, стр. 226—311; Об алгорифме конструктивной расшифровки математических суждений, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, B. 4, стр. 293—303.
11. П. С. Новиков. О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств. «Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова», т. XXXIII, М., 1951, стр. 279—316.
12. А. А. Марков. Теория алгорифмов. «Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова», т. XLII, М.-Л., 1954.
13. См., например, сб. «Автоматы». М., 1956, статья «Вычислимость на вероятностных машинах», стр. 242—278.

А. С. Есенин-Вольпин

К ОБОСНОВАНИЮ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Введение

В настоящей статье рассматривается обоснование теории множеств, основанное на концепции, изложенной в [1] и названной нами *откровенной точкой зрения*. Основной особенностью этой точки зрения является допущение рассуждений о фактической *осуществимости* (например, число 10 является осуществимым, потому что до него можно досчитать, в то время как число триллион в этом смысле неосуществимо). Наряду с осуществимыми числами, можно мыслить и неосуществимые, отдавая себе, однако, отчет в их неосуществимости. Это отличает нашу точку зрения от *традиционной*, признающей лишь один вид осуществимости — так называемую «потенциальную осуществимость», благодаря чему различие между числами 10 и триллион считается «непринципиальным».

Понятие осуществимости рассматривается здесь как первоначальное неопределяемое понятие (хотя, конечно, можно ввести другое, более элементарное понятие «осуществления», через которое осуществимость выражается с помощью квантора существования). Ввиду новизны этого понятия при обращении с ним никакие правила логики не могут считаться убедительными a priori. Для того чтобы рассуждение было убедительным, необходимо, чтобы оно было понятным, доступным для восприятия, а для этого, в свою очередь, необходимо, чтобы оно было не слишком длинным, имело «осуществимую длину».

Что касается отдельных шагов рассуждения, то заключения по правилам интуиционистского исчисления предикатов с равенством [2] можно считать убедительными в тех случаях, когда они не слишком громоздки (связаны с рассмотрением не слишком длинных формул); точнее, следовало бы говорить здесь не об интуиционистском, а о минимальном исчислении, но мы увидим (разделы 2.1 и 3.150), что в интересующем нас случае принцип $A \& \neg A \supset B$ получает обоснование.

В [1] мы предлагали заменить принцип

(A) $A \& \neg A \supset B$

следующим, который казался нам более слабым:

(B) $A \vee \neg A \supset (\neg\neg A \supset A)$.

В действительности, в минимальном исчислении высказываний $A \& \neg A$ дает, с одной стороны, $\neg B$ — а значит, и $B \vee \neg B$, — а с другой стороны, $\neg\neg B$ и, если принять (B), дает B, так что (A) и (B) равносильны. Приведенное в [1, стр. 224] обоснование принципа (B) можно поэтому считать и обоснованием принципа (A). Причина, по которой мы здесь не довольствуемся этим обоснованием, состоит в том, что оно основано на отождествлении истинности с интуиционисткой доказуемостью и таком истолковании дизъюнкции в посылке импликации, на котором мы не желаем больше настаивать. В этой связи мы рассматриваем в разделе 2.1 аксиоматику минимального исчисления.

Традиционное понятие бесконечности является очевидной идеализацией неосуществимости. Неформализуемость нашего первоначального понятия осуществимости породила у нас надежду, что вторая теорема Гёделя (о недоказуемости непротиворечивости) не явится препятствием для проведения доказательства непротиворечивости теории множеств, основанного на этом понятии. В [1] мы попытались изложить такое доказательство. Основным допущением, или постулатом, являлась при этом гипотеза о существовании неосуществимых чисел.

Однако более внимательное изучение этого вопроса убедило нас в том, что наряду с этим постулатом мы должны использовать и другие, которые кажутся нам гораздо более дискуссионными. Как и всегда в таких случаях, постулаты можно выбирать различными способами. Возможна, например, версия, что одним из наименее очевидных постулатов является следующий (П): каково бы ни было слово P в алфавите $\{—\}$, если каждое вхождение буквы «—» в P заменить на «—» или на «+» по какому-либо закону (не обязательно допускающему традиционную формулировку!), то получится слово в алфавите $\{+, —\}$. Для постулата о существовании неосуществимых чисел можно найти арифметическую «нестандартную» модель (используя, например, второе доказательство теоремы 44 из Клини [2, § 75]). Только что высказанный постулат оказывается неверным в моделях такого рода, так что неформализуемость нашего доказательства непротиворечивости можно связывать и с ним. Наряду с этим постулатом мы в настоящей работе принимаем еще один малоубедительный постулат (3.1521), который можно заменить допущением об истинности всех предложений вида

$$\neg\neg A_1 \& \ldots \& \neg\neg A_n \supset \neg\neg(A_1 \& \ldots \& A_n).$$

В традиционной интуиционистской логике такие предложения доказуемы; однако при неосуществимом n мы не видим для них доказательства. Постулат (П) есть, по существу, постулат 6) работы [1], а 3.1521 — постулат (D) той же работы. В разделе 3.1 настоящей работы выполняется обещание, данное на стр. 261 работы [1] (строки 13—16 сверху).

Главное значение настоящей работы состоит в том, что она устанавливает связь между понятиями теории множеств и понятием осуществимости и переносит вопрос об обосновании теории множеств в такую область, в которой решение спорных вопросов представляется нам более возможным, чем в связи с канторовским понятием бесконечности.

Мы не считаем, что наше доказательство непротиворечивости (даже после того, как указанный выше пробел будет восполнен) явится полным решением проблемы обоснования теории множеств, прежде всего из-за трудностей, с которыми связано обоснование только что упомянутых постулатов. Правда, в 3.1622—3.1623 мы приводим доводы в пользу этих постулатов (кроме 3.1521), но мы не считаем их бесспорными, так как не можем отделаться от впечатления некоторой их вычурности. Возможно, что это впечатление рассеется со временем, а возможно и то, что оно укрепится, и это явится аргументом против теории множеств. Во всяком случае, благодаря наличию теоретико-множественной интерпретации введенных нами понятий и постулатов (см. раздел 3.17) мы уверены в том, что не постулировали ничего такого, что не было бы по существу свойственно теории множеств. В разделе 3.1624 мы показываем, что постулаты (П), 3.1521 и др. можно заменить чисто арифметическими постулатами, в частности принципом возвратной индукции для произвольных натуральных чисел. Во время подготовки рукописи к печати мы добавили раздел 3.2, в котором предлагаем новое обоснование всех наших допущений. Более подробно мы изложим это обоснование в другой работе.

Таким образом, откровенная точка зрения дает интерпретацию теории множеств (точнее, теории Цермело — Френкеля), так сказать, со всеми ее трудностями. Было бы самонадеянно с нашей стороны считать, что наша концепция свободна от принципиально спорных вопросов, но все же хочется указать на то, что до сих пор мы не приходили ни к каким нелепостям (несмотря на то, что встречались с их видимостью).

Даже если наше обоснование теории Цермело — Френкеля окажется убедительным (что может произойти не раньше, чем будет обоснована применимость допущения 3.1521 или постулатов из 3.1624), то этим еще не полностью решается вопрос об обосновании теории множеств в самой широкой его постановке. При такой постановке требуется указать, в каких случаях можно пользоваться принципом свертывания или, точнее, какие системы аксиом свертывания совместны между собой, а также с дополнительными аксиомами теории множеств — аксиомой объемности и аксиомой выбора. Кроме того, мы не видим никакого подхода к проблеме непротиворечивости куайновской системы New Foundations.

В § 4 мы излагаем относительное доказательство непротиворечивости аксиомы объемности. Для этого предварительно приходится построить, без помощи этой аксиомы, теорию порядковых чисел, являющуюся костяком теории Цермело — Френкеля. Развитие теории множеств без аксиомы объемности представляет, на наш взгляд, самостоятельный интерес. Если при наличии этой аксиомы множества соответствуют понятиям, причем множества, соответствующие эквивалентным понятиям, совпадают, то при отсутствии аксиомы объемности множества соответствуют скорее определениям понятий; кроме того, они могут при этом рассматриваться с «кратностью», что иногда бывает нужно.

В [1] мы наметили некоторое доказательство относительной непротиворечивости аксиомы объемности, использующее, однако, аксиому выбора. Заметим, что использованный там метод применим к доказательству относительной непротиворечивости аксиомы выбора в системе Цермело. Что касается гипотезы $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, то указанный метод применим также к доказательству относительной непротиворечивости этой гипотезы — по крайней мере в той системе аксиом, которая получается путем присоединения к системе Цермело аксиомы о существовании $\aleph_\alpha$ для всякого порядкового числа α (в смысле тех определений, которые даны Гёделем в [3]).

В § 4 настоящей работы мы даем относительное доказательство непротиворечивости аксиомы объемности, не связанное с аксиомой выбора. Нам, однако, не удалось обойтись без введения дополнительного функционального символа $\mathfrak{q}(x)$ и связанной с ним аксиомы С6. Мы надеемся в этой связи на появление обещанной в [4] работы Ганди. Что касается системы Цермело, то для нее наше относительное доказательство непротиворечивости аксиомы объемности не нуждается в символе $\mathfrak{q}(x)$.

Мы надеемся в дальнейшем посвятить специальное исследование аналогичному откровенному доказательству непротиворечивости систем, получающихся присоединением к системе Цермело — Френкеля аксиом о существовании недостижимых кардинальных чисел. Это существенно связано с рассмотрением нескольких понятий осуществимости, соответствующих различным субъектам (не считая «потенциальной осуществимости»). Множества достижимой ступени мы должны при этом рассматривать в откровенной модели типа N_z как множества, ступень которых осуществима для наиболее слабого из рассматриваемых субъектов. Добавляется постулат о том, что конечные множества различных мощностей не могут быть приведены во взаимно-однозначное соответствие никаким отношением, с какими бы понятиями осуществимости оно не было связано. Кроме того, если мы желаем вводить аксиомы о существовании трансфинитных последовательностей недостижимых кардинальных чисел, то мы должны постулировать мыслимость любого конечного числа субъектов, упорядоченных по силе. В связи с доказательством относительной непротиворечивости аксиомы объемности к сказанному ниже в § 4 следует добавить теорию кардинальных чисел, которая строится аналогично тому, как в [5], и некоторые теоремы, аналогичные теореме [6, стр. 82].

Нам не удалось избежать громоздкости в нумерации разделов и предложений. Мы поэтому советуем читателю обращать, по мере возможности, внимание только на последние две-три цифры этих номеров.

§ 1. Система Цермело — Френкеля

1.1. Понятие формулы.

Переменные: x, y, $z, \ldots$ и эти же буквы с индексами внизу: x_1, $y_1, \ldots$, x_2, $y_2, \ldots$.

Элементарные формулы: $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ и $\mathfrak{x} \in \mathfrak{y}$, где $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ — переменные (не обязательно различные).

Из элементарных формул при помощи логических операторов $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$, $\forall$ и $\exists$ обычным образом строятся *формулы*; для формул и встречающихся в них переменных обычным образом определяются понятия свободного и связанного вхождений переменных. Что касается деталей этих определений, то мы следуем соглашениям, принятым в книге Клини [2]; в частности, мы допускаем, что одна и та же переменная может входить в формулу и в свободном и в связанном виде, что квантор $\forall\mathfrak{x}$ или $\exists\mathfrak{x}$ встречается в формуле в области действия другого квантора с той же переменной $\mathfrak{x}$ и что переменная $\mathfrak{x}$ вовсе не встречается в области действия $\forall\mathfrak{x}$ или $\exists\mathfrak{x}$. Никаких переменных, кроме x, $y, \ldots$, именуемых *переменными множествами*, в рассматриваемой теории нет. Относительно употребления скобок мы придерживаемся соглашений Клини [2, § 17].

1.2. Постулаты.

1.21. Аксиомы и правила вывода классического исчисления предикатов.

В качестве этих постулатов мы выбираем постулаты 1—12 книги Клини [2, § 19]; при этом понятие «терм» означает для нас то же, что и «переменная», так что, например, аксиомы 10 и 11, которые мы будем называть *аксиомами Бернайса*, имеют вид:

$$\forall \mathfrak{x}\, A(\mathfrak{x}) \supset A(\mathfrak{y})$$

и

$$A(\mathfrak{y}) \supset \exists \mathfrak{x}\, A(\mathfrak{x}),$$

где $\mathfrak{y}$ — переменная, свободная для $\mathfrak{x}$ в $A(\mathfrak{x})$ (т. е. такая, что никакое свободное вхождение переменной $\mathfrak{x}$ в $A(\mathfrak{x})$ не встречается в области действия $\forall \mathfrak{y}$ или $\exists \mathfrak{y}$).

Понятие «формулы» относится при этом к формулам в смысле 1.1.

Правила 9 и 12 (правила навешивания кванторов $\frac{C \supset A(\mathfrak{x})}{C \supset \forall \mathfrak{x} A(\mathfrak{x})}$ и $\frac{A(\mathfrak{x}) \supset C}{\exists \mathfrak{x}\, A(\mathfrak{x}) \supset C}$, где C не содержит свободной переменной $\mathfrak{x}$) мы будем называть *правилами Бернайса* для $\forall$ или для $\exists$, соответственно.

1.22. Аксиомы равенства:

$=_1$. $\forall x(x = x)$,

$=_2$. $\forall x \forall y\, [x = y \supset y = x]$,

$=_3$. $\forall x \forall y \forall z\, [x = y \supset (y = z \supset x = z)]$,

$=_4$. $\forall x \forall y \forall z\, [x = y \supset (x \in z \supset y \in z)]$,

$=_5$. $\forall x \forall y \forall z\, [x = y \supset (z \in x \supset z \in y)]$.

Известно, что аксиомы $=_1$ — $=_5$ позволяют доказать всякую формулу вида

$=_\varphi$. $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} \supset (\varphi(\mathfrak{x}) \supset \varphi(\mathfrak{y}))$,

где $\varphi(\mathfrak{x})$ и $\varphi(\mathfrak{y})$ — формулы, получающиеся подстановкой $\mathfrak{x}$, соответственно $\mathfrak{y}$, вместо $\mathfrak{z}$ из некоторой формулы $\varphi(\mathfrak{z})$, в которой свободные вхождения переменной $\mathfrak{z}$ не встречаются в области действия квантора, связывающего переменную $\mathfrak{x}$ или $\mathfrak{y}$ (см. Клини [2, § 73, особенно теорема 41 (b)]).

С помощью $=_2$ мы получаем из $=_4$ и $=_5$:

$$=_4'\cdot \forall x \forall y \forall z\, [x = y \supset (x \in z \sim y \in z)],$$
$$=_5'\cdot \forall x \forall y \forall z\, [x = y \supset (z \in x \sim z \in y)].$$

1.23. Специальные аксиомы теории множеств.

Аксиома объемности:

C0. $\forall x \forall y\, [\forall z\, (z \in x \sim z \in y) \supset x = y]$.

Аксиомы существования множеств:

C1. $\forall x \forall y \exists z \forall u\, [u \in z \sim u = x \vee u = y]$ (аксиома пары),

C2. $\forall x \exists y \forall z\, [\exists u\, [z \in u \,\&\, u \in x] \supset z \in y]$ (аксиома объединения),

C3. $\forall x \exists y \forall z\, [\forall u\, [u \in z \supset u \in x] \supset z \in y]$ (аксиома степени).

Помимо этих трех аксиом, к аксиомам существования множеств относятся еще всевозможные формулы, получающиеся по нижеследующей *схеме подстановки* и называемые *аксиомами подстановки*. Введем предварительно следующее сокращение:

$$\mathrm{Un}^{\mathfrak{u}\mathfrak{w}}\, [\varphi(\mathfrak{u}, \mathfrak{w})] \sim_{Df} \forall \mathfrak{u} \forall \mathfrak{v} \forall \mathfrak{w}\, [\varphi(\mathfrak{u}, \mathfrak{w}) \,\&\, \varphi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \supset \mathfrak{u} = \mathfrak{v}],$$

где $\varphi(\mathfrak{u}, \mathfrak{w})$ — формула, получающаяся путем подстановки различных переменных $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{w}$ вместо $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$, соответственно, из некоторой формулы $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, в которой переменные $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ и $\mathfrak{w}$ не встречаются, а $\mathfrak{v}$ — переменная, отличная от $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{w}$.

Дальнейшее сокращение:

$$\mathrm{Un}_2^{\mathfrak{u}\mathfrak{w}}\, [\varphi(\mathfrak{u}, \mathfrak{w})] \sim_{Df} \mathrm{Un}^{\mathfrak{u}\mathfrak{w}}\, [\varphi(\mathfrak{u}, \mathfrak{w})] \,\&\, \mathrm{Un}^{\mathfrak{w}\mathfrak{u}}\, [\varphi(\mathfrak{u}, \mathfrak{w})].$$

Схема подстановки:

C4. $\forall\, \{\mathrm{Un}^{zt}\, [\varphi(z, t)] \supset \forall x \exists y \forall z\, [z \in y \sim \exists t\, [t \in x \,\&\, \varphi(z, t)]]\}$,

где $\varphi(z, t)$ — формула, не содержащая переменной y.

Пусть $\varphi(z)$ — какая-либо формула, не содержащая переменной y. Обозначим через $\varphi(z, t)$ формулу $z = t \,\&\, \varphi(z)$. Согласно C4, следующая формула получается из аксиомы подстановки путем откидывания кванторов общности:

$$\mathrm{Un}^{zt}\, [z = t \,\&\, \varphi(z)] \supset \forall x \exists y \forall z\, [z \in y \sim \exists t\, [t \in x \,\&\, z = t \,\&\, \varphi(z)]].$$

Посылка этой импликации легко доказывается при помощи аксиом $=_2$ и $=_3$. Поэтому доказуемо и ее заключение, которое при помощи эквивалентностей $\exists t\,[t \varepsilon x \,\&\, z = t \,\&\, \varphi(z)] \sim$ $\sim z \varepsilon x \,\&\, \exists t\,[z = t \,\&\, \varphi(z)] \sim z \varepsilon x \,\&\, \varphi(z)$ преобразуется к виду $\forall x \exists y \forall z\,[z \varepsilon y \sim z \varepsilon x \,\&\, \varphi(z)]$, откуда, навешивая кванторы общности, мы получаем:

CIV. $\quad \forall\,\{\forall x \exists y \forall z\,[z \varepsilon y \sim z \varepsilon x \,\&\, \varphi(z)]\}$

(где $\varphi(z)$ — произвольная формула, не содержащая переменной y). Всякая формула, получающаяся по схеме CIV, называется *аксиомой выделения*, а сама схема CIV — *схемой выделения*. Таким образом, схема выделения может быть выведена из схемы подстановки.

Аксиому подстановки, получающуюся согласно C4 для фиксированной формулы $\varphi(z, t)$, мы будем обозначать $C4^{zt}_{\varphi(z,t)}$, или, короче, $C4_{\varphi}$.

Аналогично аксиому выделения, получающуюся согласно CIV для фиксированной формулы $\varphi(z)$, мы будем обозначать $CIV^{z}_{\varphi(z)}$, или, короче, CIV_{φ}.

Нетрудно доказать, что аксиомы C0 и C3 позволяют заменить схему C4 двумя схемами — CIV и следующей *ослабленной схемой подстановки*:

CV. $\quad \forall\,\{\mathrm{Un}^{zt}_2\,[\varphi(z, t)] \supset \forall x \exists y \forall z\,[z \varepsilon y \sim \exists t\,[t \varepsilon x \,\&\, \varphi(z, t)]]\}$,

где $\varphi(z, t)$ — формула, не содержащая переменной y. Но в настоящей работе мы не будем пользоваться этим обстоятельством, так как вынуждены будем долгое время обходиться без аксиомы C0. (Заметим, что CIV может быть выведена вышеуказанным способом и из CV).

Аксиома бесконечности:

C5. $\exists w\;\; [\exists u (u \varepsilon w) \,\&\, \forall x\; [x \varepsilon w \supset \exists y\; [y \varepsilon w \,\&\, \forall z\; [z \varepsilon x \supset z \varepsilon y] \,\&\, \exists t\;\; [t \varepsilon y$ $\&\; \neg\, t \varepsilon x]]]]$

(«существует непустое множество w, которое вместе со всяким своим элементом x содержит некоторый элемент y, содержащий x в качестве правильного подмножества»).

Аксиомы CIV и C1 имеют вид $\forall\exists y\forall z[z\varepsilon y\sim\varphi(z)]$, где $\varphi(z)$ — формула, не содержащая переменной y (символ $\forall$, стоящий в начале этой формулы, означает *операцию замыкания*, т. е. связывания всех свободных переменных кванторами общности; ср. Клини [2, § 32]). Этот вид характерен для *аксиом свертывания*. Применяя к множеству y, существование которого утверждается аксиомами C2 и C3, соответственно, аксиому выделения, в которой в качестве $\varphi(z)$ выбрана формула $\exists u[z\varepsilon u\,\&\,u\varepsilon x]$ или, соответственно, $\forall u[u\varepsilon z\supset u\varepsilon x]$, мы получаем из C2 и C3 доказуемые формулы

C2˜. $\forall x\exists y\forall z[z\varepsilon y\sim\exists u[z\varepsilon u\,\&\,u\varepsilon x]]$

и

C3˜. $\forall x\exists y\forall z[z\varepsilon y\sim\forall u[u\varepsilon z\supset u\varepsilon x]]$,

имеющие вид аксиом свертывания. Можно доказать, что и аксиома C5 может быть приведена к такому виду (ср. Сколем [7]), на чем мы, однако, здесь не останавливаемся.

Формальная система, класс формул которой описан в 1.1, а постулатами служат 1.21, 1.22 и 1.23 (т. е. аксиомы видов C0 — C5), называется *системой Цермело — Френкеля* и обозначается через ZF. Заменяя в ней схему аксиом C4 более слабой схемой CIV, мы получаем *систему Цермело* Z.

1.3. И. Новак [8] доказала, что из непротиворечивости системы Цермело — Френкеля вытекает непротиворечивость системы Σ Гёделя [3]. (Новак не рассматривает «аксиому фундирования» D, имеющуюся в системе Σ, но давно известно, что для системы остальных аксиом Σ относительная непротиворечивость аксиомы D может быть доказана — см. Шепердсон [9, стр. 164—165].) Более того, всякое предложение φ системы ZF является в то же время предложением системы Σ и, как показал Мостовский [10], если φ доказуемо в Σ, то φ доказуемо в ZF, так что система Σ является лишь несущественным расширением системы ZF. Доказательства И. Новак и Мостовского опирались на теорию типов (которая, впрочем, содержится в ZF). Шёнфилд [11] дал финитное доказательство этих результатов.

Пользуясь откровенной точкой зрения, высказанной нами в [1], и опираясь на некоторые постулаты (см. Введение), мы докажем непротиворечивость системы ZF. Наше доказательство будет состоять из двух частей. Сперва мы докажем — при помощи откровенной точки зрения и упомянутых постулатов — непротиворечивость некоторой системы ZF^-, отличающейся от ZF, главным образом, отсутствием аксиомы объемности CO. Затем — уже традиционными методами — мы докажем относительную непротиворечивость системы ZF (относительно ZF^-)-

1.4. Системы ZF^- и Z^-.

1.41. Понятие формулы систем ZF^- и Z^- шире, чем понятие формулы систем ZF и Z. Именно, в системе ZF^- имеются два функциональных символа: двуместный функциональный символ $\{\mathfrak{r}\mathfrak{s}\}$, именуемый парой $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$ ($\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$ — какие-то термы) и одноместный функциональный символ $\mathfrak{q}(\mathfrak{r})$. В системе Z^- имеется только символ $\{\mathfrak{r}\mathfrak{s}\}$, так что понятие формулы в системе ZF^- шире, чем в системе Z^-.

Термы: 1. Переменные x, y, ... суть термы. 2. Если $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$ — термы системы ZF^- (системы Z^-), то $\{\mathfrak{r}\mathfrak{s}\}$ и $\mathfrak{q}(\mathfrak{r})$ суть термы ($\{\mathfrak{r}\mathfrak{s}\}$ есть терм) этой системы. 3. Всякий терм является таковым в силу пунктов 1. и 2.

Элементарные формулы: $\mathfrak{r} = \mathfrak{s}$ и $\mathfrak{r} \varepsilon \mathfrak{s}$, где $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$ — термы. Из элементарных формул систем ZF^- и Z^- при помощи перечисленных в 1.1 логических операторов строятся *формулы* этих систем. Для переменных и формул обычным образом определяются понятия свободного и связанного вхождений переменной, а также понятие: *терм* $\mathfrak{t}$ *свободен для переменной* $\mathfrak{x}$ в $A(\mathfrak{x})$ (т. е. свободные вхождения $\mathfrak{x}$ в $A(\mathfrak{x})$ не встречаются в области действия квантора $\forall\mathfrak{y}$ или $\exists\mathfrak{y}$, где $\mathfrak{y}$ — переменная, входящая в $\mathfrak{t}$; ср. Клини [2, § 18]). Для формул систем ZF^- и Z^- мы пользуемся прежними соглашениями, относящимися к употреблению скобок (ср. 1.1).

1.42. Постулаты.

1.421. Аксиомы и правила вывода классического исчисления предикатов.

Эти аксиомы формулируются так же, как в 1.2, только в применении к определенным в 1.41 понятиям формулы и терма; в частности, аксиомы Бернайса имеют вид $\forall\mathfrak{x} A(\mathfrak{x}) \supset A(\mathfrak{t})$ и $A(\mathfrak{t}) \supset \exists\mathfrak{x} A(\mathfrak{x})$, где $\mathfrak{t}$ — терм, свободный для $\mathfrak{x}$ в $A(\mathfrak{x})$.

1.422. Аксиомы равенства.

Мы теперь имеем аксиомы $=_1$ — $=_5$ и следующие две дополнительные аксиомы:

$=_6$. $\forall x \forall y \forall z (x = y \supset \{xz\} = \{yz\})$,
$=_7$. $\forall x \forall y \forall z (x = y \supset \{zx\} = \{zy\})$.

Мы не вводим аксиомы

$$\forall x \forall y (x = y \supset \mathfrak{q}(x) = \mathfrak{q}(y)),$$

так как она легко выводится из $=_5'$ и С6 (см. ниже). Согласно упомянутой теореме 41 (b) из Клини [2, § 73], из $=_1$ — $=_7$ и только что написанной формулы вытекает формула $=_\varphi$, где теперь $\varphi(\mathfrak{z})$ — любая формула системы ZF^-, в которой свободные вхождения $\mathfrak{z}$ не встречаются в области действия квантора, связывающего переменную $\mathfrak{x}$ или $\mathfrak{y}$.

1.423. Специальные аксиомы теории множеств:

С1а. $\forall x \forall y \forall u [u \varepsilon \{xy\} \sim u = x \vee u = y]$.

Аксиомы С2, С3 и С4 мы принимаем в том виде, как они были сформулированы выше, с той лишь разницей, что $\varphi(z, t)$ в С4 может теперь обозначать любую формулу теории ZF^-, не содержащую переменной y. Из С4 мы получаем, как выше, CIV, где теперь $\varphi(z)$ — произвольная формула системы ZF^-, не содержащая переменной y.

Дальнейшие сокращения:

$$\langle \mathrm{rs} \rangle =_{Df} \{\{\mathrm{r}\}\{\mathrm{rs}\}\},$$
$$\mathrm{Un}_2(f) \sim_{Df} \mathrm{Un}_2^{zt}(\langle zt \rangle \varepsilon f).$$

Аксиома бесконечности:

С5'. $\exists x \exists f \exists a [\mathrm{Un}_2(f) \,\&\, \forall u \forall v [\langle uv \rangle \varepsilon f \supset u \varepsilon x \,\&\, v \varepsilon x] \,\&\, \forall u [u \varepsilon x \supset \exists v [\langle vu \rangle \varepsilon f]] \,\&\, \forall u [\neg \langle au \rangle \varepsilon f] \,\&\, a \varepsilon x \,\&\, \forall u \forall v [u \varepsilon x \supset \neg v \varepsilon u]]$

(«существует множество x, которое допускает взаимно-однозначное отображение на свою правильную часть, не содержащую элемента a, осуществляемое некоторым множеством f упорядоченных пар; все элементы множества x пусты»).

C6. $\forall x \forall y [[y \varepsilon x \supset y \varepsilon \mathfrak{q}(x)] \& [\forall z (z \varepsilon x \sim z \varepsilon y) \supset \mathfrak{q}(x) = \mathfrak{q}(y)]]$.

Постулатами системы ZF^- являются 1.421, $=_1 - =_7$, C1a, C2, C3, C4, C5′ и C6, причем схема C4 описывается как указано выше, в этом разделе.

Постулатами системы Z^- являются 1.421, $=_1 - =_7$, C1a, C2, C3, C1V и C5′, причем схема C1V описывается как в разделе 1.23 с той лишь разницей, что теперь $\varphi(z)$ означает произвольную формулу системы Z^-, не содержащую переменной y.

1.43. В системах ZF^- и Z^- важную роль играет понятие равнообъемности:

$$x \approx y \sim_{Df} \forall z [z \varepsilon x \sim z \varepsilon y].$$

Схема подстановки системы ZF может быть принята в системе ZF^- либо в прежнем виде C4 (см. 1.423), либо в другой разновидности, отличающейся тем, что в определении $\mathrm{Un}\,\mathfrak{u},\mathfrak{w}\,[\varphi(\mathfrak{u}, \mathfrak{w})]$ «$=$» заменено на «$\approx$». Назначение символа $\mathfrak{q}(x)$ и аксиомы C6 в системе ZF^- состоит в том, чтобы эта разновидность схемы подстановки была выводима из C4. Только что указанная разновидность схемы подстановки участвует в доказательстве относительной непротиворечивости аксиомы объемности.

Согласно формулировке C5′ аксиомы бесконечности, существует бесконечное (в смысле Дедекинда) множество пустых множеств. Это уже не совместимо с аксиомой объемности C0, согласно которой пустое множество должно быть определено однозначно. Однако такое нарушение аксиомы объемности — только на пустых множествах — является не очень существенным.

Именно, рассмотрим следующую *ослабленную аксиому объемности*:

C0⁻. $\forall x \forall y [\exists t (t \varepsilon x) \& \forall z (z \varepsilon x \sim z \varepsilon y) \supset x = y]$.

Формула C0⁻ не находится — по крайней мере, в видимом — противоречии с аксиомой C5′. Присоединяя C0⁻ в качестве аксиомы к системам ZF^- и Z^-, получим системы, которые обозначим $ZF^{\pm}$ и $Z^{\pm}$.

Какое-либо из пустых множеств системы $ZF^{\pm}$ или $Z^{\pm}$ обозначим через 0, а остальные будем рассматривать как предметы, не являющиеся множествами. Иначе говоря, мы откажемся — в связи с системами $ZF^{\pm}$ и $Z^{\pm}$ — от содержавшегося в определении наших систем требования, что все рассматриваемые элементы являются множествами, и допустим рассмотрение «предметов, не являющихся множествами». Эти «предметы» мы будем называть *индивидуумами*, распространяя термин «предмет» на индивидуумы и множества. Иными словами, будем теперь называть переменные x, y, ... *переменными предметами*, и предмет x будем называть *множеством* только в том случае, если он непуст или равен 0, а все остальные предметы будем называть *индивидуумами*. В таком случае аксиома $C0^{-}$ является аксиомой объемности для множеств (так как имеется лишь одно «множество», равнообъемное 0, а именно 0); остальные аксиомы (оставляем пока в стороне аксиому C6) выражают утверждения существования множеств по существу таким же образом, как в системах ZF и Z. В силу C3 и $\mathrm{CIV}^{z}_{z\approx 0}$ существует множество Ind всех индивидуумов. Аксиоме C6 легко удовлетворить — достаточно в качестве $\mathfrak{q}(x)$ выбрать 0, если x является 0 или индивидуумом, и положить $\mathfrak{q}(x) = x$ в противном случае. Таким образом, функциональный символ $\mathfrak{q}(x)$ с аксиомой C6 можно исключить из системы $ZF^{\pm}$. Получающуюся при этом систему обозначим ZF'.

Пользуясь упомянутым результатом И. Новак [8] или Шёнфилда [11] (он относится к достаточно широкому классу формальных систем, содержащему, наряду с ZF, также систему ZF'), мы получим несущественное расширение Θ системы ZF', в котором, помимо предметов, имеются еще классы, как в системе Σ Бернайса — Гёделя [3]. Это — лишь вариант системы Мостовского [12] (в ней переменные предметы и множества не отождествляются, допускается, что Ind является «собственным классом» в смысле [3] и, кроме того, имеется аксиома фундирования). Из непротиворечивости системы Θ можно вывести непротиворечивость Σ, так же как из непротиворечивости ZF' можно вывести непротиворечивость ZF. Мы ниже будем рассматривать только системы без собственных классов, т. е. системы типа ZF, а не Σ, и не будем вдаваться в вопрос об аксиоме фундирования, поскольку последняя может быть присоединена без противоречия.

Аналогично из непротиворечивости системы Z^- можно вывести непротиворечивость Z, но здесь уже нельзя утверждать возможность присоединения аксиомы фундирования.

Что касается аксиомы бесконечности, то в каждой из систем $ZF^{\pm}$ и $Z^{\pm}$ C5 выводится из C5′. Аксиома C1 является очевидным следствием из C1a. Таким образом, функциональный символ $\{rs\}$ с аксиомами $=_6 - =_7$ можно исключить в системах $ZF^{\pm}$ и $Z^{\pm}$.

Высказанные в этом разделе утверждения будут рассмотрены подробнее в § 4.

1.5. Специальные аксиомы теории множеств в системах ZF^- и Z^-, по правилам классической логики, могут быть заменены следующими формулами, не содержащими символов «$\vee$» и «$\exists$»:

C1a$_\text{i}$. $\forall x \forall y \forall u\, [u \in \{xy\} \sim \neg(\neg\, u = x \,\&\, \neg\, u = y)]$.

C2$_\text{i}$. $\forall x \neg \forall y \neg \forall z\, [\neg \forall u \neg\, [z \in u \,\&\, u \in x] \supset z \in y]$,

C3$_\text{i}$. $\forall x \neg \forall y \neg \forall z\, [\forall u\, [u \in z \supset u \in x] \supset z \in y]$,

C4$_\text{i}$. $\forall\, \{\mathrm{Un}^{zt}[\varphi(z,t)] \supset \forall x \neg \forall y \neg \forall z [z \in y \sim \neg \forall t \neg\, [t \in x \,\&\, \varphi(z,t)]]\}$,

где $\varphi(z, t)$ — формула системы ZF^-, не содержащая символов «$\vee$» и «$\exists$» и переменной y;

CIV$_\text{i}$. $\forall\, \{\forall x \neg \forall y \neg \forall z\, [z \in y \sim z \in x \,\&\, \varphi(z)]\}$,

где $\varphi(z)$ — формула системы Z^-, не содержащая символов «$\vee$» и «$\exists$» и переменной y;

C5′$_\text{i}$. $\neg \forall x \neg\, \neg \forall f \neg\, \neg \forall a \neg\, [\mathrm{Un}_2(f) \,\&\, \forall u \forall v\, [\langle uv \rangle \in f \supset u \in x \,\&\, v \in x] \,\&\, \forall u\, [u \in x \supset \neg \forall v \neg\, (\langle vu \rangle \in f)] \,\&\, \forall u\, [\neg\, (\langle au \rangle \in f)] \,\&\, a \in x \,\&\, \forall u \forall v [u \in x \supset \neg\, v \in u]]$,

C6$_\text{i}$ (= C6). $\forall x \forall y\, [[y \in x \supset y \in \mathrm{q}(x)] \,\&\, [\forall z\, (z \in x \sim z \in y) \supset \mathrm{q}(x) = \mathrm{q}(y)]]$.

Формулы, получающиеся из C4$_\text{i}$ и CIV$_\text{i}$ при фиксированной формуле $\varphi(z, t)$ или $\varphi(z)$, мы будем обозначать $\mathrm{C4}^{zt}_{\mathrm{i}\,\varphi(z,t)}$ и $\mathrm{CIV}^{z}_{\mathrm{i}\,\varphi(z)}$, соответственно, или, короче, C4$_{\text{i}\varphi}$ и CIV$_{\text{i}\varphi}$.

Для системы ZF^- надо взять формулы C1a$_\text{i}$, C2$_\text{i}$, C3$_\text{i}$, C4$_\text{i}$, C5′$_\text{i}$ и C6$_\text{i}$, а для системы Z^- — формулы C1a$_\text{i}$, C2$_\text{i}$, C3$_\text{i}$, CIV$_\text{i}$

и $C5_1'$. Эти системы формул мы будем обозначать через C_{ZF^-} и C_{Z^-}, соответственно.

Всякое доказательство какой-либо формулы φ в теории ZF^- или Z' можно, пользуясь правилами классического исчисления предикатов, заменить выводом формулы φ из формул $=_1 - =_7$ и C_{ZF^-}, соответственно из формул $=_1 - =_7$ и C_{Z^-}, в классическом исчислении предикатов. В самом деле, каждая аксиома теории ZF^- или Z^- либо является аксиомой классического исчисления предикатов, либо одной из формул $=_1 - =_7$, либо эквивалентна одной из формул C_{ZF^-}, соответственно C_{Z^-} — в последнем случае существует вывод этой аксиомы ZF^- (Z^-) из формулы, содержащейся в C_{ZF^-} (в C_{Z^-}), так что, сочетая этот вывод с доказательством формулы φ в ZF^- (в Z^-), мы получаем вывод этой формулы из $=_1 - =_7$ и C_{ZF^-} (из $=_1 - =_7$ и C_{Z^-}) в классическом исчислении предикатов.

Рассмотрим теперь формулы

$$\neg\neg_= \cdot\ \forall x \forall y (\neg\neg\, x = y \supset x = y)$$

и

$$\neg\neg_\varepsilon \cdot\ \forall x \forall y (\neg\neg\, x \varepsilon y \supset x \varepsilon y).$$

Теорема 1.51. Если формула φ, не содержащая символов «$\vee$» и «$\exists$», доказуема в ZF^- (в Z^-), то она выводима в интуиционистском исчислении предикатов из формул $=_1 - =_7$, $\neg\neg_=$, $\neg\neg_\varepsilon$ и C_{ZF^-} (из $=_1 - =_7$, $\neg\neg_=$, $\neg\neg_\varepsilon$ и C_{Z^-}).

Доказательство. Пусть φ доказуема в ZF^- (в Z^-). По только что доказанному, существует вывод D формулы φ в классическом исчислении предикатов из формул $=_1 - =_7$ и формул системы C_{ZF^-} (системы C_{Z^-}).

Заменим в D каждую часть какой-либо формулы, имеющую вид $A \vee B$, на $\neg(\neg A \,\&\, \neg B)$, а каждую часть вида $\exists \mathfrak{x} A$ — на $\neg \forall \mathfrak{x} \neg A$. Каждое применение правил вывода, кроме правила Бернайса для $\exists$, перейдет при этом, очевидно, в применение того же правила вывода. Формулы $=_1 - =_7$ и φ, а также каждая из формул C_{ZF^-} (C_{Z^-}) при этом не изменятся.

Лемма 1.511. Если формула ψ системы ZF^- не содержит символов «$\vee$» и «$\exists$», то в интуиционистском исчислении предикатов формула $\neg\neg\psi \supset \psi$ выводима из $\neg\neg_=$ и $\neg\neg_\varepsilon$.

Эта лемма доказывается так же, как лемма 43а в книге Клини [2, § 81]; только вместо $\neg\neg s = t \supset s = t$ мы пользуемся теперь формулами $\neg\neg \mathfrak{x} = \mathfrak{y} \supset \mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ и $\neg\neg \mathfrak{x} \varepsilon \mathfrak{y} \supset \mathfrak{x} \varepsilon \mathfrak{y}$, вытекающими из $\neg\neg_{=}$ и $\neg\neg_{\varepsilon}$.

При помощи этой леммы, совершенно так же как в доказательстве теоремы 60 (c) книги Клини [2, § 81], доказывается, что каждая аксиома классического исчисления предикатов перейдет при описанной замене в формулу, выводимую в интуиционистском исчислении предикатов из $\neg\neg_{=}$ и $\neg\neg_{\varepsilon}$, и каждое применение правила Бернайса для $\exists$ заменится при помощи контрапозиции применением правила Бернайса для $\forall$ и леммы 1.511.

Таким образом, теорема 1.51 доказана.

Теорема 1.52. Если система ZF^- (система Z^-) противоречива, то в интуиционистском исчислении предикатов доказуема некоторая формула Impl, имеющая вид $\mathfrak{A} \supset \varphi \& \neg \varphi$, где $\mathfrak{A}$ — конъюнкция формул $\neg\neg_{=}$ и $\neg\neg_{\varepsilon}$, аксиом $=_1 - =_7$ и некоторых формул из C_{ZF^-} (из C_{Z^-}).

Доказательство. Пусть D — некоторое противоречие в системе ZF^- (в системе Z^-), т. е. вывод некоторой формулы вида $\varphi \& \neg \varphi$ в этой системе; без ограничения общности можно считать, что φ не содержит символов «$\vee$» и «$\exists$». Согласно теореме 1.51, в интуиционистском исчислении предикатов существует вывод формулы $\varphi \& \neg \varphi$ из формул $\neg\neg_{=}$, $\neg\neg_{\varepsilon}$, $=_1 - =_7$ и C_{ZF^-} (C_{Z^-}). В этом выводе участвует лишь конечное число формул. Обозначим через $\mathfrak{A}$ конъюнкцию формул $\neg\neg_{=}$, $\neg\neg_{\varepsilon}$, $=_1 - =_7$ и тех формул из C_{ZF^-} (из C_{Z^-}), которые участвуют в этом выводе: тогда $\varphi \& \neg \varphi$ выводима из $\mathfrak{A}$ в интуиционистском исчислении предикатов, и так как $\mathfrak{A}$ — замкнутая формула, то по теореме о дедукции формула $\mathfrak{A} \supset \varphi \& \neg \varphi$ доказуема в интуиционистском исчислении предикатов.

При помощи теоремы Гливенко ([13] или Клини [2, § 81, теорема 59]) легко доказывается следующая.

Теорема 1.53. Если формула вида $\neg A_1 \& \ldots \& \neg A_m \supset \neg B_1 \& \ldots \& \neg B_n$ или $\neg A_1 \& \ldots \& \neg A_m \sim \neg B_1 \& \ldots \& \neg B_n$ ($m, n \geqslant 1$) доказуема в классическом исчислении высказываний, то она доказуема и в интуиционистском исчислении высказываний.

Доказательство. Частным случаем рассматриваемой эквивалентности (при $m = 1$, $n = 2$) является всякая формула вида

1.531. $\neg\neg(A \& B) \sim \neg\neg A \& \neg\neg B$,

доказанная у Клини [2, § 26, *25]. Очевидно, достаточно рассмотреть только импликации указанного вида — и притом для случая $m = n = 1$, так как общий случай сводится к этому с помощью эквивалентностей $\neg A_1 \& \ldots \& \neg A_m \sim \neg\neg(\neg A_1 \& \ldots \& \neg A_m)$ и $\neg B_1 \& \ldots \& \neg B_n \sim \neg\neg(\neg B_1 \& \ldots \& \neg B_n)$, доказуемых, в свою очередь, при помощи формул вида $\neg\neg\neg A \sim \neg A$ (Клини [2, § 27, *49b]) и обобщения 1.531 на конъюнкции m, соответственно, n членов.

Итак, пусть формула $\neg A \supset \neg B$ доказуема в классическом исчислении высказываний: требуется доказать, что она доказуема в интуиционистском исчислении высказываний.

По теореме Гливенко, интуиционистски доказуема формула $\neg\neg(\neg A \supset \neg B)$; согласно теореме $\neg\neg(A \supset B) \vdash \neg\neg A \supset \neg\neg B$ интуиционистского исчисления высказываний (см. Клини [2, § 26, *23]), мы получаем отсюда $\neg\neg\neg A \supset \neg\neg\neg B$ и далее, согласно уже упомянутой теореме ($\vdash \neg\neg\neg A \sim \neg A$), $\vdash \neg A \supset \neg B$ в интуиционистском исчислении высказываний, что и требовалось доказать.

1.532. В интуиционистском исчислении высказываний доказуема всякая формула вида:

1.5320. $\neg(A \vee B) \sim \neg A \& \neg B$ (ср. Клини [2, § 27, *63]), или

1.5321. $\neg\neg(A \vee B) \sim \neg(\neg A \& \neg B)$.

Напомним еще, что 1.533. в интуиционистском исчислении высказываний

1.5330. $A \supset B \vdash \neg\neg A \supset \neg\neg B$ (дважды примененная контрапозиция),

1.5331. $\neg\neg B \supset B \vdash \neg\neg A \supset B \sim A \supset B$ (Клини [2, § 27, * 58 e]),

1.5332. $\vdash \neg\neg(A \supset B) \sim \neg\neg A \supset \neg\neg B$ (Клини [2, § 27, *60g—i]).

1.534. В интуиционистском исчислении предикатов доказуема всякая формула одного из следующих видов:

1.5340. $\exists x A(x) \supset \neg\forall x \neg A(x)$ (Клини [2, § 35, *83a]),

1.5341. $\neg\exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$ (Клини [2, § 35, *86]),

1.5342. $\neg\neg\exists x A(x) \sim \neg\forall x \neg A(x)$ (из 1.5341), 1.5343. $\neg\neg\forall x A(x) \supset \forall x \neg\neg A(x)$ (Клини [2, § 35, следствие из теоремы 17, Ib $\supset$ Ic$_1$]),

1.5344. $\neg\neg\forall x \neg\neg A(x) \sim \forall x \neg\neg A(x)$ (Клини [2, § 35, следствие из теоремы 17, Ic$_1 \sim$ Ic$_2$]),

1.5345. $\neg\neg\exists x A(x) \sim \neg\neg\exists x \neg\neg A(x)$ (Клини [2, § 35, следствие из теоремы 17, IIc$_1 \sim$ IIc$_2$]).

Теорема 1.54. В интуиционистском исчислении предикатов из формулы $\neg\neg_{\varepsilon}$ выводима каждая импликация $\neg\neg$C1a $\supset$ C1a$_\mathrm{i}$, $\neg\neg$C2 $\supset$ C2$_\mathrm{i}$, $\neg\neg$C3 $\supset$ C3$_\mathrm{i}$, $\neg\neg$C4$^{zt}_{\varphi(z,t)} \supset$ C4$^{zt}_{\mathrm{i}\,\varphi(z,t)}$, $\neg\neg$CIV$^{z}_{\varphi(z)} \supset$ CIV$^{z}_{\mathrm{i}\,\varphi(z)}$, $\neg\neg$C5$' \supset$ C5$'_\mathrm{i}$.

Доказательство. Будем говорить, что формула A *сильнее* B, если $\neg\neg_{\varepsilon} \vdash A \supset B$ в интуиционистском исчислении предикатов; в этом случае мы будем говорить также, что B *слабее* A.

Согласно 1.531, 1.5332 и 1.5321, область действия квантора $\forall u$ в C1a$_\mathrm{i}$ слабее, чем двойное отрицание области действия этого же квантора в C1a; трижды применяя 1.5343, получаем отсюда $\neg\neg_{\varepsilon}$, $\neg\neg$C1a $\vdash$ C1a$_\mathrm{i}$.

Согласно 1.5330, 1.5331 и 1.5342, область действия квантора $\forall z$ в C2$_\mathrm{i}$ слабее, чем область действия этого же квантора в C2; отсюда $\neg\neg_{\varepsilon}$, C2 $\vdash \forall x \exists y \forall z [\neg \forall u \neg [z \varepsilon u \,\&\, u \varepsilon x] \supset z \varepsilon y]$. Применяя 1.5330 (в форме: из C, $A \vdash B$ следует C, $\neg\neg A \vdash \neg\neg B$), 1.5343 и 1.5342, получаем теперь $\neg\neg_{\varepsilon}$, $\neg\neg$C2 $\vdash$ C2$_\mathrm{i}$.

Согласно 1.5343 и 1.5342, получаем $\neg\neg$C3 $\vdash$ C3$_\mathrm{i}$, и подавно $\neg\neg_{\varepsilon}$, $\neg\neg$C3 $\vdash$ C3$_\mathrm{i}$.

Согласно $A \vdash \neg\neg A$, 1.5332 и 1.5342, область действия квантора $\forall z$ в C4$^{zt}_{\mathrm{i}\,\varphi(z,t)}$ слабее, чем область действия этого же квантора в C4$^{zt}_{\varphi(z,t)}$; далее 1.5332, $\neg\neg\neg B \sim \neg B$, 1.5331 (или лемма 1.511, причем $\neg\neg_{=}$ не используется) 1.5343 и 1.5342 дают $\neg\neg_{\varepsilon}$, $\neg\neg$C4$^{zt}_{\varphi(z,t)} \vdash$ C4$^{zt}_{\mathrm{i}\,\varphi(z,t)}$.

Аналогично (но проще) доказывается $\neg\neg_{\varepsilon}$, $\neg\neg$CIV$^{z}_{\varphi(z)} \vdash$ CIV$^{z}_{\mathrm{i}\,\varphi(z)}$.

Из леммы 1.511 и 1.5340 вытекает, что область действия «$\neg$», стоящего в C5$'_\mathrm{i}$ после $\forall a$, слабее, чем область действия $\exists a$ в C5$'$; в C5$'_\mathrm{i}$ эта область действия находится в области действия четного числа отрицаний. Остальное следует из 1.5340.

Теорема 1.54 доказана.

(Заметим, что с помощью 1.5344 можно было бы удалить в $C5'_i$ двойные отрицания.)

§ 2. Модели M^t_n

Все рассуждения этого параграфа будут традиционными. Мы построим модели M^t_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$), в каждой из которых выполняются все аксиомы системы ZF^-, за исключением аксиомы $C5'$.

Сами по себе наши построения очевидны и достаточно хорошо известны — ср., например, Генцен [14]. Поэтому мы позволим себе опускать некоторые детали, но все же будем стараться не упустить из виду логические особенности и, в частности, достаточность минимального исчисления предикатов для всех доказательств этого параграфа.

2.1. Минимальное исчисление предикатов.

Это исчисление было впервые рассмотрено Иоганссоном [15]. Оно получается из интуиционистского исчисления предикатов, описанного у Клини [2], путем отказа от схемы аксиом 8^I: $\neg A \supset (A \supset B)$. Соответствующее исчисление высказываний также называется минимальным.

В минимальном исчислении доказуемы те и только те формулы исчисления высказываний (предикатов), которые могут быть выведены из постулатов исчисления высказываний (предикатов), не содержащих «$\neg$», и эквивалентностей вида $\neg A \sim A \supset f$, где f — неопределенное фиксированное высказывание (не содержащее свободных переменных).

Многие формулы интуиционистского исчисления высказываний могут быть доказаны и в минимальном исчислении, и аналогично для исчисления предикатов. Так, из числа формул *1—*99, рассматриваемых Клини [2, §§ 26, 27, 32, 33, 35], для минимального исчисления нам не удалось доказать только *49c, *59a, *61a, *48, *43, *47, *54, *53 и *44 (импликация справа налево),— которые, впрочем, заведомо не могут быть доказаны, а также *51b, импликации справа налево в *60d, *60g и *61b и импликации слева направо в *60e, *60f, относительно которых нам известно только, что все они могут быть выведены из *51b. В следствии из теоремы 17 (Клини [2, § 35]) утверждения а) и b) сохраняют силу и для минимального исчисления; относительно утверждения с) мы ничего сказать не можем.

Из рассмотренных в разделе 1.5 предыдущего параграфа утверждений для минимального исчисления сохраняют силу 1.531, 1.5320, 1.5321, 1.5330, 1.5331, 1.5340—1.5345. Теоремы 1.53 и 1.5332 теряют силу (но для 1.5332 сохраняется импликация слева направо).

Особо отметим сохранение для минимального исчисления интуиционистского принципа контрапозиции $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$ или $(A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg A)$, закона $A \supset \neg\neg A$ и утверждений 1.5341 (Клини [2, § 35, *86]) и 1.5342. Утверждения положительного исчисления высказываний или предикатов (то есть исчислений, получающихся из *рассматриваемого нами* интуиционистского исчисления удалением символа «$\neg$» с относящимися к нему аксиомами), конечно, сохраняют силу и для минимального исчисления — таковы известные утверждения об алгебраических свойствах $\supset$, & и $\vee$, правила выноса высказываний за кванторы, известные теоремы о дистрибутивности кванторов и т. п.

Единственная схема аксиом минимального исчисления, содержащая «$\neg$»,

2.110. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$,

может быть заменена двумя схемами:

2.111. $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$

и

2.112. $\neg (A \,\&\, \neg A)$,

в чем мы вскоре убедимся при помощи теоремы о дедукции (которая верна и для минимального исчисления).

Из 2.111 при помощи теоремы о дедукции мы получаем:

2.113. $\neg A \supset (A \supset \neg B)$

или

2.1131. $A \,\&\, \neg A \supset \neg B$.

В самом деле, $A \vdash B \supset A$ и 2.111 дает $A \vdash \neg A \supset \neg B$, откуда вытекает 2.113 и 2.1131.

Докажем теперь, что 2.110 получается из 2.111 и любого частного случая

2.112a. $\neg (C \,\&\, \neg C)$

предложения 2.112, где C — доказуемая формула.

В самом деле, из $A \supset B$ и $A \supset \neg B$ мы получаем $A \supset B \& \neg B$, и так как $B \& \neg B \supset \neg C$ в силу 2.1131, то мы получаем далее $A \supset \neg C$. С другой стороны, коль скоро C доказуемо, то доказуемо и $A \supset C$, а потому $A \supset B$ и $A \supset \neg B$ дают $A \supset C \& \neg C$, откуда далее, по 2.111, мы получаем $\neg(C \& \neg C) \supset \neg A$ и, в силу 2.112a, $\neg A$.

Заметим теперь, что вместо 2.112 мы могли бы взять контрапозицию в другой форме:

2.111a. $(A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg A)$[1].

2.111 и 2.111a дают 2.110.

В самом деле, $(C \supset C) \& \neg (C \supset C) \supset \neg (C \supset C)$, откуда, согласно 2.111a, $(C \supset C) \supset \neg ((C \supset C) \& \neg (C \supset C))$. Так как $C \supset C$ доказуемо, то доказуемо и $\neg((C \supset C) \& \neg(C \supset C))$; эту формулу можно выбрать в качестве 2.112a, так как $C \supset C$ доказуемо.

Укажем еще, что вместо 2.111a можно принять

2.111b. $B \supset \neg\neg B$.

В самом деле, $B \supset \neg \neg B \vdash (\neg \neg B \supset \neg A) \supset (B \supset \neg A)$ и так как, согласно 2.111, $(A \supset \neg B) \supset (\neg \neg B \supset \neg A)$, то $B \supset \neg \neg B \vdash (A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg A)$.

2.12. Наш интерес к минимальному исчислению связан с тем обстоятельством, что постулат

8^1 $\neg A \supset (A \supset B)$,

или эквивалентный ему

2.121. $A \& \neg A \supset B$,

не допускает, как нам кажется, непосредственного интуиционистского обоснования на основе какой-либо естественной интерпретации «$\supset$» и «$\neg$». Утверждение $A \& \neg A$ не может быть выполнено, и потому неясно, должно ли выполняться B в случае его выполнения. Часто тут прибегают к различным соглашениям, которые влекут за собой истинность рассматриваемого постулата, но эти соглашения несколько извращают смысл логической операции «$\supset$», которая в известном смысле является одной из первичных операций нашего ума.

---

[1] Уже после того, как эта статья была написана, автору стало известно, что в [21] (§ 26, стр. 147, упражнение 26.21) указывается на возможность заменить схему аксиом 2.110 одной схемой 2.111a. Заметим, что из 2.111a можно получить 2.111, для чего достаточно вывести 2.111 b, а это можно сделать при помощи формулы $(\neg B \supset \neg B) \supset (B \supset \neg \neg B)$, имеющей вид 2.111a.

При обычной интерпретации $\neg A$ как $A \supset f$, где f — некоторое фиксированное высказывание (замкнутая формула), постулат 2.121 (а значит, и 8^{I}) выполняется, если доказуема всякая формула вида

2.122. $f \supset B$.

В самом деле, $A \& \neg A$ есть в этом случае $A \& (A \supset f)$, что дает f и, в силу 2.122, B, так что по теореме о дедукции имеем 2.121.

2.1221. Заметим теперь, что во многих теориях достаточно выбрать в качестве f формулу $\forall x \forall y (x = y)$ для того, чтобы 2.122 было выводимо из схемы $\neg A \sim A \supset f$ для любой формулы B. Именно, достаточно, чтобы это имело место для любой элементарной формулы B, потому что тогда, если C есть $C_1 \supset C_2$, $C_1 \& C_2$, $C_1 \vee C_2$, $C_1 \supset f$, $\forall \mathfrak{x} C_1$ или $\exists \mathfrak{x} C_1$, и для C_1 и C_2 формулы $f \supset C_1$ и $f \supset C_2$ доказуемы, то доказуема и формула $f \supset C$ (в чем предоставляем убедиться читателю), так что 2.122 будет верно (в силу индукции) и для любой формулы B.

2.1222. Далее, для того чтобы 2.122 было доказуемо для любой элементарной формулы какой-либо теории при выборе формулы $\forall x \forall y (x = y)$ в качестве f, достаточно, чтобы в этой теории был всего один вид первоначальных переменных, соблюдались аксиомы равенства и для каждого первоначального предикатного символа $P(x_1, \ldots, x_n)$ была доказуема формула $\exists x_1 \ldots \exists x_n P(x_1, \ldots, x_n)$. В самом деле, тогда легко доказывается формула $f \supset P(x_1, \ldots, x_n)$ для всякого такого $P(x_1, \ldots, x_n)$. (Для функциональных символов никакого дополнительного постулата только что указанного вида не требуется ввиду доказуемости $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$, а значит и $\exists y (f(x_1, \ldots, x_n) = y)$; переменные $x_1, \ldots, x_n$ здесь можно связать кванторами существования). Это утверждение сохраняет силу и в том случае, когда кроме переменных $x, y, \ldots$, имеется еще один вид первоначальных переменных: $\alpha, \beta, \ldots$, причем доказуемы все утверждения вида $\forall x \varphi(x) \supset \forall \alpha \varphi(\alpha)$ и $\exists \alpha \varphi(\alpha) \supset \exists x \varphi(x)$ (ср. 3.1511 ниже).

В частности, рассматриваемые в этой статье системы ZF и ZF^-, а также Z и Z^-, удовлетворяют этому условию, что, впрочем, для нас несущественно. Арифметика (в том виде, как она рассматривается у Клини [2]) также ему удовлетворяет, так как в ней есть лишь один вид переменных, аксиомы равенства соблюдаются и, кроме «=», нет первоначальных предикатов.

Конечно, в качестве f можно выбрать и всякую другую формулу, эквивалентную $\forall x \forall y (x = y)$, с сохранением только что доказанного утверждения о доказуемости формул вида 2.122. В частности, в обычной арифметике, о которой только что шла речь, формула $\forall x \forall y (x = y) \sim 0 = 1$ доказуема (импликация слева направо очевидна; с другой стороны, из $0 = 1$ получаем $a = a + 0 = a + 1 = a'$, откуда далее $a = 0 \supset a' = 0$ и по индукции $\forall x (x = 0)$, откуда затем $\forall x \forall y (x = y)$ в силу свойств «=».) Таким образом, при обычной интерпретации отрицания $\neg A$ как $A \supset 0 = 1$ арифметика, основанная на минимальном исчислении предикатов, оказывается равносильной арифметике, основанной на интуиционистском исчислении предикатов. Но это доказательство не является чисто логическим и не распространяется на произвольные системы, содержащие арифметику, в частности на ее метатеорию.

2.13. До сих пор мы рассматривали теории, содержащие лишь один вид отрицания, которое мы обозначили посредством $\neg A$ и пытались интерпретировать как $A \supset f$. Будем теперь считать, что в рассматриваемой теории имеется два вида отрицания: $\overline{A}$ и $\neg A$, причем для первого из них имеет место минимальный постулат

2.131. $(A \supset B) \supset ((A \supset \overline{B}) \supset \overline{A})$

или равносильные ему в своей совокупности постулаты

2.1311. $(A \supset B) \supset (\overline{B} \supset \overline{A})$

и

2.1312. $\overline{A \& \overline{A}}$,

а второе мы по-прежнему будем интерпретировать как $A \supset f$, где f — произвольное предложение (т. е. замкнутая формула, если речь идет о формальном представлении теории), такое, что доказуема формула

2.132. $\overline{f}$

и, кроме того, доказуема каждая формула вида

2.133. $f \supset B$,

где B — элементарная формула теории.

В таком случае доказуема каждая формула вида

2.134. $f \supset B$,

где B — произвольная формула теории. Доказательство происходит совершенно так же, как в 2.1221, только надо включить в рассмотрение случай, когда C есть формула $\overline{C}_1$ и $f \supset C_1$ доказано. В этом случае из $f \supset (C_1 \supset f)$ мы получаем при помощи контрапозиции $f \supset (\bar{f} \supset \overline{C}_1)$, т. е. $f \supset (\bar{f} \supset C)$, далее $\bar{f} \supset (f \supset C)$ и, в силу 2.132, $f \supset C$.

Таким образом, и при наличии отрицания $\overline{A}$, удовлетворяющего постулату 2.131 или постулатам 2.1311 и 2.1312, для того чтобы иметь 2.134 — и тем самым $A \,\&\, \urcorner A \supset B$, коль скоро $\urcorner A$ интерпретируется как $A \supset f$,— достаточно выбрать в качестве f формулу $0 = 1$, если только формула $\overline{0 = 1}$, которую мы будем также обозначать $0 \neq 1$, доказуема (заметим, что в этом случае доказуема и формула $\overline{\forall x \forall y (x = y)}$ — в силу контрапозиции и $\forall x \forall y (x = y) \supset 0 = 1$).

Кроме того, в качестве f можно выбрать любую замкнутую формулу, такую, что доказуемы $f \supset 0 = 1$ и $\bar{f}$.

2.14. Мы хотим теперь добиться того, чтобы в качестве f можно было выбрать формулу вида $\overline{A}$, где A — доказуемая формула; для этого мы будем считать, что отрицание формулы A в арифметике записывается в виде $\overline{A}$, причем логическими постулатами служат постулаты минимального исчисления предикатов, а арифметические аксиомы выбраны таким же образом, как у Клини [2, § 19, группа аксиом B], с дополнительной аксиомой

2.141. $\forall a (a \neq 0 \,\&\, a < 2 \supset a = 1)$;

здесь, как и ниже, $a \neq 0$ означает $\overline{a = 0}$, $\mathrm{r} < \mathrm{s}$ есть сокращение для $\exists c (\mathrm{r} + c' = \mathrm{s})$, 1 — сокращение для $0'$ и 2 — для $0''$. Из 2.141 мы получаем $0 \neq 0 \,\&\, 0 < 2 \supset 0 = 1$; и, так как формула $0 < 2$ доказуема (ввиду $0 + 1' = (0 + 1)' = (0 + 0')' = (0 + 0'') = 0'' = 2$), то мы получаем

2.142. $0 \neq 0 \supset 0 = 1$.

Отсюда следует, что в качестве f можно выбрать формулу $0 \neq 0$, так как $\overline{\overline{0 = 0}}$ доказуема (с помощью $A \supset \overline{\overline{A}}$ и $0 = 0$).

2.15. Докажем теперь, что при наличии аксиомы 2.141

(и вообще в случае, если формула 2.141 доказуема) для любой формулы A арифметики доказуема формула

2.151. $\overline{A} \sim \neg A$,

коль скоро $\neg B$ рассматривается как сокращение для $B \supset 0 \neq 0$ (какова бы ни была формула B).

Доказательство. a) Докажем $\overline{A} \supset \neg A$, т. е. $\overline{A} \supset (A \supset 0 \neq 0)$. Но эта формула имеет вид $\overline{A} \supset (A \supset \overline{B})$, а потому доказуема в минимальном исчислении (2.113). b) Докажем $\neg A \supset \overline{A}$. $\neg A$ есть $A \supset 0 \neq 0$, которая по контрапозиции дает $\overline{0 \neq 0} \supset \overline{A}$: $\neg A \vdash \overline{\overline{0 = 0}} \supset \overline{A}$, откуда $\vdash \overline{\overline{0 = 0}} \supset (\neg A \supset \overline{A})$, и так как $\overline{\overline{0 = 0}}$ доказуема (см. конец 2.14), то доказуема и формула $\neg A \supset \overline{A}$.

Отсюда следует теорема:

2.152. Если формула 2.141 доказуема в системе формальной арифметики, основанной на минимальном исчислении предикатов и содержащей аксиомы арифметики, рассматриваемые в § 19 книги Клини [2, § 19, аксиомы 13 – 21] (причем отрицание формулы A записывается в виде $\overline{A}$), то в этой системе доказуема каждая формула вида $\overline{A} \sim A \supset 0 \neq 0$, а также каждая формула вида

$$\overline{A} \supset (A \supset B),$$

так что для рассматриваемой системы справедливы все постулаты интуиционистского исчисления предикатов.

В дальнейшем для систем, о которых шла речь в 2.152, мы будем отождествлять A и $\neg \overline{A}$ и писать $\neg A$. Для метатеории системы, о которой идет речь в 2.152, постулат $\overline{A} \supset (A \supset B)$ может нарушаться. Но если метатеория (основанная на минимальном исчислении предикатов) содержит саму рассматриваемую арифметическую теорию и в ней доказуема формула 2.141, то, согласно 2.113 или 2.1131, в ней доказуемо утверждение $A \,\&\, \overline{A} \supset 0 \neq 0$, где A — любое утверждение метатеории, а значит, и $A \,\&\, \overline{A} \supset B$, где A — любое утверждение метатеории, а B — любая формула арифметики.

Из того, что было сказано в этом разделе, мы делаем вывод, что принятие аксиомы 2.141 делает возможными все интуиционистские рассуждения в арифметике, формализующиеся в интуиционистском исчислении предикатов — хотя бы первоначальной логической основой служило минимальное исчисление предикатов.

2.2. Приступаем к построению модели M_n^t , которая фактически была уже рассмотрена нами в [1]. Начнем с эвристической конструкции, которая и была изложена в [1]. Во всех рассуждениях этого раздела мы пользуемся лишь такими методами, которые формализуются в интуиционистском исчислении предикатов, если не оговорено противное.

2.21. Рассмотрим алфавит A_n, состоящий из букв:

$$(,), a_0, \ldots a_n \quad (n \geqslant 0).$$

Указанный порядок букв мы будем называть *алфавитным*; для слов в алфавите A_n естественным образом (лексикографически) устанавливается *алфавитный порядок*. Если слово x предшествует в этом порядке слову y, мы будем писать $\mathrm{Al}(x, y)$. Совпадение слов x и y мы будем обозначать посредством $x = y$. Равенство слов удовлетворяет обычным постулатам равенства. Справедливы утверждения:

2.111. Для любых слов x и y в алфавите A_n, $x = y$, или $\mathrm{Al}(x, y)$, или $\mathrm{Al}(y, x)$.

2.212. Если $\mathrm{Al}(x, y)$ и $\mathrm{Al}(y, z)$, то $\mathrm{Al}(x, z)$.

2.213. Каково бы ни было слово x в алфавите A_n, неверно $\mathrm{Al}(x, x)$: $\overline{\mathrm{Al}(x, x)}$.

Число вхождений букв в слово мы будем называть *длиной* этого слова. Каждая буква есть слово длины 1. Мы будем считать, что для любых двух данных букв алфавита A_n можно распознать, совпадают они или нет (очевидно, это соглашение относится только к допустимым способам задания вхождений буквы). Поэтому индукцией по наибольшей из длин данных слов x и y можно доказать:

2.214. Каковы бы ни были слова x и y в алфавите A_n, $x = y$ или $x \neq y$ (перечеркнутое равенство «$x \neq y$» означает то же, что и «$\overline{x = y}$»).

При помощи 2.211 и 2.214 индукцией по m доказывается:

2.215. Каковы бы ни были слова $w_1, \ldots, w_m$ в алфавите A_n, из них можно выбрать максимальную систему попарно различных слов и расположить их в алфавитном порядке.

Буквы «a_0» и «a_1» мы будем иногда обозначать посредством «+» и «—», соответственно. Другими словами, мы полагаем по определению:

2.216. $+ = a_0$;

2.2160. $- = a_1$.

Для + и — имеет место:

2.217. $\overline{+} = -$

или, согласно 2.151, (ср. ниже: 2.23 и 3.1500).

2.2171. $\neg + = -$.

2.22. Определим теперь индуктивно следующие понятия: *множество*, *элемент*, отношение принадлежности ε и *ступень* множества.

1. Слова: ( ), $a_0, a_1, \ldots, a_n$ называются *пустыми множествами*. Всякое пустое множество есть *множество* и имеет *ступень* 0.

2. Пусть $m_1, \ldots, m_r$ $(r > 0)$ — *множества*, попарно различные и расположенные в алфавитном порядке, и пусть натуральные числа $s_1, \ldots, s_r$ будут, соответственно, их *ступенями*. Тогда слово m, равное $(m_1 \ldots m_r)$, является *множеством ступени* $s = \max(s_1, \ldots, s_r) + 1$. Слова $m_1, \ldots, m_r$ являются *элементами* m, что записывается в виде: $m_i \varepsilon m$ $(i = 1, \ldots, r)$.

3. Слово m является множеством ступени $s \geqslant 0$ и $p \varepsilon m$ только в том случае, если это следует из пунктов 1. и 2. настоящего определения.

Мы будем говорить, что определенные таким образом множества и отношение принадлежности, а также функция ступени образуют *модель* M_n^t.

Опуская в пункте 2. слова «попарно различные и расположенные в алфавитном порядке», мы получим определение более широкого понятия, которое назовем *квазимножеством*. Остальные термины — элемент, ступень и отношение ε — мы сохраним и для этого случая.

Согласно 2.215,

2.221. Для всякого квазимножества, все элементы которого являются множествами, существует множество, состоящее в точности из тех же элементов, что и данное квазимножество.

Это множество определено однозначно для всякого квазимножества указанного вида. Процесс построения этого множества для данного «квазимножества множеств» мы будем называть *нормализацией* этого квазимножества.

2.222. Имеет место следующий принцип индукции: (I_t). Если некоторое предложение P верно для всех пустых множеств модели M_n^t и если из того, что оно верно для каждого из множеств $m_1, \ldots, m_r\,(r > 0)$ этой модели, попарно различных и расположенных в алфавитном порядке, следует, что оно верно для множества $(m_1 \ldots m_r)$, то это предложение P верно для каждого множества модели M_n^t.

Аналогичный принцип (I_t') верен и для определений понятий и функций по индукции.

Аналогичные принципы индукции верны и для квазимножеств.

Индукция (I_t) позволяет, в частности, доказать интуиционистски, что

2.2221. Всякое множество модели M_n^t пусто или непусто.

2.223. Мы считаем известной *операцию* PQ *сочленения* слов P и Q в алфавите A_n, которая состоит в выписывании слова PQ; операция эта ассоциативна. Мы уже пользовались этой операцией при определении множества. Если слово R имеет вид PQ, то слово P называется *началом* слова R, и притом собственным началом, если слово Q непусто. Всякое представление слова T в виде PQR мы называем *вхождением* слова Q в T (слова P и R могут быть и пустыми). Мы говорим, что вхождение QaR буквы a в слово P $(= QaR)$ лежит в P *левее* вхождения SbT буквы b в это же слово, если Q является собственным началом S; в этом случае мы говорим также, что второе вхождение лежит в P *правее* первого. Из ассоциативности сочленения следует, что это отношение транзитивно и антисимметрично; можно доказать, что из любых двух вхождений букв в слово P одно лежит в P левее другого. Если вхождение a^* лежит в P левее, чем вхождение b^*, а последнее — левее, чем вхождение c^*, то мы говорим, что вхождение b^* лежит в P *между* вхождениями a^* и c^*. Далее, вхождение QVR слова V в слово QVR вместе с вхождением $P(QVR)S$ слова QVR в слово $PQVRS$ *порождает* вхождение $(PQ)V(RS)$ слова V в слово $PQVRS$. Легко доказать (пользуясь ассоциативностью сочленения), что если вхождение a^* лежит в R левее, чем вхождение b^*, то первое из этих вхождений вместе с вхождением QRS слова R в слово $P = QRS$ порождает вхождение, которое лежит в P левее того, которое порождает b^* вместе с вхождением QRS слова R в P, а также, что если слово P имеет вид $QRSTU$, то всякое вхождение в R порождает вместе с вхождением $(Q)R(STU)$ слова R в P вхождение, которое левее любого вхождения, порожденного вхождением в T и вхождением $(QRS)T(U)$ слова T в P. Если слово P имеет вид $QRSTU$, то мы будем говорить, что слово R лежит в P *левее*, чем T; легко видеть, что для случая, когда R и T — буквы, это согласуется с прежним определением, и что если R и S — вхождения букв в P, то R лежит в P левее, чем S. Всякое вхождение буквы a в слово PQR порождается вхождением этой буквы в одно из слов P, Q, R и вхождением этого слова в PQR. Если a — буква, то никакая буква, отличная от a, не входит в a.

Пустое слово Λ мы считаем однозначно определенным; для любого слова P в A_n имеет место $\Lambda P = P\Lambda = P$.

Если слово aP равно слову aQ, то и слово P равно слову Q; аналогично из $Pa = Qa$ следует $P = Q$.

Перечисленными понятиями и утверждениями мы будем свободно пользоваться в дальнейшем, не заботясь об их происхождении.

2.224. Принцип индукции (I'_l) позволяет установить следующее соответствие между скобками, входящими в множество:

1. В пустом слове ( ) вхождения скобок *соответствуют* друг другу.

2. Для всякого непустого слова $m = (m_1 \ldots m_r)$ и любого его элемента m_i, всякие *соответствующие* друг другу вхождения скобок в m_i вместе с вхождением m_i в m порождают *соответствующие* друг другу вхождения скобок в m.

3. Вхождение крайней левой и крайней правой скобки в произвольное непустое слово $m = (m_1 \ldots m_r)$ *соответствуют* друг другу в m.

4. Вхождения скобок в множества только в том случае *соответствуют* друг другу, если это следует из пунктов 1.—3. настоящего определения.

Индукция (I_l) позволяет доказать, что для каждого вхождения скобки любого множества в этом слове имеется соответствующее вхождение и что из двух соответствующих вхождений скобок в множество более левое (в этом множестве) является вхождением левой скобки «(», а другое — вхождением правой скобки «)».

Кроме того, при помощи (I_t) доказывается

2.2241. Соответствие, установленное нашим определением между скобками множества, взаимно-однозначно.

2.2242. Если $(_1,)_1$ и $(_2,)_2$ суть пары соответствующих вхождений скобок в множество m и $(_1$ лежит в m левее, чем $(_2$, то$)_1$ лежит в m правее, чем$)_2$.

2.225. В модели M_n^t мы определим теперь следующие две функции $\{xy\}$ и $\mathfrak{q}(x)$:

2.2251. Пусть x и y — два множества; согласно 2.214, они равны или нет. Если $x = y$, мы полагаем $\{xy\} = (x)$. Если же $x \neq y$, то, согласно 2.211, $\mathrm{Al}(x, y)$ или $\mathrm{Al}(y, x)$. В первом из этих случаев мы полагаем $\{xy\} = (xy)$, а во втором — $\{xy\} = (yx)$.

Легко видеть, что во всяком случае $\{xy\}$ есть множество.

2.2252. Индукцией по s легко доказывается, что существует не более чем $\overbrace{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}^{s+1}{}^{n+2}$ множеств, ступень которых $\leqslant s$. Располагая их в алфавитном порядке и заключая в скобки полученное слово, мы получим множество всех множеств модели M_n^t, ступень которых $\leqslant s$.

Пусть x — произвольное множество, и s — его ступень. Через $\mathfrak{Q}(x)$ мы обозначим множество всех множеств модели M_n^t, имеющих ступень $\leqslant s$.

2.2253. Определим еще следующую функцию x^+ на множествах модели M_n^t.

Пусть x — любое множество модели M_n^t. Согласно 2.2221, x пусто или непусто. Если x непусто, мы полагаем $x^+ = x$. Если x пусто, то согласно 2.214 $x = (\,)$ или $x \neq (\,)$. В случае $x = (\,)$ мы полагаем $x^+ = x$. В случае $x \neq (\,)$, x равно одной из букв $a_i\,(i = 0, \ldots, n)$. В случае, если $i \neq n$, мы полагаем $x^+ = a_{i+1}$. В случае, если $i = n$, мы полагаем $x^+ = a_0$.

Легко видеть, что x^+, во всяком случае, является множеством и что функция x^+ является взаимно-однозначным соответствием. (Мы не утверждаем, что каждое множество модели M_n^t является значением функции x^+ и не будем этим пользоваться.)

2.226. Докажем для модели M_n^t справедливость утверждений $=_1 - =_7$, $\neg\neg_=$, $\neg\neg_\varepsilon$ и всех утверждений C_{ZF^-}, за исключением $C5_1'$.

2.2261. Справедливость $=_1 - =_7$ вытекает из справедливости аксиом равенства для слов, которые были нами приняты в 2.21.

2.2262. $x = y \vee x \neq y$ вытекает из 2.214. Согласно теореме $\vee A \vee \neg A \supset (\neg\neg A \supset A)$ интуиционистского исчисления высказываний (Клини [2, § 27, *49c]), отсюда следует $\neg\neg x=y \supset x=y$. Навешивая кванторы $\forall y$ и затем $\forall x$, мы получаем $\neg\neg_=$.

2.2263. Множество x является элементом множества y в том и только в том случае, если $x \neq y$ и имеется вхождение слова x в слово y, не лежащее в y между какими бы то ни было вхождениями в y соответствующих скобок, отличных от крайней левой и крайней правой скобок слова y.

Отсюда мы получаем алгорифм для распознавания того, является ли множество x элементом множества y. Именно, сперва следует рассмотреть все вхождения слов в y и, пользуясь 2.214, определить для каждого из них, является ли оно вхождением слова x в y. (При этом мы пользуемся тем, что для всякого слова P имеется лишь конечное число вхождений слов в P; индукцией по длине l слова P можно доказать, что это число не превышает $(l+1)^2$.) Затем для каждого вхождения x в y мы рассматриваем всевозможные соответствующие вхождения в y пар скобок — число таких вхождений, очевидно, не превосходит длины слова y — и для каждой такой пары вхождений, отличной от вхождений крайних скобок в y, решаем вопрос, лежит рассматриваемое вхождение в y между этими соответствующими вхождениями скобок или нет.

Это рассуждение является интуиционистским в том смысле, что оно относится к интуиционистской математике. Мы не утверждаем, что оно формализуется в интуиционистском исчислении предикатов, так как, помимо шагов, формализующихся в этом исчислении, оно связано еще с построением алгорифма.

Мы заключаем:

2.2264. Для любых множеств x и y, $x\varepsilon y \vee \neg x\varepsilon y$.

Отсюда, как и в 2.2262, мы получаем $\neg\neg x\varepsilon y \supset x\varepsilon y$ и далее — $\neg\neg_\varepsilon$.

2.2265. Определим следующую функцию $\mathfrak{S}(x)$ на множествах x модели M_n^t. Пусть x — произвольное множество этой модели. Согласно 2.2221, x пусто или непусто. Если x пусто, полагаем $\mathfrak{S}(x) = (\ )$. Если x непусто, то имеется лишь конечное число множеств, являющихся элементами элементов x (это следует хотя бы из того, что все эти множества являются элементами множества $\mathfrak{Q}(x)$). Располагая эти множества в алфавитном порядке и заключая полученное множество в скобки, мы получим множество, которое примем за значение функции $\mathfrak{S}(x)$.

(Легко видеть, что эта операция для непустого множества x сводится к устранению из x всех пустых элементов и соответствующих вхождений пар скобок, отличных от крайних скобок слова x и не лежащих между какими-нибудь соответствующими скобками, отличными от крайних — с последующей нормализацией получающегося при этом квазимножества.)

Из определения $\mathfrak{S}(x)$ следует, что всякий элемент z множества t, являющегося элементом x, является элементом $\mathfrak{S}(x)$:

$$\forall z\, [\exists t\, (z\varepsilon t \,\&\, t\varepsilon x) \supset z\varepsilon\mathfrak{S}(x)].$$

Так как всякий элемент $\mathfrak{S}(x)$ является элементом некоторого элемента x, то ступень всякого элемента $\mathfrak{S}(x)$ меньше, чем ступень некоторого элемента x, и тем самым меньше, чем ступень x; из определения ступени и свойств функции max вытекает, что ступень $\mathfrak{S}(x) \leqslant$ ступени x. (В действительности, в модели M_n^t ступень $\mathfrak{S}(x) =$ (ступень x) — 1.)

2.2266. Определим следующую функцию $\mathfrak{P}(x)$ на множествах x модели M_n^t. Пусть x — произвольное множество этой модели Для каждого множества y этой модели можно определить, имеет ли место утверждение $\forall z\,(z\varepsilon y \supset z\varepsilon x)$, которое мы будем обозначать также посредством $y \subseteq x$. В самом деле, всякий элемент z множества y является подсловом слова y (т. е. словом, входящим в y), а мы видели в 2.2263, что число подслов слова длины l не превосходит конечного числа $(l+1)^2$; кроме того, согласно 2.2263, имеется метод распознавания для каждого $z\,(\varepsilon y)$, верно ли, что $z\varepsilon x$; применяя этот метод к каждому элементу y (рассматривая эти элементы в алфавитном порядке), мы получаем метод распознавания того, верно ли $y \subseteq x$. Итак, $y \subseteq x \vee \urcorner\, y \subseteq x$ для любого слова y.

С другой стороны, из определений элемента и ступени, а также свойств функции max, мы заключаем, что при $y \subseteq x$ ступень множества y не превышает ступени множества x. Поэтому, согласно определению $\mathfrak{Q}(x)$, y является элементом множества $\mathfrak{Q}(x)$. Множество $\mathfrak{P}(x)$ мы определим теперь путем следующей конструкции: рассматривая один за другим (в алфавитном порядке) элементы y множества $\mathfrak{Q}(x)$, выпишем подряд те из них, для которых, согласно алгорифму предыдущего абзаца, $y \subseteq x$; получится слово, длина которого не превышает длины слова $\mathfrak{Q}(x)$. Это полученное слово мы заключим в скобки, и результат обозначим через $\mathfrak{P}(x)$.

Из построения — и предыдущего рассуждения о том, что из $y \subseteq x$ следует $y \varepsilon \mathfrak{Q}(x)$ — вытекает, что если $y \subseteq x$, то $y \varepsilon \mathfrak{P}(x)$.

Так как каждый элемент y множества $\mathfrak{P}(x)$ является элементом $\mathfrak{Q}(x)$, то, в силу определения ступени и свойств max, ступень $\mathfrak{P}(x) \leqslant$ ступени $\mathfrak{Q}(x) =$ ступени $x+1$. В действительности, ступень $\mathfrak{P}(x) =$ ступень $x+1$.

2.23. Все построения и рассуждения предыдущего раздела 2.22 могут быть отображены в интуиционистской арифметике. Именно, множества модели M_n^t можно следующим образом взаимно-однозначно отобразить на некоторые натуральные числа. Пустому множеству ( ) сопоставим число 1; каждому из пустых множеств a_i $(i = 0, \ldots, n)$ мы сопоставим i-е простое число p_i. Если $m_1, \ldots, m_r$ — попарно различные множества модели M_n^t, расположенные в алфавитном порядке, и им сопоставлены натуральные числа $n_1, \ldots, n_r$, то множеству $(m_1, \ldots, m_r)$ мы сопоставим натуральное число $p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r}$.

Легко видеть, что отношение Al, отношение принадлежности и следующие функции: ступень x, $\{xy\}$, $\mathfrak{S}(x)$, $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{Q}(x)$ и x^+, могут быть соответствующим образом определены для этих арифметических образов модели M_n^t. Таким образом, получится арифметическая модель для теории множеств, которую мы будем обозначать AM_n^t.

Утверждения $=_1 - =_7$, $\neg\neg_=$, $\neg\neg_\varepsilon$, $C1a_i$, $C2_i$, $C3_i$, $C4^{zt}_{i\varphi(z,t)}$, $CIV^z_{i\varphi(z)}$ и C6 отображаются при этом в утверждения, которые можно доказать в интуиционистской арифметике, пользуясь определениями только что перечисленных функций (в арифметике им соответствуют некоторые примитивно-рекурсивные функции).

Формализуемость этих доказательств в интуиционистской формальной арифметике, описанной у Клини [2], следует из того, что в этой системе могут быть отображены все определения по рекурсии (причем теорема об устранимости описаний также имеет в ней место).

В силу результатов раздела 2.1 вместо интуиционистского исчисления предикатов при этом можно пользоваться минимальным при условии, что утверждение 2.141 принято в качестве аксиомы. Таким образом, применение логического принципа $A \& \neg A \supset B$ при интуиционистском рассмотрении модели M_n^t является несущественным (если принять утверждение 2.141).

Можно было бы указать утверждение, относящееся к модели M_n^t и играющее роль 2.141, но мы не желаем здесь этим заниматься. (Ср., однако, раздел 3.15).

§ 3. Модели N_z и M_z

Допустим, что теория ZF^- противоречива. Тогда, согласно теореме 1.52, в интуиционистском исчислении предикатов доказуема некоторая формула Impl вида $\mathfrak{A} \supset \varphi \& \neg \varphi$, где $\mathfrak{A}$ — конъюнкция формул $\neg\neg_{=}$, $\neg\neg_{\varepsilon}$, аксиом $=_1$ — $=_7$ и некоторых формул из C_{ZF^-}.

Я излагаю теперь соображения, в силу которых указанная ситуация приводит к противоречию, если стоять на откровенной точке зрения и принять некоторые постулаты. До 3.155 мы не будем предполагать теорию ZF^- противоречивой.

3.1. Согласно откровенной точке зрения, каждому мыслящему субъекту S доступны не все натуральные числа. Под этим следует понимать, что для каждого субъекта S имеются числа, до которых S не в состоянии досчитать. Кроме того, убедительность математического рассуждения для мыслящего субъекта S зависит не только от убедительности отдельных шагов, но и от способности субъекта S воспринять это рассуждение в целом.

В дальнейшем под субъектом S будет подразумеваться произвольный субъект, который мыслит в соответствии с некоторыми перечисленными ниже правилами. Без ограничения общности читатель может подразумевать под субъектом S себя самого.

3.11. Допустим, что S начинает счет: ноль, один, два... с намерением не кончать его до тех пор, пока не наступит полное изнеможение. Интуитивно ясно, что до некоторого числа N субъект досчитать не в силах. (Конечно, эта интуиция отлична от той, которая до сих пор применялась в традиционной математике, в которой постулировалась осмысленность и справедливость «абстракции потенциальной осуществимости» (Марков [16, 17]). Интуиция, о которой тут идет речь, есть интуитивное понимание каждым ограниченности его возможностей.) Однако не существует наибольшего числа, до которого может досчитать S. Правда, начав считать, он в конце концов прервет счет на некотором конкретном числе, но это число не было предопределено заранее, и усилием воли S мог бы заставить себя продлить счет на один шаг, каково бы ни было это число. (Мы, конечно, предполагаем, что S находится в условиях, в которых никто не вынуждает его закончить счет в определенный момент, так что фактором, вынуждающим его прекратить счет, служит только усталость.)

S понимает, что имеются числа, до которых он не может досчитать. Те числа, до которых он может досчитать, он называет *осуществимыми*; мы также будем называть их *осуществимыми* (*для* S).

3.12. Хотя субъект S и в состоянии мыслить себе неосуществимые числа, он вовсе не считает убедительным все то, что о них доказывается в традиционной математике. В частности, он не признает убедительным способ доказательства по индукции потому, что этот способ доказательства основан на возможности применить любое число раз правило modus ponens, чего S совершить не в силах.

3.13. Субъект S считает, что те действия над натуральными числами и другими финитными объектами, определения которых он в состоянии понять, можно производить над произвольными натуральными числами и финитными объектами,— коль скоро мыслим автомат, выполняющий эту работу.

О результатах этих действий S мыслит в соответствии с их определениями; иначе говоря, определения любых действий, доступных автомату, служат для S постулатами. При этом субъект S мыслит себе эти действия и их результаты с помощью обозначений — функциональных символов и постоянных символов, обозначающих числа или финитные объекты, не обязательно такие, которые S в состоянии построить. Если субъект S в состоянии выразить число или финитный объект при помощи некоторых функциональных символов, выражающих какие-либо операции, и постоянных символов, выражающих фиксированные (может быть, неопределенным образом) числа или объекты, то данное число или финитный объект S — и мы вместе с ним — называет *осуществимым относительно* этих операций и финитных объектов (или соответствующих им функциональных и постоянных символов).

3.14. Субъект S мыслит в соответствии со следующей интерпретацией логических символов:

3.141. Если A и B — два предложения, безразлично к какой области относящиеся, то $A \supset B$ обозначает: A немыслимо без B, т. е. «в предположении A, я должен принять B».

В соответствии с этой интерпретацией субъект S признает убедительным каждое применение правила modus ponens: $A,\ A \supset B \vdash B$, а также признает убедительным каждое предложение вида $A \supset (B \supset A)$ или $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$, коль скоро он обнаруживает, что рассматриваемые предложения имеют указанный вид.

3.142.
3.143. $A \& B$ означает: «A и B»; $A \vee B$ означает «A или B».

В соответствии с этой интерпретацией субъект S признает убедительной каждую аксиому интуиционистского исчисления высказываний, имеющих один из видов 3 — 6 (Клини [2, § 19]), коль скоро он в состоянии обнаружить, что рассматриваемое предложение имеет такой вид.

3.144. Субъект S понимает предложение $\bar{A}$ как «предложение A необходимо отвергнуть». Если A немыслимо без B и B необходимо отвергнуть, то субъект S считает необходимым отвергнуть и предложение A, в связи с чем он принимает принцип контрапозиции: $(A \supset B) \supset (\bar{B} \supset \bar{A})$ в предположении, что он в состоянии установить, что рассмотренное предложение имеет указанный вид. Кроме того, для некоторого доказанного предложения C, например, для $+=+$, субъект S принимает 2.112а — $\overline{C \mathbin{\&} \overline{C}}$. Согласно 2.11, отсюда следует, что S принимает и постулат $(A \supset B) \supset ((A \supset \bar{B}) \supset \bar{A})$ минимального исчисления высказываний.

3.145.
3.146. Кванторы субъект S мыслит естественным образом: $\forall \mathfrak{x} A(\mathfrak{x})$ [$\exists \mathfrak{x} A(\mathfrak{x})$] означает: для всякого $\mathfrak{t}$ [для некоторого $\mathfrak{t}$], относящегося к области изменения переменной $\mathfrak{x}$, справедливо предложение $A(\mathfrak{t})$.

При этом область изменения переменной $\mathfrak{x}$ может быть определена различными способами, в частности как область всех натуральных чисел или же финитных объектов другого рода, например, слов в алфавите A_n или множеств модели M_n^t при некотором n, а также как область всех осуществимых чисел или финитных объектов, осуществимых относительно некоторых финитных объектов и операций над ними.

Субъект S признает справедливость $\forall \mathfrak{x} A(\mathfrak{x})$ в том и только в том случае, если ему известен довод, в силу которого $A(\mathfrak{t})$ имеет место для любого $\mathfrak{t}$ из области изменения переменной $\mathfrak{x}$.

Субъект S признает справедливость $\exists \mathfrak{x} A(\mathfrak{x})$ в том и только в том случае, если ему известно $\mathfrak{t}$ из области изменения переменной $\mathfrak{x}$ и относящееся к этому $\mathfrak{t}$ убедительное для него доказательство утверждения $A(\mathfrak{t})$. Слова «ему известно $\mathfrak{t}$» означают, что субъект S построил объект $\mathfrak{t}$ или некоторое определяющее $\mathfrak{t}$ обозначение.

Для этих интерпретаций кванторов легко обосновываются обычные постулаты квантификации. Мы будем поэтому считать, что каждое применение аксиомы или постулата квантификации субъект S считает для себя убедительным, коль скоро он может констатировать, что налицо такое применение.

Таким образом, субъект S мыслит логические операции в соответствии с правилами минимального исчисления предикатов. При этом он мыслит их себе таким образом, безотносительно к тому, какую область или теорию он рассматривает. Однако из того, что он должен согласиться с каждым шагом некоторого рассуждения, еще не следует убедительность для него всего этого рассуждения. В самом деле, последнее может оказаться слишком длинным и попросту недоступным для S.

3.147. Мы будем считать также, что субъект S понимает идею совпадения двух объектов и признает в связи с этим обычные постулаты равенства.

Что касается арифметических принципов, то субъект S признает, что 0 не следует ни за каким числом и что из $a + 1 = b + 1$ следует $a = b$ (тем самым, мы считаем, что субъект S мыслит операцию прибавления единицы).

Кроме того, мы будем считать, что субъект S признает справедливым утверждение 2.141. Тем самым, как установлено в разделе 2.1, S признает убедительным всякое предложение вида 2.151, коль скоро он в состоянии установить, что оно имеет этот вид.

Следовательно, в отношении предложений арифметики субъект S мыслит отрицание вида $\neg A$ и, как доказано в 2.1, справедливость принципа $A \& \neg A \supset B$ для этого отрицания. Итак, в отношении арифметических предложений субъект S считает убедительным каждый постулат интуиционистского исчисления предикатов, коль скоро он констатирует наличие этого постулата.

В частности, если рассматривается модель AM_n^t, то субъект S мыслит о ней, в соответствии с только что сделанной оговоркой, по правилам интуиционистского исчисления предикатов.

Принцип индукции во всей общности, как мы уже отмечали, является спорным. Однако мы примем дополнительное соглашение, в силу которого принцип:

$$3.1471. \quad A(0) \& \forall\bar{\beta}\,(A(\bar{\beta}) \supset A(\bar{\beta}+1)) \supset \forall\bar{\beta}\,A(\bar{\beta})$$

является убедительным, коль скоро областью изменения переменной $\bar{\beta}$ служат осуществимые числа — по крайней мере для тех предложений $A(\bar{\beta})$, которые нам придется рассматривать.

Именно, мы будем считать, что S ведет свой счет не просто произнося друг за другом слова «ноль, один, два, . . .», но вставляя между ними следующие «заклинания»: ноль, $A(0)$; один — и из $A(0) \& \forall\bar{\beta}\,(A(\bar{\beta}) \supset A(\bar{\beta}+1))$ я получаю $A(0)$ и $A(0) \supset A(1)$, значит, $A(1)$; два — из $A(1)$ и $\forall\bar{\beta}\,(A(\bar{\beta}) \supset A(\bar{\beta}+1))$ я получаю $A(1)$ и $A(1) \supset A(2)$, значит, $A(2)$; три — . . .» Ясно, что таким образом S не может досчитать до $n+1$, не доказав $A(n)$. Кроме того, произнося более длинные «заклинания», относящиеся не к одному предложению $A(\bar{\beta})$, но к нескольким: $A_1(\bar{\beta}), \ldots, A_q(\bar{\beta})$, субъект S мог бы вести счет таким образом, чтобы применимость индукции по осуществимым числам была очевидной для этих предложений.

Конечно, необходимость произносить «заклинания» уменьшает счетные возможности S, но по-прежнему невозможно указать наибольшее число, до которого в состоянии досчитать S. Это условие — что S произносит «заклинания», связанные с предложениями $A_1(\bar{\beta}), \ldots, A_q(\bar{\beta})$, — мы будем называть *регламентацией* субъекта S (относительно $A_1(\bar{\beta}), \ldots, A_q(\bar{\beta})$). Предположение о существовании неосуществимого числа после введения регламентации становится еще очевиднее.

Определения посредством индукции по осуществимым числам могут быть обоснованы аналогичным образом при помощи регламентации субъекта S.

3.15. Субъект S мыслит себе модель M_n^t для любого числа n (это еще не означает, что он согласен со всеми утверждениями, которые можно традиционным путем доказать относительно этой модели). Ему понятен смысл определений понятий множества, элемента, принадлежности и ступени.

Каково бы ни было n, субъект S согласен с тем, что существуют функции $\{xy\}$, $\mathfrak{S}(x)$, $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{Q}(x)$ и x^+, описанные в 2.225, 2.2265, 2.2266, 2.2252 и 2.2253.

Субъект S согласен с утверждением о пустоте каждого из множеств $(\ )$, $a_0, \ldots, a_n$ модели M_n^t.

Субъект S рассуждает о понятиях модели M_n^t по правилам интуиционистского исчисления предикатов. Обоснование минимального исчисления предикатов для субъекта S было намечено в разделе 3.14. Что же касается дополнительного интуиционистского принципа $A \& \neg A \supset B$, то мы или пользуемся соображениями, изложенными в разделе 2.3 (т. е. считаем, что модель M_n^t мыслится субъектом S в виде модели AM_n^t, указанной в разделе 2.3, что служит обоснованием принципа $A \& \neg A \supset B$ в рассуждениях субъекта S об этой модели), или же вместо этого считаем, что

3.150. Субъект S мыслит модель M_n^t, построенную из слов алфавита A_n, как указано в 2.2; при этом он принимает утверждения 2.211—2.215, определения множества, ступени и элемента; принципы (I_t) и (I'_t) и все утверждения раздела 2.223.

Если к предложениям, перечисленным в 2.223, добавить существование операции подстановки $S^{A_1 \ldots A_m}_{\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_m} P \mid$ слов $A_1, \ldots, A_m$ вместо всех вхождений букв $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ в P со свойствами [2]

$$S^{A_1 \ldots A_m}_{\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_m} P_1 {}^\frown \ldots {}^\frown P_s \mid = S^{A_1 \ldots A_m}_{\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_m} P_1 \mid {}^\frown \ldots {}^\frown S^{A_1 \ldots A_m}_{\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_m} P_s \mid,$$

$$S^{A_1 \ldots A_m}_{\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_m} \mathfrak{a} \mid = \mathfrak{a}, \text{ если } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}_m \text{ и } \mathfrak{a} \text{ — буква},$$

$$S^{A_1 \ldots A_m}_{\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_m} \mathfrak{a}_i \mid = A_i \ (i = 1, \ldots, m),$$

$$S^{A_1 \ldots A_m}_{\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_m} \Lambda \mid = \Lambda,$$

а также предложение: $P_1 {}^\frown \ldots {}^\frown P_m = \Lambda$ в том и только в том случае, когда $P_1 = \Lambda, \ldots, P_m = \Lambda$ или $m = 0$, то легко доказать, что из $\Lambda \neq \Lambda$ следует $P = \Lambda$ для любого слова P в алфавите A_n. (В самом деле, $S^{\Lambda \ldots \Lambda}_{\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_m} P \mid = \Lambda$ очевидно. Но так как вместо каждой буквы слова P подставляется при этом *непустое* слово Λ (в силу $\Lambda \neq \Lambda$), то число букв m слова P равно 0, т. е. $P = \Lambda$).

Так как из $P = \Lambda$ и $Q = \Lambda$ следует $P = Q$, то это означает, что $\Lambda \neq \Lambda$ влечет равенство друг другу двух любых слов и, в частности, двух любых множеств. В таком случае из $x \varepsilon y$ для каких-либо множеств x и y модели M^t_n (например, из $x \varepsilon \{x\}$) следует (в силу $u = x$ и $v = y$) $u \varepsilon v$ для любых двух множеств этой модели.

Итак, формулы $x = y$ и $x \varepsilon y$ вытекают из $\Lambda \neq \Lambda$, так что если рассматривать теорию модели M^t_n и в качестве f выбрать формулу $\Lambda \neq \Lambda$, то будут верны утверждения 2.132 и 2.133; согласно 2.134, всякая формула этой теории будет следовать из этой формулы f. Поэтому наши добавочные предложения влекут за собой справедливость принципа $A \& \neg A \supset B$ в модели M^t_n.

3.1500. Мы будем поэтому считать, что субъект S в рассуждениях о модели M^t_n — при любом n — признает убеди-

[2] $P_1 {}^\frown P_2$ обозначает операцию сочленения, т. е. образования слова $P_1 P_2$ из слов P_1 и P_2.

тельным каждый постулат интуиционистского исчисления предикатов, коль скоро он констатирует наличие этого постулата; при этом $\neg A$ интерпретируется всегда как $A \supset \Lambda \neq \Lambda$.

Кроме того, субъект согласен со справедливостью утверждений

$$3.1501.\ x = y \vee \neg x = y$$

и

$$3.1502\ x \varepsilon y \vee \neg x \varepsilon y,$$

откуда по правилам интуиционистского исчисления предикатов получается

$$3.1503.\ \neg\neg x = y \supset x = y$$

и

$$3.1504.\ \neg\neg x \varepsilon y \supset x \varepsilon y$$

и далее $\neg\neg_=$ и $\neg\neg_\varepsilon$.

3.151. Модели N_n и M_n.

Мы будем считать, что в связи с каждой моделью M_n^t субъект S рассматривает модель N_n, определенную следующим образом.

Множеством модели N_n, короче N_n-множеством, называется всякое пустое множество ( ) или a_i с осуществимым индексом i, а также всякое непустое множество.

Это определение основано на 2.2221. Переменные N_n-множества обозначаются в дальнейшем $\alpha, \beta, \ldots$; $\alpha \varepsilon \beta$ для двух N_n-множеств, по определению, означает, что $\alpha \varepsilon \beta$ справедливо в модели M_n^t.

Множеством модели M_n, короче M_n-множеством, называется всякое пустое множество ( ) или a_i с осуществимым индексом i, а также всякое непустое множество осуществимой ступени. Переменные множества модели M_n будут обозначаться также α, $\beta, \ldots$; так как всегда будет ясно, идет ли речь о модели M_n и N_n, это не может привести к путанице. $\alpha \varepsilon \beta$ для M_n-множеств означает, что $\alpha \varepsilon \beta$ справедливо в модели M_n^t.

Пусть φ — произвольная формула теории ZF^-. Ее переменные обозначены латинскими буквами. Заменяя эти латинские буквы греческими так, чтобы одинаковые буквы заменялись всюду одинаковыми, а различные — различными, мы получим некоторое выражение φ_α, которое мы будем называть *α-формуу-*

лой, соответствующей φ. Очевидно, что это соответствие между φ и φ_α сохраняет логические операции.

Так как модель N_n (а также M_n) составляет часть модели M_n^t, то очевидна справедливость утверждений вида

3.1511. $\forall x \varphi(x) \supset \forall \alpha \varphi(\alpha)$ и $\exists \alpha \varphi(\alpha) \supset \exists x \varphi(x)$.

Кроме того, если из $\Lambda \neq \Lambda$ следует равенство двух любых слов в A_n, то интуиционистский принцип $A \,\&\, \neg A \supset B$ справедлив и для моделей N_n и M_n. (См. замечание 2.1222).

Поэтому мы будем считать, что субъект S в рассуждении о моделях N_n и M_n признает убедительным всякое применение постулата интуиционистского исчисления предикатов, которое ему удается констатировать.

Наряду с α-формулами, выражающими предложения модели N_n (или M_n), мы будем пользоваться *смешанными формулами* (сокращенно, C-формулами), в которых участвуют как переменные $x, y, \ldots$, означающие множества модели M_n^t, так и переменные $\alpha, \beta, \ldots$, а также обозначения для конкретных M_n^t-множеств (множеств модели M_n^t). Иначе говоря, элементарные C-формулы имеют вид $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ или $\mathfrak{x} \varepsilon \mathfrak{y}$, где $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ — переменные из алфавита $x, y, \ldots$ или $\alpha, \beta, \ldots$ или обозначения для множеств модели M_n^t; из элементарных C-формул с помощью логических операторов $\supset, \&, \vee, \neg, \forall \mathfrak{x}, \exists \mathfrak{x}$ (где $\mathfrak{x}$ — любая переменная из алфавита $x, y, \ldots$ или $\alpha, \beta, \ldots$) обычным путем строятся C-формулы.

3.152. Субъект S согласен со справедливостью следующих утверждений:

3.1521. $\forall z (z \varepsilon x \supset \neg \neg F(z)) \supset \neg \neg \forall z (z \varepsilon x \supset F(z))$,

какова бы ни была C-формула $F(z)$.

(Если рассматривать $\forall z (z \varepsilon x \supset \neg \neg F(z))$ как конъюнкцию $\neg \neg F(z_1) \,\&\, \ldots \,\&\, \neg \neg F(z_r)$ по всем элементам $z_1, \ldots, z_r$ множества x и аналогично рассматривать C-формулу $\forall z (z \varepsilon x \supset F(z))$, то 3.1521 выражает импликацию

3.15210. $\neg \neg F(z_1) \,\&\, \ldots \,\&\, \neg \neg F(z_r) \supset \neg \neg (F(z_1) \,\&\, \ldots \,\&\, F(z_r))$,

являющуюся обобщением 1.531).

3.1522. Если $\forall z (z \varepsilon x \supset \exists!\, t F(t, z))$, где $F(t, z)$ — произвольная C-формула (доступная обозрению субъекта S), то справедливо следующее утверждение (Q): существует множество y такое, что $\forall z (z \varepsilon y \sim z \varepsilon x \,\&\, F(+, z))$.

Это утверждение мы будем называть постулатом (P). Его можно сформулировать также следующим образом:

Пусть $f(z)$ — функция, определенная на x посредством некоторой C-формулы $F(t, z)$ таким образом, что $t = f(z) \sim F(t, z)$; тогда существует множество y, состоящее в точности из всех элементов z множества x, на которых $f(z)$ принимает значение «+»:

$$\exists y \forall z (z \varepsilon y \sim z \varepsilon x \,\&\, f(z) = +).$$

Без ограничения общности можно считать, что $f(z)$ принимает только два значения: «+» и «—». В самом деле, ввиду $\forall t (t = + \vee \neg t = +)$ (3.1501) можно определить функцию $g(z)$ такую, что $(f(z) = + \supset g(z) = +) \,\&\, (\neg f(z) = + \supset g(z) = -)$; эта функция будет определена для всех значений z, для которых определена $f(z)$, в частности, для всех $z \varepsilon x$ — и, в силу $\neg + = -$ (2.2171) и $\neg\neg(f(z) = +) \supset (f(z) = +)$ $(\neg\neg_=)$ для $g(z)$ имеем $g(z) = + \sim f(z) = +$ для всех z из области определения $f(z)$. Если предполагается, что $f(z) = = + \vee f(z) = -$, то (Q) мы будем обозначать (Q′).

Вместо (Q) или (Q′) нам достаточно будет пользоваться их двойными отрицаниями.

3.1523. Если $\forall t (t \varepsilon x \supset \exists! \delta F(\delta, t))$, то существует множество y такое, что $\forall z [z \varepsilon y \sim \exists t (t \varepsilon x \,\&\, F(z, t)) \,\&\, \exists \delta (z = \delta)]$.

Это утверждение мы будем называть постулатом (R).

3.153. Докажем справедливость утверждений $=_1 - =_7$, $\neg\neg_=$, $\neg\neg_\varepsilon$, $C1a_i$, $C2_i$, $C3_i$, $CIV^z_{i\varphi(z)}$, $C4^{zt}_{i\varphi(z,t)}$ и $C6$ для модели N_n; при этом справедливость утверждений $=_1 - =_7$, $\neg\neg_=$, $\neg\neg_\varepsilon$, $C1a_i$, $C2_i$, $C3_i$ и $CIV^z_{i\varphi(z)}$ будет доказана также и для модели M_n.

3.1530. Справедливость утверждений $=_1 - =_7$, $\neg\neg_=$ и $\neg\neg_\varepsilon$ для модели N_n или M_n усматривается из справедливости соответствующего утверждения для модели M^t_n и 3.1511.

3.1531. Докажем утверждение C1a для модели N_n. Из определения $\{xy\}$ вытекает, что $x \varepsilon \{xy\}$ и $y \varepsilon \{xy\}$ (независимо от того, равны x и y или нет). Из 2.2241 и 2.2242 и первого абзаца 2.2263 вытекает, что $u \varepsilon \{xy\}$ влечет $u = x \vee u = y$. Итак, $\forall x \forall y \forall u [u \varepsilon \{xy\} \sim u = x \vee u = y]$, откуда, согласно 3.1511, $\forall \alpha \forall \beta \forall \gamma [\gamma \varepsilon \{\alpha\beta\} \sim \gamma = \alpha \vee \gamma = \beta]$. C1a для модели N_n

этим доказано. Следовательно, для этой модели верно $\neg\neg$C1a и, согласно теореме 1.54 (и $\neg\neg_=$ и $\neg\neg_\varepsilon$), C1a$_i$.

Заметим, что ступень $\{xy\} = \max$(ступень x, ступень y) $+$ $+$ 1, так что если осуществимы ступени множеств x и y, то осуществима и ступень $\{xy\}$. Этим доказано утверждение C1a — а значит и C1a$_i$ — для модели M_n.

3.1532. Докажем утверждение C2$_i$ для моделей N_n и M_n.

Из определения $\mathfrak{S}(x)$ (см. 2.2265) следует, что, каково бы ни было множество x модели M_n^t, всякий элемент z множества t, являющегося элементом x, является элементом $\mathfrak{S}(x)$: $\forall z\,[\exists t\,(z\varepsilon t\;\&\;t\varepsilon x) \supset z\varepsilon\mathfrak{S}(x)]$; согласно 3.1511, $\forall\gamma[\exists\beta\,(\gamma\varepsilon\beta\;\&\;\beta\varepsilon\alpha) \supset \gamma\varepsilon\mathfrak{S}(\alpha)]$ (так как $\exists\beta F(\beta) \supset \exists t F(t)$ для $\gamma\varepsilon t\;\&\;t\varepsilon\alpha$, взятого в качестве $F(t)$). Согласно 2.2265, $\mathfrak{S}(\alpha)$ отлично от $a_0, \ldots, a_n$ и, кроме того, ступень $\mathfrak{S}(\alpha) \leqslant$ ступени α, так что если α имеет осуществимую ступень, то же верно и для $\mathfrak{S}(\alpha)$. Поэтому $\mathfrak{S}(\alpha)$ является множеством модели N_n или, соответственно, M_n, так что предыдущий результат дает, по правилам интуиционистского исчисления предикатов,

$$\forall\alpha\exists\beta\forall\gamma\,[\exists\delta\,[\gamma\varepsilon\delta\;\&\;\delta\varepsilon\alpha] \supset \gamma\varepsilon\beta],$$

то есть утверждение C2 для моделей N_n и M_n. Отсюда следует $\neg\neg$ C2 и, в силу теоремы 1.54 и $\neg\neg_\varepsilon$, C2$_i$ справедливо для моделей N_n и M_n.

3.1533. Докажем справедливость утверждения C3$_i$ для моделей N_n и M_n.

Через $x+y$ мы будем обозначать $\mathfrak{S}(\{xy\})$. Легко доказывается, что $\forall u\,[u\varepsilon x+y \sim u\varepsilon x \vee u\varepsilon y]$. Пусть α — произвольное множество модели N_n (или M_n). Рассмотрим $\mathfrak{P}(\alpha+(()a_0\ldots a_n))$. Из определения $\mathfrak{P}(x)$ (см. 2.2266) следует, что если $y \subseteq x$, то $y\varepsilon\mathfrak{P}(x)$, т. е. $\forall z\,(z\varepsilon y \supset z\varepsilon x) \supset y\varepsilon\mathfrak{P}(x)$. Пусть γ является подмножеством α в модели N_n (или M_n), то есть

3.15331. $\forall\delta\,(\delta\varepsilon\gamma \supset \delta\varepsilon\alpha)$,

и пусть $z\varepsilon\gamma$. Если (ступень z) > 0, то z является N_n-множеством и, кроме того, так как ступень z меньше, чем ступень γ, то в случае, если γ является M_n-множеством, δ также является M_n-множеством, т. е. $\exists\delta\,(\delta = z)$, откуда $z\varepsilon\alpha$. Если же (ступень z) $= 0$, то $z\varepsilon(()a_0\ldots a_n)$. Итак, в обоих случаях $z\varepsilon\alpha+(()a_0\ldots a_n)$, и (ступень z) $> 0 \vee$ (ступень z) $= 0) \supset z\varepsilon\alpha + (()a_0\ldots a_n))$.

Так как (ступень $z) > 0$ или $= 0$ в соответствии с тем, $\neg z\varepsilon((\ \ )a_0 \dots a_n)$, или $z\varepsilon((\ \ )a_0 \dots a_n)$, то в силу 3.1502, $z\varepsilon\alpha + ((\ \ )a_0 \dots a_n)$. Итак, $z\varepsilon\gamma \supset z\varepsilon\alpha + ((\ \ )a_0 \dots a_n)$, т. е. $\gamma \subseteq \alpha + ((\ \ )a_0 \dots a_n)$ и, по предыдущему, $\gamma\varepsilon\mathfrak{P}(\alpha + (()\,a_0 \dots a_n))$. Итак (принимая во внимание допущение к предыдущему 3.15331):

3.15332. $\forall\delta\,(\delta\varepsilon\gamma \supset \delta\varepsilon\alpha) \supset \gamma\varepsilon\mathfrak{P}\,(\alpha + ((\ \ )\,a_0 \dots a_n))$.

$\mathfrak{P}(\alpha + ((\ \ )a_0 \dots a_n))$ отлично от $a_0, \dots, a_n$, согласно 2.2266, а потому является N_n-множеством. Кроме того, если ступень α есть осуществимое число ν, то ступень $\alpha + ((\ \ )a_0 \dots a_n)$ не превосходит $\max(\nu, 1)$ и ступень $\mathfrak{P}(\alpha + ((\ \ )a_0 \dots a_n))$ не превосходит $\max(\nu, 1) + 1$, т. е. осуществима; поэтому, если α является M_n-множеством, то и $\mathfrak{P}(\alpha + ((\ \ )a_0 \dots a_n))$ является M_n-множеством. Теперь 3.15332 дает

$$\forall\alpha\exists\beta\forall\gamma\,[\forall\delta\,(\delta\varepsilon\gamma \supset \delta\varepsilon\alpha) \supset \gamma\varepsilon\beta],$$

т. е. утверждение C3 для моделей N_n и M_n. Отсюда для каждой из этих моделей получаем $\neg\neg$ C3, а в силу $\neg\neg_\varepsilon$ и теоремы 1.54 — $C3_i$.

3.1534. Докажем теперь справедливость для моделей N_n и M_n каждого из утверждений $CIV^z_{i\varphi(z)}$, доступных восприятию субъекта S.

Пусть $\varphi(\gamma)$ — произвольная α-формула, не содержащая символов «$\vee$» и «$\exists$», входящая в формулировку утверждения $CIV^\gamma_{i\varphi(\gamma)}$ для модели N_n или M_n, доступного восприятию субъекта S. Тогда $\varphi(z)$ есть C-формула. Далее, вплоть до 3.15347, $\varphi(z)$ может означать произвольную C-формулу, не содержащую символов «$\vee$» и «$\exists$» и переменных y и β.

Докажем сперва, что

3.15341. $\forall z\,[z\varepsilon\alpha \supset \exists\delta\,[(\varphi(z) \supset \delta = +)\,\&\,(\neg\varphi(z) \supset \delta = -)]] \supset$

$$\exists\beta\forall z\,(z\varepsilon\beta \sim z\varepsilon\alpha\,\&\varphi(z)).$$

Допустим справедливость посылки 3.15341 и выведем заключение, рассматривая α как постоянное.

Заметим сперва, что δ определено однозначно, т. е. из $(\varphi(z) \supset \delta = +)\,\&\,(\neg\varphi(z) \supset \delta = -)$ и $(\varphi(z) \supset t = +)\,\&\,(\neg\varphi(z) \supset t = -)$ следует $\delta = t$. В самом деле, если допустить обе эти конъюнкции, то $\varphi(z) \supset \delta = t\ (= +)$ и $\neg\varphi(z) \supset \delta = t (= -)$, так что $\varphi(z) \vee \neg\varphi(z) \supset \delta = t$, откуда (согласно 1.5330) $\neg\neg(\varphi(z) \vee \neg\varphi(z)) \supset \neg\neg\delta = t$, и, так как посылка этой импликации доказуема в интуиционистском исчислении высказываний (Клини [2, § 27, *51a]), то $\neg\neg\delta = t$ и, в силу $\neg\neg_{=}$, $\delta = t$. Поэтому, посылка 3.15341 дает

3.153411. $\forall z\,[z\varepsilon\alpha \supset \exists! t\,[(\varphi(z) \supset t = +) \,\&\, (\neg\varphi(z) \supset t = -)]]$.

Согласно 3.1522 (постулат (P)),

3.153412. $\exists y \forall z\ [z\varepsilon y \sim z\varepsilon\alpha \,\&\, (\varphi\ (z) \supset + = +) \,\&\, (\neg\varphi(z) \supset + = -)]$.

Далее:

3.153413. $(\varphi(z) \supset + = +) \,\&\, (\neg\varphi(z) \supset + = -) \sim \varphi\ (z)$.

В самом деле, из $\varphi(z)$ следует, в силу $+ = +$, $\varphi(z) \supset + = +$ и, согласно принципу $A \supset (\neg A \supset B)$, $\neg\varphi(z) \supset + = -$. Обратно, из $\neg\varphi(z) \supset + = -$ получаем, применяя контрапозицию, $\neg + = - \supset \neg\neg\varphi(z)$, и, в силу $\neg + = -$ (2.2171), $\neg\neg\varphi(z)$.

Так как $\varphi(z)$ не содержит «$\vee$» и «$\exists$», то, согласно теореме 1.51 (которая сохраняет силу и для C-формул), мы получаем — с помощью $\neg\neg_{\varepsilon}$ — $\neg\neg\varphi(z) \supset \varphi(z)$, что вместе с $\neg\neg\varphi(z)$ дает $\varphi(z)$. 3.153413 доказано; вместе с 3.153412 оно дает:

3.153414. $\exists y \forall z\,[z\varepsilon y \sim z\varepsilon\alpha \,\&\, \varphi(z)]$.

Так как $\forall z\,(z\varepsilon y \supset z\varepsilon\alpha)$ для y, удовлетворяющего 3.153414 (т. е. области действия $\exists y$ в 3.153414), то ступень множества y не превосходит ступени множества α и поэтому осуществима, если осуществима ступень α. Кроме того, можно считать y отличным от $a_0, \ldots, a_n$, так как при $y = a_i$ имеем $\forall z\,(z\varepsilon y \sim$ $\sim z\varepsilon(\quad))$ и в качестве y можно взять $(\quad)$. Поэтому y является N_n-множеством и, в случае, если α есть M_n-множество — M_n-множеством. Поэтому 3.153414 можно усилить следующим образом:

3.153415. $\exists\beta\forall z\,[z\varepsilon\beta \sim z\varepsilon\alpha \,\&\, \varphi(z)]$,

т. е. заключение импликации 3.15341. 3.15341 тем самым доказано. Вместе с тем, согласно 1.5330, доказано

3.15342. $\neg\neg\forall z\,[z\varepsilon\alpha \supset \exists\delta\,[(\varphi(z) \supset \delta = +) \,\&\, (\neg\varphi(z) \supset \delta =$ $= -)]] \supset \neg\neg\exists\beta\forall z\,(z\varepsilon\beta \sim z\varepsilon\alpha \,\&\, \varphi\ (z))$.

Заметим, что если бы вместо (P) мы воспользовались двойным отрицанием этого постулата, то мы все равно получили бы 3.15342. В самом деле, применение ($\bar{\bar{P}}$) вместо (P) дало бы нам переход от двойного отрицания 3.153411 к двойному отрицанию 3.153412 — и далее вместо 3.153414 и 3.153415 мы получили бы их двойные отрицания (переход от первого из них ко второму происходил бы как выше, с помощью 1.5330). Вместо 3.15341 мы получили бы как раз 3.15342.

Докажем теперь посылку 3.15342, т. е. утверждение

3.15343. $\neg\neg\forall z\,[z\varepsilon\alpha \supset \exists\delta\,[(\varphi(z) \supset \delta = +)\,\&\,(\neg\varphi(z) \supset \delta = -)]]$.

Согласно 3.1521 (и даже, в силу 1.5332 и 1.5331, согласно двойному отрицанию утверждения 3.1521) достаточно доказать

$$\forall z\,[z\varepsilon\alpha \supset \neg\neg\exists\delta\,[(\varphi(z) \supset \delta = +)\,\&\,(\neg\varphi(z) \supset \delta = -)]],$$

для чего в свою очередь достаточно доказать

3.15344. $\neg\neg\exists\delta\,[(\varphi(z) \supset \delta = +)\,\&\,(\neg\varphi(z) \supset \delta = -)]$.

Имеем:

$$\varphi(z) \supset (\varphi(z) \supset + = +) \text{ и } \varphi(z) \supset (\neg\varphi(z) \supset + = -),$$

откуда

$$\varphi(z) \supset (\varphi(z) \supset + = +)\,\&\,(\neg\varphi(z) \supset + = -),$$

3.153441. $\varphi(z) \supset \exists\delta\,[(\varphi(z) \supset \delta = +)\,\&\,(\neg\varphi(z) \supset \delta = -)]$.

Аналогично

$$\neg\varphi(z) \supset (\varphi(z) \supset - = +) \text{ и } \neg\varphi(z) \supset (\neg\varphi(z) \supset - = -),$$

откуда

$$\neg\varphi(z) \supset (\varphi(z) \supset - = +)\,\&\,(\neg\varphi(z) \supset - = -),$$

3.153442. $\neg\varphi(z) \supset \exists\delta\,[(\varphi(z) \supset \delta = +)\,\&\,(\neg\varphi(z) \supset \delta = -)]$.

3.153441 и 3.153442 дают:

$$\varphi(z) \vee \neg\varphi(z) \supset \exists\delta\,[(\varphi(z) \supset \delta = +)\,\&\,(\neg\varphi(z) \supset \delta = -)],$$

откуда, согласно 1.15330,

$$\neg\neg[\varphi(z) \vee \neg\varphi(z)] \supset \neg\neg\exists\delta\,[(\varphi(z) \supset \delta = +)\,\&\,(\neg\varphi(z) \supset \delta = -)],$$

и, так как посылка этой импликации доказуема в интуиционистском исчислении высказываний (Клини [2, § 27, *51a]), то доказуемо и заключение, т. е. утверждение 3.15344. Тем самым доказано и 3.15343, и, согласно 3.15342, 3.15345. $\neg\neg\exists\beta\forall z(z\varepsilon\beta\sim z\varepsilon\alpha\,\&\,\varphi(z))$,

что эквивалентно, согласно 1.5342,

3.15346. $\neg\forall\beta\neg\forall z(z\varepsilon\beta\sim z\varepsilon\alpha\,\&\,\varphi(z))$.

Навешивая квантор $\forall\alpha$, получаем, наконец,

3.15347. $\forall\alpha\neg\forall\beta\neg\forall z(z\varepsilon\beta\sim z\varepsilon\alpha\,\&\,\varphi(z))$,

где $\varphi(z)$ — произвольная C-формула, не содержащая «$\vee$» и «$\exists$» и переменной β. При помощи 3.1511 мы получаем отсюда

3.15348. $\forall\alpha\neg\forall\beta\neg\forall\gamma(\gamma\varepsilon\beta\sim\gamma\varepsilon\alpha\,\&\,\varphi(\gamma))$

для произвольной α-формулы $\varphi(\gamma)$, не содержащей переменной β и символов «$\vee$» и «$\exists$», т. е. утверждение $\mathrm{CIV}^{\gamma}_{\mathrm{i}\varphi(\gamma)}$ для модели N_n или M_n.

3.1535. Докажем теперь справедливость в модели N_n каждого утверждения $C4^{zt}_{\mathrm{i}\varphi(z,t)}$, доступного восприятию субъекта S; при этом формула $\varphi(z, t)$ не содержит «$\vee$» и «$\exists$».

Допустим $\mathrm{Un}^{\gamma\delta}[\varphi(\gamma,\delta)]_{\alpha}$, то есть

3.15351. $\forall\gamma_1\forall\gamma_2\forall\delta[\varphi(\gamma_1,\delta)\,\&\,\varphi(\gamma_2,\delta)\supset\gamma_1=\gamma_2]$.

Докажем

3.15352. $\forall\alpha\neg\forall\beta\neg\forall\gamma[\gamma\varepsilon\beta\sim\neg\forall\delta\neg[\delta\varepsilon\alpha\,\&\,\varphi(\gamma,\delta)]]$

в предположении, что α-формула $\varphi(\gamma,\delta)$ не содержит переменной β.

Пусть α — произвольное N_n-множество. Рассмотрим C-формулу

$$F(t)\sim_{Df}\neg\forall\alpha\neg(t=\alpha)\,\&\,\neg\forall\gamma\neg\varphi(\gamma,t).$$

Согласно 1.5342 и 1.531

3.153511. $F(t)\sim\neg\neg(\exists\alpha(t=\alpha)\,\&\,\exists\gamma\varphi(\gamma,t))$.

Согласно 3.15346, $\neg\forall\beta\neg\forall z(z\varepsilon\beta\sim z\varepsilon\alpha\,\&\,F(z)]$, что эквивалентно, по 1.5342,

3.153512. $\neg\neg\exists\beta\forall z[z\varepsilon\beta\sim z\varepsilon\alpha\,\&\,F(z)]$.

Докажем сперва

3.153513. $\forall z(z\varepsilon\beta\sim z\varepsilon\alpha\,\&\,F(z))\sim\neg\neg\forall z(z\varepsilon\beta\sim z\varepsilon\alpha\,\&\,\exists\delta(z=\delta)\,\&\,\exists\gamma\varphi(\gamma,z))$.

В силу 3.153511,

3.153514. $\forall z(z\varepsilon\beta\sim z\varepsilon\alpha\,\&\,F(z))\sim\forall z(z\varepsilon\beta\sim z\varepsilon\alpha\,\&\,\neg\neg(\exists\alpha(z=\alpha)\,\&\,\exists\gamma\varphi(\gamma,z)))$.

Рассмотрим теперь правую часть эквивалентности 3.153514. В силу $\neg\neg_{\varepsilon}$ и 1.531, $z\varepsilon\alpha\,\&\,\neg\neg\exists\alpha(z=\alpha)\,\&\,\neg\neg\exists\gamma\varphi(\gamma,z)\sim\sim\neg\neg(z\varepsilon\alpha\,\&\,\exists\alpha(z=\alpha)\,\&\,\exists\gamma\varphi(\gamma,z))$, а потому

3.153515. $\forall z (z\varepsilon\beta \sim z\varepsilon\alpha \,\&\, \neg\neg\exists\alpha (z = \alpha) \,\&\, \neg\neg\exists\gamma\varphi(\gamma, z)) \sim$
$\sim \forall z (z\varepsilon\beta \sim \neg\neg (z\varepsilon\alpha \,\&\, \exists\alpha (z = \alpha) \,\&\, \exists\gamma\varphi(\gamma, z)))$.

Правая часть эквивалентности 3.153515 эквивалентна конъюнкции следующих двух формул:

3.153516. $\forall z (z\varepsilon\beta \supset \neg\neg (z\varepsilon\alpha \,\&\, \exists\alpha (z = \alpha) \,\&\, \exists\gamma\varphi(\gamma, z)))$,

3.153517. $\forall z (\neg\neg (z\varepsilon\alpha \,\&\, \exists\alpha (z = \alpha) \,\&\, \exists\gamma\varphi(\gamma, z)) \supset z\varepsilon\beta)$.

3.153516, согласно 3.1521, эквивалентна

3.153518. $\neg\neg \forall z \; (z\varepsilon\beta \supset z\varepsilon\alpha \;\&\; \exists\alpha (z = \alpha) \;\&\; \exists\gamma\varphi \; (\gamma, \; z))$ (3.153516, согласно 3.1521, влечет 3.153518, а обратная импликация вытекает из $\mathrm{Ib} \supset \mathrm{Ic}_1$ — следствия из теоремы 17 Клини [2, § 35], 1.5332 и $\neg\neg_\varepsilon$; в силу 1.5332 и 1.5331, здесь достаточно двойного отрицания 3.1521.)

3.153517 может быть, с помощью 1.531 и $\neg\neg_\varepsilon$, преобразована к виду

$$\forall z (z\varepsilon\alpha \supset (\neg\neg (\exists\alpha (z = \alpha) \,\&\, \exists\gamma\varphi(\gamma, z)) \supset \neg\neg z\varepsilon\beta))$$

и далее, с помощью 1.5332, к виду

$$\forall z (z\varepsilon\alpha \supset \neg\neg (\exists\alpha (z = \alpha) \,\&\, \exists\gamma\varphi(\gamma, z) \supset z\varepsilon\beta)),$$

что эквивалентно, согласно 3.1521 или двойному отрицанию 3.1521 (ср. переход от 3.153516 к 3.153518),

$$\neg\neg \forall z (z\varepsilon\alpha \supset (\exists\alpha (z = \alpha) \,\&\, \exists\gamma\varphi(\gamma, z) \supset z\varepsilon\beta)),$$

что в свою очередь эквивалентно

3.153519. $\neg\neg \forall z (z\varepsilon\alpha \,\&\, \exists\alpha (z = \alpha) \,\&\, \exists\gamma\varphi(\gamma, z) \supset z\varepsilon\beta)$.

Итак, правая часть 3.153515 эквивалентна конъюнкции 3.153518 и 3.153519, которая, ввиду 1.531, эквивалентна формуле

$$\neg\neg \forall z (z\varepsilon\beta \sim z\varepsilon\alpha \,\&\, \exists\delta (z = \delta) \,\&\, \exists\gamma\varphi(\gamma, z)).$$

В силу 3.153514, мы получаем теперь
$\forall z (z\varepsilon\beta \sim z\varepsilon\alpha \,\&\, F(z)) \sim \neg\neg \forall z (z\varepsilon\beta \sim z\varepsilon\alpha \,\&\, \exists\delta (z = \delta) \,\&\, \exists\gamma\varphi(\gamma, z))$, т. е. 3.153513. Ввиду 3.153512 мы получаем теперь

$$\neg\neg \exists\beta \neg\neg \forall z (z\varepsilon\beta \sim z\varepsilon\alpha \,\&\, \exists\delta (z = \delta) \,\&\, \exists\gamma\varphi(\gamma, z))$$

и, согласно 1.5345,

3.1535121. $\neg\neg \exists\beta \forall z (z\varepsilon\beta \sim z\varepsilon\alpha \,\&\, \exists\delta (z = \delta) \,\&\, \exists\gamma\varphi(\gamma, z))$.

Допустим

3.1535122. $\forall z\,(z\varepsilon\beta \sim z\varepsilon\alpha \,\&\, \exists\delta\,(z=\delta) \,\&\, \exists\gamma\varphi\,(\gamma, z))$.

В силу $\mathrm{Un}^{\gamma\delta}\,[\varphi(\gamma,\delta)]_\alpha$, $\exists\gamma$ в этой C-формуле можно заменить на $\exists!\,\gamma$:

3.1535123. $\forall z\,(z\varepsilon\beta \supset \exists!\,\gamma\varphi\,(\gamma, z))$.

Согласно 3.1523, существует множество y такое, что

3.1535124. $\forall z\,[z\varepsilon y \sim \exists t\,(t\varepsilon\beta \,\&\, \varphi(z,t)) \,\&\, \exists\delta\,(z=\delta)]$.

Согласно 2.2221, y пусто или непусто. Если y непусто, то y есть N_n-множество, а если y — пусто, то оно равнообъемно N_n-множеству ( ), которое можно выбрать в этом утверждении в качестве y. Таким образом,

3.1535125. $\exists\lambda\forall z\;[z\varepsilon\lambda \sim \exists t\;(t\varepsilon\beta \;\&\; \varphi\;(z,\,t)) \;\&\, \exists\delta\;(z\;=\;\delta)]$,
где λ — переменная из алфавита $\alpha, \beta, \ldots$, не входящая в $\varphi(\gamma,\delta)$.

Согласно 3.1511, мы получаем отсюда

$$\exists\lambda\forall\gamma\,[\gamma\varepsilon\lambda \sim \exists t\,(t\varepsilon\beta \,\&\, \varphi\,(\gamma, t)) \,\&\, \exists\delta\,(\gamma=\delta)).$$

Так как $\exists\delta\,(\gamma=\delta)$ доказуемо, то этот член можно отбросить, и тогда получится

3.1535126. $\exists\lambda\forall\gamma\,[\gamma\varepsilon\lambda \sim \exists t\,(t\varepsilon\beta \,\&\, \varphi\,(\gamma, t))]$.

В силу 3.1535122, $t\varepsilon\beta \supset \exists\delta\,(t=\delta)$, а потому в 3.1535126 можно t заменить на δ:

3.1535127. $\exists\lambda\forall\gamma\,[\gamma\varepsilon\lambda \sim \exists\delta\,(\delta\varepsilon\beta \,\&\, \varphi\,(\gamma,\delta))]$.

Докажем, наконец, что в 3.1535127 можно заменить β на α. Согласно 3.1535122, $\delta\varepsilon\beta \supset \delta\varepsilon\alpha$. Обратно, $\delta\varepsilon\alpha \,\&\, \exists\gamma\varphi\,(\gamma,\delta) \supset \delta\varepsilon\beta$ согласно 3.1535122, и в силу $\varphi(\gamma,\delta) \supset \exists\gamma\varphi\,(\gamma,\delta)$ мы имеем $\delta\varepsilon\alpha \,\&\, \varphi\,(\gamma,\delta) \supset \delta\varepsilon\beta \,\&\, \varphi\,(\gamma,\delta)$. Итак,

$$\exists\lambda\forall\gamma\,[\gamma\varepsilon\lambda \sim \exists\delta\,[\delta\varepsilon\alpha \,\&\, \varphi\,(\gamma,\delta)]].$$

Принимая во внимание допущение 3.1535122, мы получаем $\forall z\,(z\varepsilon\beta \sim z\varepsilon\alpha \& \exists\delta\,(z=\delta) \& \exists\gamma\varphi\,(\gamma, z)) \supset \exists\lambda\forall\gamma\,[\gamma\varepsilon\lambda \sim \exists\delta[\delta\varepsilon\alpha \& \varphi(\gamma,\delta)]]$, откуда

$$\exists\beta\forall z\,(z\varepsilon\beta \sim z\varepsilon\alpha \,\&\, \exists\delta\,(z=\delta) \,\&\, \exists\gamma\varphi\,(\gamma, z)) \supset \exists\beta\forall\gamma\,[\gamma\varepsilon\beta \sim$$
$$\sim \exists\delta\,[\delta\varepsilon\alpha \,\&\, \varphi\,(\gamma,\delta)]],$$

и, согласно 1.5330 и 3.1535121,

$$\neg\neg\,\exists\beta\forall\gamma\,[\gamma\varepsilon\beta \sim \exists\delta\,[\delta\varepsilon\alpha \,\bar{\&}\, \varphi\,(\gamma,\delta)]],$$

или, согласно 1.5342,

$$\neg\forall\beta\neg\forall\gamma[\gamma\varepsilon\beta \sim \exists\delta[\delta\varepsilon\alpha \,\&\, \varphi(\gamma,\delta)]].$$

Так как область действия $\forall\gamma$ стоит в области действия двух отрицаний, то, согласно 1.5330, $\neg\neg_\varepsilon$ и 1.5342, мы получаем отсюда

$$\neg\forall\beta\neg\forall\gamma[\gamma\varepsilon\beta \sim \neg\forall\delta\neg[\delta\varepsilon\alpha \,\&\, \varphi(\gamma,\delta)]]$$

и, навешивая $\forall\alpha$,

3.15352. $\forall\alpha\neg\forall\beta\neg\forall\gamma[\gamma\varepsilon\beta \sim \neg\forall\delta\neg[\delta\varepsilon\alpha \,\&\, \varphi(\gamma,\delta)]]$.

Итак, мы вывели 3.15352 из 3.15351, чем установлена справедливость утверждения $C4^{zt}_{i\varphi(z,t)}$ для модели N_n и формул $\varphi(z, t)$ без «$\vee$» и $\exists$».

3.1536. Докажем справедливость утверждения C6 для модели N_n.

В качестве $\mathfrak{q}(x)$ мы выберем теперь функцию $\mathfrak{Q}(x + \{\{a_n\}\})$, где $\mathfrak{Q}$ определено в 2.2252.

Из определения $\mathfrak{Q}$ мы получаем:

$$y\varepsilon x \supset y\varepsilon\mathfrak{Q}(x + \{\{a_n\}\}),$$

так как (ступень y) $<$ (ступени x) $\leqslant$ ступени $(x + \{\{a_n\}\})$.

Итак:

3.15361. $\forall x\forall y[y\varepsilon x \supset y\varepsilon\mathfrak{q}(x)]$.

Согласно 3.1511, мы получаем отсюда

3.15362. $\forall\alpha\forall\beta[\beta\varepsilon\alpha \supset \beta\varepsilon\mathfrak{q}(\alpha)]$.

Пусть теперь $\forall\gamma(\gamma\varepsilon\alpha \sim \gamma\varepsilon\beta)$ и $z\varepsilon\alpha + ((\ )a_0 \ldots a_n)$. Если $\neg z\varepsilon((\ )a_0 \ldots a_n)$, то $\exists\gamma(z = \gamma)$ и $z\varepsilon\alpha$ влечет $\exists\gamma(z = \gamma \,\&\, z\varepsilon\alpha)$, откуда $\exists\gamma(z = \gamma \,\&\, \gamma\varepsilon\alpha)$ и, по допущению, $\exists\gamma(z = \gamma \,\&\, \gamma\varepsilon\beta)$, откуда $z\varepsilon\beta$; итак, $\neg z\varepsilon((\ )a_0 \ldots a_n)$ влечет $z\varepsilon\alpha + ((\ )a_0 \ldots a_n) \supset z\varepsilon\beta + ((\ )a_0 \ldots a_n)$ и аналогично доказывается обратная импликация, так что $\neg z\varepsilon((\ )a_0 \ldots a_n) \supset (z\varepsilon\alpha + ((\ )a_0 \ldots a_n) \sim z\varepsilon\beta + ((\ )a_0 \ldots a_n))$. Очевидно, что $z\varepsilon((\ )a_0 \ldots a_n) \supset (z\varepsilon\alpha + ((\ )a_0 \ldots a_n) \sim z\varepsilon\beta + ((\ )a_0 \ldots a_n))$, так что $z\varepsilon((\ )a_0 \ldots a_n) \vee \neg z\varepsilon((\ )a_0 \ldots a_n) \supset (z\varepsilon\alpha + ((\ )a_0 \ldots a_n) \sim z\varepsilon\beta + ((\ )a_0 \ldots a_n))$. $z\varepsilon((\ )a_0 \ldots, a_n) \vee \neg z\varepsilon((\ )a_0 \ldots a_n)$ имеет место согласно 3.1502, так что **и** $z\varepsilon\alpha + ((\ )a_0 \ldots a_n) \sim z\varepsilon\beta + ((\ )a_0 \ldots a_n)$. Итак,

$$\forall z[z\varepsilon\alpha + ((\ )a_0 \ldots a_n) \sim z\varepsilon\beta + ((\ )a_0 \ldots a_n)].$$

Поэтому ступень $(\alpha + ((\ )a_0 \ldots a_n))$ = ступени $(\beta + ((\ )a_0 \ldots a_n))$. Далее, ступень $(\alpha + \{\{a_n\}\}) = \max$ (ступень α, 2) $= \max$ (ступень $\alpha + ((\ )a_0 \ldots a_n)$, 2) и ступень $(\beta + \{\{a_n\}\}) = \max$ (ступень β, 2) $=$ $= \max$ (ступень $\beta + ((\ )a_0 \ldots a_n)$, 2), поэтому ступень $(\alpha + \{\{a_n\}\})$ = ступени $(\beta + \{\{a_n\}\})$ и $\mathfrak{Q}(\alpha + \{\{a_n\}\}) = \mathfrak{Q}(\beta + \{\{a_n\}\})$ (по определению из 2.2252), а значит $\mathfrak{q}(\alpha) = \mathfrak{q}(\beta)$. Итак:

3.15363. $\forall\alpha\,\forall\beta\,[\forall\gamma\,(\gamma\varepsilon\alpha \sim \gamma\varepsilon\beta) \supset \mathfrak{q}(\alpha) = \mathfrak{q}(\beta)]$.

3.15362 и 3.15363 дают

$$\forall\alpha\,\forall\beta\,[[\beta\varepsilon\alpha \supset \beta\varepsilon\mathfrak{q}(\alpha)] \,\&\, [\forall\gamma\,[\gamma\varepsilon\alpha \sim \gamma\varepsilon\beta] \supset \mathfrak{q}(\alpha) = \mathfrak{q}(\beta)]],$$

т. е. утверждение C6 для модели N_n.

3.154. Справедливость аксиомы $C5_i'$ для модели N_z с неосуществимым z.

Согласно 3.1 и 3.11, *субъект S не в состоянии досчитать до некоторого числа z и знает об этом*. Это утверждение мы будем называть постулатом (O). Согласно этому постулату, существует некоторое неосуществимое (для S) натуральное число z, превосходящее все осуществимые числа.

Фиксируем такое z и рассмотрим модель M_z^t и связанную с ней и субъектом S модель N_z (а также модель $\dot{M}_z$).

В разделе 3.153 было доказано, что каждая из аксиом $=_1 - =_7, \neg\neg_=, \neg\neg_\varepsilon$, $C1a_i$, $C2_i$, $C3_i$, $CIV^z_{i\varphi(z)}$, $C4^{zt}_{i\varphi(z,t)}$ и $\dot{C}6$ справедлива в модели N_z для субъекта S — в предположении, что он в состоянии воспринять эту аксиому, и аналогичное утверждение для модели M_z и всех перечисленных аксиом, кроме C4 и C6.

Докажем теперь, что и аксиома $C5_i'$ справедлива в модели N_z (и в M_z) для субъекта S.

Рассмотрим: 1) множество x, равное множеству $((\ )a_0 \ldots a_z)$ всех пустых множеств модели M_z^t; 2) множество f упорядоченных пар вида $<a_{n+1}a_n>$ $(n = 0, \ldots, z)$, а также $<a_0a_n>$ и $<(\ )(\ )>$; 3) пустое множество a, равное a_0.

Эти объекты являются N_z-множествами, так как 1) и 2), очевидно, непусты, а индекс 0 у a_0 осуществим. Так как их ступень $\leqslant 3$, то они являются и M_z-множествами. Поэтому константы x, f и a относятся к области изменения переменных $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

Мы считаем, что субъект S согласен с утверждением, что между числами $0, 1, \ldots z$ и буквами $a_0, a_1, \ldots, a_z$ имеется взаимно-однозначное соответствие.

Мы должны доказать справедливость для моделей N_z и M_z следующих утверждений:

a) $\mathrm{Un}_z(f)_\alpha$,

b) $\forall\alpha\forall\beta\,[<\alpha\beta>\varepsilon f \supset \alpha\varepsilon x\ \&\ \beta\varepsilon x]$,

c) $\forall\alpha\forall\beta\,[\alpha\varepsilon x \supset \neg\,\beta\varepsilon\alpha]$,

d) $a\varepsilon x$,

e) $\forall\alpha\,[\alpha\varepsilon x \supset \exists\beta\,(<\beta\alpha>\varepsilon f)]$,

f) $\forall\alpha\,(\neg <a\alpha>\varepsilon f)$.

Если справедливость этих утверждений для модели N_z или M_z будет доказана, то тем самым будет доказана и справедливость для этой модели их конъюнкции, а значит, и аксиомы C5′, которая получается из этой конъюнкции навешиванием кванторов существования. После этого, навешивая двойное отрицание и применяя теорему 1.54, убедимся в справедливости для этой модели и аксиомы $C5_i'$.

Множество f совпадает, очевидно, с функцией y^+ (определенной в 2.2253 и рассматриваемой как множество упорядоченных пар), ограниченной множеством x. Мы допустили в начале раздела 3.15, что субъект S согласен с взаимной однозначностью функции y^+; в таком случае он должен согласиться и с взаимной однозначностью f для модели M_z^t (так как переход к этому утверждению связан лишь с введением посылок вида $u\varepsilon x$), откуда при помощи 3.1151 (так как кванторов существования в утверждении $\mathrm{Un}_2(f)_\alpha$ нет, а кванторы общности не входят в область действия какого-либо оператора, кроме конъюнкции), получается $\mathrm{Un}_2(f)_\alpha$. a) доказано.

b) следует из определений f и x и 3.1151.

c) следует, согласно 3.1151, из утверждения $\forall u\,\forall v\,[u\varepsilon x \supset \neg\,v\varepsilon u]$, выражающего пустоту элементов множества x в M_z^t, с которой, как мы предположили в начале раздела 3.15, согласен субъект S. d) очевидно непосредственно.

Докажем e). Довод, который должен быть понятен субъекту S, состоит в следующем. Пусть α — произвольное N_z-(M_z)-множество, являющееся элементом x, т. е. α есть ( ) или a_i с осуществимым i. Если α есть $(\ )$, то в качестве β возьмем $(\ )$, а если α есть a_i с осуществимым i, то $i+1$ тоже осуществимое число, а потому $i+1 < z$ и в алфавите A_z найдется буква a_{i+1}, которую мы и возьмем в этом случае в качестве β. В обоих случаях $< \beta\alpha > \varepsilon f$ по определению f. Следовательно, $\exists\beta\,(< \beta\alpha > \varepsilon f)$.

Докажем, наконец, f). Довод, который должен быть понятен субъекту S, состоит в следующем.

Пусть α — произвольное N_z- (M_z)-множество. Допустим $< a\alpha > \varepsilon f$. Из определений f и x (или из $a = a_\theta$ и b)) следует, что $\alpha\varepsilon x$, т. е. $\alpha = (\ )$ или $\alpha = a_i$ с осуществимым i. Если $\alpha = (\ )$, то из $< a\alpha > \varepsilon f$ следует $a = (\ )$, что невозможно, откуда $\overline{\alpha = (\ )}$ и, согласно 2.151, $\neg a = (\ )$, так что интуиционистски $\alpha = a_i$ с осуществимым i. Как в доказательстве e), $< a_{i+1}a_i > \varepsilon f$ и, в силу a) и $< a_0 a_i > \varepsilon f$, $a_{i+1} = a_0$, что противоречит взаимной однозначности соответствия между буквами a_n и натуральными числами $n\,(\leqslant z)$. (Согласно 3.147, субъект S принимает утверждение $i+1 \neq 0$.) Отсюда $\overline{< a\alpha > \varepsilon f}$, что вместе с $< a\alpha > \varepsilon f$ дает, согласно минимальному исчислению высказываний, $0 \neq 0$. Итак, $< a\alpha > \varepsilon f \supset 0 \neq 0$, т. е. $\neg < a\alpha > \varepsilon f$.

Справедливость аксиомы $C5_i'$ в модели N_z (в модели M_z) для субъекта S доказана. Заметим, что мы нигде не пользовались до сих пор индукцией по осуществимым числам, так что это доказательство не зависит от регламентации субъекта S.

Таким образом, все аксиомы $=_1 - =_7$, $\neg\neg_=$, $\neg\neg_\varepsilon$, $C1a_i$, $C2_i$, $C3_i$, $C4^{zt}_{i\varphi(z,t)}$, $C5_i'$ и $C6$, доступные восприятию субъекта S, выполнены в модели N_z. Согласно теореме 1.51, всякая формула φ теории ZF^-, не содержащая символов «$\vee$» и «$\exists$», доказуемая в теории ZF^-, может быть выведена из этих аксиом по правилам интуиционистского исчисления предикатов. Если субъект S в состоянии воспринять этот вывод, то φ_α должна быть истинной для него в модели N_z. Таким образом, модель N_z служит интерпретацией для всех воспринимаемых субъектом S теорем теории ZF^-, не содержащих операторов «$\vee$» и «$\exists$». Аналогичное утверждение справедливо для M_z и Z^-.

3.155. Непротиворечивость теории ZF^-.

Допустим теперь, что теория ZF^- противоречива. Как указано в начале этого параграфа, в таком случае в интуиционистском исчислении доказуема некоторая формула Impl вида $\mathfrak{A} \supset \varphi \& \neg \varphi$, где $\mathfrak{A}$ — конъюнкция формул $=_1 — =_7$, $\neg\neg_=$, $\neg\neg_\varepsilon$ и некоторых формул из C_{ZF^-}. Без ограничения общности можно считать, что среди этих формул имеется $C5_1'$. α-формула Impl_α, то есть $\mathfrak{A}_\alpha \supset \varphi_\alpha \& \neg \varphi_\alpha$, очевидно, также доказуема в интуиционистском исчислении предикатов.

3.1551. Допустим, что субъект S в состоянии воспринять доказательство утверждения Impl_α. Согласно 3.153 и 3.154, каждая из формул C_{ZF^-}, входящих в конъюнкцию $\mathfrak{A}$, а также $=_1 — =_7$, $\neg\neg_=$ и $\neg\neg_\varepsilon$, истинны в модели N_z, т. е. верны соответствующие им α-формулы. Поэтому истинна и их конъюнкция $\mathfrak{A}_\alpha$. Таким образом, для субъекта S в модели N_z истинны α-формулы $\mathfrak{A}_\alpha$ и $\mathfrak{A}_\alpha \supset \varphi_\alpha \& \neg \varphi_\alpha$, а значит, и α-формула $\varphi_\alpha \& \neg \varphi_\alpha$, а тем самым и формулы φ_α и $\neg \varphi_\alpha$; последняя из них есть $\varphi_\alpha \supset f$, где f, согласно 3.1500, есть предложение $\Lambda \neq \Lambda$. Таким образом, для субъекта S истинно утверждение $\Lambda \neq \Lambda$, а значит, согласно 3.150, для S истинно, что любые два слова равны, в частности равенство $+ = —$ истинно для субъекта S.

Итак, если субъект S в состоянии воспринять доказательство утверждения Impl_α, то он в состоянии воспринять доказательство утверждения $+ = —$. Если он считает такое доказательство невозможным, то, познакомившись с только что изложенным рассуждением, он должен прийти к выводу, что никакого доказательства утверждения Impl_α он воспринять не может.

3.1552. Окончательно непротиворечивость теории ZF^- вытекает из следующего допущения (добавленного к ранее рассмотренным постулатам и допущению 3.1521).

Для всякого доказательства формулы Impl_α, получаемого в интуиционистском исчислении предикатов, существует субъект S, который в состоянии понять это доказательство, но не в состоянии понять никакого доказательства утверждения $+ = —$; при этом субъект S мыслит в соответствии с правилами, которые были перечислены выше (3.11 — 3.15). В частности, для S существует неосуществимое число z, превосходящее все осуществимые числа; субъект S мыслит модель M_z^t, как описано в разделе 3.15 — в соответствии с допущениями 3.1521 и принципами (P), (R), (I_t), (I_t') и др.

Аналогично доказывается непротиворечивость теории Z^-, причем принцип (R) не используется (так как он нужен лишь для проверки аксиом вида $C4^{zt}_{1\varphi(z,t)}$).

Допущение 3.1521 до сих пор остается необоснованным. Оставим этот вопрос на время в стороне и обсудим остальные использованные нами принципы (т. е. постулаты).

Самыми неубедительными из этих принципов кажутся нам (P) и (R), а также (I_l) и (I'_l) для модели N_z; их мы рассмотрим в следующем разделе. Что же касается нашего нового допущения о том, что для всякого доказательства Impl в интуиционистском исчислении предикатов существует субъект S, способный понять это доказательство, то мы ограничимся замечанием о том, что это допущение и не претендует на истинность. Все, что нам нужно,— это *мыслимость* такого субъекта S, а эта мыслимость, по-видимому, совместима с любой длиной доказательства α-формулы Impl_x. Если бы мы не пожелали принять это допущение, то мы должны были бы ограничиться выводом, что не может существовать понятного нам противоречия в теории ZF^- (коль скоро мы признаем принципы (P), (R) и некоторые другие, упомянутые выше), что для нас практически равносильно непротиворечивости этой теории, коль скоро мы не рассматриваем некоторых теоретических вопросов, например, вопроса о существовании интерпретации в традиционной арифметике, которое вытекает из теоремы Гёделя — Лёвенгейма (вероятно, аналог этой теоремы имеет место в откровенной теории — мы надеемся вернуться к этому вопросу в другой работе).

3.16. Рассмотрим теперь ближе те принципы, которыми руководствуется субъект S при рассмотрении неосуществимых объектов.

3.161. Индукцию от n к $n+1$ для произвольного n мы отбросили как недостаточно очевидный принцип. Вместе с тем следует признать, что допущение определений по индукции от n к $n+1$ привело бы при наличии остальных принципов, прежде всего (I_l), (I'_l) (P) и (R), к противоречию. Именно в теории ZF^- можно рассматривать некоторый вариант фон-Неймановской теории ординалов (см. § 4). Теореме о существовании порядкового числа ω, не являющегося числом вида $\alpha+1$, соответствует в модели N_z двойное отрицание аналогичного утверждения, если только принять рассматриваемый принцип (I_t') индуктивных определений (потому что этот принцип позволяет сопоставить каждому натуральному числу соответствующее число теории фон-Нёймана и при помощи (I_t) можно доказать, что всякое множество модели N_z, являющееся порядковым числом в смысле фон-Нёймана, сопоставляется при этом некоторому натуральному числу). Но при помощи индукции от n к $n+1$ легко доказывается, что всякое натуральное число, отличное от 0, имеет вид $m+1$ (ср. Клини [2, § 39, *137]), и это утверждение легко переносится затем на множества модели N_z, являющиеся фон-Нёймановскими порядковыми числами и сопоставленные только что указанным образом натуральным числам. Это противоречит упомянутому двойному отрицанию.

Таким образом, мы должны быть очень осмотрительны, принимая в откровенных рассуждениях какие-либо предложения традиционной арифметики, коль скоро они касаются неосуществимых объектов и выходят за пределы того, что может быть непосредственно очевидным для мыслящего субъекта.

3.162. Такие принципы, как допущение пользования явными определениями и простейшими свойствами взаимно-однозначных соответствий (именно тем, что суперпозиция двух таких соответствий снова является взаимно-однозначным соответствием между элементами надлежащих областей, и тем, что для всякого такого соответствия имеется обратное, а также свойством ассоциативности, короче *групповыми* свойствами), по-видимому, не вызывают никаких специальных возражений. Поэтому мы не будем здесь критиковать таких построений, как $\{xy\}$, $\mathfrak{S}(x)$ и x^+. Рассмотрим теперь построение $\mathfrak{P}(x)$, описанное в 2.2266, и принцип (P), отказываясь при этом от описанного в § 2 обоснования этого построения и принципа, так как это обоснование использовало индукцию от n к $n+1$.

3.1621. Заметим сперва, что множество $\mathfrak{P}(x)$ может быть отлично от множества, которое играет в модели N_z (или M_z) роль множества всех подмножеств множества x. Именно, мы не доказали, что в этой модели верна аксиома объемности (конечно, сейчас может идти речь только о форме $\mathrm{C0}^-$ этой аксиомы). Поэтому мы должны обратить внимание на то, что если $y \subseteq x$ в N_z (или M_z), то и всякое равнообъемное с y множество z также является в N_z (M_z) подмножеством x. Равнообъемное y множество может отличаться от y только теми элементами, которые имеют вид a_m с неосуществимым m (для модели M_z это утверждение предполагает очень простое рассмотрение ступени множеств). Поэтому роль множества, содержащего все подмножества множества x, играет в модели N_z (а также в M_z) множество $\mathfrak{P}(x \dotplus (a_0 \ldots a_z))$ (операция $x \dotplus y$ определяется как $\mathfrak{S}(\{xy\})$).

3.1622. Утверждения 3.1533 и (P) выигрывают в наглядности, если заменить множество x словом в алфавите $\{+, -\}$ и воспользоваться идеей взаимно-однозначного соответствия. Именно, каждому элементу множества x модели M_z^t сопоставим мысленно некоторое вхождение буквы «—» в некоторое слово P_x в алфавите $\{-\}$ таким образом, что соответствие между элементами и вхождениями буквы «—» в P_x взаимно-однозначно и сохраняет отношение «лежать левее» (в x или, соответственно, в P_x).

Принцип (P) мы заменим следующим постулатом:

(П) Каково бы ни было слово P в алфавите $\{-\}$, если некоторые вхождения буквы «—» в P заменить по какому-либо закону, который может быть выражен C-формулой, вхождениями буквы «+», сохраняя, естественным образом, порядок, то получится слово T в алфавите $\{+, -\}$.

Затем нужно еще допущение, что

3.16221. Каждому слову T_x, получающемуся из P_x, как описано (для P и T) в (П), соответствует множество t, состоящее в точности из тех элементов множества x, соответствующие которым вхождения буквы «—» в P_x были заменены, при переходе от P_x к T_x согласно (П), на вхождение буквы «+».

Это допущение дает, конечно, некоторый способ построения множеств. При данных x и F оно настолько близко примыкает к использованию явных определений и групповых свойств взаимно-однозначных соответствий, что мы оставим его здесь без дальнейшего рассмотрения. Справедливость этого допущения с неопределенными, т. е. переменными, x и F усматривается из интерпретации всеобщности (для этих переменных).

Неочевидность постулата (П) состоит в том, что слово мы мыслим себе как последовательность букв, выписанных друг за другом; между тем буквы выражения T возникают другим образом. Принцип индукции от n к $n + 1$ позволил бы легко убедиться в истинности этого постулата, но так как мы здесь от этого принципа отказались, то в этом пункте нам нужна некоторая экстраполяция, основанная, очевидно, на том, что для доступных нашей интуиции слов x утверждение (П) оказывается верным.

Для обоснования 3.1533 нужен еще дальнейший постулат:

(Σ). Существует список Σ слов T, которые можно получить из слова P в алфавите $\{-\}$ согласно (П), такой, что всякое такое слово T встречается в этом списке Σ.

Наконец, для обоснования 3.1533 нужно еще допущение:

3.16222. Для всякого множества x модели M_z^t существует множество этой модели, состоящее в точности из всех тех множеств t, которые получаются согласно 3.16221 из слов списка Σ_x, построенного для P_x (как Σ для P) согласно постулату (Σ).

Очевидно, что это допущение так относится к постулату (Σ), как допущение 3.16221 к постулату (П). Мы поэтому не будем его рассматривать подробнее. Укажем лишь, что допущения 3.16221 и 3.16222 связаны с экстраполяцией того же типа, что и отмеченная выше в связи с постулатом (П).

Рассмотрим постулат (Σ). Его легко было бы обосновать индукцией от n и $n + 1$, но от этого обоснования мы здесь должны отказаться.

Очевидно, что на справедливость этого постулата не повлияет, если мы всюду будем говорить о цифрах «0» и «1» вместо букв «—» и «+», соответственно.

У нас имеется идея, согласно которой всякая последовательность нулей и единиц, т. е. слово в алфавите $\{0,1\}$, изображает некоторое натуральное число, причем лексикографическому упорядочению слов в алфавите $\{0,1\}$ соответствует отношение, «меньше» между натуральными числами. Хотя эта идея и обосновывается в настоящее время при помощи индукции от n к $n + 1$, все же уверенность в справедливости этой идеи существует у нас независимо от принципа индукции. В самом деле, эта идея (в применении к десятичной системе счисления, а не двоичной, но это, очевидно, несущественно) возникла значительно раньше, чем был сформулирован (Пеано, 1889 г.) принцип индукции от n к $n+1$, и в наше время в процессе обучения мы также знакомимся с системами счисления раньше, чем с принципом индукции. Кроме того, согласно указанной идее, всякое слово T, описанное в постулате (П) и изображаемое теперь в алфавите $\{0,1\}$, изображает натуральное число меньшее, чем 100...0, где нули находятся во взаимно-однозначном соответствии с буквами слова P. Наконец, у нас есть идея, что для всякого натурального числа N, в частности для только что упомянутого числа 100...0, мыслим список всех натуральных чисел, меньших чем N. Сопоставляя эту идею с предыдущей, мы приходим к обоснованию постулата (Σ).

Мы не претендуем на то, что это обоснование постулата (Σ) не может быть предметом критики. Предложение, которое этот постулат выражает, родственно — особенно в силу допущений 3.16221 и 3.16222 — аксиоме С3 системы ZF^- (в виде С3$^\sim$, см. § 1). Но в то время как последняя связана в традиционной теории множеств с рассмотрением «множества всех подмножеств произвольного множества» (вообще говоря, бесконечного), то есть, по сути дела, с рассмотрением совершенно немыслимого объекта, та идея, которой мы воспользовались при обосновании постулата (Σ), столь глубоко присуща нашему математическому мышлению, что творчество таких людей, как Кантор и Пеано, должно было с ней сообразовываться.

Логической необходимости в этом, повторяем, нет.

Рассмотрим теперь снова постулат (П). Неочевидность его усугубляется тем обстоятельством, что закон, по которому производится замена «—» на «+», вообще говоря не имеет традиционного смысла. Однако мы обычно убеждены в том, что если имеется некоторое число N ящиков и в каждый из них каким-то образом положен белый или черный шар, то имеется лишь 2^N возможностей относительно того, каким образом расположены в этом случае белые и черные шары. Эта уверенность имеется при любом N, независимо от того, что свойство ящика, о котором идет речь, вообще не может быть выражено математически, даже при помощи C-формулы. Ясно, с другой стороны, что если ящики занумерованы в порядке от 1 до N, то между распределениями белых и черных шаров и словами длины N в алфавите $\{+, -\}$ (или в алфавите $\{0, 1\}$) имеется взаимно-однозначное соответствие; и если бы утверждение постулата (П) о существовании слова T было неверно, то это означало бы, что имеются распределения белых и черных шаров помимо известных нам 2^N или что имеются записи длины N из 0 и 1, изображающие число, отличное от всех чисел от 0 до 100...0, что кажется нам невероятным. Таким образом, каково бы ни было слово P в алфавите $\{-\}$ и замена некоторых вхождений «—» в P на «+», определяемая некоторой C-формулой, утверждение постулата (П) не может быть неверным, а значит, верно двойное отрицание этого утверждения. Именно этим двойным отрицанием, как было отмечено, мы могли воспользоваться выше.

Заметим, что, по существу, мы уже рассмотрели все принципы, которыми пользовались (т. е. приписывали мышлению субъекта S) при обосновании системы Z^-, кроме 3.1521. В самом деле, принцип (R) при этом не использовался; что же касается принципа (I_t) или (I_t'), то в модели M_z его можно заменить индукцией по ступени M_z-множества, так как эта ступень осуществима.

Что касается постулата (R), то он, по существу, сводится к утверждениям, что если каждый элемент данного множества x по некоторому закону заменить множеством, то получится квазимножество, и что всякое квазимножество можно нормализовать. При этом закон, о котором только что шла речь, не обязательно выражается традиционным утверждением: он может быть выражен любой C-формулой $F(\delta, t)$, такой, что справедливо $\forall t[t\varepsilon x \supset \exists! \delta F(\delta, t)]$. Впрочем, последнее обстоятельство является несущественным: можно было бы в 3.1523 ограничиться традиционными $F(z, t)$ (вместо $F(\delta, t)$), причем вместо единственности для переменной z (соответствующей δ) в 3.1523 можно было бы ограничиться требованием, что все z такие, что $F(z, t)$ при данном t имели бы ограниченную ступень (т. е. входили в некоторое множество $\mathfrak{Q}(u)$, где u зависит от t). При этом множество y в формулировке (R) можно было бы расширить за счет всех элементов только что упомянутого $\mathfrak{Q}(u)$. При этом множество y в 3.1535124 и равнообъемное ему N_n-

множество λ в 3.1535125 заменились бы более широкими множествами y' и λ', а эквивалентности в 3.1535124 и 3.1535125 превратились бы в импликации справа налево; в соответствии с этим в 3.15352 эквивалентность заменилась бы на импликацию справа налево, но при помощи 3.15347 мы затем опять легко получили бы 3.15352.

Что касается индукции (I_t) и (I_t), то она нужна лишь для доказательства таких простых предложений, как 2.2221, 2.224 (1.—4.), 2.2241 и 2.2242. Таким образом, вместо (I_t) и (I_t') мы могли постулировать только 2.2221 и эти простые свойства скобок. Что касается системы Z^- и модели M_z, то в этой замене нет надобности, так как индукция (I_t) и (I_t) является в этом случае индукцией по осуществимым числам.

3.1623. Допущение 3.1521 можно заменить его двойным отрицанием; так же как и в случае постулатов (O), (P) и т. д., этого двойного отрицания достаточно для наших целей.

К сожалению, это двойное отрицание

3.16231. $\neg\neg(\forall z\,(z\varepsilon x \supset \neg\neg F(z) \supset \neg\neg\forall z\,(z\varepsilon x \supset F(z)))$ недоказуемо в интуиционистском исчислении предикатов. Более того, аналогичная формула оказывается даже ложной в интерпретации этого исчисления, основанной на понятии реализуемости Клини [12, § 82, теорема 63^{N} (v)]. Правда, это соображение относится к арифметике.

Для того чтобы обосновать 3.1521, или хотя бы 3.16231, достаточно было бы доказать непротиворечивость закона исключенного третьего в рассуждениях, убедительных для субъекта S (т. е. по существу осуществимых для него) и основанных на остальных рассмотренных нами постулатах. Для этого, как нам кажется, достаточно обосновать непротиворечивость этого закона для арифметики с двумя родами переменных (один из которых соответствует осуществимым числам, а другой — произвольным натуральным числам) с принципом индукции только для случая, когда индукционная переменная относится к осуществимым числам, и с постулатами того же типа, что и постулаты (P) и (R) (или предыдущие постулаты (П), (Σ) и (P)), а также 3.16221 и 3.16222, на точной формулировке которых мы здесь не останавливаемся (по существу, эта формулировка должна быть арифметизацией только что указанных постулатов). Эти постулаты мы будем в этом разделе называть *дополнительными*. То, что этого, действительно, достаточно, вытекает, как нам кажется, из естественного аналога гёделевской теоремы о полноте, который, по-видимому, может быть доказан методом Хенкина [18] и Хазенъегера [19], если под осуществимостью понимать осуществимость относительно используемых в этом рассуждении функций (см. раздел 3.14; эти функции вычислимы в традиционном смысле). Это доказательство возможно, конечно, только в классической откровенной арифметике, впрочем без дополнительных постулатов. Непротиворечивость такой арифметики доказана в [1].

Итак, мы считаем, что рассматриваемый вопрос может быть сведен к обоснованию классической откровенной арифметики с дополнительными постулатами. Обоснование это должно быть проведено средствами соответствующей интуиционистской теории, хотя бы за счет гипотез об осуществимости тех или иных функций (т. е. рассмотрения относительной осуществимости, 3.14).

К сожалению, мы не смогли продвинуться в решении этой последней задачи, несмотря на попытки применить все известные нам методы доказательства непротиворечивости классической арифметики. Неоднократно нам казалось, что мы у цели, но затем обнаруживалась ошибка petitio principii, и это создает у нас впечатление неразрешимости занимающей нас задачи.

Трудность состоит именно в сочетании закона исключенного третьего с дополнительными постулатами. Некоторые соображения, приведенные нами выше, мы рассматриваем как более или менее убедительные доводы в пользу истинности последних. Однако ни одно из доказательств непротиворечивости закона исключенного третьего не дает нам довода в пользу истинности этого закона, хотя бы в некоторой интерпретации области изменения переменных, но при естественной интерпретации $\vee$ и $\exists$.

Если бы дело обстояло иначе, мы могли бы пойти на усиление постулатов (P) и (R), постулируя их для такой интерпретации. Однако в существующих условиях мы не можем на это пойти, равно как не можем пойти и на другой шаг — постулирование вместо (P) и (R) их «переводов», не содержащих «$\vee$»

и «∃». Таких постулатов было бы достаточно для нашей цели, но мы не признаем за ними никакой убедительности.

Все же мы приведем здесь следующий эвристический довод, в силу которого возникновение противоречия в классической откровенной арифметике с дополнительными постулатами кажется нам мало вероятным. В силу обоснования дополнительных постулатов такое противоречие означало бы опровержимость конъюнкции некоторых формул вида $\forall(A \vee \neg A)$; каждая же такая формула выражает разрешимость A. В то же время все наши постулаты (кроме 3.1521) допускают интуиционистскую интерпретацию логических операторов, и ни один из них не содержит «косвенного пункта» (Клини [2, §§ 6, 53]), при помощи которого мы только и могли бы надеяться опровергнуть совместную разрешимость нескольких формул A. Кроме того, интуиционистская интерпретация операторов a priori не должна допускать выражения в рассматриваемой системе (мы имеем в виду тот факт, что, например, предикат реализуемости (Клини [2, § 82]) не является арифметическим по Гёделю), так что отпадает возможность опровергнуть указанную разрешимость посредством диагонального процесса. Заметим также, что если отбросить постулаты (P) и (R), то для оставшихся дополнительных постулатов, а также для постулата (O), легко дать классическую арифметическую интерпретацию методом второго доказательства теоремы 44 книги Клини [2].

С другой стороны, мы допускаем мысль, что классическая откровенная арифметика с дополнительными постулатами может иметь не логическое, а философское обоснование — подобное тому, какое мы имеем для утверждения $\forall(x \varepsilon y \vee \neg x \varepsilon y)$. Вообще, вера классика в справедливость закона исключенного третьего основана на его вере в наличие «внутреннего обстояния» A или не-A, и в случае, когда A есть $x \varepsilon y$, где y есть M_z^t-множество, эта вера может быть основана на финитности y (для «внутреннего обстояния» осуществимость, очевидно, несущественна). Правда, мы не видим такого рода оснований для принятия закона исключенного третьего в рассматриваемой теории и даже для принятия допущения 3.1521. Но если все кванторы некоторой C-формулы φ относятся к переменным, областью изменения которых служит M_z^t-множество x, то есть имеют вид $\forall u (u \varepsilon x \supset \ldots)$ или $\exists u (u \varepsilon x \& \ldots)$, то можно согласиться с тем, что «внутреннее обстояние» налицо, и принять $\varphi \vee \neg \varphi$. Это соображение позволяет построить — без ссылки на 3.1521, но со ссылкой на «внутреннее обстояние» — некоторый фрагмент теории типов. Этот фрагмент является простой теорией типов без аксиомы объемности, с аксиомой бесконечности, сформулированной аналогично C5′ (переменным x, a и f соответствуют при этом переменные второго, первого и четвертого типов); на аксиомы свертывания накладывается при этом ограничение, состоящее в отсутствии связанных переменных первого типа. Для того чтобы освободиться от этого ограничения, достаточно допустить существование $M^!_z$-множества первой ступени, элементами которого служат в точности все пустые множества a_i с осуществимыми i; согласно 3.1522, это утверждение вытекает из

$$3.16232.\quad \forall x (x \varepsilon (a_0 \ldots a_z) \supset \exists \alpha (x = \alpha) \vee \neg \exists \alpha (x = \alpha)).$$

Для этого, в свою очередь, достаточно допустить

$$3.16233. \forall \tilde{n} (\exists \tilde{\alpha} (\tilde{n} = \tilde{\alpha}) \vee \neg \exists \tilde{\alpha} (\tilde{n} = \tilde{\alpha})),$$

где $\tilde{n}$ — переменное натуральное число, $\tilde{\alpha}$ — переменное осуществимое натуральное число, и ввести в рассмотрение предикат $P(x, \tilde{n})$, эквивалентный «$x = a_{\tilde{n}}$», допустив в (P) (3.1522) зависимость $F(t, \delta)$ от этого предиката и употребление переменных $\tilde{n}$, $\tilde{\alpha}$. Детали этого рассуждения мы предоставляем читателю.

Утверждения 3.16232 и 3.16233 — хотя, очевидно, и недоказуемые — кажутся в то же время интуитивно неопровержимыми. Как и в предыдущем случае, здесь достаточно допустить их двойные отрицания. К обоснованию этих двойных отрицаний мы надеемся вернуться в другой работе.

Таким образом, вопрос об обосновании допущения 3.1521 остается открытым. Мы пока подходили к этому вопросу с точки зрения закона исключенного третьего. Возможен и другой подход, состоящий в рассмотрении импликации (ср. 3.15210):

$$3.16234.\quad \neg\neg A_1 \& \ldots \& \neg\neg A_n \supset \neg\neg (A_1 \& \ldots \& A_n)$$

(где A_i имеет вид $\exists\delta F(\delta)$, а $F(\delta)$ можно считать C-формулой, не содержащей «$\bigvee$» и «$\exists$»), или ее двойного отрицания. Хотя мы и не признаем убедительной индукцию по неосуществимым числам, возможно в силу какого-нибудь соображения в этом случае индукция окажется убедительной или, по крайней мере, непротиворечивой. Одним из таких соображений может послужить то, что доказываемое по индукции предложение является тавтологией традиционного интуиционистского исчисления высказываний. Возможно, что тут есть место для узрения, аналогичного рассмотренному выше «внутреннему обстоянию» (говоря здесь об аналогии, мы имеем в виду только роль, но не сущность этого узрения).

Можно еще пытаться обосновать утверждения вида 3.16234 путем редукции их к таким же выражениям с осуществимым n, используя тот факт, что противоречие, понятное субъекту S, должно быть осуществимым. Правдоподобно, что если бы предложения $A_1, \ldots A_n$ в 3.16234 не имели между собой ничего общего, т. е. не имели бы вида $F(z_1, \ldots, F(z_n)$ (ср. 3.15210), то опровержение 3.16234 должно было бы, будучи осуществимым, состоять в выводе некоторого $\neg(A_{i_1}\&\ldots\&A_{i_k})$ с осуществимым k из $\neg\neg A_1, \ldots, \neg\neg A_n$, но это, при осуществимом k, не совместимо с 1.531. Доказательство этого можно провести в духе гильбертовского финитизма. Укажем без доказательства следующий факт, который может быть доказан в этом же духе: невозможен вывод противоречия из 3.1521 в рассматриваемой системе, не использующий правила Бернайса для $\exists$ (т. е. правила 12, Клини [2, § 19]); аналогичный результат верен и для правила Бернайса для $\bigvee$ (правило 9, [2, § 19]).

3.1624. Допущения, которыми мы до сих пор пользовались, таковы, что их совместимость вытекает из непротиворечивости теории ZF, рассматриваемой совместно с некоторой ее метатеорией. Это будет показано в разделе 3.17. Конечно, для обоснования самой теории ZF на этом пути мы должны найти обоснование наших допущений, независимое от непротиворечивости ZF. Для всех допущений, кроме 3.1521, мы указали выше некоторые доводы такого рода. Сейчас мы произведем редукцию допущений 3.1521—3.1523 к следующим допущениям, касающимся произвольных натуральных чисел.

Расширим понятие C-формулы, присоединив к прежним алфавитам переменных x, y, ... и α, β, ... новый вид переменных m, n... (переменные натуральные числа), функции $\overline{\overline{x}}$ (мощность x) и $m+n$ (сумма натуральных чисел) и предикат $m<n$. Формулы расширенной таким образом системы мы будем называть C'-формулами. Введем, далее, постулаты, в которых $m \leqslant n$ означает $m<n \vee m=n$, а $m>n - n<m$.

3.16241.

a. $\overline{\overline{x}}=0 \sim \neg \exists y\,(y \varepsilon x)$,
b. $\overline{\overline{x}}=1 \sim \forall y \forall z\,(y \varepsilon x \& z \varepsilon x \supset y=z)$,
c. $m \leqslant 1 \vee m>1$,
d. $m<p \& p<q \supset m<q$.

3.16242. Всякое множество x мощности $\overline{\overline{x}}>1$ может быть представлено в виде суммы двух (попарно непересекающихся) множеств x_1 и x_2 меньшей мощности.

3.16243. Пусть $F_1(n), \ldots, F_s(n)$ — некоторое осуществимое число s предложений, выражаемых C'-формулами. В таком случае для каждого из этих предложений справедлив принцип возвратной индукции:

3. 162430. $\forall n\,(\forall m\,(m<n \supset F_i(m)) \supset F_i(n)) \supset \forall l F_i(l)$ $(i = 1, \ldots, s)$.

Из этих постулатов вытекают допущения 3.1521—3.1523.

3. 1521. Это утверждение зависит от параметра x (и, возможно, других свободных переменных), в связи с чем мы его сейчас обозначим 3.1521 (x). Обозначим через $G(m)$ утверждение $\forall x\,(\overline{\overline{x}} \leqslant m \supset 3.1521\ (x))$. Докажем $\forall n\,(\forall m\,(m<n \supset G(m)) \supset G(n))$. Допустим $\forall m\,(m<n \supset G(m))$ и выведем $G(n)$, то есть $\forall x\,(\overline{\overline{x}} \leqslant n \supset 3.1521\ (x))$. Допустим $\overline{\overline{x}} \leqslant n$. Имеем: $\overline{\overline{x}} \leqslant 1 \vee \overline{\overline{x}}>1$ (3.16241 c). Если $\overline{\overline{x}} \leqslant 1$, то 3.1521 ($x$) очевидно (в силу 3.16241 a и b). Пусть $\overline{\overline{x}}>1$. Тогда, в силу 3.16242, $x=x_1+x_2$, где $\overline{\overline{x_1}}<n$, $\overline{\overline{x_2}}<n$ (3.16241 d); в силу $\forall m\,(m<n \supset G(m))$ мы имеем $G(\overline{\overline{x_1}})$ и $G(\overline{\overline{x_2}})$, откуда $\overline{\overline{x_1}} \leqslant \overline{\overline{x_1}} \supset 3.1521\,(x_1)$ и $\overline{\overline{x_2}} \leqslant \overline{\overline{x_2}} \supset 3.1521\,(x_2)$, и, в силу $\forall x\,(\overline{\overline{x}} \leqslant \overline{\overline{x}})$, мы имеем

3.1521 (x_1). $\quad \forall z\,(z \varepsilon x_1 \supset \neg\neg F(z)) \supset \neg\neg \forall z\,(z \varepsilon x_1 \supset F(z))$

и

3.1521 (x_2). $\quad \forall z\,(z \varepsilon x_2 \supset \neg\neg F(z)) \supset \neg\neg \forall z\,(z \varepsilon x_2 \supset F(z))$.

Выведем отсюда 3.1521(x). В силу $x = x_1 + x_2$ $\forall z (z \varepsilon x \sim z \varepsilon x_1 \vee z \varepsilon x_2)$, а потому $\forall z (z \varepsilon x \supset \neg\neg F(z)) \sim \forall z (z \varepsilon x_1 \supset \neg\neg F(z)) \& \forall z (z \varepsilon x_2 \supset \neg\neg F(z))$. В силу 3.1521 ($x_1$) и 3.1521 ($x_2$), мы получаем $\forall z (z \varepsilon x \supset \neg\neg F(z)) \supset \neg\neg \forall z (z \varepsilon x_1 \supset F(z)) \& \neg\neg \forall z (z \varepsilon x_2 \supset F(z))$ — и, в силу 1.531, $\forall z (z \varepsilon x \supset \neg\neg F(z)) \supset \neg\neg [\forall z (z \varepsilon x_1 \supset F(z)) \& \forall z (z \varepsilon x_2 \supset F(z))]$, откуда, пользуясь снова $\forall z (z \varepsilon x \sim z \varepsilon x_1 \vee z \varepsilon x_2)$, мы получаем 3.1521 ($x$).

Итак, в предположении $\forall m (m < n \supset G(m))$ мы вывели $\overline{\overline{x}} \leqslant n \supset 3.1521\,(x)$; навешивая $\forall x$, мы получаем $G(n)$. В силу 3.162430 мы получаем теперь $\forall m G(m)$, то есть $\forall m \forall x (\overline{\overline{x}} \leqslant m \supset 3.1521\,(x))$, в частности $\overline{\overline{x}} \leqslant \overline{\overline{x}} \supset 3.1521\,(x)$. В силу $\overline{\overline{x}} \leqslant \overline{\overline{x}}$ мы получаем отсюда 3.1521 (x).

3.1522. Ввиду зависимости этого утверждения от x мы обозначим его сейчас через 3.1522 (x). Через $G(m)$ мы обозначим утверждение $\forall x (\overline{\overline{x}} \leqslant m \supset 3.1522\,(x))$. Допустим $\forall m (m < n \supset G(m))$ и выведем $G(n)$, для чего, в свою очередь, допустим $\overline{\overline{x}} \leqslant n$ и выведем 3.1522 (x), то есть

$$\forall z (z \varepsilon x \supset \exists\,!\, t\, F(t, z)) \supset \exists y\, \forall z (z \varepsilon y \sim z \varepsilon x \,\&\, F(+, z)).$$

Как в случае 3.1521, достаточно рассмотреть случай $\overline{\overline{x}} > 1$. В этом случае возьмем, как выше, x_1 и x_2 такие, что $x = x_1 + x_2$, $\overline{\overline{x}}_1 < n$, $\overline{\overline{x}}_2 < n$, тогда будем иметь 3.1522 (x_1) и 3.1522 (x_2). Допустим теперь $\forall z (z \varepsilon x \supset \exists\,!\, t F(t, z))$ (т. е. посылку 3.1522 (x)), тогда в силу $z \varepsilon x_1 \supset z \varepsilon x$ и $z \varepsilon x_2 \supset z \varepsilon x$ верны посылки 3.1522 (x_1) и 3.1522 (x_2) и, в силу утверждений 3.1522 (x_1) и 3.1522 (x_2), существуют некоторые множества y_1, соответственно y_2, такие, что $\forall z (z \varepsilon y_h \sim z \varepsilon x_h \,\&\, F(+, z))$ $(h = 1, 2)$. В силу $\forall z (z \varepsilon x_1 \vee z \varepsilon x_2 \sim z \varepsilon x)$, сумма $y = y_1 + y_2$ удовлетворяет условию $\forall z (z \varepsilon y \sim z \varepsilon x \,\&\, F(+, z))$, т. е. выполняется заключение 3.1522 (x).

3.1523 доказывается аналогично.

Для вывода двойных отрицаний утверждений 3.1521 — 3.1523 достаточно, в силу 1.5332 и 1.531, постулатов 3.16241, 3.16242 и постулата 3.16243, сформулированного лишь для таких $F_i(n)$, для которых верно $\neg\neg F_i(n) \supset F_i(n)$.

Постулат $\neg\neg_\varepsilon$ также может быть выведен из 3.16241 — 3.16243 (так как $\neg\neg_\varepsilon$ вытекает из 3.1501, и из справедливости закона исключенного третьего для $x \varepsilon y_1$ и $x \varepsilon y_2$ вытекает то же для $x\varepsilon y_1 \vee x\varepsilon y_2$ (см. Клини [2, § 29, лемма 13]), т. е. закон исключенного третьего для $x\varepsilon y_1 + y_2$), а постулат (Σ) — редуцирован к утверждениям:

$$(\Sigma_1) \quad \forall x \forall y \exists z \forall u [u\varepsilon z \sim \exists v \exists w [v\varepsilon x \,\&\, w\varepsilon y \,\&\, u = v + w]]$$

и

$$(\Sigma_2) \quad \forall x \forall y \forall z [z \subseteq x + y \sim \exists u \exists v [z = u + v \,\&\, u \subseteq x \,\&\, v \subseteq y]].$$

По теореме 1.54, постулат $\neg\neg_{=}$ может быть выведен из $\neg\neg_{\varepsilon}$ и $x = y \sim \forall z (z\varepsilon x \sim z\varepsilon y) \,\&\, \forall z (x\varepsilon z \sim y\varepsilon z)$.

Остается обосновать постулаты 3.16241 — 3.16243 (последний — в только что ослабленном виде). Трудно, однако, рассчитывать в отношении этих постулатов, в применении к неосуществимым числам, на ту же степень очевидности, которою обладает постулат (О). Мы хотели бы получить для них хотя бы ту степень очевидности, которую имеют утверждения 3.1501, 3.1502 и (Σ). Постулаты 3.16241 и 3.16242 обладают очевидностью примерно этого рода. (Заметим, что формулировка 3.16242 предполагает, конечно, возможность некоторого определенного разложения x в сумму x_1 и x_2 — например, такого, при котором $\overline{\overline{x}}_1 = \left[\frac{\overline{\overline{x}}}{2}\right]$ и Al (y, z) при $y\varepsilon x_1$, $z\varepsilon x_2$.)

Неосуществимые числа, с которыми мы здесь имеем дело, можно считать числами, осуществимыми для некоторого субъекта T, более сильного, чем S. При этом, в связи с моделью M_z (а значит, и теорией Z^-) достаточно считать, что для субъекта T осуществимо некоторое число z, неосуществимое для S, и вместе с каждым числом n осуществимо 2^n и все меньшие числа. Кроме того, если субъект T регламентирован относительно предложений вида $F_i(n)$ из 3.16243 и возвратной индукции, так же как субъект S относительно $A(x)$ и обыкновенной индукции (см. выше 3.147), и субъект S согласен с теми утверждениями, которые T произносит в виде «заклинаний», то постулат 3.16243 можно считать убедительным для S. Если все $F_i(n)$ имеют вид $\neg\neg G_i(n)$, то для обоснования $\forall n F_i(n)$ нет надобности рассматривать весь класс чисел, осуществимых для T — так как, в силу 1.5341, $\forall n \neg\neg G_i(n) \sim \neg\exists n \neg G_i(n)$

и достаточно опровергнуть $\exists n \neg G_i(n)$, т. е. рассматривать $\neg G_i(n)$ только для произвольного числа этого класса. (Аналогичный довод применим в 3.147.)

Однако это соображение кажется нам недостаточно убедительным. Неясно, в частности, в чем состоит разница между возвратной и обыкновенной индукцией (принятие вместо 3.16243 обыкновенной индукции приводит к противоречию). Правдоподобная гипотеза состоит в том, что возвратная индукция не дает возможности доказать существование предшественника у каждого натурального числа и опровергнуть таким образом постулат (O). Желательно доказать это со всей строгостью, четко перечислив все постулаты. Пока что проблема обоснования совместимости постулата 3.16243 с остальными постулатами остается открытой.

Для ее решения мы предлагаем искать обоснования предыдущего рассуждения, касающегося регламентации субъекта T. Именно, в качестве произвольных натуральных чисел мы предлагаем рассматривать только такие числа x, что из $\forall m | \forall n \times (n < m \supset F(n)) \supset F(m))$, где m и n — переменные натуральные числа, вытекает $\forall n\, (n \leqslant x \supset F(n))$. Все числа, осуществимые для S, обладают этим свойством в силу [2, § 40, *162b]. Главная трудность состоит в доказательстве того, что среди этих чисел x могут иметься неосуществимые для S. Для этого утверждения следует, как нам кажется, искать интуитивного обоснования. Затем нужно показать, что вместе со всяким x к этой же категории можно отнести все числа $\leqslant 2^x$. Это — для теории Z^-; для теории ZF^- следует значительно усилить последнее утверждение.

3.17. Намеченное в предыдущем разделе 3.16 обоснование постулатов (O), (П), (Σ) и (R), 3.16221, 3.16222 и 3.1521 не претендует, конечно, на бесспорность, потому что наше обсуждение этих постулатов нельзя считать законченным. Мы изложили, каким образом построение теории множеств может быть проведено в откровенной теории, на основе некоторых постулатов, и привели некоторые доводы в защиту этих постулатов — и только. Пока что мы не располагаем средствами к радикальному обоснованию этих постулатов, в особенности $\neg\neg$ (3.1521), $\neg\neg$ (П) и $\neg\neg(\Sigma)$. Возможно, впоследствии будет найден постулат типа (O), позволяющий это сделать, но это уже будет существенным расширением нашей точки зрения. Что же касается того обоснования, которое мы привели, то оно, возможно, апеллирует скорее к привычкам нашего мышления, чем к безусловной необходимости. В то же время мы должны были отказаться от других сильных привычек — от применения принципа индукции в его традиционном понимании и от привычки считать, что каждое слово имеет последнюю букву. Правда, это согласуется с нашим подходом, развитым еще в [1], но необходимость указанной жертвы наводит тень на нашу позицию.

Впрочем, благодаря откровенной точке зрения мы смогли обратиться к непосредственному изучению того сырого материала, из которого, путем идеализации, возникла теория множеств. Наши постулаты (Σ) и (П) являются прообразами аксиом C3 и CIV, а 3.1521 — прообразом употребления закона двойного отрицания в теории множеств.

В этом разделе мы покажем, что совместимость наших постулатов, в свою очередь, является следствием из непротиворечивости ZF, взятой с надлежащей метатеорией (включающей теорему о непротиворечивости ZF). Таким образом, мы не ввели никаких допущений, которые не были бы свойственны теории множеств. Таким образом, в некотором смысле критика наших постулатов является и критикой отдельных аксиом теории множеств, и отношения между этими постулатами говорят нечто об отношениях между аксиомами ZF. Можно сказать, например, что добавление схемы подстановки к теории Цермело (соответствующее принятию постулата (R)) является менее спорным шагом, чем введение аксиом C3 и CIV, аксиома же CIV является, пожалуй, более спорной, чем C3. (Заметим в этой связи, что при содержательном генетическом построении теории множеств схема CIV оказывается следствием из C3; только что отмеченное обстоятельство указывает на то, что возможность такого генетического построения является спорной.) Впрочем, в этих заключениях имеется элемент неопределенности, связанный с тем, что можно варьировать наши постулаты и те понятия, к которым они относятся.

Приступим теперь к доказательству утверждения, что совместимость наших постулатов вытекает из непротиворечивости

ZF, взятой вместе с надлежащей метатеорией. Прежде всего надо уточнить это утверждение.

Конечно, о прямом доказательстве совместимости наших постулатов средствами какой-либо традиционной теории говорить не приходится, поскольку такие понятия, как «субъект», «осуществимость для субъекта» и «довод, понятный субъекту», отсутствуют в любой такой теории. Но можно надеяться построить традиционную модель для теории, которая с откровенной точки зрения содержит все «доводы, понятные субъекту S» — этим и будет, откровенно, доказано наше утверждение.

Заметим еще, что мы до сих пор употребляли выражение «субъект», но, конечно, мы не доказали наличие хотя бы одного субъекта. Строго говоря, субъект, производящий счет, непрерывно меняется, так что лицо, произносящее «пять», и лицо, произносящее «шесть»,— это в каком-то смысле различные лица, и если мы считаем, что их можно объединить в одно понятие «субъект», приписывая этому субъекту возможность неопределенно долго продолжать счет, то это есть некоторая гипотеза, которую следовало бы выразить явно. Если мы этого не делали до сих пор, то это главным образом потому, что в чистом виде понятие субъекта нам не было нужно — нам нужны именно понятия «осуществимости» и «убедительности» (понятности).

Рассмотрим теорию ZF, к которой присоединена аксиома фундирования:

$$3.171. \quad \forall a\,[\exists b\,(b \in a) \supset \exists c\,(c \in a \mathbin{\&} \forall d \neg (d \in c \mathbin{\&} d \in a))].$$

(Обычно под аксиомой фундирования системы Σ Гёделя [3] понимают, с точностью до эквивалентности, утверждение, которое получается из 3.171, если заменить a на A; для системы ZF рассматривают схему аксиом фундирования, которая получится, если в 3.171 откинуть $\forall a$ и заменить части $b \in a$, $c \in a$ и $d \in a$ на формулы $\varphi(b)$, $\varphi(c)$ и $\varphi(d)$, получающиеся путем подстановки b, c и d, соответственно, вместо x из некоторой формулы $\varphi(x)$. Но каждая аксиома, получающаяся по этой схеме, следует из 3.171, в теории ZF или в теории Z с добавленной аксиомой о том, что для всякого множества x существует наследство $\mathrm{Her}(x)$, т. е. минимальное множество, которое содержит в качестве элемента x и вместе со всяким элементом y содержит в качестве элемента все элементы y (см. ниже 4.3399). В самом деле, достаточно образовать наследство $\mathrm{Her}(b)$ такого множества b, что $\varphi(b)$, и применить 3.171 к множеству тех элементов $\mathrm{Her}(b)$, для которых верно $\varphi(x)$.)

Относительная непротиворечивость аксиомы фундирования доказана фон-Нейманом (см. [3]); Шепердсон [9] также доказал ее для системы геделевских аксиом A, B и C, а на систему Цермело — Френкеля этот результат переносится благодаря результатам И. Новак или Шёнфилда [8, 11]. (Отметим, что это утверждение легко доказывается и для теории Цермело.) Систему ZF с аксиомой 3.171 мы обозначим ZF' (ср. § 1).

Добавим далее к ZF' аксиому выбора E′, аналогичную аксиоме E из [3], согласно которой все множества могут быть вполне упорядочены. Полученную систему обозначим ZF''. Относительное доказательство непротиворечивости этой системы получается путем сопоставления результатов [3] и [8, 11].

Будем далее считать, что система ZF'' видоизменена за счет присоединения счетного числа индивидуумов a_{-2}, a_{-1}, a_0, ..., a_ω, т. е. элементов, не являющихся множествами. (В [20] мы показали, что это можно сделать без противоречия — правда, для несчетной мощности и системы Σ Гёделя, но это сейчас несущественно.) Эти индивидуумы можно также при желании считать пустыми множествами с заменой аксиомы C0 на $\mathrm{C0}^-$.

В качестве метатеории MZF'' мы возьмем некоторую теорию, содержащую ZF'', например, какую-нибудь более сильную теорию множеств; таким образом, каждому порядковому числу теории ZF'' соответствует при этом некоторое порядковое число теории MZF''(с сохранением отношения «$<$»), и натуральные числа обеих теорий соответствуют друг другу взаимно-однозначно. Кроме того, мы будем считать, что в MZF'' доказуема формула Con, выражающая непротиворечивость ZF'' — и притом в форме, выражающей недоказуемость равенства $a_0 = a_1$.

Алфавит A_z мы интерпретируем как множество $\{a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_\omega\}$. Буквы «(» и «)» мы интерпретируем как a_{-2} и a_{-1}, соответственно; буквы $a_0, \ldots, a_z$ — как $a_0, \ldots, a_\omega$ (то есть z как ω).

Слово в алфавите A_z мы интерпретируем как функцию теории ZF'', определенную на некотором порядковом числе (интерпретирующем «длину слова») и принимающую значения в этом «алфавите».

Если «слово P» есть функция над α, а «слово Q» — функция над β, то естественным образом определяется слово PQ как функция над $\alpha + \beta$ (где $+$ — операция сложения порядковых чисел) и доказывается $(PQ)R = P(QR)$. Вхождение XQY слова Q в слово XQY мы интерпретируем как упорядоченную тройку $< XQY >$ «слов» X, Q и Y.

Алфавитный порядок $\mathrm{Al}\ (x, y)$ между словами мы заменим отношением предшествования, о котором идет речь в аксиоме E'. Утверждения 2.211—2.215 при этом сохраняют силу для рассматриваемой интерпретации.

Сохраняют силу также все утверждения раздела 2.223. При желании можно также интерпретировать операцию $S^{A_1 \ldots A_m}_{a_1 \ldots a_m} P\Big|$ и проверить в интерпретации все утверждения раздела 3.150.

Число мы интерпретируем как число теории MZF'', осуществимое число — как натуральное число этой теории. Это соглашение относится к таким употреблениям понятия числа, как «число шагов доказательства» и т. п. Индекс i «буквы» $a_i (i \geqslant 0)$ мы будем интерпретировать как «осуществимый» если $i < \omega$.

Сказанного достаточно, чтобы определить (индуктивно) понятие «M_z^t-множества», а также «элемента» и «ступени» («ступень» — это порядковое число теории ZF''). При помощи 3.171 доказывается, что между «M_z^t-множествами» и множествами теории ZF'' существует взаимно-однозначное соответствие C, сохраняющее «отношение принадлежности», и, далее, что «M_z^t-множества» удовлетворяют всем аксиомам системы ZF. Справедливость принципов (I_t) и (I_t') в этой интерпретации также проверяется при помощи 3.171. N_z-множество мы интерпретируем как «M_z^t-множество», отличное от α_ω.

Нетрудно доказать справедливость постулатов (O), (P), (R), постулата о существовании $\mathfrak{P}(x)$, 3.1521 и др. Вместо (P) и постулата о $\mathfrak{P}\,(x)$ можно с таким же успехом рассматривать постулаты (П) и (Σ); доказательство их справедливости в нашей интерпретации основано на аксиомах CIV и C3 соответственно, а также соответствии C между M_z^t-множествами и множествами теории ZF''. Аналогично (при помощи схемы C4) проверяется постулат (R). Постулат (O) выполняется в интерпретации, так как ω не является натуральным числом.

Постулаты $=_1 - =_7$ верны в интерпретации в силу аксиом равенства теории ZF, а $\neg\neg_=$, $\neg\neg_\varepsilon$ и 3.1521 — в силу наличия в ZF'' закона исключенного третьего.

Довод или доказательство, «понятные» субъекту S — это рассуждения, формализуемые при помощи C-формул по правилам интуиционистской логики и имеющие «осуществимую» (т. е. натуральную) длину. При желании можно аналогичным образом рассматривать и доказательства более широкого класса — например, получающиеся на некотором «метауровне» откровенной теории.

В интерпретации мы понимаем под этим просто доказательство, формализуемое в ZF''.

Утверждению о том, что субъект S не в состоянии понять никакого доказательства C-формулы $+ = -$, соответствует в интерпретации формула Con теории MZF''.

Мы не станем входить в подробности проверки высказанных утверждений, так как всякому, кто знаком с теорией ZF, должна быть очевидна возможность формализации предыдущих рассуждений в ZF'', соответственно в MZF''. Из результатов § 4 будет видно, что вместо ZF здесь достаточно рассматривать ZF^-.

Для модели M_z и системы Z, по-видимому, можно привести аналогичные соображения. С другой стороны, на постулаты 3.16241—3.16243 рассуждения этого раздела не распространяются.

3.2. Вернемся к нашим постулатам раздела 3.1624.

Описанное в этом разделе обоснование утверждений 3.1521—3.1522 и $\neg\neg_\varepsilon$ можно повторить почти без всяких изменений, если постулат 3.16242 заменить на

$$3.20.\ \overline{\overline{x+y}} = \overline{\overline{x}} + \overline{\overline{y}},$$

а в результате 3.162243 C'-формулы 3.162430 заменить на C'-формулы

$$3.21.\ F_i(0) \,\&\, F_i(1) \,\&\, \forall m \forall n\, (F_i(m) \,\&\, F_i(n) \supset F_i(m+n)) \supset \forall l F_i(l) \quad (i = 1, \ldots, s);$$

при этом в определении понятия C'-формулы можно откинуть слова «и предикат $m<n$», а в постулате 3.16241 — пункты с. и d.

В справедливости только что высказанного утверждения мы предоставляем удостовериться читателю. (Указание: применение 3.162430 было фактически основано на доказательствах утверждений $3.1521(x_1)$ & $3.1521(x_2) \supset 3.1521(x_1 + x_2)$ и аналогичных утверждений для остальных постулатов и на том, что представление x в виде $x_1 + x_2$ выбиралось в соответствии с 3.16242. Теперь, в силу 3.21, достаточно только что упомянутых утверждений). Заметим, что и утверждение о существовании $\mathfrak{S}(x)$ может быть получено аналогичным образом.

Можно ли добиться на этом пути фактического обоснования теории ZF_i^-?

Получить аналогичным образом постулаты (О) и (Σ) — или (О), (Σ_1) и (Σ_2) — не удается. Постулат (Σ) (равносильный обоим постулатам (Σ_1) и (Σ_2)) фактически утверждает, что для всякой мощности x имеется мощность, равная 2^x.

Постулат (О) мы примем, равно как и постулат о существовании $\{xy\}$, и постулаты 3.1621a, b, 3.20 и (Σ). Можно ли после этого принять 3.21 для любых s C'-формул F_i?

3.21 выражает принцип индукции для чисел, осуществимых относительно «$+$». Прежде всего, нельзя считать, что вместе с a относительно «$+$» должно быть осуществимо число 2^a, как того требует (Σ). Но можно представить себе такое понятие осуществимости (связанное, если угодно, с некоторым субъектом T), при котором *всякое* число осуществимо относительно «$+$», хотя и существует число z, не осуществимое относительно одной только операции $'$, как того требует (О).

При этом получение достаточно больших чисел при помощи «$+$» может потребовать неосуществимое относительно $'$ число применений операции «$+$». Поэтому постулатом 3.21 надлежит пользоваться с большой осторожностью. Именно, утверждение $\forall m \forall n (F(m) \& F(n) \supset F(m + n))$, входящее в 3.21 (мы сейчас опускаем индекс i), должно считаться доказанным лишь при условии, что вывод $F(m + n)$ из $F(m)$ и $F(n)$ при фиксированных m и n не содержит применений операции $'$ по отношению к переменным $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, ..., обозначающим числа, осуществимые относительно $'$. Под этими применениями мы подразумеваем просто применения аксиом вида

$$3.22.\quad \forall\bar{\alpha} A(\bar{\alpha}) \supset A(\bar{\beta}') \text{ или } A(\bar{\beta}') \supset \exists\bar{\alpha} A(\bar{\alpha})$$

(или аксиом с бо́льшим числом штрихов над β, которые, впрочем, можно свести к 3.22).

Более того: если в некотором выводе применяются аксиомы 3.22, то применения 3.21 в этом выводе можно считать допустимыми лишь при условии, что при выводе $F(m+n)$ из $F(m)$ и $F(n)$ при фиксированных m и n не используются аксиомы вида

$$3.23.\quad \forall\bar{\alpha} B(\bar{\alpha}) \supset B(\bar{\beta}) \text{ или } B(\bar{\beta}) \supset \exists\bar{\alpha} B(\bar{\alpha}),$$

где $\bar{\beta}$ — переменная, отличная от $\bar{\alpha}$.

Эти ограничения мы предлагаем наложить в связи с тем, что многократные применения аксиом вида 3.22 могут, в конце концов, вывести нас за пределы осуществимых чисел. (Например, аксиомы $\forall\bar{\alpha} A(\bar{\alpha}) \supset A(\bar{\beta}')$ и $\forall\bar{\beta} A(\bar{\beta}) \supset A(\bar{\gamma}')$ предполагают, что при любых допустимых значениях $\bar{\beta}$ и $\bar{\gamma}$ значение $\bar{\beta}'$ входит в область изменения $\bar{\alpha}$, а значение $\bar{\gamma}'$ — в область изменения $\bar{\beta}$, и тем самым значение $\bar{\gamma}''$ входит в область изменения $\bar{\alpha}$; если бы мы имели не 2, а, скажем, z таких аксиом, то мы пришли бы к явно неверному заключению.) Таким образом, будучи связаны интерпретацией переменных $\bar{\alpha}$, мы должны учитывать число применений аксиом вида 3.22. (При этом имеется в виду число применений этих аксиом в выводе, представленном в виде дерева в смысле [2, § 24].) Однако в выводах в исчислении предикатов переменные могут заменяться друг на друга в соответствии с аксиомами 3.23. Эти замены позволяют, например, вместо многих аксиом 3.22 (с одной и той же формулой A) использовать одну такую аксиому и соответствующее число аксиом 3.23, в связи с чем мы наложили указанные выше ограничения также и на эти аксиомы.

Не только при выводах $F(m+n)$ из $F(m)$ и $F(n)$ должны соблюдаться выше указанные ограничения на аксиомы 3.22 и 3.23, но и вообще число применений l этих аксиом в выводе должно быть осуществимым — и для того чтобы вместо $\bar{\beta}$ в $\bar{\beta}^{\overbrace{/\ldots/}^{l \text{ раз}}}$

можно было подставлять любые осуществимые числа, сумма l с любым осуществимым числом должна быть осуществима. Такие числа мы называем *прибавляемыми*; каково бы ни было число l, класс чисел n таких, что $\mathrm{E}\bar{\alpha}(n < l \cdot \bar{\alpha})$, обладает тем свойством, что вместе с n к нему относится n'; число $z \cdot l$ ему не принадлежит, так что можно считать, что этот класс соответствует некоторому понятию осуществимости; число l является для этого класса прибавляемым. Поэтому всякое данное рассуждение можно, с точки зрения рассматриваемых ограничений, считать относящимся к классу чисел, осуществимых в только что указанном смысле, где l — число применений аксиом 3.22 и 3.23 в этом рассуждении.

Естественно говорить, что числа, осуществимые в некотором смысле, образуют *конкретный натуральный ряд* (под последним понятием можно понимать вообще всякий дискретный процесс d, в котором за всяким событием a непосредственно следует некоторое другое событие a', причем имеется исходное событие 0_d; события этого процесса естественно называть *конкретными натуральными числами*, при этом надо постулировать $a' \neq 0$ и $a' = b' \supset a = b$). Если имеются два конкретных натуральных ряда $0_1, 0_1', \ldots$, и $0_2, 0_2' \ldots$, то попытка установить между ними изоморфизм путем рассмотрения пар $(0_1, 0_2)$, $(0_1', 0_2')$, ... (элементы каждой такой пары мы называем *равновеликими*) приводит только к построению третьего конкретного натурального ряда, событиями которого служат эти пары. (Рассматривая наши ряды как процессы, мы можем образовать пару $(0_1'', 0_2'')$ только после того, как в этих процессах возникли события $0_1''$ и $0_2''$ и т. п.) Если в натуральном ряду $0_2, 0_2', \ldots$ имеется число z, не равновеликое никакому числу из ряда $0_1, 0_1', \ldots$, мы говорим, что ряд $0_1, 0_1', \ldots$ *явно короче*, чем $0_2, 0_2', \ldots$ или чем z.

Мы только что показали, как по одному конкретному натуральному ряду K, явно более короткому, чем традиционный ряд N, можно построить другой такой ряд L (также явно более короткий, чем N), в котором для произвольного числа l из N имеется равновеликое ему прибавляемое число. Событиями этого ряда служат установления того, что для данного числа n из N справедливо $\exists\bar{\alpha}(n < l \cdot \bar{\alpha})$. Нетрудно добиться и того, чтобы этот ряд L был замкнут (в естественном смысле) относительно любых заданных операций $f_1, \ldots, f_r$, определенных в N.

В отличие от сказанного в 3.146 мы предлагаем теперь считать утверждение $\forall n F(n)$ доказанным только в том случае, если имеется процесс, по ходу которого для каждого значения n переменной n возникает доказательство конъюнкции $A(0)\&\ldots\&A(n)$. (Это связано с тем, что если о предложениях A и $A \supset B$ известно только то, что они могут быть доказаны, то утверждение о доказуемости B основано на суперпозиции этих доказательств, и мы не хотим больше постулировать ее выполнимость; в силу этого из доказуемости предложений A и B мы не хотим делать вывод о доказуемости $A\&B$.) При этом аксиомы вида 3.22 и 3.23 должны применяться в каждом таком выводе только такое число раз, которое является прибавляемым для построенного выше ряда L. (Если ряд L замкнут относительно операций $m+n, m \cdot n$ и $\frac{m(m+1)}{2}$, то достаточно вместо этого требовать, чтобы только что указанное число было равновелико некоторому числу из L).

Обоснованные таким образом утверждения $\forall n F(n)$ мы будем называть *индуктивными постулатами*.

Вообще, во всяком выводе, в котором участвуют переменные обоих родов: $m, n, \ldots$ и $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \ldots$, аксиомы 3.22 и 3.23 должны применяться лишь такое число раз, которое равновелико некоторому числу, прибавляемому для L.

Аналогичное ограничение следует наложить на аксиомы вида $\forall ц A(ц) \supset A(ж)$ и $A(ж) \supset \exists ц A(ц)$, где $ж$ — любой терм, отличный от $ц$, а $ц$ — любая переменная такая, что в выводе используется функция, отображающая (например, изоморфно) область изменения переменных $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \ldots$ в область изменения $ц$ (может быть, представленная предикатом с соответствующей аксиомой, доказываемой по индукции); если, далее, в выводе используются аксиомы вида $\forall \mathfrak{x} A(\mathfrak{x}) \supset A(ц)$ или $A(ц) \supset \exists \mathfrak{x} A(\mathfrak{x})$, то в связи с переменными алфавита $\mathfrak{x}$ вводится такое же ограничение.

Предложенные здесь ограничения на доказательства можно заменить следующим требованием: всякому доказательству должен сопутствовать процесс, устанавливающий (на каждом шаге доказательства), что все термы t, используемые в аксиомах Бернайса $\forall\bar{x}A(\bar{x}) \supset A(t)$ или $A(t) \supset \exists\bar{x}A(\bar{x})$, встречающихся до этого шага, а также получающиеся их двукратной суперпозицией, таковы, что при любом замещении свободных переменных этих термов постоянными термами из областей изменения этих переменных получается терм, *значение* которого принадлежит области изменения переменной $\bar{x}$. При этом, если в доказательстве до рассматриваемого шага использовалась функция, устанавливающая отображение одного конкретного натурального ряда в другой (например, изоморфное), то упомянутый только что процесс должен быть *совместен* с рассмотрением этой функции в том смысле, что нахождению упомянутого курсивом значения в натуральном ряду, соответствующем $\bar{x}$ (или части натурального ряда, если $\bar{x}$ — переменная, изменяющаяся в такой части), должно предшествовать появление этого значения как значения только что упомянутой функции.

Если для доказательств A и B может существовать такой процесс, то это не обязательно верно для A & B. Таким образом, правило modus ponens не всегда выполняется. При соблюдении предыдущих ограничений интересующий нас сейчас процесс может быть найден и правило modus ponens применимо если этому не препятствуют соображения из 3.230.

Предложение $A(\mathfrak{y})$, где $\mathfrak{y}$ — любая переменная, должно считаться доказуемым тогда и только тогда, когда доказуемо $\forall\mathfrak{y}\ A(\mathfrak{y})$.

Предыдущее обоснование наших постулатов 3.1521—3.1523 и $\urcorner\urcorner_{\varepsilon}$ может быть проведено при этих ограничениях, если только (для 3.1522(x) и 3.1523(x) при $x = 1$) мы добавим аксиомы вида

$$3.24.\quad \forall\bar{\alpha}\forall\bar{\beta}\,(A(\bar{\alpha})\,\&\,A(\bar{\beta}) \supset \bar{\alpha} = \bar{\beta}) \supset (\exists\bar{\alpha}\,(A(\bar{\alpha})\,\&\,B(\bar{\alpha})) \supset \forall\bar{\alpha}\,(A(\bar{\alpha}) \supset B(\bar{\alpha}))),$$

разрешив употреблять их любое число раз. (Мы не в состоянии вывести эти аксиомы, не пользуясь аксиомами $\forall\bar{\beta}(A(\bar{\beta})\supset B(\bar{\beta}))\supset(A(\bar{\alpha})\supset B(\bar{\alpha}))$ вида 3.23.) Проверку этого утверждения мы предоставляем читателю.

Это и есть тот путь, который мы имели в виду в нашем примечании {5} на стр. 261 в [1]. В действительности можно пойти дальше, заменив постулат 3.21 обычной индукцией от n к $n+1$; постулат (Σ) становится при этом доказуемым, если только потребовать, чтобы в традиционном ряду N была определена операция 2^n (для постулата 3.1523 необходимо, чтобы эту операцию можно было итерировать любое число раз, имеющееся в N).

3.230. Предыдущие замечания нуждаются в дальнейших уточнениях, так как, например, формулы, эквивалентные аксиомам Бернайса, следует рассматривать так же, как и эти аксиомы. Точному изложению этой теории я надеюсь посвятить следующую работу. Одной из важнейших ее идей является необходимость критического отношения к понятию тождества, с тем чтобы употребления так называемой абстракции отождествления (см. А. А. Марков [16,17]) были повсюду явными и могли бы рассматриваться как события некоторого процесса, составляющего неотъемлемую часть доказательства.

Это необходимо для предупреждения возникновения парадоксов типа парадокса Зенона о летящей стреле. Я имею в виду следующую форму этого парадокса.

«Движение стрелы невозможно. В самом деле, если бы стрела могла пролететь отрезок AB, то она должна была бы при этом пролететь сперва половину этого расстояния, затем — половину оставшегося и т. д. Но тогда в момент попадания стрелы в точку B был бы закончен бесконечный процесс, событиями которого являются последовательные пролеты стрелой этих половин. Но это невозможно, так как бесконечный процесс никогда не может быть закончен».

Известно несколько попыток разъяснения этого парадокса. Все они заслуживают внимания: рассуждение Зенона использует несколько различных (пусть неявных) предположений, и критиковать можно любое из них. Я здесь предлагаю следующее разъяснение. В упоминаемой Зеноном ситуации налицо два процесса: непрерывный процесс C, состоящий в полете стрелы из A в B, и дискретный процесс D, состоящий в пролетах стрелой последовательных половин отрезка AB. Рассуждение Зенона предполагает, что каждое событие процесса D составляет часть процесса C. В действительности это не так, хотя бы потому, что коль скоро одно и то же событие упоминается дважды, в рассуждении участвует не само это событие, а эти упоминания о нем, причем два разных упоминания всегда различны. Отдавая себе в этом отчет, мы должны признать, что для проведения рассуждения Зенона нужно еще рассмотреть третий процесс P, состоящий в отождествлении событий из D с частями процесса C. Наступлению каждого события из P должно предшествовать наступление соответствующего события из D; поэтому процесс P также бесконечен. Между тем рассуждение Зенона неявно предполагает этот процесс законченным. Фактически Зенон доказывает не противоречивость понятия движения, а только невозможность нужного ему в таком доказательстве процесса P.

В парадоксе Зенона речь идет о двух процессах, из которых один является непрерывным. Но аналогичная ситуация возможна и при рассмотрении одних лишь дискретных процессов, каковыми являются конкретные натуральные ряды. Такая ситуация действительно возникает и приводит к *кажущимся противоречиям* в тех случаях, когда имеются два конкретных натуральных ряда N_1 и N_2, причем N_1 явно короче, чем N_2, и каждое число из N_1 рассматривается в то же время как число из N_2. Типичным примером такого противоречия может быть то, что для множества $((a_0), (a_1), \ldots, (a_z))$ доказуемы как его конечность, так и его бесконечность. Разрешение этого парадокса следует видеть в том обстоятельстве, что невозможно построить процесс тех отождествлений, которые он фактически использует.

В теории, принимающей во внимание необходимость выявления отождествлений [3], вполне возможна—и притом, как сейчас намечено, действительно встречается — такая ситуация, когда некоторое доказуемое предложение имеет вид $A\&\neg A$, но само это обстоятельство недоказуемо (в метатеории) из-за невозможности осуществить все требуемые для такого доказательства отождествления (так что постулат $A\&\neg A\supset B$ оказывается в этих случаях неприменимым). Здесь я не рассматриваю такой теории, хотя она возможна; я рассчитываю описать ее в упомянутой выше будущей работе.

[3] В традиционных теориях требование явного упоминания всех отождествлений было бы расценено многими как проявление крайнего педан-

Говоря выше о некоторой теории, использующей ограничения, налагаемые на употребление аксиом Бернайса, я имел в виду не саму эту теорию, а некоторый ее фрагмент, в котором такие кажущиеся противоречия не возникают, так что из двух предложений A и $\neg A$, доказуемых в более широкой теории, в этом фрагменте доказуемо только одно. Некоторые уточнения этой фрагментарной теории, о которых я здесь не говорил, но которые, тем не менее, необходимы, могут быть фиксированы для интересующих меня здесь целей доказательства непротиворечивости различными способами.

Помимо непротиворечивости теории ZF, на этом пути можно доказать также недоказуемость в ней континуум-гипотезы (пока я утверждаю это лишь о системе аксиом, не содержащей аксиомы выбора). Именно, непротиворечивым оказывается предложение о том, что между мощностями $\aleph_0$ и $2^{\aleph_0}$ имеются промежуточные мощности (это связано с тем, что операция 2^n может быть определена в конкретном натуральном ряду не для любого его числа n). Но при этом мощность $2^{\aleph_0}$ невозможно рассматривать как эквивалентную некоторому алефу.

3.231. Это обоснование теории ZF_i^{-} мы рассмотрим детально в другой работе. Заметим, что наши ограничения на употребления аксиом 3.22 и 3.23 (и аналогичных им с другими упомянутыми выше переменными) исключают следующие парадоксы: «парадокс кучи», парадоксы, указанные в [1] на стр. 242, парадоксальные доказательства осуществимости сложения, вывод формулы вида $\forall\bar{\alpha}\exists\bar{\beta}_1\ldots\exists\bar{\beta}_z(\bar{\beta}_1=\bar{\alpha}'\&\bar{\beta}_2=\bar{\beta}_1'\&\ldots\&\bar{\beta}_z=\bar{\beta}_{z-1}')$ (легко получаемый из $\forall\alpha\exists\bar{\beta}(\bar{\beta}=\alpha')$ без этих ограничений) и парадокс, связанный с индуктивным доказательством конечности всякого M_z- или всякого N_z-множества (последний парадокс, например, устраняется неприменимостью modus ponens). Конечно, это еще не означает непротиворечивости предлагаемой теории двух натуральных рядов (основанной на вышеуказанных ограничениях). Для обоснования этой

тизма, так как и без этого требования считается ясной, например, структура формулы $a = a$. Но я считаю, что такая ясность может иметь место лишь для *написанной* формулы, а при обосновании принципа индукции мы имеем дело с бесконечной последовательностью формул, и, разумеется, нет возможности считать их все *написанными*.

теории мы предлагаем путь, состоящий в построении теории рекурсивных функций от переменных чисел обоих рядов, рассмотрении понятия реализуемости (ср. [2, § 82]) для C'-формул, основанного на такой теории рекурсивных функций и дальнейшем доказательстве теоремы Нелсона ([2, § 82, теорема 62]) для этой теории. Это может потребовать введения некоторых дополнительных натуральных рядов — аналогично рассмотренному выше в этом разделе. M_z- и N_z-множества a_i при этом удобно изображать в виде $\overline{\alpha}_1$, $\overline{\alpha}_2, \ldots$, всевозможные ( ), $(a_0), (a_1), \ldots, (a_z)$ — в виде $a_0, \ldots, a_z$, а дальнейшие M_z- и N_z-множества — при помощи естественно понимаемых символов $\{x\}$ и $x+y$; соответствующим образом определяется ε-отношение, являющееся вычислимой функцией от элементов ряда $\overline{\alpha}_1$, $\overline{\alpha}_2 \ldots$ и остальных M_z и N_z-множеств (сводимых гёделевой нумерацией к натуральному ряду). Такое представление удобно для применения индукции и освобождает нас от введения функции $\overset{=}{x}$.

Детали намеченного обоснования мы проведем в другой работе. Для теории типов второй ступени это обоснование требует только некоторой части наших допущений, упомянутых в [1] на стр. 261 (мы имеем в виду теорию типов с аксиомой бесконечности не в форме C5′, а в более слабой, утверждающей лишь, что область изменения переменной наинизшего типа есть конкретный натуральный ряд, т. е. удовлетворяет аксиомам $0 \neq x_1'$ и $x_1' = y_1' \supset x_1 = y_1$).

§ 4. Относительная непротиворечивость аксиомы объемности

Наметим относительное доказательство непротиворечивости аксиомы объемности, в чем, по существу, состоит переход от системы ZF^- к системе ZF (от Z^- к Z). Из-за отсутствия места мы ограничимся здесь изложением идеи этого доказательства, тем более что речь идет о вещах, не связанных с откровенной точкой зрения. Подробное изложение мы дадим в другой работе.

Мы прежде всего установим относительную непротиворечивость аксиомы $C0^-$ (см. 1.43).

Упомянутую в 1.43 разновидность схемы C4, получающуюся из C4 заменой в определении $\mathrm{Un}^{\mathfrak{u}\mathfrak{w}}[\varphi(\mathfrak{u}, \mathfrak{w})]$ символа «$=$» на «$\approx$», мы будем обозначать $\widetilde{\overline{C4}}$; соответствующий смысл мы будем придавать обозначению $\widetilde{\overline{C4}}{}^{zt}_{\varphi(z,\,t)}$. Аксиома C6 позволяет вывести $\widetilde{\overline{C4}}$ из C4, а именно: $\widetilde{\overline{C4}}{}^{zt}_{\varphi(z,\,t)}$ из $C4^{ut}_{\psi(u,\,t)}$, где $\psi(u, t)$ обозначает формулу $\exists z(u = \mathfrak{q}(z) \& \varphi(z, t))$ (z — переменная, не входящая в $\varphi(u, t)$). При помощи второго члена коньюнкции в C6 доказывается $\mathrm{Un}^{ut}[\psi(u, t)]$. Поэтому для любого множества x существует y' такое, что $\forall z\ (z\varepsilon y' \sim \exists t(t\varepsilon x \& \psi(z, t))$. При помощи первого члена конъюнкции в C6 доказывается, что каждый элемент множества y, существование которого утверждается в $\widetilde{\overline{C4}}{}^{zt}_{\varphi(z,\,t)}$, является частью некоторого элемента y', а потому элементом $\mathfrak{P}(\mathfrak{S}(y'))$, и существование этого y вытекает из надлежащей аксиомы по схеме CIV. В дальнейшем мы будем считать, что системы ZF^- и Z^- не содержат символа $\mathfrak{q}(x)$ и аксиомы C6, но схема C4 заменена на $\widetilde{\overline{C4}}$.

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы построить в теориях ZF^- и Z^- теорию натуральных чисел. С этой целью мы введем (в ZF^- и в Z^-) следующие сокращения:

4.1. $\mathrm{We}^{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}(\mathfrak{z}, \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})) \sim_{Df} \forall \mathfrak{u}_1 \forall \mathfrak{u}_2 [\mathfrak{u}_1 \varepsilon \mathfrak{z} \& \mathfrak{u}_2 \varepsilon \mathfrak{z} \supset \varphi(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2) \vee \varphi(\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1) \vee \mathfrak{u}_1 \approx \mathfrak{u}_2] \& \forall \mathfrak{h} [\neg\ \mathfrak{h} \approx 0 \& \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{z} \supset \exists \mathfrak{w} [\mathfrak{w} \varepsilon \mathfrak{h} \& \neg \exists \mathfrak{t} [\mathfrak{t} \varepsilon \mathfrak{h} \& \varphi(\mathfrak{t}, \mathfrak{w})]]]$,

где $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{w}$ и $\mathfrak{t}$ — переменные, не входящие в $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ (0 — символ какого-нибудь пустого множества).

4.2. $\mathrm{Reg}(\mathfrak{x}) \sim_{Df} \forall \mathfrak{y} \forall \mathfrak{z} [\mathfrak{y} \varepsilon \mathfrak{x} \& \mathfrak{y} \approx \mathfrak{z} \supset \mathfrak{z} \varepsilon \mathfrak{x}]$; переменные $\mathfrak{y}$ и $\mathfrak{z}$ отличны от $\mathfrak{x}$.

4.3. $\mathrm{On}(\mathfrak{x}) \sim_{Df} \mathrm{We}^{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\varepsilon\mathfrak{z}] \& \forall \mathfrak{h} [\mathfrak{h} \varepsilon \mathfrak{x} \supset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{x}] \& \mathrm{Reg}(\mathfrak{x}) \& \forall \mathfrak{h} [\mathfrak{h} \varepsilon \mathfrak{x} \supset \mathrm{Reg}(\mathfrak{h})]]$.

4.1 является определением того, что множество $\mathfrak{z}$ вполне упорядочено отношением $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$; свойство, определяемое в 4.2, называется регулярностью, а 4.3 — это наше определение порядкового числа. Легко видеть, что $\mathrm{We}^{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}(\mathfrak{z}, \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})) \& \mathfrak{z} \approx \mathfrak{t} \supset \mathrm{We}^{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}(\mathfrak{t}, \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}))$,

$$\mathrm{Reg}(x) \& y \approx x \supset \mathrm{Reg}(y),\quad \mathrm{On}(x) \& y \approx x \supset \mathrm{On}(y);$$

отношение $x \approx y$ рефлексивно, симметрично и транзитивно. Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — переменные порядковые числа (ср. [3]). На основе определений 4.1—4.3 последовательно доказываются следующие утверждения (методы доказательства аналогичны тем, которые используются для соответствующих утверждений в [3] — ср. также [9, стр. 164—165], в связи с отсутствием аксиомы фундирования D).

4.31. $y \varepsilon \alpha \& z \varepsilon \alpha \& t \varepsilon \alpha \supset [y \varepsilon z \vee z \varepsilon y \vee y \approx z] \& [y \varepsilon z \& z \varepsilon t \supset y \varepsilon t] \& \neg [y \varepsilon z \& z \varepsilon y]$.

4.311. $y \varepsilon \alpha \supset \neg y \varepsilon y$.

4.312. $\neg \alpha \varepsilon \alpha$.

4.32. Comp (α) (Comp (x) $\sim_{Df} \forall y (y \varepsilon x \supset y \subseteq x)$).

4.331. $x \varepsilon \alpha \supset \mathrm{On}(x)$.

4.332. $\mathrm{On}(\alpha \cdot \beta)$.

4.333. $\alpha \varepsilon \beta \vee \alpha \approx \beta \vee \beta \varepsilon \alpha$.

4.3331. $\neg (\alpha \varepsilon \beta \& \alpha \approx \beta)$.

4.3332. $\alpha \subset \beta \sim \alpha \varepsilon \beta$.

4.3333. $\neg (\alpha \varepsilon \beta \& \beta \varepsilon \alpha)$.

4.3334. $\alpha \varepsilon \beta \& \beta \varepsilon \gamma \supset \alpha \varepsilon \gamma$.

Затем доказывается принцип трансфинитной индукции:

4.3335. $\forall \beta [\forall \gamma [\gamma \varepsilon \beta \supset \varphi(\gamma)] \supset \varphi(\beta)] \supset \forall \alpha \varphi(\alpha)$,

где $\varphi(\alpha)$ не содержит переменных β и γ.

С помощью определений

4.334. $y \varepsilon \overset{\approx}{x} \sim_{Df} y \approx x$,

4.335. $x + 1 \approx_{Df} x + \overset{\approx}{x}$

($\overset{\approx}{x}$ и $x + 1$, при данном x, определены лишь с точностью до равнообъемности) последовательно доказываются утверждения

4.3351. $\mathrm{On}(\alpha + 1)$,

4.3352. $x \varepsilon x + 1$,

4.3353. $\beta \varepsilon \alpha + 1 \supset \beta \varepsilon \alpha \vee \beta \approx \alpha$,

4.3354. $\alpha + 1 \approx \beta + 1 \supset \alpha \approx \beta$,

4.3355. $\neg \alpha + 1 \approx 0$,

4.3356. $\mathrm{On}(0)$,

4.3357. $\neg \exists \beta [\alpha \varepsilon \beta \& \beta \varepsilon \alpha + 1]$.

Дальнейшие определения:

4.336. $\mathrm{K_I}(x) \sim_{Df} x \approx 0 \vee \exists \alpha (x \approx \alpha + 1)$,

4.337. $\omega(x) \sim_{Df} \forall y [y \varepsilon x + 1 \supset \mathrm{K_I}(y)]$.

4.3371. $1 \approx_{Df} 0+1$, $2 \approx_{Df} 1+1$, $3 \approx 2+1$, и т. д. (1, 2, 3, ... — определены лишь с точностью до равнообъемности).

$\omega(x)$ читается как «x есть натуральное число». Переменные натуральные числа обозначаются буквами $i, j, k, l, \ldots$ (ср. [3]).

4.3372. $\omega(x) \supset \mathrm{On}(x)$,

4.3373. $x \varepsilon i \supset \omega(x)$,

4.3374. $\omega(i+1)$,

4.3375. $\mathrm{K_I}(i)$.

При помощи 4.3335 доказывается принцип индукции:

4.3376. $\forall k [k \approx 0 \supset \varphi(k)] \& \forall k [\forall i (i \approx k \supset \varphi(i) \supset \forall j (j \approx k + +1 \supset \varphi(j))] \supset \forall k \varphi(k)$, где k — переменная, не входящая в $\varphi(0)$.

Наряду с понятиями равнообъемности в ZF^{-} и Z^{-} мы рассматриваем понятие равносоставленности относительно произвольного множества z:

4.338. $x \simeq_z y \sim_{Df} (x \approx y \& \neg x \varepsilon z \& \neg y \varepsilon z) \vee (x \varepsilon z \& x = y)$.

Легко доказывается, что отношение $x \simeq_z y$, где z — фиксированное множество, рефлексивно, симметрично и транзитивно, а также

4.3381. $x \simeq_z y \supset (x \varepsilon z \sim y \varepsilon z)$.

В дальнейшем в качестве z мы будем рассматривать фиксированное бесконечное множество $x = z_0$, существование которого утверждается аксиомой C5′. Вместо $x \simeq_{z_0} y$ мы будем писать просто $x \simeq y$. Если $x \simeq y$, мы будем говорить, что x и y равносоставлены.

По аналогии с 4.334, мы полагаем:

4.3382. $y \varepsilon \overset{\simeq}{x} \sim_{Df} y \simeq x$.

Множество $\overset{\simeq}{x}$ определено с точностью до равносоставленности. Далее, мы полагаем:

4.3383. $[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \simeq_{Df} \overset{\simeq}{\mathfrak{x}} + \overset{\simeq}{\mathfrak{y}}$,

4.3384. $\mathfrak{z} \varepsilon \prec \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \succ \sim_{Df} \mathfrak{z} \approx [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}] \vee \mathfrak{z} \approx [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]$.

$[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]$ и $\prec \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \succ$ определены лишь с точностью до равносоставленности.

Представляет интерес рассмотрение функций, определенных с точностью до равносоставленности. Введем в этой связи сокращения:

4.339. $\overset{\simeq}{\mathrm{Un}}{}^{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} [\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})] \sim_{Df} \forall \mathfrak{u} \forall \mathfrak{h} \forall \mathfrak{v} \forall \mathfrak{t} [\varphi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) \& \varphi(\mathfrak{v}, \mathfrak{t}) \& \mathfrak{u} \simeq \simeq \mathfrak{t} \supset \mathfrak{f} \simeq \mathfrak{v}]$, где $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ не содержит переменных $\mathfrak{u}, \mathfrak{f}, \mathfrak{v}$ и $\mathfrak{t}$.

Аналогично определяются $\overset{\approx}{\overline{\overline{\mathrm{Un}}}}$, $\overset{\approx\approx}{\overline{\mathrm{Un}}}$ и т. п. Например,

4.3390. $\overset{\approx\approx}{\overline{\overline{\mathrm{Un}}}}{}^{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}[\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})] \sim_{Df} \forall\mathfrak{u}\forall\mathfrak{v}\forall\mathfrak{w}\forall\mathfrak{t}\,[\varphi(\mathfrak{v}, \mathfrak{u}) \,\&\, \varphi(\mathfrak{w}, t) \,\&\, \mathfrak{u} \approx \approx \mathfrak{t} \supset \mathfrak{v} \simeq \mathfrak{w}]$, где $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ не содержит переменных $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ и $\mathfrak{t}$.

4.3391. $\mathfrak{S}^{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\,[\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})] \sim_{Df} \forall\mathfrak{u}\forall\mathfrak{v}\,[\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \;\&\, \mathfrak{u} \simeq \mathfrak{x} \,\&\, \mathfrak{v} \simeq \mathfrak{y} \supset \varphi(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})]$, где $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{v}$ не входят в $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$.

4.3392. $\overset{\approx\approx}{\overline{\mathfrak{Fn}}}{}^{\mathfrak{y}\mathfrak{x}}_{\psi(\mathfrak{x})}\,[\varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})] \sim_{Df} \overset{\approx\approx}{\overline{\mathrm{Un}}}{}^{\mathfrak{y}\mathfrak{x}}\,[\varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})] \,\&\, \forall\mathfrak{x}(\psi(\mathfrak{x}) \sim \exists\mathfrak{y}\varphi(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}))$. Аналогично определяются $\overset{\approx\approx}{\mathfrak{Fn}}$ и т. п.

4.3393. $\mathrm{i}\overset{\approx\approx}{\overline{\mathfrak{Fn}}}\mathfrak{x} \sim_{Df} \overset{\approx\approx}{\overline{\mathfrak{Fn}}}{}^{\mathfrak{h}\mathfrak{z}}_{\mathfrak{z}\varepsilon\mathfrak{x}}\,[\langle\mathfrak{y}\mathfrak{z}\rangle\,\varepsilon\,\mathfrak{f}]$; $\mathfrak{y}$ и $\mathfrak{z}$ отличны от $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{x}$. Важную роль играет следующая теорема:

4.3394. Пусть $F(y, i)$ означает формулу

4.33941. $(y \simeq a\& i \approx 0) \vee \exists k\,[i \approx k+1 \,\&\, \exists f \exists s\,[\mathfrak{f}\overset{\approx\approx}{\overline{\mathfrak{Fn}}}i \,\&\, \langle a0\rangle\,\varepsilon f \,\&\forall z\forall t\forall j\,[j+1\,\varepsilon i \& \langle zj\rangle\,\varepsilon f \& G\;(t, z) \supset \langle tj\;+\;1\rangle\,\varepsilon f] \,\&\, \langle sk\rangle\,\varepsilon f \& G(y, s)]]$,

где $G(y, x)$ — произвольная формула. Тогда доказуема формула

4.33942. $\overset{\approx\approx}{\overline{\mathfrak{Fn}}}{}^{yx}_{x=x}[G(y, x)] \,\&\, \mathfrak{S}^{yx}\,[G(y, x)] \supset [\forall y\,[F(y, 0) \sim y \simeq \simeq a] \,\&\, \forall i\,[F(y, i+1) \sim \exists x\,[G(y, x) \,\&\, F(x, i)]]] \& \overset{\approx\approx}{\overline{\mathfrak{Fn}}}{}^{yx}_{\omega(x)}[F\;(y, x)]]$. (Эта формула доказывается при помощи индукции по i; идея доказательства родственна той, которая используется в [3,8.45].)

4.3394 есть принцип определения функций от натуральных чисел по индукции. Аналогичный принцип можно доказать и для трансфинитной индукции (ср. [3,7.5]), но здесь нам это не потребуется. Заметим, что в силу 4.3394 в ZF^{-} и в Z^{-} можно отображать определения примитивно-рекурсивных функций, в частности сложения и умножения. Поэтому гёделевские теоремы о неполноте — и, в частности, хорошо известная «вторая теорема Гёделя» — справедливы для систем ZF^{-} и Z^{-}.

Введем сокращение:

4.3395. $\mathrm{S}\,(y, x) \sim_{Df} \forall u\,[u\varepsilon y \sim \exists t\,(u\varepsilon t \& t\varepsilon x)] \,\&\, [\neg \exists u \exists t\,(u\varepsilon t \overline{\&} t\varepsilon x) \supset y = 0]$.

Легко доказываются утверждения $\overset{\approx\approx}{\overline{\mathfrak{Fn}}}{}^{yx}_{x=x}[\mathrm{S}\,(y, x)]$ и $\mathfrak{S}^{yx}\,[\mathrm{S}\,(y, x)]$, а потому, согласно 4.3394, доказуема формула

4.3396. $\forall y\,[(\mathrm{Gen}\,(y, x, 0) \sim y \simeq \{x\}) \& \forall i\,[\mathrm{Gen}\,(y, x, i+1) \sim \sim \exists z\,(S\,(y, z) \,\&\, \mathrm{Gen}\,(z, x, i)]]] \& \overset{\approx\approx}{\overline{\mathfrak{Fn}}}{}^{yt}_{\omega(t)}\,[\mathrm{Gen}\,(y, x, t)]$, где $\mathrm{Gen}(y, x, i)$ — формула, построенная для $S(y, z)$ как $F(y, i)$ для $G(y, x)$ согласно 4.33941.

В системе ZF^- доказывается:

4.3397. $\exists x \forall z (z \varepsilon x \sim \omega(z))$;

этим оправдано, для системы ZF^-, определение:

4.33971. $z \varepsilon \omega \sim_{Df} \omega(z)$.

Множество всех натуральных чисел ω определено посредством 4.33971 с точностью до равнообъемности. Доказательство 4.3397 основано на рассмотрении формулы $(x \varepsilon z_0 \& \langle yx \rangle \varepsilon f_0) \vee (\neg x \varepsilon z_0 \& y \approx x)$, в которой z_0 определено выше, а f_0 означает взаимно-однозначное отображение z_0 в себя, существование которого утверждается аксиомой C5′. Обозначая эту формулу через $G(y, x)$ и доказывая для нее $\tilde{\tilde{\mathfrak{Fn}}}_{x=x}[G(y, x)]$ и $\mathfrak{S}^{yx}[G(y, x)]$, мы затем, на основании 4.3394, получаем формулу $F(y, x)$, для которой доказуема правая часть импликации 4.33942, причем a означает тот элемент z_0, существование которого для выбранных выше z_0 и f_0 утверждается аксиомой C5′. Согласно $\mathrm{CIV}^{y}_{\exists i F(y, i)}$, существует множество z такое, что $y \varepsilon z \sim y \varepsilon z_0 \& \exists i F(y, i)$. Для этого z индукцией по i доказывается $\forall y \forall j [y \varepsilon z \& F(y, i) \& F(y, j) \supset i \approx j]$ — и затем при помощи аксиомы $\overset{\approx=}{\mathrm{C}}4^{xy}_{F(y, x)}$ доказывается 4.3397.

Далее при помощи $\overset{\approx=}{\mathrm{C}}4^{yt}_{\mathrm{Gen}(y, x, t)}$ и последнего члена конъюнкции 4.3396 (а также легко доказываемого утверждения $\tilde{\tilde{\mathfrak{Fn}}}^{yt}_{\omega(t)}[\mathrm{Gen}(y, x, t)] \supset \overset{\approx=}{\mathfrak{Fn}}^{yt}_{\omega(t)}[\mathrm{Gen}(y, x, t)]$) доказывается формула

4.3398. $\forall x \exists y \forall z (z \varepsilon y \sim \exists i\, \mathrm{Gen}(z, x, i))$.

Из этой формулы, при помощи аксиомы C2 (в форме $\mathrm{C2}^{\sim}$), мы получаем, для системы ZF^-,

4.3399. $\forall x \exists y \forall s (s \varepsilon y \sim \exists z \exists i (s \varepsilon z \& \mathrm{Gen}(z, x, i)))$.

Множество y, существование которого для любого x утверждается в 4.3399, мы обозначим $\mathrm{Her}(x)$ и будем называть *наследством* x. Наследство x состоит из x, элементов x, элементов этих элементов и т. д.

В системе Z^- доказать 4.3399 не удается, однако можно доказать относительную непротиворечивость этой формулы. Для этого выберем сперва в качестве $G(y, x)$ в 4.3394 формулу $\forall z (z \varepsilon y \sim z \subseteq x)$; подставляя в 4.33941 z_0 вместо a, мы получим некоторую формулу, которую обозначим $P(y, i)$. Введем сокращения:

4.34. $\mathrm{St}(x, i) \sim_{Df} \exists y (x \varepsilon y \& P(y, i))$,

4.341. $P(x) \sim_{Df} \exists i \mathrm{St}(x, i)$.

Переменные множества, удовлетворяющие $P(x)$, мы будем обозначать $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$. Легко доказывается, что они удовлетворяют всем аксиомам Z^- и дополнительной аксиоме

4.342. $\forall x P(x)$,

из которой затем — индукцией по i такому, что $\mathrm{St}(x, i)$ — выводится 4.3399.

Таким образом, к системе Z^- можно присоединить в качестве аксиомы 4.3339 и затем ввести функцию наследства $\mathrm{Her}(x)$.

Наследство множества обладает, как легко доказать, следующими свойствами:

4.351. $x \varepsilon \mathrm{Her}(x)$.

4.352. $x \subseteq \mathrm{Her}(x)$.

4.353. $y \varepsilon \mathrm{Her}(x) \supset \mathrm{Her}(y) \subseteq \mathrm{Her}(x)$.

4.354. $z \varepsilon \mathrm{Her}(\overset{\simeq}{x}) \sim z \simeq \overset{\simeq}{x} \vee z \simeq x \vee z \varepsilon \mathrm{Her}(x)$.

4.355. $z \varepsilon \mathrm{Her}(x + y) \supset z = x + y \vee z \varepsilon \mathrm{Her}(x) \vee z \varepsilon \mathrm{Her}(y)$.

4.356. $z \varepsilon \mathrm{Her}(\mathfrak{S}(x)) \supset z = \mathfrak{S}(x) \vee z \varepsilon \mathrm{Her}(x)$.

4.357. $z \varepsilon \mathrm{Her}(\mathfrak{P}(x)) \supset z = \mathfrak{P}(x) \vee z \subseteq x \vee z \varepsilon \mathrm{Her}(x)$.

4.358. $z \varepsilon \mathrm{Her}(x) \sim z = x \vee \exists y (y \varepsilon x \& z \varepsilon \mathrm{Her}(y))$.

Вводим понятие квазирегулярного множества:

4.36. $\mathrm{Qur}(\mathfrak{x}) \sim_{Df} \forall \mathfrak{y} \forall \mathfrak{z} (\mathfrak{y} \varepsilon \mathfrak{x} \& \mathfrak{y} \simeq \mathfrak{z} \supset \mathfrak{z} \varepsilon \mathfrak{x})$; $\mathfrak{y}$ и $\mathfrak{z}$ отличны от $\mathfrak{x}$ и друг от друга.

Легко видеть, что

4.360. $x \simeq y \& \mathrm{Qur}(x) \supset \mathrm{Qur}(y)$.

Наконец, вводим понятие гладкого множества:

4.361. $\mathrm{Sm}(\mathfrak{x}) \sim_{Df} \forall \mathfrak{y} (\mathfrak{y} \varepsilon \mathrm{Her}(\mathfrak{x}) \supset \mathrm{Qur}(\mathfrak{y}))$; переменная $\mathfrak{y}$ отлична от $\mathfrak{g}$. Переменные гладкие множества мы будем обозначать $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \ldots$. Для $\underline{x}, \underline{y}, \ldots$ устанавливаются все аксиомы ZF^-, соответственно Z^-, и $C0^-$. При этом $\underline{x} = \underline{y}$ рассматривается как сокращение для $\forall \underline{z} (\underline{z} \varepsilon \underline{x} \sim \underline{z} \varepsilon \underline{y})$ & $\forall \underline{z} (\underline{x} \varepsilon \underline{z} \sim \underline{y} \varepsilon \underline{z})$. Легко видеть, что аксиомы $=_1 - =_5$ при этом удовлетворяются.

$C0^-$. $\forall x \forall y [\forall z (\underline{z} \varepsilon \underline{x} \sim \underline{z} \varepsilon \underline{y}) \& \exists \underline{z} (\underline{z} \varepsilon \underline{x}) \supset \underline{x} = \underline{y}]$.

Доказательство. Очевидно, достаточно из $\forall z(z\varepsilon x \sim z\varepsilon y)$ и $\exists z(z\varepsilon x)$ вывести $\forall u(x\varepsilon u \sim y\varepsilon u)$. Допустим $\forall z(z\varepsilon x \sim z\varepsilon y)$ и $\exists z(z\varepsilon x)$, и пусть u — произвольное гладкое множество. В силу 4.361 и 4.351 $\mathrm{Qur}(u)$. В силу 4.361 и 4.352 все элементы x и y являются гладкими, а потому из $\forall z(z\varepsilon x \sim z\varepsilon y)$ следует $x \approx y$. Кроме того, в силу $\exists z(z\varepsilon x)$ (а значит и $\exists z(z\varepsilon y)$), $\neg x\varepsilon z_0$ и $\neg y\varepsilon z_0$, а потому, согласно 4.3381, $x \simeq_{z_0} y$ и $x \simeq y$. Поэтому, в силу $\mathrm{Qur}(u)$ и 4.36, $x\varepsilon u \sim y\varepsilon u$. Затем навешиваем $\forall u$.

В силу 4.3383, 4.354 и 4.355, $\mathrm{Sm}([x, y])$, так как $\mathrm{Qur}([x, y])$ вытекает из 4.3383, 4.3382, а также рефлексивности, симметричности и транзитивности отношения «$\simeq$». Исходя из определений 4.3383 и 4.3382, легко доказать

4.362. $\forall x \forall y \forall u [u\varepsilon [x, y] \sim u \simeq x \vee u \simeq y]$.

Кроме того, всякое гладкое множество квазирегулярно (4.361 и 4.351); так как $x \simeq y \supset x \approx y$ (см. 4.338), то мы заключаем отсюда, что $u \simeq x \supset \forall z(z\varepsilon u \sim z\varepsilon x) \& \forall z\ (u\varepsilon z \sim x\varepsilon z)$, то есть $u \simeq x$ влечет, что $u = x$ в рассматриваемой сейчас модели, которую мы будем обозначать Ξ. Поэтому 4.362 дает аксиому C1a, а значит, и C1 в Ξ.

При помощи 4.356 доказывается $\mathrm{Sm}(\mathfrak{S}(x))$ (квазирегулярность $\mathfrak{S}(x)$ легко вытекает из определения $\mathfrak{S}(x)$, 43.6 и 4.352) а потому из легко доказываемой формулы $\forall x \forall u [\exists v [u\varepsilon v \& v\varepsilon x \supset u\varepsilon \mathfrak{S}(x)]$ вытекает справедливость аксиомы C2 в Ξ.

Для всякого x, в силу C3 и $\mathrm{CIV}^{z}_{\mathrm{Sm}(z)}$, существует множество y такое, что

4.363. $\forall z(z\varepsilon y \sim z \subseteq x \& \mathrm{Sm}(z))$.

В силу 4.361, 4.360, 4.351 и 4.357, $\mathrm{Sm}(y)$, а потому из 4.363 вытекает справедливость аксиомы C3 в Ξ.

4.364. Пусть $\varphi(x)$—формула, в которой нет «$=$» и все переменные взяты из алфавита $x, y, \ldots$ Тогда доказуема формула $x \simeq y \supset (\varphi(x) \sim \varphi(y)]$.

4.364 очевидно для случая, когда $\varphi(x)$ имеет вид $u\varepsilon x$, $x\varepsilon u$ или $x\varepsilon x$. (Для $x\varepsilon x$ заметим, что $x\varepsilon x \& x \simeq y \supset x \approx y$; далее $x \approx y \& x\varepsilon x \supset x\varepsilon y$ и, в силу $\mathrm{Sm}(y)$, $x\varepsilon y \& x \simeq y \supset y\varepsilon y$). Если утверждение 4.364 верно для $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то легко видеть, что оно верно и для $\varphi(\underline{x}) \supset \psi(\underline{x})$, $\varphi(\underline{x}) \& \psi(\underline{x})$, $\varphi(\underline{x}) \vee \psi(\underline{x})$, $\neg\varphi(\underline{x})$, $\forall\underline{x}\varphi(\underline{x})$ и $\exists\underline{x}\varphi(\underline{x})$. Отсюда следует 4.364. Так как $\underline{x} = \underline{y}$ равносильно в Ξ $\forall\underline{z}(\underline{z}\varepsilon\underline{x} \sim \underline{z}\varepsilon\underline{y}) \& \forall\underline{z}(\underline{x}\varepsilon\underline{z} \sim \underline{y}\varepsilon\underline{z})$, то в Ξ от условия, что $\varphi(\underline{x})$ не содержит «$=$», можно отказаться.

Для системы ZF^- мы теперь покажем справедливость в Ξ каждой аксиомы вида C4:

4.365. $\mathrm{Un}^{zt}_{\Xi}[\varphi(\underline{z}, \underline{t})] \supset \forall\underline{x}\exists\underline{y}\forall\underline{z}[\underline{z}\varepsilon\underline{y} \sim \exists\underline{t}[\underline{t}\varepsilon\underline{x} \& \varphi(\underline{z}, \underline{t})]]$,

где $\mathrm{Un}^{zt}_{\Xi}[\varphi(\underline{z}, \underline{t})]$ есть сокращение для формулы

4.3651. $\forall\underline{u}\forall\underline{v}\forall\underline{t}[\varphi(\underline{u}, \underline{t}) \& \varphi(\underline{v}, \underline{t}) \supset \forall\underline{w}(\underline{w}\varepsilon\underline{u} \sim \underline{w}\varepsilon\underline{v}) \& \forall\underline{w}(\underline{u}\varepsilon\underline{w} \sim \underline{v}\varepsilon\underline{w})]$.

Допустим 4.3651 и выведем заключение 4.365. В силу 4.3651,

$$\widetilde{\widetilde{\overline{\overline{\mathrm{Un}}}}}^{ut}[\varphi(u, t) \& \mathrm{Sm}(u) \& \mathrm{Sm}(t)],$$

а потому, согласно $\widetilde{\widetilde{\overline{\overline{\mathrm{C4}}}}}^{ut}_{\varphi(u, t) \& \mathrm{Sm}(u) \& \mathrm{Sm}(t)}$,

$$\forall x\exists y\forall z[z\varepsilon y \sim \exists t[t\varepsilon x \& \varphi(z, t) \& \mathrm{Sm}(z) \& \mathrm{Sm}(t)]],$$

откуда

4.3652. $\forall\underline{x}\exists y\forall\underline{z}[\underline{z}\varepsilon y \sim \exists\underline{t}[\underline{t}\varepsilon\underline{x} \& \varphi(\underline{z}, \underline{t})]]$.

Возьмем для произвольного $\underline{x}$ множество y, удовлетворяющее 4.3652. Согласно $\mathrm{CIV}^{z}_{\mathrm{Sm}(z)}$, существует множество y_0, все элементы которого гладки и которое также удовлетворяет 4.3652 (т. е. удовлетворяет области действия $\exists y$ этой формулы, будучи подставлено в нее вместо y). Кроме того, в силу 4.364 (и определения «$=$» в Ξ),

$$\underline{v} \simeq \underline{z} \supset \{[\exists\underline{t}[\underline{t}\varepsilon\underline{x} \& \varphi(\underline{v}, \underline{t})] \sim \exists\underline{t}[\underline{t}\varepsilon\underline{x} \& \varphi(\underline{z}, \underline{t})]\},$$

так что $\underline{v} \simeq \underline{z} \supset (\underline{v}\varepsilon y_0 \sim \underline{z}\varepsilon y_0)$, и, так как все элементы y_0 гладки, то отсюда вытекает $\mathrm{Qur}(y_0)$ — и, в силу 4.361 и 4.358, $\mathrm{Sm}(y_0)$. Поэтому в 4.3652 y можно заменить на $\underline{y}$, что дает заключение 4.365.

Аналогично, но проще, устанавливается для системы Z^- справедливость в Ξ каждой аксиомы вида CIV.

Наконец, чтобы удовлетворить в Ξ аксиоме C5′, достаточно выбрать в качестве значений переменных x, a и f этой аксиомы, соответственно, множества z_0 и a, удовлетворяющие переменным x и a в C5', и множество f_1 такое, что

$$z \varepsilon f_1 \sim \exists x \exists y [z \simeq \prec x \ y \succ \& \langle xy \rangle \varepsilon f_0],$$

где f_0 — множество, удовлетворяющее переменной f в C5' (т. е. удовлетворяющее области действия $\exists f$ этой аксиомы, будучи подставлено в нее вместо f). f_1 существует в силу аксиом C3 и CIV и, как легко видеть, является гладким множеством.

Таким образом, из непротиворечивости системы ZF^- или Z^- вытекает непротиворечивость системы $ZF^\pm$ или, соответственно, $Z^\pm$.

Укажем, не входя в детали доказательств, модель, посредством которой можно теперь доказать относительную непротиворечивость аксиомы C0. Отметим, предварительно, что в модели Ξ, построенной средствами Z^-, справедливость 4.342 вытекает из справедливости этого утверждения в исходной системе Z^-, чем доказана относительная непротиворечивость утверждения 4.3399 для $Z^\pm$. Поэтому к $Z^\pm$ можно присоединить функциональный символ $\mathrm{Her}(x)$ такой, что $\mathrm{Her}(x)$, будучи подставлено вместо y в область действия $\exists y$ в 4.3399, удовлетворяет этой области действия. Для $\mathrm{Her}(x)$, по-прежнему, верны утверждения 4.351—4.358.

Какое-нибудь из пустых множеств мы обозначим через 0. Обозначая теперь через $x, y, \ldots$ переменные множества системы $ZF^\pm$ или системы $Z^\pm$, расширенной присоединением утверждения 4.3399 в качестве аксиомы, положим теперь

$$T(x) \sim_{Df} \forall y [y \approx 0 \& \neg y = 0 \supset \neg \{y\} \varepsilon \mathrm{Her}(x)].$$

$$x \underset{\sim}{\varepsilon} y \sim_{Df} T(x) \& T(y) \& [(\neg y \approx 0 \& x \varepsilon y) \vee (y \approx 0 \& \neg y = 0 \& x = y)].$$

Переменные множества, удовлетворяющие $T(x)$, мы будем обозначать $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}, \ldots$. Легко доказывается, что эти множества, вместе с отношением принадлежности $\underset{\sim}{\varepsilon}$ и отношением равенства $\underset{\sim}{=}$, удовлетворяют всем аксиомам системы $ZF^\pm$, соответственно $Z^\pm$, и аксиоме C0. Проверку этого утверждения мы предоставляем читателю.

Наконец, заметим, что аксиома С5 удовлетворяется в $ZF^{\pm}$ множеством ω, определенным согласно 4.33971 (т. е. ω удовлетворяет области действия $\exists w$ в С5, будучи подставлено в нее вместо w). Для системы Z^{-}, чтобы удовлетворить С5, достаточно взять вместо ω множество w всех $p_i (i = 0, 1, 2, \ldots)$, где каждое p_i — множество всех подмножеств множества z_0, удовлетворяющего переменной x аксиомы С5', имеющих мощность $\leqslant i$. Существование такого множества w доказывается при помощи аксиом С3 и CIV.

Таким образом доказывается, что непротиворечивость системы ZF, или Z, вытекает из непротиворечивости системы ZF^{-}, или Z^{-}, соответственно.

Рассмотренный в этом параграфе метод относительного доказательства непротиворечивости аксиомы объемности применим и к расширениям системы ZF^{-}, содержащим аксиомы о существовании недостижимых кардинальных чисел. Теория кардинальных чисел строится в ZF^{-}, как у Спринкла [5]. Аксиома о существовании недостижимого кардинального числа эквивалентна в ZF^{-} аксиоме о существовании полного фундированного множества k, элементы и подклассы которого удовлетворяют всем аксиомам системы Σ [3] и которое обладает тем свойством, что всякое его подмножество, имеющее меньшую ступень, чем оно само, является его элементом. (Полнота множества означает, что всякий его элемент является его подмножеством; фундированность — соблюдение аксиомы 3.171, в которой квантор $\forall a$ ограничен наследством этого множества; ступень множества, в предположении его фундированности, определяется путем трансфинитной индукции как наименьшее порядковое число, превосходящее степени всех его элементов). Аксиома о существовании двух недостижимых чисел эквивалентна в ZF аксиоме о существовании двух таких множеств k_1 и k_2, с дополнительным условием $k_1 \varepsilon k_2$. Аксиома о существовании последовательности типа α недостижимых чисел эквивалентна в ZF аксиоме о существовании такой функции t над α, что из $\beta\varepsilon\alpha$ следует соблюдение для $t(\beta)$ условия, высказанного выше для k, и из $\beta\varepsilon\gamma\varepsilon\alpha$ следует $t(\beta)\varepsilon t(\gamma)$. При этом α, в свою очередь, может быть недостижимым числом или превосходить недостижимые числа любой предварительно определенной последовательности. В ZF^-, при формулировке этих аксиом, на множества k, k_1 и k_2 следует наложить еще условие гладкости, что позволяет провести доказательство относительной непротиворечивости аксиомы CO^- — а затем и CO — вышеописанным методом.

С другой стороны, обобщая откровенную точку зрения на случай нескольких субъектов (причем убедительными считаются те доводы, которые доступны слабейшему из них) и пользуясь постулатами, упомянутыми в конце введения, и методами § 3, можно, по-видимому, обосновать непротиворечивость теории ZF^-, пополненной аксиомами о существовании недостижимых чисел. В связи с этими новыми постулатами можно высказать соображения, аналогичные приведенным в разделе 3.17. Кроме того, эти постулаты позволяют обосновать объединение теории ZF с гипотезой о существовании неосуществимого числа. Именно, постулаты одинаковой силы нужны для обоснования ZF с неосуществимым натуральным числом и ZF с недостижимым кардинальным числом — или же для обоснования ZF с неосуществимым натуральным числом и n недостижимыми кардинальными числами и для ZF с $n+1$ недостижимым кардинальным числом (n — конечно) и т. д. Эти вопросы мы надеемся рассмотреть подробнее в другой статье.

Примечание. Настоящая статья — вторая в ряде работ, посвященных основаниям математики и, в частности, теории множеств. Ее можно читать и без знакомства с работой [1]. Она была написана весной 1958 г., раздел 3.1624 — летом 1958 г., раздел 3.2 — весной 1959 г., вставка 3.230 добавлена в феврале 1960 г.; основной текст с позднейшими вставками не согласовывался. В дальнейших работах будет развита теория, намеченная в 3.2, а также подробнее проведены доказательства § 4.

Литература

1. А. С. Есенин-Вольпин. Анализ потенциальной осуществимости. В сб.: «Логические исследования». М., Изд-во АН СССР, 1959, стр. 218—262.
2. С. К. Клини. Введение в метаматематику. М., ИЛ, 1957, 526 стр.
3. К. Гёдель. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств. «Успехи математических наук», 1948, 3, № 1, стр. 96—149.

4. R. O. Gandy. On the axiom of extensionality, part I. The journal of symbolic logic, 1956, 21, N 1, p., 36—48.
5. H. D. Sprinkle. A development of cardinals in «The consistency of the continuum hypothesis», Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 2, p. 289—291.
6. A. Tarski. Über unerreichbare Kardinalzahlen, Fund. Math. XXX, 1938, S. 68—89.
7. Th. Skolem. Two remarks on set theory. Math. Scand., 1957, 5, N 1, p. 40—46.
8. Ilse L. Novak. A construction for models of consistent systems. Fund. Math. 1950, 37, p. 87—110.
9. R. C. Shepherdson. Inner models for set theory. The Journal of symbolic logic, 1951, № 16, p. 161—190.
10. A. Mostowski. Some impredicative definitions in the axiomatic set theory. Fund. Math., 1950, 37, p. 111—124.
11. Joseph R. Shoenfield. A relative consistency proof. The journal of symbolic logic, 1954, 19, № 1, p. 21—28.
12. A. Mostowski. Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip. Fund. Math., 1939, 32, S. 201—252.
13. V. Glivenko. Sur quelques points de la logique de M. Brouwer. Academie Royale de Belgique. Bulletins de la classe des sciences, 1929, sér. 5, 15, p. 183—188.
14. Gerhard Gentzen. Die Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik, Math. Zeitschr., 1936, Bd. 41, S. 357—366.
15. Ingebrigt Johansson. Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus. Compositio Math., 1936. 4(1), S. 119—136.
16. А. А. Марков. Теория алгорифмов. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, 38, стр. 176—189.
17. А. А. Марков. Теория алгорифмов. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1954, 42, 374 стр.
18. L. Henkin. The completeness of the first-order functional calculus. The journal of symbolic logik, 1949, 14, pp. 159—166.
19. G. Hasenjaeger. Eine Bemerkung zu Henkin's Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe. The journal of symbolic. logik, 1953, 18, № 1, S. 42—48.
20. А. С. Есенин-Вольпин. Недоказуемость гипотезы Суслина без помощи аксиомы выбора в системе аксиом Бернайса — Мостовского. Докл. АН СССР, 1954, 96, № 1, стр. 9—12.
21. A. Church. Introduction to mathematical logic, vol. I. New Jersey, 1956, p. 376 (Печатается русский перевод В. С. Чернявского).

И. И. Ревзин

ФОРМАЛЬНЫЙ И СЕМАНТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИНТАКСИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ В ЯЗЫКЕ

А. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

§ 1. Синтаксис в традиционной грамматике

Под синтаксисом в дальнейшем понимается *система отношений между отдельными элементами языка в речи.* При изучении синтаксиса основной задачей является *установление основных единиц синтаксиса и отношений (или связей) между ними.*

Специфика синтаксического аспекта языка (в отличие от семантического и прагматического) в том, что он может рассматриваться совершенно самостоятельно от значения отдельных знаков, поэтому синтаксис — часть языка, наиболее легко поддающаяся формализации.

Однако для выполнения этой задачи недостаточно традиционного грамматического аппарата, так как в традиционной грамматике (и особенно в синтаксисе) смешиваются формальные и смысловые критерии, а исходные понятия не выявлены и не определены сколько-нибудь точно.

Положение в традиционном языкознании довольно показательно. Существует более *двадцати* различных определений *слова* [1], из которых ни одно не удовлетворяет требованиям строго научного определения [2] и более *двухсот* определений *предложения* [3].

В этих условиях большинство языковедов вообще отказывается от *определения* этих важнейших категорий, ограничиваясь более или менее полным содержательным *описанием* признаков слова и предложения. Характерна в этом отношении академическая грамматика русского языка, изданная Институтом языкознания АН СССР [4]. Предложение характеризуется в этой книге как «грамматически оформленная по законам данного языка целостная единица речи, являющаяся главным средством выражения и сообщения мысли. В предложении выражается не только сообщение о действительности, но и отношение к ней говорящего. Язык как орудие общения и обмена мыслями между всеми членами общества пользуется предложением как основной формой общения» (стр. 65). В качестве «двух общих характерных признаков предложения... хотя их взаимоотношение и взаимодействие до настоящего времени остаются не вполне определенными», называются «интонация сообщения и предикативность» (стр. 76), причем предикативность в свою очередь определяется как категория, значение и назначение которой заключается «в отнесении содержания предложения к действительности» (стр. 80).

Ясно, что подобные формулировки не могут быть положены в основу какой-нибудь логической (дедуктивной или индуктивной) системы, они не дают никакой основы для плодотворной формализации, то есть, условия, необходимого для всякого подлинно научного описания. Ясно, что на таком фундаменте грамматика не может точно отображать объективно существующие в языке закономерности и, формулируя какое-нибудь правило, тотчас уничтожает его огромным числом исключений. Мы считаем, наконец, что огромное прикладное значение языкознания, выяснившееся теперь в связи с созданием семантических машин (в первую очередь переводческих и информационных), настоятельно требует далеко идущей формализации этой науки, сближения ее с современной математикой и логикой.

§ 2. Применение символической логики к языку

Однако простое перенесение аппарата символической логики, и в частности логического синтаксиса, на исследование реальных, или, как иногда говорят, разговорных, языков (в отличие от искусственных), как это предлагал Карнап (в предисловии к «Логическому синтаксису» [5]) и пытался делать Райхенбах [6], по-видимому, возможное при анализе «чистого» значения, наталкивается именно в области синтаксиса реальных языков на значительные трудности и пока не дало ощутимых результатов. И вот почему. Если мы хотим выделить какие-то синтаксические категории (G) в языке, то нам необходимо установить определенное отношение $G(A, B)$, где A — связь отдельных слов w_{s_1}, $w_{s_2}, \ldots w_{s_n}$ в потоке речи, B — связь между логическими понятиями s_1, $s_2 \ldots . s_n$, обозначаемыми словами w_{s_1}, $w_{s_2} \ldots w_{s_n}$.

Для объективного установления отношения $G(A, B)$, т. е. выделения синтаксической категории, необходимо предварительно получить как A (чего не сделал Райхенбах), так и B, строго отделив их друг от друга (чего не делала традиционная грамматика).

Так как мы хотим получить отношение $G(A, B)$ для языка вообще, а не для каких-то отдельных языков, то сама постановка задачи требует применения не индуктивных, а *дедуктивных* методов, что резко отличает современную трактовку проблемы от традиционного изложения ее в языкознании, где обычно даже круг исходных понятий не выявлен сколько-нибудь строго.

Итак, общая задача исследования синтаксиса, как он понимается в данной работе, распадается на три этапа:

1. Формальный анализ синтаксических элементов и синтаксических связей (A_1, A_2, $\ldots A_n$) для языка (языка вообще).

2. Формализация связей между обозначаемыми ($B_1, B_2, \ldots B_n$).

3. Установление $G(A, B)$.

Решение второй (и только второй) задачи вполне может быть достигнуто средствами «логического синтаксиса». Решение третьей подлежит компетенции семантики (как частный случай отношения между обозначаемым и обозначающим) и, по-видимому, вполне может быть достигнуто ее аппаратом. Но первым и наиболее трудным шагом является решение первой проблемы, которое могло бы служить надежной основой для дальнейшего исследования всего комплекса затронутых проблем. Именно на ней поэтому мы и сосредоточим наше внимание в следующем разделе.

Б. ФОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА

§ 3. Система теоретико-множественных понятий для анализа языка

Одно из основных отличий языка от многих других знаковых систем состоит в том, что далеко не все сочетания его элементов (звуков, морфем, слов, синтаксических единиц) имеют смысл. Это явление, находящее свое объяснение в теории информации (в связи с проблемой помехоустойчивости), берется здесь в качестве аксиомы. Специально синтаксической особенностью является тот факт, что группа элементов может играть ту же синтаксическую роль, что и один элемент. Этот факт также кладется в основу рассмотрения синтаксиса в качестве исходной аксиомы.

В настоящее время советскими математиками, работающими в области машинного перевода, была предложена теоретико-множественная концепция [7], использующая только эти два обстоятельства при исследовании фактов языка. В этой системе рассматривается следующая исходная ситуация. Дано конечное множество элементов (иногда мы будем называть их «единичными словами»):

$$\Xi = \{x\}.$$

Всякая упорядоченная последовательность элементов называется кортежем или фразой А, например:

$$A = x_1 \ x_2 \ldots x_n.$$

Дано некоторое множество отмеченных фраз: $\theta = \{A\}$, где каждое A — отмеченная фраза, причем каждый элемент x множества Ξ входит хотя бы в одну отмеченную фразу.

B-разбиением множества Ξ называется любое представление его в виде суммы непересекающихся подмножеств, т. е.

$$\Xi = \bigcup_i B_i \qquad B_i \cap B_k = 0 \quad (i \neq k).$$

Отобразив каждый элемент x_i фразы $A = x_1 x_2 \ldots x_n$ в содержащее его множество $B(x_i)$, мы получим последовательность:

$$B(x_1)B(x_2)\dots B(x_n),$$

которая называется B-структурой фразы A и обозначается $B(A)$.

B-структура называется *отмеченной*, если существует хотя бы одна отмеченная фраза, отображающаяся в данную B-структуру.

Два элемента B_j и B_i разбиения B считаются B-эквивалентными, если B-структуры:

$$B^1\dots B^k B_i\ B^{k+1}\dots B^n$$
$$B^1\dots B^k B_j\ B^{k+1}\dots B^n$$

при любых элементах B^i являются одновременно отмеченными или неотмеченными. B-эквивалентность B_i и B_j записывается в виде: $B_j \underset{B}{\sim} B_i$.

Если мы возьмем E-разбиение множества Ξ (разбиение на единичные слова), то (теоретико-множественная) сумма всех E-эквивалентных, и только E-эквивалентных, элементов образует *семейство*. Разбиение на семейства называется S-разбиением.

Примечание. Семейством является, например, совокупность слов с фиксированной формой, к примеру все существительные мужского рода единственного числа творительного падежа.

Доказывается следующее утверждение:

Лемма 1. Из $S_i \underset{S}{\sim} S_j$ следует $S_i = S_j$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только S-структуры.

Возьмем какую-то S-структуру: Назовем S-конфигурацией 1-го ранга ($\widetilde{S}_{(1)}$) такую наименьшую S-структуру, которая содержит не менее двух элементов и для которой существует элемент разбиения S (обозначим его S_{α_1}) такой, что структуры

$$S(A_1)\,\widetilde{S}\,S(A_2),$$
$$S(A_1)\,S_{\alpha_1}S(A_2)$$

являются одновременно отмеченными или неотмеченными при любых A_1 и A_2. Элемент S_{α_1} называется результирующим для данной конфигурации. Заменив все конфигурации 1-го ранга результирующими, мы получаем S-структуру 1-го ранга ($S_{(1)}$).

В общем случае конфигурацией n-го ранга называется такая наименьшая S-структура, состоящая не менее чем из двух элементов, для которой имеется элемент $S_{\alpha n}$ такой, что структуры $(n - 1)$-го ранга:

$$S(A_1)\widetilde{S}_{(n)}S(A_2),$$
$$S(A_1)S_{\alpha_n}S(A_2)$$

являются одновременно отмеченными или неотмеченными при любых A_1 и A_2. Структурой n-го ранга называется структура, не содержащая конфигураций ранга меньше или равного n.

Для дальнейшего заметим, что по этому определению *любая S-структура n-го ранга является одновременно и структурой ранга низшего, чем n.*

Примечание. Понятие конфигурации, введенное А. А. Ляпуновым и О. С. Кулагиной, является чрезвычайно удобным для формализации обобщением одной из основных категорий синтаксиса, а именно *словосочетания* (в смысле определения В. В. Виноградова). Результирующий (если он совпадает с одним из элементов конфигурации) — это, как правило, опорное слово в словосочетании. Ясно, что замена словосочетания (например, «очень красивый») на опорное слово (например, «красивый») переводит любую осмысленную фразу («отмеченную фразу») в осмысленную, а любую бессмысленную в бессмысленную. Ранги конфигураций нужны для того, чтобы замены производились в определенном порядке (например, в «очень красивое платье» нельзя начинать с выделения конфигурации «красивое платье» и замены этой конфигурации на результирующий «платье», так как мы получим бессмысленное сочетание «очень платье»).

Необходимо отметить, что идеи, очень близкие к понятию конфигурации, были выдвинуты Хэррисом в 1946 г. Указывая, что идея выделения элементов, эквивалентных с точки зрения возможности замены одного на другой, является общепризнанным методом структурной лингвистики, Хэррис пишет: «Новое в предлагаемом мной методе состоит в расширении понятия подстановки... Теперь мы рассматриваем не только те отдельные элементы А и В, которые могут встретиться в окружении С — Д, но также и группы элементов, напр. АЕ, и т. п.» [8].

Понятие конфигурации нуждается еще в одном существенном уточнении. Для того чтобы устранить произвол в выборе конфигураций, мы установим, что конфигурации выделяются слева направо.

Если теперь какой-то элемент S_i может образовать как конфигурацию со структурой вправо от него, так и конфигурацию того же ранга со структурой влево от него, то мы будем рассматривать только вторую из них.

§ 4. Вопрос о количестве результирующих

Результирующий конфигурации, вообще говоря, не единствен. Можно утверждать лишь следующее:

Теорема 1. Каждая S-конфигурация 1-го ранга имеет один и только один результирующий.

Мы докажем сейчас несколько более общее утверждение, которое понадобится нам в дальнейшем и частным случаем которого является теорема 1. Для этого мы введем дополнительное понятие *эквивалентности по рангу*: мы будем говорить, что S_i эквивалентно S_j по рангу l $(S_{j\widetilde{(l)}}S_i)$, если во всех S-структурах l-го ранга замена S_i на S_j и S_j на S_i переводит отмеченную S-структуру в отмеченную, а неотмеченную в неотмеченную.

Лемма 2. Если S_i и S_j — два результирующих конфигурации l-го ранга $\widetilde{S}_{(l)}$, то $S_i \underset{(l-1)}{\sim} S_j$. Доказательство. Возьмем произвольную S-структуру $(l-1)$-го ранга, в которой встретилось S_j; пусть это будет AS_jB (1). Отмеченность этой S-структуры зависит по определению конфигурации $\widetilde{S}_{(l)}$ от отмеченности структуры

$$A\widetilde{S}_{(l)}B. \tag{2}$$

Но и отмеченность AS_iB зависит по определению конфигурации от (2), а значит и от (1). Отсюда $S_{i\widetilde{(l-1)}}S_j$.

Если S_i эквивалентно S_j по нулевому рангу, то, в силу определения структур нулевого ранга, S_i просто эквивалентно S_j. Отсюда (по лемме 1) $S_i = S_j$. Тем самым мы доказали и теорему 1.

Назовем теперь конфигурацию *регулярной*, если результирующий совпадает с одним и только одним из элементов конфигурации.

Отметим важное свойство таких конфигураций.

Регулярная конфигурация k-го ранга порождает бесконечное множество S-структур $(k-1)$-го ранга. Это свойство почти очевидно: если имеется конфигурация k-го ранга AB такая, что S-структуры

$$MABN \quad (1)$$

$$MBN \quad (2)$$

одновременно отмечены или не отмечены, то вместе с (1) и (2) одновременно будут отмечены или не отмечены все структуры вида

$$MAA\ldots ABN. \quad (3)$$

В реальных языках, разумеется, цепочка $(AA\ldots A)$ всегда конечна. Это — *однородные члены* (например, ряд прилагательных при одном существительном).

§ 5. Норма S-структуры

Введем теперь следующие определения.

Упрощением данной S-структуры называется структура, полученная из данной S-структуры или ее упрощений путем замены конфигураций их результирующими.

Базисным упрощением (или *базисом*) данной S-структуры называется упрощение данной S-структуры, не содержащее никаких конфигураций.

Нормой данной S-структуры мы будем называть число, соответствующее количеству элементов в ее базисном упрощении.

Поскольку конфигурация может иметь несколько результирующих, то, вообще говоря, норма число переменное, зависящее от того, какие результирующие входили в промежуточные упрощения данной S-структуры.

В реальных языках, однако, это не так: там норма всякой данной S-структуры однозначно определена. Доказать соответствующую теорему для абстрактных S-структур в общем случае пока не удалось. Но для одного специального случая имеет место следующая:

Лемма 3. Пусть дана S-структура $(k-1)$-го ранга $S(A_1)\widetilde{S}_{(k)}S(A_2)$, где $\widetilde{S}_{(k)}$—конфигурация k-го ранга с результирующими $S^1_{\alpha_k}$, $S^2_{\alpha_k}, \ldots, S^n_{\alpha_k}$, пусть $S^i_{\alpha_k}$ образует с элементом Z' из $S(A_1)$ и элементом Z'' из $S(A_2)$ конфигурацию m-го ранга $\widetilde{S}_{(m)} = Z'S^i_{\alpha_k}Z''$ с результирующими $S^1_{\alpha_m}$, $S^2_{\alpha_m}, \ldots, S^l_{\alpha_m}$ и пусть $m \geqslant k$. Тогда $S^j_{\alpha_k}$ $(1 \leqslant j \leqslant n$ и $i \neq j)$ также образует с Z' и Z'' конфигурацию m-го ранга $\widetilde{S}'_{(m)} = Z'S^j_{\alpha_k}Z''$ с теми же результирующими $S^1_{\alpha_m}$, $S^2_{\alpha_m}, \ldots, S^l_{\alpha_m}$.

В условиях леммы 3, т. е. когда $m \geqslant k$, справедлива следующая:

Теорема 2. Если $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ — два базисных упрощения данной S-структуры, то $S^{(1)}_i (\widetilde{n})\, S^{(2)}_i$, где i — номер элемента, стоящего на i-том месте, а n — ранг базисного упрощения.

Теорема 2 доказывается методом полной индукции на основании лемм 2 и 3. Из теоремы 2 следует, что в условиях, когда она справедлива, норма данной S-структуры однозначно определена.

§ 6. Синтаксически правильный язык

Мы будем называть базисное упрощение некоторой S-структуры *простым*, если оно не содержит внутри себя базисного упрощения какой-либо другой S-структуры. Язык, в котором

а) число отмеченных базисных упрощений конечно и б) все базисные упрощения отмеченных S-структур простые, называется *синтаксически простым*.

Теорема 3. Если в синтаксически простом языке какая-либо отмеченная S-структура имеет норму один, то все отмеченные S-структуры этого языка имеют норму один.

Доказательство. Пусть базисное упрощение какой-либо отмеченной S-структуры имеет норму K, т. е. имеет вид $S_1S_2 \ldots S_k$, и пусть имеется отмеченная S-структура нормы один с базисным упрощением $\overline{S}$. Рассмотрим все множество отмеченных базисных упрощений синтаксически простого языка. Возьмем отмеченное базисное упрощение с наивысшим рангом (пусть это будет r). Тогда все отмеченные базисные упрощения суть структуры ранга r. (В отличие от других структур k-го ранга базисные упрощения суть структуры не только любого ранга ниже k, но и любого конечного ранга выше k.) Рассмотрим теперь все множество S-структур ранга r. Кроме отмеченных базисных упрощений, в него входят еще какие-то неотмеченные S-структуры ранга r.

На этом множестве мы будем теперь сопоставлять пары структур вида:

$$S(A_1)\,S_1S_2\,....\,S_kS\,(A_2) \tag{1}$$

$$S(A_1)\,\overline{S}\,S\,(A_2) \tag{2}$$

Если (1) отмечена, то это базисное упрощение, и поскольку язык синтаксически прост, то $S(A_1)$ и $S(A_2)$ суть пустые структуры. Тогда отмечена (2). Аналогично, если отмечена (2), то отмечена (1). Итак, (1) и (2) при произвольных A_1 и A_2 (допустимых для множества структур r-го ранга) отмечены одновременно.

Если бы (1) и (2) при каких-либо A_1 и A_2 были бы одновременно не отмечены, то тогда $S_1S_2..S_k$ была бы конфигурация ранга r. Этого быть не может. Значит, одна из них должна быть отмечена, а другая — нет. Но мы видели, что это невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему.

Смысл этой теоремы в следующем. Русский язык является, по-видимому, синтаксически простым. В то же время в нем встречаются базисные упрощения нормы один, например «холодно», «морозит» и т. п. Для того чтобы не получить результата, который противоречит нашему интуитивному представлению о русском языке (а именно, что в нем все предложения односоставны), мы должны исключить из рассмотрения все структуры нормы один.

Язык, в котором отсутствуют отмеченные структуры нормы один, мы будем называть *синтаксически правильным.*

§ 7. Составляющие данной S-структуры

До сих пор мы рассматривали все множество отмеченных S-структур некоторого языка. Пусть теперь выделены все конфигурации и все базисные упрощения. Покажем теперь, как в построенной системе может анализироваться некоторая фиксированная отмеченная S-структура. Прежде всего выделим имеющиеся в ней регулярные конфигурации (см. § 4).

Тот элемент регулярной конфигурации, который совпадает с результирующим, мы будем называть *ядром*, остальные элементы регулярной конфигурации — атрибутом к этому ядру.

Мы будем называть составляющими данной S-структуры:

а) любую нерегулярную конфигурацию, результирующий которой есть атрибут или элемент базисного упрощения;

б) любой атрибут;

в) любой элемент базисного упрощения, входивший в исходную структуру.

Примеры: 1) Возьмем фразу «Он поднялся на высокий холм» и соответствующую S-структуру: $S_1S_2S_3S_4S_5$. Сокращение ее можно представить следующей схемой:

$$\begin{array}{c} S_1S_2S_3S_4S_5 \\ \vee \\ S_1S_2S_3S_5 \\ \searrow\downarrow\swarrow \\ S_1S_2 \end{array}$$

Таким образом, мы имеем следующие составляющие: S_1 (он), S_2 (поднялся), S_4 (высокий), S_3S_5 (на холм). 2) Возьмем фразу: «Советские шахматисты одержали крупную победу» и соответствующую ей S-структуру $S_1S_2S_3S_4S_5$. Сокращение ее можно представить следующей схемой:

$$\begin{array}{ccc} & S_1S_2S_3S_4S_5 & \\ \vee & & \vee \\ S_2 & & S_3S_5 \\ & & \vee \\ & & S_2S_6 \end{array}$$

Здесь S_6 семейство, объединяющее только непереходные глаголы типа «уехали». Мы исходим из того, что фраза типа «шахматисты одержали» не является отмеченной, в то время как фраза «шахматисты уехали» отмечена.

В этой структуре можно выделить следующие составляющие: S_1 (советские), S_2 (шахматисты), S_4 (крупную), S_3S_5 (одержали победу). S_6, однако, не есть составляющий, так как не входил в исходную структуру.

§ 8. Отношения между составляющими

Введем следующие вспомогательные понятия.

Если все элементы базисного упрощения суть составляющие данной S-структуры (т. е. входили в исходную S-структуру), то мы будем говорить, что они являются собственными базисными составляющими.

Если результирующий нерегулярной конфигурации есть элемент базиса, то мы будем говорить, что данная конфигурация есть несобственный базисный составляющий.

Теперь определим понятие непосредственного подчинения между составляющими данной структуры.

Если некоторый составляющий A является атрибутом к ядру C, а составляющий B является самым коротким из составляющих, в которые ядро C входит в качестве составной части, то мы будем говорить, что составляющий A непосредственно подчинен составляющему B ($B \to A$). Если два составляющих A и B являются собственными или несобственными базисными составляющими, то мы будем говорить, что A непосредственно подчинено B, а B непосредственно подчинено A ($A \rightleftarrows B$). В этом случае мы будем говорить, что A и B составляют предикативную пару.

Пример. В первом примере предыдущего параграфа $S_1 \rightleftarrows S_2$, $S_2 \to S_3S_5$, $S_3S_5 \to S_4$. Во втором примере $S_2 \rightleftarrows S_3S_5$, $S_3S_5 \to S_4$, $S_2 \to S_1$.

§ 9. Цепочка составляющих

Мы будем говорить, что составляющий A подчинен составляющему B, если имеется цепочка составляющих $Z_1, Z_2, \ldots$ $\ldots, Z_n$ такая, что $Z_1 = A$, $Z_n = B$ и $Z_{i+1} \to Z_i$ $(1 \leqslant i < n)$.

Цепочка, где $Z_{i+1} \to Z_i$, будет называться атрибутивной, если каждый из составляющих Z_i, за исключением, может быть, Z_n, является атрибутом. Очевидно следующее основное свойство атрибутивных цепочек: в каждой атрибутивной цепочке имеется начальный составляющий, т. е. такой составляющий Z_1, для которого не существует Z_0 такого, что $Z_1 \to Z_0$.

§ 10. Предложение

Для простоты будем считать, что каждая S-структура может быть однозначно представлена в виде некоторого множества составляющих и это множество упорядочено отношением подчинения.

Определение. S-структура называется предложением, если ее составляющие Z_1, $Z_2, \ldots Z_n$ обладают следующими двумя свойствами: а) для каждого составляющего Z_i имеется один и только один составляющий Z_j $(i \neq j)$ такой, что $Z_j \rightarrow Z_i$ и б) для любых двух составляющих Z_k и Z_l имеется составляющий Z_m такой, что $Z_k = Z_m$ или Z_k подчинено Z_m и $Z_l = Z_m$ или Z_l подчинено Z_m.

Таким образом, каждое предложение есть S-структура, но не каждая S-структура есть предложение. Ниже мы познакомимся с одним из свойств предложения.

Теорема 4. В предложении имеется одна и только одна предикативная пара.

Доказательство. Докажем сначала (от противного) существование хотя бы одной предикативной пары. Возьмем какой-то составляющий Z_1. Найдем Z_2 такое, что $Z_2 \rightarrow Z_1$, затем Z_3 такое, что $Z_3 \rightarrow Z_2$ и т. д. Поскольку множество составляющих некоторой S-структуры конечно, то мы дойдем до составляющего Z_n такого, что:

1) нет составляющего Z_{n+1} такого, что $Z_{n+1} \rightarrow Z_n$ или

2) $Z_{n+1} = Z_i$ из построенной нами цепочки.

Первое невозможно в силу условия а). Разберем второй случай. По предположению в нашей цепочке нет ни одной предикативной пары. Таким образом, цепочка $Z \leftarrow Z_{i+1} \leftarrow Z_{i+2} \leftarrow \ldots \leftarrow Z_n \leftarrow Z_i \ldots$ атрибутивная. Но в ней, как легко убедиться, нет начального составляющего. Полученное противоречие доказывает существование хотя бы одной предикативной пары.

Пусть теперь имеются две предикативные пары (Z_1, Z_2) и (Z_k, Z_{k+1}). Для составляющих Z_1 и Z_k имеется хотя бы один составляющий Z_m такой, что $Z_m = Z_1$ или $Z_m = Z_k$ или Z_m подчиняет Z_1 и Z_m подчиняет Z_k. Если Z_m подчиняет Z_1 и Z_m подчиняет Z_k, то имеется цепочка A_1, $A_2, \ldots A_n$ и цепочка $B_1, B_2, \ldots, B_l$ такие, что

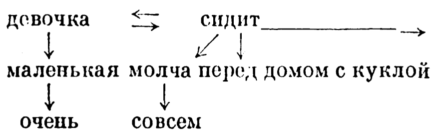
$A_1 = B_1 = Z_m$, $A_n = Z_1$, $B_l = Z_k$ и $A_i \to A_{i+1}$ и $B_i \to B_{i+1}$.

Итак, $A_{n-1} \to A_n = Z_1$ по нашему предположению $Z_2 \to Z_1$. Это противоречит, однако, условию а). Аналогично во всех остальных случаях.

Единственность предикативной пары доказана. Следствие: Всякая S-структура, являющаяся предложением, имеет норму два.

§ 11. Синтаксическая схема и члены предложения

Располагая подчиняющие составляющие над подчиненными, а элементы предикативной пары на одном уровне, мы можем построить теперь схему зависимости, почти целиком совпадающую со школьными схемами разбора предложений, например:



Предикативная пара: *девочка сидит*.

Атрибутивные цепочки: очень маленькая девочка
сидит совсем молча
сидит перед домом
сидит с куклой.

В дальнейшем мы условимся предикативную пару на схеме располагать так, что слева всегда ставится тот элемент предикативной пары, который *чаще* выступает правее другого элемента во всех предложениях.

Этот статистический критерий не очень точен, но, к сожалению, пока нет другого средства для различения подлежащего и сказуемого.

Введем теперь *отношение подобия* между двумя схемами: две схемы называются подобными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что из $A \to B$ следует $f(A) \to f(B)$ для всех A и всех B.

Два составляющих называются подобными, если имеются две подобные схемы, в которых они стоят на соответственных местах.

Очевидно, что отношение подобия, обладающее свойствами рефлексивности, симметрии и транзитивности, разбивает все составляющие на непересекающиеся классы, которые мы будем называть *членами предложения.*

Таким образом, мы получили определение основных элементов синтаксиса.

В. СЕМАНТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВНУТРЕННИХ СВЯЗЕЙ В ПРЕДЛОЖЕНИИ

§ 12. Предикаторы и депредикаторы

Теперь мы можем вернуться к основной задаче, поставленной в первой части, а именно к установлению отношения $G\ (A, B)$.

Мы получили два типа отношений в предложении: *одностороннее подчинение* (или атрибутивную связь) *и взаимное подчинение* (или предикативную связь). С какими логическими связями их можно сопоставить? Ясно, что такие отношения, как, например, причинно-следственные, в абстрактном синтаксисе, построенном нами, формальных аналогов не имеют (их можно, по-видимому, установить только для конкретных языков).

Однако вскрытие этих связей все же позволяет глубже проникнуть в логическую структуру предложения. Если в исчислении высказываний предложение вообще берется как исходная неделимая единица, а в исчислении предикатов формализуются лишь содержательные связи типа $P(x)$, т. е. x характеризуется определенным свойством, или типа $P\ (x_1, x_2 \ldots x_n)$, т. е. между x_1, $x_2, \ldots$, x_n, устанавливается определенное отношение, то вскрытие таких формальных категорий связи внутри предложения как одностороннее и двустороннее подчинение дает возможность формализовать внутреннее отношение между отдельными терминами, составляющими высказывание. Это, во-первых, составление двух терминов в сложный термин, не являющийся еще высказыванием, и, во-вторых, превращение двух терминов в высказывание. Если обозначить одностороннюю связь точкой (.), а двустороннюю двоеточием (:), то эту ситуацию можно изобразить следующим образом:

$a \cdot b$ — сложный термин,
$a : b$ — высказывание.

Таким образом, знак (:) служит *предикатором*. Предикаторы играют важную роль во многих семантических системах, но для того чтобы выразить этот предикатор обычным образом, принятым в семантике: $P\ (a,\ b,)$, необходимо иметь возможность обозначить при помощи того же предикатора и факт односторонней связи. Как указал мне В. К. Финн, этого легко можно достичь путем введения особого индикатора, который можно было бы обозначить *депредикатором* ∂.

$\partial P(a,\ b)$ — обозначает, что из данного предложения $P(a,\ b)$ образован сложный термин $a \cdot b$, который в качестве отдельной единицы входит в другое высказывание Q.

Это удобно для анализа определенного предложения, например Q: маленькая девочка сидела перед домом

a b c d

Если обозначить предложение «девочка есть маленькая» как $P(a,\ b)$, а предложение «акт сиденья производится перед домом» как $R(c,\ d)$, то все предложение изобразится в виде:

$$Q[\partial P(a,\ b),\ \partial R(c,\ d)].$$

В случае необходимости мы всегда можем проанализировать сложный термин как сокращенное высказывание, что, конечно, очень важно, например, для создания информационных машин.

§ 13. Депредикация в языке

Итак, мы рассматриваем всякий сложный термин, как депредицированное высказывание, что, как указано выше, чрезвычайно важно для практических использований логической системы, хотя явного выражения депредикации в языке в большинстве случаев нет (мы просто выдвинули в целях удобства определенную гипотезу). Но в ряде случаев депредикация в языке выражена явно. Речь идет, в первую очередь, о различных причастиях и деепричастиях, оборотах, явно образованных из соответствующих предложений.

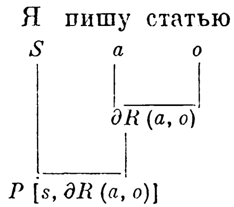
Гуляя он увидел	Он гулял и он увидел
$a \quad c \quad b$	$c \quad a \quad c \quad b$
$Q\,[\partial P\,(a, b), c]$	$P\,(c, a)\ \&\ Q\,(c, b)$

Другим видом явного выражения депредикации являются подчинительные союзы в так называемом «сложно-подчиненном предложении», которые превращают структуру со значением предложения в составляющий.

§ 14. Субъектно-объектные отношения

В терминах депредикации субъектно-объектное отношение может быть выражено следующим образом:

Отношение между действием (a) и объектом (c) изображается как депредицированное высказывание: действие направлено на объект: $dR\,(a, o)$, получившийся сложный термин (соответствующий конфигурации), образует вместе с субъектом (s) новое выксказывание $P\,[s,\ dR\,(a, o)]$, например:



В свою очередь это высказывание может быть депредицировано в сложный термин: «написание мной статьи»:

$$\partial P\,[s, \partial R\,(a, o)],$$

который может стать частью нового высказывания и т. д.

Представление односторонней связи в виде депредицированной двусторонней может быть использовано и для дальнейшей формализации синтаксиса, начатой в разделе В.

По поводу предложенного там способа выделения грамматических связей может быть выдвинуто следующее вполне обоснованное возражение. Кроме установления самого факта подчинения одного элемента другому, очень важно установить сам характер этого подчинения, его качественную сторону. В самом деле, рассматривая в русском языке такие группы, как

$$\underset{a}{\text{арест}}\ \underset{b}{\text{солдат}} \qquad (1)$$

$$\underset{a}{\text{арест}}\ \underset{b'}{\text{солдатами}} \qquad (2),$$

недостаточно установить, что b подчинено a, так же как b' подчинено a. Важно показать, что эти связи качественно различны. Если мы будем рассматривать (1) как депредицированное предложение «кто-то арестовывает солдат», а (2) как депредицированное предложение «солдаты арестовывают кого-то», то можно отразить и качественную разницу между двумя видами связи. Пусть «кто-то» обозначается d (с условием, что это d подставляется из окружающего текста) «арест» — a и «солдаты» — b. Тогда (1) и (2) будут иметь различную запись:

$$\partial P\,[d, \partial\, Q\,(a, b)] \qquad (1)$$

$$\partial P'\,[a, \partial Q\,(b, d)] \qquad (2)$$

Примечание. Легко видеть, что система раздела В не давала еще возможностей для таких различений так же, как она вообще не дает критериев для выделения активного и пассивного залога. Впрочем, введением некоторых новых сугубо формальных понятий и некоторым видоизменением старых, например сужением понятия «конфигурация», можно добиться того, чтобы новая система отражала и залоговые различия.

§ 15. Смысл синтаксической правильности языка

Если язык состоит из фраз, выражающих только две функции: синтаксическую и семантическую (и только эти две функции), то он должен быть синтаксически правильным (см. § 6). Так называемые «бытийные» или «назывные предложения» типа:

Ночь, улица, фонарь, аптека.
Бессмысленный и тусклый свет. (*А. Блок*)

не выполняют синтаксической функции. Их основная функция — прагматическая (или, как часто говорят в грамматике, стилистическая). Как ясно из определения § 10, мы такие отрывки текста предложениями не считаем.

То же относится и к так называемым побудительным или повелительным «предложениям» типа:

Молчи, скрывайся и таи
И чувства и мечты свои. (*Тютчев*).

Требование синтаксической правильности включает таким образом изъятие из рассмотрения всех прагматических (в том числе и грамматико-стилистических элементов).

В этой связи следует особо остановиться на так называемых безличных «предложениях».

§ 16. «Безличные предложения»

О «безличных предложениях» написана огромная литература [9], но неразличение прагматического от непрагматического в я ыке не давало возможности ни лингвистам, ни логикам добиться ясности в этом вопросе.

Надо с самого начала заявить, что как с точки зрения синтаксической (собственно лингвистической) и семантической, так и с точки зрения логической нет никакой разницы между терминами: «мороз» и «морозит». «рассвет» и «светает» и т. п. Смутные ассоциации, пробуждаемые «глагольностью» слов типа «морозит», должны изучаться в психологии, так как с точки зрения синтаксиса или логики здесь нет никаких объективных критериев различения. Продуктивность определенных типов безличных конструкций связана с их стилистической ролью и с важностью прагматического аспекта языка вообще. Но считать такие конструкции предложениями на основании каких-то неформальных критериев [«глагольность», «предикативность» в указанном выше (§ 1) смысле] мы считаем мало продуктивным.

Важно другое. Многие безличные конструкции играют в языке не прагматическую, а синтаксическую функцию, что приводит к образованию двусторонних связей в случаях типа:

Мне больно, обидно мне. (*С. Есенин*).

Такие конструкции, при условии установления двусторонней связи, указанным в § 8 методом можно включить в состав синтаксически правильного языка и считать предложениями.

Между структурой фразы «мне обидно» и «я обижен» можно, по-видимому, установить отношение подобия (§ 11).

Интересно привести здесь мнение такого тонкого лингвиста, как проф. В. Г. Адмони, об аналогичных структурах в немецком языке (например, mich friert, hier wird getanzt): «Здесь получаются своеобразные структуры, состоящие из двух компонентов, совершенно достаточных (при данном порядке слов) для образования предложения, хотя номинативное подлежащее здесь отсутствует. Говоря строго грамматически, мы имеем дело с односоставными предложениями, так как mich и hier выступают здесь в форме зависимых членов предложения, членов глагольной группы. Но тот факт, что именно они придают данным видам предложения завершенность (предложения Friert. Wird getanzt и даже getanzt wird невозможны) делает их исключительно важными и необходимыми для структуры предложения и позволяет заключить, что перед нами своеобразная параллель двусоставной структуры предложения» [10].

Это показывает, что состав синтаксически правильного языка, а вместе с тем и область определения предложения можно расширить, не снижая логической строгости и общности.

§ 17. Заключение

Традиционная грамматика находилась в порочном кругу, рассуждая о языке средствами языка, поэтому она все время смешивала формальные и содержательные критерии и не учитывала, что *само содержание на определенном уровне формализации является формой*. Используя в качестве метаязыка построенную в § 3—5 абстрактную систему, мы в терминах этого метаязыка определили составляющие, которые и явились объектом в дальнейшем исследовании. Между этими объектами удалось установить связь, которая в свою очередь выступает как форма по отношению к новому содержанию, для полного описания которого нужен был бы новый метаязык (формализующий лексическую сторону языка). Ясно, что это содержание (или, вернее, отношения между содержаниями) может составить форму выражения новых содержаний, *и так далее.* В сущности, именно этот процесс формализации, параллельный научному познанию все более широких и глубоких связей в объективной действительности, и описывает семантика, именно в этом глубокая научная ценность семантики не только для науки о языке, но и для логики и теории познания.

Литература

1. См. Adolf Noreen, Einführung in die wissenschaftliche Betrachtung der Sprache. Halle (Saale), 1931, S. 433—436.
2. См. мою статью «Структуральная лингвистика, семантика и проблемы изучения слова». «Вопросы языкознания», 1957, № 2.
3. См. John Ries. Was ist ein Satz? Prag, Taussig, 1931, S. 208—224.
4. Грамматика русского языка, т. II, синтаксис, ч. 1. Изд-во АН СССР, 1954.
5. См. R. Carnap. Logical Syntax of Language. N. Y., 1937.
6. H. Reichenbach. Elements of symbolic logic, N. Y., 1947, ch. VIII: «Analysis of conversational language».
7. См. О. С. Кулагина. Об одном способе определения грамматических понятий на базе теории множеств. Сборник «Проблемы кибернетики», вып. 1, под ред. А. А. Ляпунова. М., Гос. изд-во физ.-мат. лит.-ры, 1958.
8. Zellig S. Harris. From morpheme to utterance. «Language», vol. 22, N 3, p. 163.
9. Например, Franz Miklosich. Subjektlose Sätze, 2. Aufl. Wien, 1883; Chr. Sigwart. Die Impersonalien. Freiburg, 1888; из новейшей литературы можно назвать: Е. М. Галкина-Федорук. Безличные предложения в современном русском языке. В сб.: «Вопросы синтаксиса современного русского языка». М., Учпедгиз, 1950, стр. 302—320.
10. В. Г. Адмони. О двусоставности предложения. «Ученые записки 1-го ЛГПИИЯ», нов. серия, вып. II, 1955, стр. 171; его же. Введение в синтаксис современного немецкого языка. М., Изд-во лит-ры на иностр. яз., 1955, стр. 48—49.

И. И. Ревзин

О ЛОГИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

(на примере определения морфемы)

Центральная проблема логического обоснования принципов языкознания есть проблема точного определения фундаментальных понятий этой науки. «До сих пор в области языка всегда довольствовались операциями над единицами, как следует не определенными» [1].

Первая трудность, возникающая здесь, чисто семантическая. Основные термины языкознания: «слово» и «предложение» понимаются в том значении, которое придается им в разговорной речи, а этих значений, как известно, несколько. Пытаясь найти определение, лингвист, как правило, ищет критерии для того, чтобы термин «слово» (или «предложение») удовлетворял всем употреблениям звукового комплекса «слово» в разговорной речи, а это заранее обрекает на неудачу все попытки дать строгое определение. Как известно, даже более конкретные понятия разговорной речи, например «спина» или «стол», не удается определить сколько-нибудь точно (достаточно посмотреть определения, даваемые, например, в словаре под редакцией Д. Н. Ушакова, чтобы убедиться, насколько трудна задача точного определения).

Характерно, однако, что и термины, которые не заимствуются из разговорной речи, а вводятся как научные понятия языковедами, не менее расплывчаты, чем «слово» и «предложение». Достаточно взять такой распространенный термин как «морфема». По-видимому, имеются более глубокие причины расплывчатости основных лингвистических определений.

Вторая трудность при поисках точных лингвистических определений сводится к следующему. Языковеды, как правило, отвергают чисто формальный подход к явлениям языка, ссылаясь на то, что каждый языковой факт, каждая единица языка имеет *значение*. Это трудно отрицать, но все дело в том, что слово «значение» употребляется в самых разнообразных значениях [2], термин «значение» лишен той степени определенности, которая позволяла бы брать «значение» в качестве исходного, неопределяемого. Характерно, что в американской дескриптивной лингвистике термин «значение» вообще не употребляется [3].

И это понятно. Возьмем определение морфемы, данное П. С. Кузнецовым: «Это — наиболее элементарная неделимая далее значимая единица языка»[4]. Это определение является, пожалуй, одним из наиболее удачных, и все же оно оставляет чувство неудовлетворенности, именно из-за присутствия в нем термина «значимый». Если мы имеем слово «вода», то значение части «вод» чувствуется достаточно ясно, для определения же значения части «-а» нужно провести сложный грамматический анализ.

Гораздо сложнее обстоит дело с разложением на морфемы слова «водянистый». Здесь элемент «вод-» выделяется так же, как в предыдущем примере; элемент «-ый» выделяется так же, как «-а» в слове «вода». Остается часть «янист-». Каково значение этой части? Может быть, она распадается на две части «-ян-» и «-ист»? Но каково значение этих частей? Для того чтобы разложить: «янист» на «-ян» и «-ист» приходится прибегать не к «значимости» элементов, а к сопоставлению слова *водянистый* с рядом других слов, например *стеклянный*, *золотистый*, *серебристый*, и т. п. Но здесь мы уже отклонились от принципа выделения морфем по их значимости. Ясно, что возможность сопоставления элементов, сама повторяемость их связана с тем, что они имеют значение, но объективной непосредственной данностью для лингвиста являются не «значения», а лишь ряды слов и повторяемость элементов в них. Прав поэтому Джуз, когда он говорит: ««Значением» морфемы для лингвиста по определению является множество условных вероятностей встречаемости этой морфемы в окружении всех других морфем» [5]. Таким образом, отрицать фактор значимости лингвист не может, но он непосредственно может изучать лишь следствия значимости элементов. это прекрасно понимал такой выдающийся русский языковед, как Е. Д. Поливанов: «Среди элементов слова явно выделяется 2 различных класса по частоте их функций (т. е. участия) среди массы различных слов; а условия, относящие тот или другой элемент к одному из этих классов, состоят, понятно, в значениях их, т. е. сводятся в конечном счете, к внеязыковым данным» [6].

Все это говорит о том, что, строя определение морфемы, мы вовсе не обязаны включать в само определение понятие значимости.

Третья трудность при определении лингвистических единиц состоит в том, что до сих пор в языкознании использовались только определения с указанием рода и вида. Для таких определений необходимо иметь хотя бы одно точное определение родового понятия, к роду которого относится данное видовое.

Поскольку этого до сих пор нет, то ни одно определение не дает точных критериев для нахождения соответствующих элементов. Так, в приведенном выше определении П. С. Кузнецова ближайшим родовым понятием должна явиться «значимая единица языка». Допустим, что термин «значимый» определен достаточно четко. Но «единица языка» — это все, что угодно в языке. Между тем, ближайшим родовым понятием, если исходить из наших интуитивных представлений, должно было бы быть понятие «части слова». Но «слово», как указано ранее, также не определено.

На трудность оперирования одними родо-видовыми определениями в лингвистике указал недавно Бар-Хиллел [7]. Он предложил использовать другой вид определений, находящий все более широкое распространение в математической логике и даже за ее пределами, а именно определения *рекурсивные*. Эта мысль была поддержана Уотма на 8-м международном конгрессе лингвистов [8]. Что же такое рекурсивные определения?

«Рекурсивным определением называется определение, которое осуществляется при помощи «возвращения» от неизвестного к известному... Существенными для рекурсивных определений в общем понимании этого термина являются лишь два обстоятельства: 1) возможность после конечного числа шагов вернуться от искомого неизвестного значения функции к известным заранее значениям той же функции или других ранее определенных функций, 2) невозможность прийти к противоречию при проведении вычислений двумя различными путями» [9].

Можно было бы дать следующее рекурсивное определение для выделения морфем в словоформе.

Будем, во-первых, считать, что словоформа понятие исходное, неопределяемое. Во-вторых, будем считать, что у нас имеется набор каких-то сочетаний звуков (или букв), которые мы будем называть морфами языка. Исходя из этого, надо определить, какие морфемы выделяются в данном слове.

Определение. Морфемой данного слова мы назовем минимальную морфу, выделяемую в слове таким образом, что если после выделения этой морфы в словоформе осталась какая-то часть, то она также является сочетанием одной или нескольких морфем данного слова.

Особенностью этого определения, как определения рекурсивного, является то, что морфема данного слова определяется как бы через самое себя, и вроде получается порочный круг. На самом же деле, если мы n раз употребим данное определение, то мы получим однозначный ответ, является данная морфа морфемой данного слова или нет (по этому определению, разумеется).

Пример [1]. Пусть нам дана словоформа «водянистого» и следующий набор морф: в-, -я-, -ян-, -и-, -ист-, -с-, -о-, -ого-.

Попробуем выделить морфу -в- в качестве морфемы. Но тогда в конце концов мы дойдем до части, которая не является минимальной морфой. Если же мы выделим вод-, и в дальнейшем не будем выделять морф: -я-, -и-, -с- и -о-, то дойдем до части -ого-, которая целиком укладывается в соответствующую морфу.

---

[1] В дальнейшем для простоты мы оперируем только буквами, а не звуками.

Это определение может служить вспомогательным средством при некоторых приемах формального анализа, но, к сожалению, оно не решает проблемы определения морфемы, во-первых, потому что приходится исходить из заданного запаса морф, а, во-вторых, потому, что при некоторых расширениях запаса морф, оно может дать результаты, явно противоречащие здравому смыслу. Например, если в запас морф ввести еще элемент «од» (например, для анализа словоформы ода), то часть -вод- разобьется совершенно регулярно на -в- и -од-.

Пороки этого определения, однако, не в его рекурсивности и не в формальном характере, а в том, что оно недостаточно использует формальные черты языка.

Прежде чем перейти к введению нового определения морфемы, сделаем следующее общее замечание: характерной чертой всех рекурсивных определений является их конструктивный, или алгоритмический, характер; дается система предписаний, выполнив которые мы получаем определение искомого элемента.

В этом плане и будет построено следующее определение морфемы.

Алгоритм $\mathfrak{U}$, построенный нами для выделения морфемы, распадается на несколько этапов:

I этап. Все словоформы языка (или той части языка, которая исследуется нами) разбиваются на семейства, т. е. непересекающиеся классы элементов, эквивалентных между собой в том смысле, что замена одного на другой переводит любую осмысленную фразу в осмысленную, а любую бессмысленную в бессмысленную [10].

Слова в каждом семействе располагаются одно под другим в виде списка.

II этап. Любое деление слова на две части — правую и левую — называется *разделом.* Получить разделы данного слова означает последовательно представить слово w в виде $s_i + d_{n-i}$, где индекс обозначает число букв в s (левой части) или d (правой части), n—число букв в слове, $i=0, 1, 2..., n$. Разделы, для которых $i = 0$ и $i = n$ считаются *крайними.*

III этап. Если при замене части p_1 на p_2 ($p = s_i$ или $p = d_{n-i}$) каждое слово, в котором присутствовало p_1, остается в своем семействе, то мы будем говорить, что p_2 подчиняет $p_1 (p_2 \supseteq p_1)$.

Ряд элементов $p_1, p_2 \dots p_n$, таких что $p_1 \subseteq p_2 \dots \subseteq p_n$, составляет *парадигматический ряд*. Если $p_1 \subseteq p_2$ и $p_1 \subseteq p_2$, то $p_1 \sim p_2$.

IV этап. Раздел, который не является крайним для всех элементов ряда и при котором для какой-то части данного слова w образуется парадигматический ряд, насчитывающий наибольшее число элементов, называется *главным разделом данного слова.* (Если образуется несколько парадигматических рядов с наибольшим числом элементов, то главным считается самый левый раздел.) Парадигматический ряд элемента p_i при главном разделе называется *оснóвным классом* элемента p_i данного слова w. Каждый элемент оснóвного класса считается *основой.*

V этап. Два оснóвных класса считаются пересекающимися, если они имеют хотя бы один общий элемент. Общая часть двух пересекающихся оснóвных классов, если она не пуста, называется *регулярной частью данного оснóвного класса по отношению к другому оснóвному классу*. Часть оснóвного класса называется просто регулярной, если она является наибольшей из частей, регулярных по отношению к любому оснóвному классу, пересекающемуся с данным. Основа, относящаяся к регулярной части, называется *регулярной.*

VI этап. Слово, при исключении которого увеличивается число эквивалентных между собой элементов в данном основном ряду, называется *словом с нерегулярным членением.* Такие слова из рассмотрения исключаются.

VII этап. Возьмем все слова с данной регулярной основой; вычленив основу, мы получим в каждом из них остаток, называемый формантом f. Формант называется *префиксом*, если стоит слева от основы, и *суффиксом*, если стоит справа от основы.

Все слова вида $p_i + f$, где p_i подчиняет данную регулярную основу, а f-формант данной регулярной основы, анализируются так же.

VIII этап. Морфемой считается любой формант и любая основа, в которых не укладывается целиком другая морфема.

Итак, на VIII этапе мы получили *конструктивное определение морфемы.*

Пример. Пусть нам дано следующее множество слов: серп, серпа, серпом, серпу, спор, спора, спором, спору, спорить, спорю, спорил, спорный, спорного, спорному, руль, руля, рулем, рулю, рулевой, рулевому, рулевого, рулить, рулил пахарь, пахаря, пахарем, пахарю, пахать, пахал, гений, гения, гением, гению, гениальный, гениального, гениальному, вещество, вещества, веществу, веществом, вещественный, вещественному, вещественного, болота, болоту, болотом, болото, ружье, ружьем, ружью, ружья, ружейный, ружейного, ружейному, поле, поля, полем, полю, полевой, полевого, полевому, занятие, занятия, занятный, занятию, занятием, дом, домом, дома, дому, большой, большого, большому.

Если все эти слова даны во фразах, то мы легко получаем на I этапе разбиение на *семейства*:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
серпом	серп	вещество	серпа	серпу	спорить	спорил
спором	спор	болото	спора	спору	рулить	рулил
рулем	руль	ружье	руля	рулю	пахать	пахал
пахарем	пахарь	поле	пахаря	пахарю		
гением	гений	занятие	гения	гению		
веществом	дом		вещества	веществу		
болотом	сом		болота	болоту		
ружьем	ком		ружья	ружью		
полем			поля	полю		
занятием			занятия	занятию		
домом			дома	сому		
сомом			сома	кому		
комом			кома			

C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}
спорный	спорного	спорному	спорю	домой
рулевой	рулевого	рулевому		
вещественный	вещественного	вещественному		
гениальный	гениального	гениальному		
ружейный	ружейного	ружейному		
полевой	полевого	полевому		
занятный	занятного	занятному		
большого	большого	большому		

II этап. Получим разделы каждого слова (на примере C_1)

с/ерпом	се/рпом	серп/ом	серпо/м
с/пором	сп/ором	спор/ом	споро/м
р/улем	ру/лем	рул/ем	руле/м
п/ахарем	па/харем	пахар/ем	пахаре/м
п/олем	по/лем	пол/ем	поле/м
г/ением	ге/нием	гени/ем	гение/м
в/еществом	ве/ществом	веществ/ом	вещество/м

III и IV этап. Будем теперь для каждого элемента строить парадигматический ряд. Для *-ерпом* и *-пором* выделяется общий элемент *с*: они принадлежат к одному парадигматическому ряду, причем легко проверить, что других элементов в этом ряде нет. Дойдя до раздела *серп-ом*, мы увидим, что этот раздел является главным и при этом образуются следующие основные классы:

1) дом-	2) спор-
серп-	серп-
сом-	сом-
ком-	ком-

элементы *дом* и *спор* не могут быть заменены элементами *серп*, *сом*, *лом* в словах: *домой* и *спорный*, *спорного*, *спорному*. Так же строятся ряды и для других элементов, приведенных в списке.

Пересекающиеся основные классы 1) дом, серп, сом, ком, и 2) спор, серп, сом, ком.

V этап. Регулярная часть основного класса: серп, сом, ком.

VI этап. Слово с нерегулярным членением: домой. Если изъять его, то *дом* попадает в тот же основной класс, что и *серп*, *сом*, *ком*.

VII этап. Соберем вместе слова: серп, серпа, серпом, серпу, сом, сома, сому, сомом и т. п. Выделяем форманты: нуль (в *серп*), *-а*, *-ом*, *-у*. Они являются (по определению) суффиксами.

Поскольку основа *спор* подчиняет основу *серп*, в словах *спор*, *спора*, *спору*, *спором* выделяются те же форманты. Заметим, что из слов типа *спорный* элемент *спор* при принятом порядке правил пока не выделяется.

VIII этап. Примеры морфем получены на предыдущем этапе. Более сложные примеры (для выделения морфем в слове «водянистый») требуют привлечения более обширного материала, но принцип остается тот же.

Легко заметить, что принцип выделения морфем в данном алгоритме лишь формализует методы, предложенные Ф. Фортунатовым и его школой.

Новое состоит лишь в следующем. На вопрос, что такое морфема, мы предлагаем следующий ответ: *морфема данного языка есть то, что получается применением указанного выше алгоритма* $\mathfrak{M}$ *к словам языка* L.

Литература

1. Ф. де Соссюр. Курс общей лингвистики. М., Соцэкгиз, 1933, стр. 111.
2. Ch. C. Fries. Meaning and linguistic analysis. «Language», vol. 30, № 1 (part. 1). Baltimore, 1954; см. также Ch. E. Osgood, G. J. Suci, P. H. Tannenbaum. The measurement of meaning. 1957, p. 2—9.
3. См. «Вопросы языкознания», 1957, № 2, стр. 35—36.
4. П. С. Кузнецов. Значение грамматики для сравнительно-исторического языкознания. Сб. «Вопросы грамматического строя». Изд-во АН СССР, 1955, стр. 114.
5. M. Joos. Description of language design. «Journal of Acoustic Society of America», vol. 22, 1950, p. 703.
6. Приведено по статье: В. В. Иванов. Лингвистические взгляды Е. Д. Поливанова. «Вопросы языкознания», 1957, № 3, стр. 61.
7. Y. Bar-Hillel. Logical syntax and semantics. «Language», vol. 30, № 2 (Part 1), Baltimore, 1954.
8. J. Whatmough. Mathematical linguistics. Reports for the 8. International Congress of Linguists, 217—218 (reprint).
9. А. И. Колмогоров. Предисловие редактора перевода к кн.: Р. Петер. Рекурсивные функции. М., ИЛ, 1954, стр. 4—5.
10. См. мою статью «Формальный и семантический анализ синтаксических связей в языке» в данном сборнике.

С. К. Шаумян

ОПЕРАЦИОННЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ФОНОЛОГИИ

1. Постановка вопроса

Современная фонология принадлежит к числу эмпирических наук, достигших в своем развитии высокого уровня абстракции.

Всякая высоко развитая абстрактная эмпирическая наука содержит в себе двоякого рода понятия: элементарные понятия и конструкты. В современной логике элементарными понятиями принято называть понятия, отражающие непосредственные данные опыта, как, например, «желтый», «горячий», «холодный», «твердый», «мягкий», «соленый», «шероховатый», «стол», «дом», «собака» и т. д. Конструктами же называются понятия, не выводимые из опыта путем генерализации данных прямого наблюдения, например «электрон» в физике, «ген» в биологии, «фонема» в фонологии.

Наличие конструктов характерно именно для высокоразвитых абстрактных наук. В таких описательных науках, как, например, ботаника или зоология, конструкты отсутствуют, так как применяемый в этих науках метод генерализации не позволяет исследователю подняться над уровнем прямого наблюдения.

Поскольку конструкты не выводимы непосредственно из данных прямого наблюдения, то для того чтобы связать конструкты с объективной реальностью, мы должны определять конструкты прямо или косвенно через указание определенных эмпирических операций, которым они должны соответствовать. Определение понятий путем указания эмпирических операций принято называть операционными определениями. В отличие от операционных определений обычные определения называются в современной логике эксплицитными определениями.

Теория операционных определений имеет фундаментальное значение для современных абстрактных эмпирических наук. Она позволяет исследователю видеть, что многие, на первый взгляд, элементарные понятия в действительности должны рассматриваться как конструкты, которые могут быть связаны с объективной реальностью только через операционные определения. Как показывает история наук, решающее значение для прогресса многих наук имели открытия, что те или иные, на первый взгляд, элементарные понятия должны рассматриваться на деле как конструкты, нуждающиеся в операционных определениях. Переворот в физике, связанный с возникновением теории относительности, произошел потому, что, как установил А. Эйнштейн, такие, на первый взгляд, самоочевидные элементарные понятия, как понятие одновременности, являются в действительности конструктами, которые нуждаются в операционных определениях. Аналогичным образом, и переворот в науке о языке, приведший к возникновению структурной лингвистики, отделом которой является фонология, произошел потому, что такие, на первый взгляд, самоочевидные элементарные понятия, как, например, понятие лингвистического тождества, оказались в действительности конструктами, требующими операционных определений.

Толчком к созданию теории операционных определений послужило именно возникновение теории относительности. Опираясь на работы А. Эйнштейна, американский физик П. Бриджмен разработал теорию операционных определений в своей книге «Логика современной физики», появившейся в 1927 г. [1].

Независимо от П. Бриджмена к проблеме операционных определений подошел Р. Карнап. В работе Р. Карнапа «Проверяемость и значение» [2] изложена теория редукционных высказываний, которая может рассматриваться как формализация теории операционных определений.

На то, что редукционные высказывания Р. Карнапа представляют собой не что иное, как формальную схему операционных определений, обратил внимание в свое время Г. Бергманн [3]. В теорию редукционных высказываний как формализацию теории операционных определений важные идеи внес А. Пап [4]. Анализ редукционных высказываний как формальной схемы операционных определений мы находим также в работе польского логика М. Пшелэнцкого «О так называемых операционных определениях» [5].

В настоящей работе мы ставим задачу рассмотреть, что дают операционные определения для фонологии. Для исполнения этой задачи мы считаем уместным остановиться прежде всего на общем логическом анализе сущности операционных определений. Соответственно с этим наша работа разделяется на три части: в первой части мы остановимся на том, как возникает необходимость в операционных определениях, во второй части рассмотрим редукционные высказывания как формализацию операционных определений, а в третьей части займемся применением операционных определений в фонологии. Мы увидим, что применение операционных определений в фонологии проливает новый свет на фундаментальные проблемы этой науки и открывает путь к ее дальнейшему углублению.

2. Конструкты и операционные определения

Как уже сказано в предыдущем разделе, операционными определениями называются определения понятий через указание определенных эмпирических операций.

Остановимся на конкретном примере операционного определения. Возьмем понятие длины.

Каково операционное определение понятия длины? Начнем с предметов нашего обыденного опыта. Для того чтобы измерить длину, скажем, стола, мы должны иметь какой-либо твердый стержень; один конец стержня должен совпадать с началом стола, а положение второго конца стержня необходимо зафиксировать путем соответствующей отметки; затем мы должны перекладывать стержень по прямой линии таким образом, чтобы первый конец стержня совпал с предыдущим положением второго конца; эта операция должна продолжаться до тех пор, пока не будет измерена длина стола, — длиной стола мы будем называть то, сколько раз уложился стержень по прямой линии вдоль стола. Надо при этом сказать, что хотя эта операция представляется, на первый взгляд, довольно несложной, однако в действительности ее осуществление сталкивается с разными трудностями. Например, температура стержня должна быть стандартной температурой, которая принимается при определении длины: если температура не является стандартной, то необходимо внести соответствующую поправку. Есть и другие практические трудности, на которых мы не будем останавливаться.

Так обстоит дело с неподвижными предметами нашего обыденного опыта. Значительно сложнее операции, связанные с измерением длины подвижных предметов. Что же касается предметов, движущихся с огромными скоростями, то здесь понятие длины, как показал А. Эйнштейн, принципиально изменяется и оказывается связанным с принципиально иными операциями. Для того чтобы определить длину движущегося предмета в определенный момент времени, два наблюдателя с синхронизированными часами, находящиеся у обоих концов движущегося предмета, должны определить расстояние, на котором они отстоят друг от друга, и это расстояние и составляет длину движущегося предмета. Таким образом, операции, позволяющие определить длину движущегося предмета, связаны с понятием одновременности; а так как понятие одновременности является относительным и изменяется в зависимости от изменения скорости движущейся системы, то отсюда следует, что и длина движущегося тела является относительной.

Сравним теперь обыденное понятие длины с понятием длины у тел, движущихся с огромными скоростями. В первом случае мы имеем дело с элементарным понятием, а во втором — с конструктом, т. е. с понятием, которое непосредственно не выводимо из данных прямого наблюдения.

Сопоставляя оба эти понятия длины, мы можем определить, в чем состоит ценность операционных определений. Пока речь идет об элементарных понятиях, операционные определения не представляются имеющими важное значение; однако как только мы переходим к конструктам, то мы сейчас же видим, что наука не может обойтись без операционных определений, так как в противном случае конструкты окажутся пустыми абстракциями, оторванными от реальной действительности, а следовательно, и бесполезными для науки.

Проиллюстрируем значение операционных определений еще на одном примере. Возьмем такой конструкт, как понятие массы. Понятие массы можно определить без указания эмпирических операций, например, так: масса есть количество материи. Или так: масса есть противодействие, которое тело оказывает по отношению к изменению его положения или скорости. Однако подобные определения бесполезны для физика, потому что они не указывают пути применения этого понятия для анализа реальной действительности. Возьмем теперь следующее операционное определение массы: допустим, что тело A и тело B сталкиваются друг с другом; тогда мы измеряем ускорения, возникающие в результате столкновения обоих тел, и устанавливаем, что отношение ускорения тела A к ускорению тела B является постоянным; это постоянное отношение будет отношением массы тела A к массе тела B. Сравнивая данное операционное определение массы с только что приведенными неоперационными определениями массы, мы видим, что операционное определение превращает понятие массы из пустой абстракции в орудие исследования реальной действительности. В самом деле, приняв какое-либо тело A за единицу массы, мы будем иметь возможность представить количественную характеристику массы тела B.

Убедившись в фундаментальном значении операционных определений для абстрактных теоретических наук, мы теперь поставим следующий вопрос: все ли конструкты данной науки должны иметь операционное определение? На этот вопрос логика отвечает отрицательно. Существуют случаи, когда операционные определения не применяются. Речь идет о тех многочисленных случаях, когда одни конструкты определяются через другие конструкты. Те конструкты, которые определяются через другие конструкты, не нуждаются в операционных определениях, — достаточно, чтобы операционные определения давались только тем конструктам, которые сами не определяются через другие конструкты.

Когда одни конструкты определяются через другие конструкты и, таким образом, освобождаются от операционных определений, то здесь мы должны различать два рода случаев. Существуют конструкты, которые хотя и освобождаются от операционных определений, но в принципе могут быть определены операционным путем. Но есть и такие конструкты, которые всегда должны определяться только через другие конструкты и не допускают операционных определений в принципе.

Остановимся прежде всего на первом роде случаев. В качестве примера мы возьмем такой конструкт, как понятие скорости в классической механике. Понятию скорости можно дать операционное определение, поставив это понятие в связь с показаниями спидометра; это операционное определение основано на принципе, что электромагнитное торможение движущейся металлической части на магните пропорционально его скорости. Однако, если мы определим понятие скорости через другие конструкты, то оно не будет нуждаться в операционном определении. Согласно общепринятому определению скорости, скорость v данной материальной точки измеряется отношением пути s, пройденного материальной точкой, ко времени t, в течение которого материальная точка прошла этот путь. Таким образом, скорость выражается формулой $v = \frac{s}{t}$. Данная формула наглядно показывает, что конструкт «скорость» определяется через отношение конструкта «пространство» к конструкту «время». Этим последним конструктам можно дать операционные определения, но можно также и их определить через другие конструкты [1].

Перейдем теперь ко второму роду случаев, когда операционные определения не применяются. Мы имеем в виду такие конструкты, которые потому должны определяться через другие конструкты, что они в принципе не поддаются операционным

---

[1] Разнообразные примеры того, как одни и те же конструкты могут определяться либо операционно, либо через другие конструкты, читатель может найти в [6, стр. 220—244].

определениям. К таким конструктам относится, например, конструкт «скорость молекулы». Невозможно указать такие измерительные операции, которые позволили бы определить скорость молекулы. Мы можем определить скорость молекулы, только связав этот конструкт с конструктами, которые поддаются операционному определению,— с понятиями давления и плотности газа.

Для того чтобы различать конструкты, поддающиеся операционным определениям, и конструкты, которые в принципе не допускают операционных определений, первые принято называть эмпирическими, а вторые — теоретическими конструктами.

Итак, существуют многочисленные случаи, когда операционные определения не применяются. Это никоим образом не подрывает фундаментального значения операционных определений для науки. Фундаментальное значение операционных определений для науки состоит в том, что хотя в системе конструктов, которыми пользуется наука, многие конструкты и определяются через другие конструкты, но в конечном счете вся система конструктов прикрепляется к объективной реальности только благодаря известному числу операционно определяемых конструктов, с которыми прямо или косвенно связываются все остальные.

3. Логическая структура операционных определений

Мы охарактеризовали операционные определения в общем виде. Займемся теперь логической структурой операционных определений.

Логическая структура операционных определений выясняется из сопоставления их с так называемыми редукционными высказываниями, которые следует рассматривать как формализацию операционных определений, хотя Р. Карнап создал теорию редукционных высказываний независимо от идей П. Бриджмена.

К теории редукционных высказываний Р. Карнап пришел в силу необходимости преодолеть парадокс, возникающий при попытках определять так называемые диспозиционные понятия в рамках формальной схемы эксплицитных определений [2].

Для того чтобы выяснить, как возникает парадокс при определении диспозиционных понятий, остановимся прежде всего на сущности эксплицитных определений. Всякое эксплицитное определение представляет собой правило, позволяющее заменить один знак или группу знаков посредством другого знака или группы знаков без изменения смысла высказываний, в которых эта замена происходит. Например, если мы определим круг так: «круг $=_{Df}$ часть плоскости, ограниченная окружностью», то это эксплицитное определение позволит нам заменить в любом высказывании без изменения его смысла знак «круг» группой знаков «часть плоскости, ограниченная окружностью».

Эксплицитные определения имеют следующую форму:

$$Q(x) \equiv \ldots x \ldots$$

Левая часть этой эквивалентности представляет собой определяемое, а правая — определяющее. Определяющее является пропозиционной функцией, в которой x служит единственной свободной переменной. Соответственно данной форме только что приведенное определение круга должно иметь следующий вид: «x есть круг, если, и только если, x есть часть плоскости и ограничен окружностью».

Займемся теперь определением диспозиционных понятий. Допустим, что мы хотим определить предикат «растворимый в воде». Обозначим этот предикат знаком Q_3. Очевидно, что всякое тело растворимо в воде только в том случае, если, будучи погружено в воду, оно растворяется в воде. Обозначив знаком Q_1 «погружено в воду» и знаком Q_2 «растворяется в воде», мы должны представить определение предиката «растворимый в воде» в виде следующей формулы:

$$Q_3(x) \equiv [Q_1(x) \supset Q_2(x)].$$

---

[2] Диспозиционным называется понятие, выражающее свойство предмета реагировать известным образом в связи с известными условиями. К диспозиционным относятся, например, такие понятия, как «растворимый», «хрупкий», «эластичный», «магнитный» и т. п.

Так как в нашей формуле знак $\supset$ является знаком материальной импликации, то, согласно матрицам истинности символической логики, $Q_3(x)$ истинно не только в том случае, если истинно $Q_1(x)$, но и в том случае, если $Q_1(x)$ ложно. Отсюда-то и возникает следующий парадокс: подставим вместо x слово «сахар»; тогда, в соответствии со знаком материальной импликации, мы должны будем признать истинным не только высказывание «если сахар погружен в воду, то он растворяется», но и высказывание «если сахар не погружен в воду, то он растворяется». Так как определяемое и определяющее эквиполентны друг другу, то выходит, что растворимость сахара может вытекать из того факта, что он не погружается в воду. Но в таком случае мы должны будем признать, что, скажем, и железо растворяется в воде, потому что достаточно будет не погрузить железо в воду, и растворимость его в воде будет доказана.

Для того чтобы преодолеть только что указанный парадокс, Р. Карнап ввел для определения диспозиционных понятий редукционные высказывания. Простейшая формула редукционных высказываний имеет следующий вид:

$$Q_1(x) \supset [Q_3(x) \equiv Q_2(x)],$$

где Q_3 обозначает определенный диспозиционный предикат, Q_1 — проверочную операцию, а Q_2 — результат проверочной операции.

Если строить определение диспозиционных предикатов по данной форме, то приведенного выше парадокса не будет. Возьмем, например, следующее высказывание, построенное по данной форме: «если x погружен в воду, то x растворим в воде, если, и только если, x растворяется в воде». Если допустить, что x не погружен в воду, то теперь растворимость x никоим образом не будет следовать из этого факта.

Термин «редукционные высказывания» объясняется тем, что при помощи данных высказываний диспозиционный предикат Q_3 сводится, редуцируется к недиспозиционным предикатам, один из которых Q_1 указывает на проверочную операцию, а другой Q_2 — на результат проверочной операции.

Как мы сейчас видели, Р. Карнап ввел редукционные высказывания для преодоления парадокса материальной импликации при определении диспозиционных понятий. Отсюда может показаться, что редукционные высказывания имеют чисто формальный интерес, поскольку они связаны с экстенсиональным языком символической логики. Может показаться, что если бы удалось заменить экстенсиональный язык символической логики другим формальным языком, в котором была бы устранена материальная импликация, то с устранением материальной импликации были бы устранены и парадоксы материальной импликации, а стало быть, потеряли бы всякую ценность и редукционные высказывания. Однако в действительности это не так. Дело в том, что в редукционных высказываниях, кроме идеи преодоления парадокса материальной импликации, послужившей непосредственным поводом для их введения в логику, содержится также и другая идея, имеющая настолько важное значение, что ценность редукционных высказываний становится независимой от чисто формальных соображений. Мы имеем в виду идею разграничения уровней абстракции. Так, если взять приведенные выше предикаты Q_1, Q_2 и Q_3, то предикаты Q_1 и Q_2, с одной стороны, и предикат Q_3, с другой, могут рассматриваться как относящиеся к принципиально разным уровням абстракции: предикаты Q_1 и Q_2 относятся к эмпирической базе науки, а предикат Q_3— к уровню эмпирических конструктов науки. Отсюда редукционные высказывания должны считаться пригодными не только для определения диспозиционных понятий, но и для определения любых эмпирических конструктов. Таким образом, ценность редукционных высказываний заключается в том, что, независимо от своей связи с экстенсиональным языком символической логики, они могут быть отождествлены с операционными определениями.

Для того чтобы убедиться, что редукционные высказывания могут рассматриваться просто как операционные определения, рассмотрим с точки зрения редукционных высказываний определение конструкта «масса», которым мы занимались в предыдущем разделе нашей статьи. Пусть $Q_1(x)$ = «x сталкивается с b», $Q_2(x)$= «x имеет такое же ускорение, как b», $Q_3(x)$ =

= «x имеет такую же массу, как b»; тогда операционное определение эмпирического конструкта «одинаковая масса» можно выразить по схеме редукционного высказывания так: «если x сталкивается с b, то x имеет такую же массу, как b, если, и только если, x имеет такое же ускорение, как b». Аналогичным образом можно построить операционные определения эмпирических конструктов «меньшая масса», «бóльшая масса».

Следует обратить внимание еще на следующую важную идею, которая заключена в редукционных высказываниях. Редукционные высказывания позволяют наглядно выразить изменение содержания понятия в процессе познания действительности. Допустим, что мы определяем предикат Q_3 через предикаты Q_1 и Q_2. Тогда мы строим редукционное высказывание:

$$Q_1(x) \supset [Q_3(x) \equiv Q_2(x)].$$

Но одно и то же понятие можно определить через разные операции, и поэтому мы можем определить предикат Q_3 также и через предикаты Q_4 и Q_5. Поэтому мы вправе построить и следующее редукционное высказывание:

$$Q_4(x) \supset [Q_3(x) \equiv Q_5(x)].$$

Возможно также и третье редукционное высказывание:

$$Q_6(x) \supset [Q_3(x) \equiv Q_7(x)].$$

Так возникает цепь редукционных высказываний. В процессе познания мы отказываемся от одних редукционных высказываний и заменяем их другими редукционными высказываниями, в результате чего содержание понятия изменяется.

Остановимся теперь подробнее на логической структуре редукционных высказываний. До сих пор мы имели дело с редукционными высказываниями, имеющими форму:

$$Q_1(x) \supset [Q_3(x) \equiv Q_2(x)].$$

Это так называемые билатеральные редукционные высказывания. Билатеральными эти редукционные высказывания называются потому, что они служат как для утверждения, так и для отрицания данного предиката: всякое билатеральное редукционное высказывание читается так: «если x есть Q_1, то x есть Q_3, если, и только если, x есть Q_2; и x не есть Q_3, если, и только если, x не есть Q_2».

Так как билатеральные редукционные высказывания являются слишком сильными, то ими не всегда удобно пользоваться, и поэтому, наряду с билатеральными, существуют также и унилатеральные редукционные высказывания. Эти последние имеют следующую форму:

$$Q_1(x) \supset [Q_2(x) \supset Q_3(x)],$$

где Q_1 обозначает проверочную операцию, Q_2 — результат проверочной операции, а Q_3 — определяемый предикат.

Вот пример унилатерального редукционного высказывания: «если x поднести к железным предметам, то если x притягивает железные предметы, то x есть магнит». Мы видим, что унилатеральное редукционное высказывание позволяет утверждать какой-либо предикат. Но оно в силу своей логической структуры не дает основания отрицать его. Применительно к нашему примеру мы можем сказать, что если x поднести к железным предметам и x не будет притягивать железные предметы, то отсюда еще не следует, что x не есть магнит: ведь наш магнит может быть настолько слабым, что для него данные железные предметы могут оказаться слишком тяжелыми.

Только что рассмотренное унилатеральное редукционное высказывание можно назвать позитивным, поскольку оно позволяет только утверждать тот или иной предикат. Наряду с позитивными унилатеральными редукционными высказываниями существуют также негативные, которые имеют форму

$$Q_4(x) \supset [Q_5(x) \supset \sim Q_3(x)].$$

Позитивные и негативные редукционные высказывания образуют вместе так называемые редукционные пары (R_1 и R_2), которые обозначаются так:

$$R_1: \qquad Q_1(x) \supset [Q_2(x) \supset Q_3(x)];$$

$$R_2: \qquad Q_4(x) \supset [Q_5(x) \supset \sim Q_3(x)].$$

Вот пример редукционной пары:

R_1: «Если x кладется на одну чашку рычажных весов, а y на вторую чашку, то если чашки весов находятся на одном уровне, то x и y имеют одинаковый вес»;

R_2: «Если x и y подвешиваются на одни и те же пружинные весы, то если x и y по-разному растягивают пружину весов, то x и y не имеют одинакового веса».

Из редукционных высказываний наиболее сильными являются билатеральные редукционные высказывания, поскольку они соединяют в себе утверждение и отрицание определенного предиката. В тех случаях, когда нет возможности применить билатеральные редукционные высказывания, мы должны прибегать к унилатеральным редукционным высказываниям.

4. Фонологическая проблема тождества и операционный анализ в фонологии

Мы рассмотрели логическую структуру операционных определений и выяснили их значение для науки. Теперь мы займемся применением операционных определений в фонологии, которая является отделом структурной лингвистики, посвященным структурному изучению звуковой стороны языка.

В начале нашей статьи мы писали, что теория операционных определений обязана своим возникновением физической теории относительности. Переворот в физике, связанный с созданием теории относительности, имеет не только специальный, физический аспект, но также и специфический логический аспект. Осознание логического аспекта физической теории относительности и привело к теории операционных определений. Подобно перевороту в физике, переворот в языкознании, связанный с созданием структурной лингвистики, имеет не только специальный, лингвистический аспект, но также и специфический логический аспект. Мы полагаем, что логический аспект структурной лингвистики может быть правильно понят именно с точки зрения теории операционных определений.

Логический аспект структурной лингвистики до сих пор специально никем не исследовался. В теоретической науке нельзя игнорировать изучение логических проблем, возникающих на базе специальных проблем, и поэтому то обстоятельство, что логический аспект структурной лингвистики до сих пор находился в пренебрежении у исследователей, является одной из главных причин того, что в настоящее время фундаментальные понятия структурной лингвистики содержат в себе еще много неясного и спорного.

Пренебрежение логическим аспектом структурной лингвистики — серьезный тормоз на пути успешного развития этой науки, поэтому одной из важнейших задач современной структурной лингвистики следует признать систематический логический анализ ее фундаментальных понятий.

В настоящей работе мы сделаем попытку рассмотреть под операционным углом зрения одно из фундаментальных понятий фонологии — понятие фонологического тождества. Исследование понятия фонологического тождества под операционным углом зрения позволит нам сделать существенные выводы относительно основной фонологической единицы — фонемы.

Для того чтобы подойти к проблеме фонологического тождества, мы начнем с рассмотрения фундаментального закона структурной лингвистики — закона коммутации.

Прежде всего приведем определения двух понятий: понятия языковой единицы и понятия звука языка.

Языковая единица есть любой элемент языка, имеющий две стороны: означающее и означаемое. Например, в слове *дом* звуковая сторона (*dom*) есть означающее, а смысловая сторона — значение «дом»— есть означаемое. Языковая единица есть не что иное, как родовое название для морфемы, слова и предложения.

Звук языка есть кратчайший элемент означающего. Так, означающее в слове *дом* распадается на три звука языка — *d*, *o*, *m*, представляющие собой кратчайшие элементы данного означающего.

Приняв данные определения звуковой единицы и звука языка, мы можем формулировать *закон коммутации*: *в языковых единицах означающие и означаемые связаны коммутационным отношением, в силу которого звуки языка, на которые распадают-*

ся означающие, служат для дифференциации означающих с тем, чтобы разным означающим соответствовали разные означаемые и, обратно, разным означаемым соответствовали разные означающие. Например, в русском языке разным означающим [*dom*] и [*kom*] соответствуют разные означаемые «дом» и «ком» и, обратно, разным означаемым «дом» и «ком» соответствуют разные означающие [*dom*] и [*kom*], причем звуки языка, на которые распадаются данные означающие, обеспечивают их дифференциацию.

В связи с только что приведенным законом коммутации следует обратить внимание на неправильность встречающегося иногда утверждения, будто бы звуки языка обладают смыслоразличительной функцией. Мы можем говорить только о различительной функции звуков языка, имея в виду функцию дифференциации означающих. Что же касается смысла языковых единиц, то звуки языка со смыслом языковых единиц непосредственно не связаны. Так, в словах *лом* — *том* звуки *l* и *t* сами по себе ничего не значат и непосредственно не связаны со значениями данных слов, но эти звуки служат здесь для дифференциации означающих [*lom*] — [*tom*]. В любой языковой единице значением обладают не отдельные звуки языка, а цельный звуковой комплекс, составляющий означающее данной языковой единицы. Например, в слове *lom* значение имеют не отдельные звуки языка *l*, *o*, *m*, а цельный звуковой комплекс [*lom*], т. е. означающее данного слова. Означающее [*lom*] как носитель определенного значения (или, согласно принятой нами терминологии, означаемого) представляет собой качественно иную ступень по отношению к звукам языка *l*, *o*, *m*, на которые оно распадается. Правда, означающими в некоторых языковых единицах служат не звуковые комплексы, а только отдельные звуки, но отсюда еще не следует, будто бы отдельные звуки языка сами по себе могут обладать значением. Например, означающим в русском слове *и* служит отдельный звук языка *i*. Однако было бы ошибочным думать на этом основании, будто бы звук языка *i* в русском слове *и* сам по себе обладает значением. Звук языка *i* в русском слове *и* сам по себе не имеет никакого значения. Значением обладает означающее [*i*], которое хотя и совпадает со звуком *i*, но вместе с тем представляет собой явление качественно иного порядка, нежели звук языка i, взятый сам по себе.

Из закона коммутации мы можем вывести чисто дедуктивным путем такое следствие: *если в языковой единице в позиции P_1 встречается класс звуков K_1, то в позиции P_2 данному классу звуков может соответствовать класс звуков K_2 таким образом, что разные звуки будут соотноситься друг с другом как тождественные, а одинаковые звуки будут соотноситься друг с другом как нетождественные.* Так, если допустить для позиции P_1 класс звуков A, B, C, а для позиции P_2 класс звуков B, C, D, то соответствие между звуками обоих классов можно представить на следующей табличке:

P_1	P_2
A	B
B	C
C	D

Конкретно можно взять следующий гипотетический пример: допустим, что в позиции P_1 встречаются звуки q, k, k', тогда в позиции P_2 им могут соответствовать звуки k, k', $\hbar$. Это можно представить в виде такой таблички:

P_1	P_2
q	k
k	k'
k'	$\hbar$

В том, что данное следствие с необходимостью вытекает из закона коммутации, нетрудно убедиться на основании следующего рассуждения: если, согласно закону коммутации, звуки языка служат для дифференциации означающих, то в разных позициях звуки языка могут изменяться как угодно резко, лишь бы они не смешивались друг с другом.

Итак, правильность, рассмотренного следствия из закона коммутации не подлежит сомнению. Но если признать правильность этого следствия, то возникает следующее противоречие: с одной стороны, звуки языка представляют собой физические элементы, а, с другой стороны, оказывается, что разные звуки языка могут быть тождественными друг другу и, наоборот, одинаковые звуки могут быть нетождественными друг другу: так, в нашем примере разные звуки q и k, k и k', k' и $\hbar$ оказались тождественными друг другу, а одинаковые звуки k в позиции P_1 и k в позиции P_2, k' в позиции P_1 и k' в позиции P_2 оказались нетождественными друг другу. Таким образом, налицо непримиримое противоречие между физической природой звуков языка и их функцией в качестве элементов, служащих для дифференциации означающих. Это противоречие мы назовем *парадоксом тождества звуков языка*[3].

Как преодолеть парадокс тождества звуков языка? Чтобы преодолеть парадокс тождества звуков языка, мы должны постулировать в виде конструктов особые единицы — фонемы[4]. Понятие фонемы, рассматриваемое в качестве конструкта, позволит нам преодолеть этот парадокс. Звуки языка мы будем рассматривать как физические субстраты фонем. Рассматривая звуки языка как физические субстраты фонем, мы постулируем между звуками языка и фонемами особое отношение, которое будем называть репрезентацией; звуки языка как субстраты фонем мы будем называть репрезентантами фонем. Отношение репрезентации между звуками языка и фонемами можно представить в виде двухместной пропозиционной функции:

$$R(x, \ulcorner x \urcorner),$$

где R означает отношение репрезентации, x — любой звук, а $\ulcorner x \urcorner$ соответствующую данному звуку фонему. Эту формулу следует читать так: звук языка x находится в отношении репрезентации к фонеме $\ulcorner x \urcorner$.

После того как мы постулировали понятие фонемы и отношение репрезентации между звуками языка и фонемами, парадокс

---

[3] Термин «парадокс» мы употребляем в специальном смысле как принятое в логике название возникающих в науке фундаментальных противоречий, необходимость преодоления которых влечет за собой существенный пересмотр установившихся взглядов.

[4] Наше понимание фонемы как конструкта принципиально отличается от общепринятых в фонологии взглядов на фонему. Сущность нашего понимания фонемы и его принципиальное отличие от установившихся в фонологии взглядов на фонему выяснится из дальнейшего изложения.

тождества звуков языка преодолевается так: мы принимаем, что звуки языка, независимо от своего физического сходства или несходства, тождественны друг другу, если они репрезентируют одинаковые фонемы, и не тождественны друг другу, если они репрезентируют неодинаковые фонемы.

Таким образом, понятие тождества звуков языка оказывается вовсе не таким самоочевидным, каким оно может казаться на первый взгляд. Надо различать два рода тождества звуков языка: во-первых, мы можем рассматривать звуки языка просто как физическое явление, в этом случае вопрос о тождестве или нетождестве звуков языка решается простой констатацией физического сходства или несходства между исследуемыми звуками языка; во-вторых, мы можем рассматривать звуки языка с точки зрения их функции дифференциации означающих, в этом случае, чтобы решить вопрос о тождестве и нетождестве звуков языка, мы должны постулировать особые единицы — фонемы.

Постулировав понятие фонемы в качестве конструкта, мы можем представить контекстуальное определение[5] этого понятия в виде следующей формулы:

$$F =_{Df} R(x, F) \equiv x \varepsilon D,$$

где F обозначает фонему, R — отношение репрезентации, ε — принадлежность к классу, а D — класс кратчайших элементов означающего.

Данную формулу следует читать так: x находится в отношении репрезентации к фонеме, если, и только если, x принадлежит к классу кратчайших элементов означающего.

Итак, для преодоления парадокса тождества звуков языка мы постулировали понятие фонемы. Мы дали контекстуальное определение понятия фонемы. Но этого еще недостаточно. До тех пор, пока мы не фиксируем точно эмпирические операции, позволяющие нам определять тождество и нетождество звуков языка, понятие фонемы будет оставаться абстракцией, непри-

[5] Контекстуальные определения принято рассматривать в современной логике как частный случай эксплицитных определений (см., например, [7, стр. 392]).

годной служить орудием исследования звуковой стороны языка. Фиксированием этих эмпирических операций мы сейчас и займемся.

Мы начнем с выяснения фундамента фонологического анализа. Фундаментом фонологического анализа мы должны принять дистрибутивный анализ звуков языка, который заключается в том, чтобы точно устанавливать у означающих языковых единиц разные типы позиций, в которых встречаются звуки языка, а затем исследовать позиционные отношения между звуками языка. Необходимость дистрибутивного анализа в качестве фундамента фонологии становится очевидной, если принять во внимание, что в нашем непосредственном опыте ничего не дано, кроме линейного потока речи, в котором конкретные звуки языка занимают определенные позиции по отношению друг к другу. Позиционные отношения между звуками языка вытекают из принципа линейности означающего, ясно сформулированного Ф. де Соссюром в его «Курсе общей лингвистики». Вот что он писал: «Означающее, будучи свойства слухового (аудитивного), развертывается только во времени и характеризуется заимствованными у времени признаками: *а) оно представляет протяженность*, и *б) эта протяженность лежит в одном измерении*: это — линия. Об этом совершенно очевидном принципе сплошь и рядом не упоминают вовсе, по-видимому, именно потому, что считают его чересчур простым; между тем это принцип основной, и последствия его неисчислимы. От него зависит весь механизм языка» [8, стр. 80—81].

Рассмотрим с точки зрения дистрибутивного анализа различия между звуками языка.

Самое общее положение, которое мы можем установить, рассматривая различия между звуками языка с точки зрения дистрибутивного анализа, заключается в следующем: различия между звуками языка могут быть позиционно обусловленными и позиционно не обусловленными. Позиционно обусловленные звуковые различия не могут в принципе служить для дифференциации означающих. Что же касается позиционно не обусловленных звуковых различий, то они чаще всего, но далеко не всегда, служат для дифференциации означающих. В качестве примера позиционно не обусловленных звуковых различий, которые не служат для дифференциации означающих, можно привести в русском языке различие между звуками *а* и *ы*^{э}, которые встречаются после шипящих согласных в первом предударном слоге. Как указывает Р. И. Аванесов, в таких словах, как *шалаш*, *нашатырь*, *шаблон*, *шагрень*, в первом слоге возможен наряду со звуком *а* также и звук *ы*^{э} [6] [см. 9, стр. 39—40].

В современной фонологии звуковые различия, служащие для дифференциации означающих, принято называть дифференциальными звуковыми различиями, а звуковые различия, не служащие для дифференциации означающих, называются избыточными звуковыми различиями; при этом первые отождествляются с позиционно не обусловленными звуковыми различиями, а вторые отождествляются с позиционно обусловленными звуковыми различиями. На основании констатации, что существуют звуковые различия, которые, хотя позиционно и не обусловлены, однако не служат для дифференциации означающих, мы должны уточнить разницу между дифференциальными и избыточными звуковыми различиями следующим образом: 1) к избыточным звуковым различиям относятся все позиционно обусловленные звуковые различия, а также и те позиционно не обусловленные различия, которые не служат для дифференциации означающих; 2) к дифференциальным звуковым различиям относятся те позиционно не обусловленные различия, которые служат для дифференциации означающих. Данное уточнение, как мы сейчас увидим, существенно для правильного фиксирования операций, позволяющих определить тождество и нетождество звуков языка.

После того как на основании позиционного анализа мы уточнили разницу между дифференциальными и избыточными звуковыми различиями, мы считаем необходимым ввести следующие операции для определения тождества и нетождества звуков языка: операцию субституции и операцию установления изоморфизма.

---

[6] В транскрипции Р. И. Аванесова знаком ы^э обозначается гласный, средний между э и ы

Операция субституции заключается в том, что в одной и той же позиции одни звуки подставляются вместо других.

Тождество и нетождество звуков языка определяется путем операции субституции так: возьмем звуки x и y, которые могут встречаться в одной и той же позиции P_1 и будем подставлять их один вместо другого. Если субституция x вместо y (и, обратно, y вместо x) будет сопровождаться дифференциацией означающих, то x и y нетождественны друг другу; если же субституция x вместо y (и, обратно, y вместо x) не будет сопровождаться дифференциацией означающих, то x и y тождественны друг другу. В обоих случаях различия между x и y позиционно не обусловлены, но в первом случае эти различия являются дифференциальными, а во втором — избыточными; именно поэтому в первом случае x и y нетождественны друг другу, а во втором — тождественны друг другу. Приведем конкретные примеры на оба случая: 1) если в слове *борт* подставить звук *p* вместо *b*, то получим *порт*; так как субституция звука *p* вместо звука *b* сопровождается дифференциацией означающих, то звук *p* и *b* не тождественны друг другу; 2) если в слове *шаблон* подставить звук *ы*ᵊ вместо звука *a*, то вместо [*šablón*] получим [*šы*ᵊ*blón*]; здесь мы видим, что субституция звука *ы*ᵊ вместо *a* в одной и той же позиции не ведет к дифференциации означающих, и поэтому звуки *ы*ᵊ и *a* должны считаться тождественными друг другу.

После того как путем операции субституции мы определяем для позиции P_1 и позиции P_2 известные классы K_1 и K_2 нетождественных звуков языка, служащих для дифференциации означающих, мы должны установить изоморфизм, или, что то же, структурное тождество, между отношениями, связывающими элементы каждого класса. Установив данный изоморфизм, мы затем выясняем, каким образом элементы обоих классов поставлены во взаимно-однозначное соответствие, т. е. выясняем, каким образом каждый элемент класса K_1 объединяется в пару с некоторым вполне определенным элементом класса K_2. Парные элементы должны считаться тождественными друг другу. Покажем теперь на конкретном примере, как применяется на деле наша операция. Для этого возвратимся к нашей таблице с гипотетическими классами звуков языка — q, k, k'

(класс K_1) в позиции P_1 и k', k, $\dot{\hbar}$ (класс K_2) в позиции P_2. Прежде всего мы устанавливаем отношения, связывающие элементы каждого из этих классов. В классе K_1 мы устанавливаем порядковое отношение[7], которое назовем трехступенчатой градацией нёбности. С фонологической точки зрения здесь существенно то, что налицо три небных согласных, один из которых задний, другой — средний, а третий — передний. Но то же самое отношение мы устанавливаем и в классе K_2. Поэтому оба отношения следует признать изоморфными, или, иначе, обладающими структурным тождеством. А раз это так, что мы находим следующие пары звуков, поставленных во взаимно-однозначное соответствие: q: k, k: k', k': $\hbar$. Данные парные звуки тождественны друг другу.

Мы рассмотрели операции, позволяющие устанавливать тождество и нетождество звуков языка. Теперь необходимо показать, каким образом устанавливается связь между данными операциями к понятием фонемы как конструктом. Для этого мы должны прибегнуть к редукционным высказываниям.

Начнем с операции субституции. Эта операция может быть представлена следующими двумя унилатеральными редукционными высказываниями:

$$(1) \qquad \mathrm{Sub}\,(x, y) \supset [\mathrm{Dif}\,(x, y) \supset R\,(x, \ulcorner x \urcorner) \cdot R\,(y, \ulcorner y \urcorner) \cdot \ulcorner x \urcorner \neq \ulcorner y \urcorner],$$

где Sub означает отношение субституции, Dif — отношение дифференцирования, R — отношение репрезентации, $\neq$ — отношение нетождества; угловые кавычки поставлены над знаками фонем.

Данное редукционное высказывание следует читать так: если в данной конкретной позиции звуки x и y могут подставляться один вместо другого, т. е. находятся между собой в отношении субституции, то, если отношение субституции сопровождается отношением дифференцирования, тогда звук x находится в отношении репрезентации к фонеме $\ulcorner x \urcorner$, а звук

[7] Порядковыми отношениями в данном классе принято называть отношения, которые являются одновременно асимметричными, транзитивными, связанными и антирефлексивными.

y находится в отношении репрезентации к фонеме $\ulcorner y \urcorner$, и фонемы $\ulcorner x \urcorner$ и $\ulcorner y \urcorner$ не тождественны друг другу.

$$(2) \qquad \mathrm{Sub}\,(x, y) \supset [\sim \mathrm{Dif}\,(x, y) \supset R\,(x, \ulcorner x \urcorner) \cdot R\,(y, \ulcorner y \urcorner) \cdot \ulcorner x \urcorner = \ulcorner y \urcorner].$$

Или в словесной формулировке: если в данной позиции звуки x и y могут подставляться один вместо другого, т. е. находятся между собой в отношении субституции, то, если отношение субституции не сопровождается отношением дифференциации, тогда звук x находится в отношении репрезентации к фонеме $\ulcorner x \urcorner$, а звук y находится в отношении репрезентации к фонеме $\ulcorner y \urcorner$, и фонемы $\ulcorner x \urcorner$ и $\ulcorner y \urcorner$ тождественны друг другу.

Операция установления изоморфизма может быть представлена следующим унилатеральным редукционным высказыванием:

$$(3) \qquad \mathrm{Is}\,(T_1, T_2) \supset [x = f^{-1}\,(y) \supset R\,(x, \ulcorner x \urcorner) \cdot R\,(y, \ulcorner y \urcorner) \cdot \ulcorner x \urcorner = \ulcorner y \urcorner],$$

где Is означает отношение изоморфизма, T_1 — отношение, связывающее класс звуков K_1 в позиции P_1, T_2— отношение, связывающее класс звуков K_2 в позиции P_2, f^{-1} обозначает отображение класса звуков K_2 на класс звуков K_1.

Данную формулу следует читать так: если отношение T_1, связывающее класс звуков K_1 в позиции P_1, и отношение T_2, связывающее класс звуков K_2 в позиции P_2, изоморфны друг другу, то, если звук x объединяется в пару со звуком y, тогда звук x находится в отношении репрезентации к фонеме $\ulcorner x \urcorner$, а звук y находится в отношении репрезентации к фонеме $\ulcorner y \urcorner$, и фонемы $\ulcorner x \urcorner$ и $\ulcorner y \urcorner$ тождественны друг другу.

Рассмотрим теперь на основании наших формул, каким образом происходит переход от понятия звука к понятию фонемы. Применим формулу (1) к конкретному примеру.

Возьмем в русском языке слова *палка*, *почка*, *пухнуть* и сосредоточим внимание на первом звуке в каждом из этих слов. В этих словах мы имеем три разные позиции P_1, P_2, P_3, в которых мы находим три единичных звука p_1, p_2, p_3, которые отличаются друг от друга произношением: звук p_1 имеет минимальную велярную окраску, у звука p_2 велярная окраска более выражена, а у звука p_3 велярная окраска максимальна. В других словах, например, в словах *прачка*, *пламя*, *пыл*, мы могли бы обнаружить другие единичные звуки p, но для нашей цели мы ограничимся только что рассмотренными единичными звуками p.

Если в слове *палка* единичный звук p_1 заменить единичным звуком b_1, то получим *балка*. Выходит, что единичные звуки p_1 и b_1, находясь между собой в отношении субституции, находятся вместе с тем между собой и в отношении дифференциации, поэтому мы должны рассматривать единичный звук p_1 как репрезентант фонемы $\ulcorner p_1 \urcorner$, а единичный звук b_1 — как репрезентант единичной фонемы $\ulcorner b_1 \urcorner$. Переход единичных звуков p_1 и b_1 к единичным фонемам $\ulcorner p \urcorner_1$ и $\ulcorner b_1 \urcorner$ можно представить согласно формуле (1) в виде следующего редукционного высказывания:

$$\mathrm{Sub}(p_1, b_1) \supset [\mathrm{Dif}(p_1, b_1) \supset R(p_1, \ulcorner p_1 \urcorner) \cdot R(b_1, \ulcorner b_1 \urcorner) \cdot \ulcorner p \urcorner \neq \ulcorner b_1 \urcorner].$$

Подставляя в слове *почка* b_2 вместо p_2, а в слове *пухнуть* b_3 вместо p_3, получим слова *бочка*, *бухнуть*. Отсюда мы должны рассматривать единичные звуки p_2, b_2 и p_3, b_3 как репрезентанты фонем $\ulcorner p_2 \urcorner$, $\ulcorner b_2 \urcorner$ и $\ulcorner p_3 \urcorner$, $\ulcorner b_3 \urcorner$. Это можно представить в виде следующих редукционных высказываний:

$$\mathrm{Sub}(p_2, b_2) \supset [\mathrm{Dif}(p_2, b_2) \supset R(p_2, \ulcorner p_2 \urcorner) \cdot R(b_2, \ulcorner b_2 \urcorner) \cdot \ulcorner p_2 \urcorner \neq \ulcorner b_2 \urcorner];$$
$$\mathrm{Sub}(p_3, b_3) \supset [\mathrm{Dif}(p_3, b_3) \supset R(p_3, \ulcorner p_3 \urcorner) \cdot R(b_3, \ulcorner b_3 \urcorner) \cdot \ulcorner p_3 \urcorner \neq \ulcorner b_3 \urcorner].$$

Мы видим, что переход от понятия звука к понятию фонемы происходит от единичных звуков к единичным фонемам.

Покажем теперь на конкретном примере, как единичные фонемы объединяются в классы тождественных единичных фонем. Для этого воспользуемся формулой (3) и подставим в нее только что рассмотренные единичные фонемы. Мы примем для простоты, что в позиции P_1 встречаются одни лишь сейчас рассмотренные звуки p_1, b_1, а в позиции P_2 встречаются одни лишь сейчас рассмотренные p_2, b_2. Мы примем также, что p_1, b_1 связаны между собой отношением S_1, а p_2, b_2 связаны между собой отношением S_2. Наконец, мы принимаем, что отношения S_1 и S_2 изоморфны. Тогда, согласно формуле (3), мы можем построить следующие редукционные высказывания:

$$\mathrm{Is}(S_1, S_2) \supset p_1 = f^{-1}(p_2) \supset R(p_1, \ulcorner p_1 \urcorner) \cdot R(p_2, \ulcorner p_2 \urcorner) \cdot \ulcorner p_1 \urcorner = \ulcorner p_2 \urcorner;$$
$$\mathrm{Is}(S_1, S_2) \supset b_1 = f^{-1}(b_2) \supset R(b_1, \ulcorner b_1 \urcorner) \cdot R(b_2, \ulcorner b_2 \urcorner) \cdot \ulcorner b_1 \urcorner = \ulcorner b_2 \urcorner.$$

Единичные фонемы, принадлежащие к одному классу, отличаются друг от друга только позициями в означающем. Если вслед за А. Тарским мы условимся называть элементы, сходные по форме и отличающиеся друг от друга только своим положением в пространстве, равновидными (gleichgestaltet) элементами [10, стр. 157], то единичные фонемы, принадлежащие к одному классу, должны рассматриваться как равновидные фонемы.

5. Результаты исследования

Операционный анализ фонологической проблемы тождества позволяет существенно углубить понимание фундаментального понятия фонологии — фонемы. С точки зрения операционного анализа, фонема — это конструкт, относящийся к принципиально иному уровню абстракции, нежели звуки языка.

В фонологии следует различать два основных уровня абстракции: 1) эмпирическую базу фонологии и 2) уровень конструктов.

На уровне эмпирической базы фонологии различаются единичные звуки и классы единичных звуков. На уровне конструктов различаются единичные фонемы и классы единичных фонем.

Фонемы и другие фонологические конструкты должны связываться с эмпирической базой фонологии посредством операционных определений.

В настоящей работе мы не ставили задачу заниматься критическим разбором разных концепций фонемы, существующих в современной фонологии. Мы только хотим обратить внимание на то, что в существующих концепциях фонемы не проводится разграничение эмпирической базы фонологии и уровня конструктов, и отсюда звуки рассматриваются как варианты фонемы. Если рассматривать фонему как конструкт, то звуки не могут быть вариантами фонемы. То, что принято называть вариантами фонемы, скажем, вариантами фонемы $\ulcorner a \urcorner$ или вариантами фонемы $\ulcorner d \urcorner$, — это не звуки, а единичные фонемы $\ulcorner a_1 \urcorner$, $\ulcorner a_2 \urcorner$, $\ulcorner a_3 \urcorner$, $\ulcorner a_4 \urcorner$... или единичные фонемы $\ulcorner d_1 \urcorner$, $\ulcorner d_2 \urcorner$, $\ulcorner d_3 \urcorner$, $\ulcorner d_4 \urcorner$..., объединенные в классы, которым соответствуют общие понятия — фонема ⌜a⌝ или фонема ⌜d⌝.

Типичным определением фонемы, которое господствует в современной фонологии, может служить следующее определение, которое мы находим в классическом труде Н. С. Трубецкого «Основы фонологии»: «Фонема есть *фонологическая единица*, которая не может быть разложена на более мелкие следующие друг за другом единицы» [11, стр. 34]. Это определение фонемы дополняется следующими двумя определениями: 1) «Под *фонологической единицей* следует понимать любой член фонологического противопоставления»; 2) «Под *фонологическим противопоставлением* следует понимать любое звуковое противопоставление, которое в данном языке может служить для дифференциации интеллектуального значения слов» [11, стр. 32].

Мы видим, что, определяя понятие фонемы, Н. С. Трубецкой в конечном счете опирается на понятие звукового противопоставления. Он рассматривает фонему как член звукового противопоставления. Но фонема не может быть членом *звукового* противопоставления; членом *звукового* противопоставления могут быть только *звуки языка*. Противопоставления между фонемами являются такими же конструктами, как и сами фонемы, и они не имеют ничего общего со *звуковыми* противопоставлениями, существующими между звуками языка на уровне эмпирической базы фонологии. Таким образом, становится ясным, что у Н. С. Трубецкого понятие фонемы как члена звукового противопоставления по сути дела соответствует тому, что мы называем звуком языка. Вот почему Н. С. Трубецкой считал возможным говорить о звуках как вариантах фонемы.

Мы полагаем, что систематический пересмотр понятий фонологии под операционным углом зрения должен привести к построению новой фонологической теории, которая будет существенно отличаться от принятых в настоящее время фонологических теорий.

Указывая, что в результате систематического пересмотра фонологических понятий под операционным углом зрения должна быть построена новая фонологическая теория, мы вместе с тем хотим со всей силой подчеркнуть наличие преемственности в развитии и смене теорий в фонологии, как и в любой другой науке. «... Создание новой теории,— пишут А. Эйнштейн и Л. Инфельд,— непохоже на разрушение старого амбара и возведение на его месте небоскреба. Оно скорее похоже на восхождение на гору, которое открывает новые и широкие виды, показывающие неожиданные связи между нашей отправной точкой и ее богатым окружением. Но точка, от которой мы отправлялись, еще существует и может быть видна, хотя она кажется меньше и составляет крохотную часть открывшегося нашему взору обширного ландшафта» [12, стр. 156].

Великой заслугой Н. С. Трубецкого перед наукой о языке было то, что он коренным образом перестроил традиционную теорию фонем на основе понятия звукового противопоставления. Это замечательное достижение не только не может быть отброшено в любых новых теориях, а, напротив, должно быть удержано и углублено. В операционной концепции фонемы полностью сохраняются все достижения Н. С. Трубецкого, но они углубляются тем, что в фонологических понятиях расчленяется то, что относится к эмпирической базе, и то, что относится к уровню конструктов. Так, в операционной концепции фонемы удерживается понятие звукового противопоставления, но оно здесь относится к эмпирической базе, а наряду с ним выдвигается новое понятие — понятие фонемного противопоставления как конструкта.

Говоря о преемственности в развитии теорий, мы хотим обратить внимание еще на другую сторону дела. Новая теория далеко не всегда обесценивает старую теорию. Теоретические успехи любой науки можно в известной мере сравнивать с успехами картографии. Одна и та же географическая область может быть отражена на географических картах разного масштаба. Конечно, наиболее совершенной должна считаться самая подробная географическая карта. Но самая подробная географическая карта далеко не всегда применяется на деле. Для известных целей мы пользуемся менее точными географическими картами, а иногда мы пользуемся и просто дорожными картами. Таким образом, в области картографии существует целая иерархия географических карт, которые с различной степенью точности отражают действительность.

Аналогичным образом обстоит дело и в теоретической науке. Для решения тех или иных конкретных задач мы далеко не всегда пользуемся самыми точными теориями. Очень часто грубое отражение действительности, которое дает старая теория, является более уместным для решения конкретных, в особенности технических, задач, чем более точное, но зато более сложное отражение, которое дается новой теорией. И вот, если говорить о фонологической теории, которая должна быть построена под углом зрения операционного анализа, то никоим образом нельзя утверждать, что сложная понятийная аппаратура, связанная с разграничением фонологической эмпирической базы и уровня конструктов, будет во всех случаях уместной для описания конкретных языков.

Подобно тому как вместо географических карт мы в известных случаях пользуемся дорожными картами, точно так же и вместо операционной фонологической теории со сложной понятийной аппаратурой мы в известных случаях будем пользоваться менее точными, но зато более простыми фонологическими теориями. Так, если, описывая тот или иной конкретный язык, мы ставим перед собой чисто теоретические задачи, то в этом случае мы должны строго разграничивать разные уровни абстракции. Но если мы ставим перед собой задачу описания языка в утилитарных целях, то в этом случае нет необходимости применять сложную понятийную аппаратуру операционной фонологической теории и мы имеем полное право удовлетвориться более простыми фонологическими теориями; в этом случае мы находимся в таком же положении, как инженер, который, занимаясь вычислительными операциями, не нуждается для этих целей в утонченной понятийной аппаратуре теории чисел.

На основании всего изложенного главный вывод, к которому мы приходим, заключается в следующем: современная фонология должна развиваться в тесном контакте с современной логикой, и насущной ее задачей является систематический пересмотр фонологических понятий под операционным углом зрения.

Литература

1. W. Bridgman. The logic of modern physics. N. Y., 1927.
2. R. Carnap. Testability and meaning. «Philosophy of science». 1936/37.
3. G. Bergmann. Outline of an empiricist philosophy of physics. «American journal of physics», 1943, vol. 11.
4. См. A. Pap. Reduction sentences and open concepts. «Methodos», vol. V, 17, 1953; Analytische Erkenntnistheorie, Wien, 1955.
5. M. Przełęcki. O tzw. definicjach operacyjnych. «Studia logica», III, 1955.
6. H. Margenau. The nature of physical reality. N. Y., 1950.
7. A. Pap. Elements of analytic philosophy. N. Y., 1949.
8. Ф. де Соссюр. Курс общей лингвистики. М., 1933.
9. Р. И. Аванесов. Русское литературное произношение. М., 1954.
10. А. Тарский. Введение в логику и методологию дедуктивных наук. М., 1948.
11. N. S. Trubetskoy. Grundzüge der Phonologie, Prague, 1939.
12. А. Эйнштейн и Л. Инфельд. Эволюция физики. М., 1956.

Ю. В. Петров

ЗНАЧЕНИЕ АКСИОМАТИЧЕСКОГО МЕТОДА В УЧЕНИИ О НАПРАВЛЕНИЯХ ИЗМЕНЕНИЙ ЖИВЫХ СИСТЕМ

Введение

Для современной биологии характерно интенсивное развитие теоретических разделов различных ее областей (например, разработка теоретических представлений о наследовании признаков, о видообразовании, о целостности организмов и др.), встречающее значительное сопротивление со стороны многих биологов, стремящихся к сохранению преодолеваемого этапа ее развития. Поэтому до сих пор широко распространено отрицательное отношение к наиболее общим теоретическим выводам биологических наук, основывающееся обычно на их примитивном понимании.

С теми же особенностями современного этапа развития тех из этих наук, которые занимаются разработкой наиболее общих проблем биологии, связано еще более отрицательное отношение к методам их теоретической разработки и еще более примитивное их понимание. Этим объясняется обычное для биологов отрицание значения уточнения общих понятий биологических наук и путей их теоретической разработки, особенно заметно сказывающееся в их отношении к возможности аксиоматического построения биологических теорий. Все же Вуджером [1] сделаны выводы о возможности построения теорий различных биологических наук путем выведения из определенных положений, которые он считает аксиомами. В работах автора настоящей статьи, законченных в период с 1946 по 1959 г. (в том числе в опубликованных [2]), осуществлено аксиоматическое построение ранее предложенных и предлагаемых в них биологических теорий.

Возможность применения аксиоматического метода появляется в тех случаях, когда на определенном этапе развития данной научной дисциплины устанавливаются положения, которые могут быть приняты в качестве систем аксиом относящихся к ней теорий. В биологических науках при современном их состоянии такая возможность имеется, по-видимому, только в отношении некоторых общебиологических теорий, значительная часть которых принадлежит к учению о направлениях и закономерностях эволюции, называемому обычно учением о морфологических закономерностях эволюции. Последнее наименование этой области биологии с нашей точки зрения не является достаточно оправданным, так как в ней рассматриваются не только закономерности изменений, но и их направления, и так как многие ее положения не являются морфологическими (положения о взаимоотношениях изменений структуры и изменений функций, положения о направлениях изменений, являющиеся более общими, чем специально морфологические положения, и др.). Поэтому рассматриваемая здесь область знания и дальше будет именоваться учением о направлениях и закономерностях эволюции. Это учение состоит из положений, в которых направления и закономерности рассматриваются безотносительно к конкретным эволюционным и онтогенетическим изменениям. Некоторые его части составляют наиболее абстрактную область современной биологии.

Только что отмеченные особенности учения о направлениях и закономерностях эволюции облегчают формулировку исходных и выводимых теоретических положений. В соответствии с этим в настоящей работе рассматривается применение аксиоматического метода в учении о направлениях изменений живых систем, являющемся наиболее простой частью первого. В связи с ограниченностью объема статьи, в ней будут рассмотрены лишь некоторые положения теории типов изменений органов и близких к ней теорий. Задачей работы является обоснование вывода о применимости в таких случаях аксиоматического метода и о его значении в построении этих теорий. При этом в некоторых случаях целесообразно пользоваться логической символикой.

Вместе с тем следует отметить, что здесь не ставится задача применения математической логики или хотя бы какой-либо из ее частей. Целесообразность же применения логической символики определяется здесь тем, что оно дает возможность избежать непроизвольных логических ошибок в ходе доказательства рассматриваемых положений и осуществить его формализацию, чему посвящается приложение к настоящей работе (правила умозаключений формулируются здесь в той форме, которая позволяет дать положения, входящие в формулировки этих правил, в виде формул, но в целях краткости изложения правила умозаключений и доказательство положений рассматриваемых теорий точно формулируются только в приложении).

I. Теория типов филогенетических изменений органов

В теории типов филогенетических изменений органов рассматриваются направления изменений структуры органов и их функций в эволюции. Отдельные ее положения предлагались задолго до ее появления как общей теории. Некоторые случаи типов филогенетических изменений органов отмечал еще Ч. Дарвин в шестом издании «Происхождения видов». Позже представления о смене функций были разработаны А. Дорном [3], субституция органов открыта Н. Клейненбергом [4], усиление функций и возникновение (расширение) функций в качестве самостоятельных типов изменений органов впервые рассматривались Л. Плате [5]. Большая часть других известных типов филогенетических изменений органов (субституция функций, симиляция функций, разделение органов и функций и другие) установлены А. Н. Северцовым [6]. Теория типов филогенетических изменений органов разрабатывалась также Д. М. Федотовым [7], А. Г. Рындзюнским [8], А. А. Махотиным [9], Б. С. Матвеевым [10], А. Н. Дружининым [11], А. Ремане [12] и другими авторами.

Одной из важнейших проблем, для разработки которых была предложена теория типов филогенетических изменений органов, является проблема соотношения структуры и функции в эволюции. Поэтому при разграничении этих типов необходимо учитывать и морфологическую и функциональную характеристику изменений. По-видимому, является целесообразным называть ими только такие направления изменений, которые заключают в себе направления изменений структуры определенных живых систем и направления изменений их функций.

Типами филогенетических изменений органов принято называть усиление (интенсификацию) функций, ослабление функций, уменьшение числа функций, выпадение промежуточных функций, иммобилизацию, фиксацию фаз, расширение функций, активацию функций, смену функций, субституцию функций, субституцию органов, физиологическую субституцию, симиляцию функций и разделение органов и функций. Из анализа направлений изменений, заключающих в себе неполную субституцию, а также концентрацию функций и деконцентрацию функций, и соответствующих им направлений изменений структуры тех же живых систем, осуществленного А. Г. Рындзюнским и А. А. Махотиным, следует, что эти направления изменений тоже принадлежат к числу типов изменений органов. Кроме того, А. А. Махотин и А. Ремане в связи с этими типами рассматривают олигомеризацию (уменьшение количества) и полимеризацию (увеличение количества) органов, положения о которых предложены и разработаны В. А. Догелем [13].

Анализ положений теории типов филогенетических изменений органов показывает, что они не одинаково абстрактны. Такие типы, как активация функций, выпадение промежуточных функций, фиксация фаз и иммобилизация, являются частными случаями других типов филогенетических изменений органов. Выпадение промежуточных функций и фиксация фаз представляют собой частные случаи уменьшения числа функций, активация функций — частный случай возникновения функций, а иммобилизация функций — частный случай смены функций. Можно рассматривать и другие частные случаи уже известных типов филогенетических изменений органов, количество которых не является ограниченным, так как возможна любая конкретизация положений о них. В связи с этим автору настоящей работы представляется нужным определенным образом ограничить этот процесс конкретизации.

Некоторые авторы (например, Н. Клейненберг и А. А. Махотин) наряду с типами филогенетических изменений органов рассматривают те же направления изменения органов, проявляющиеся, однако, не в эволюции, а в онтогенезе, и обозначающиеся теми же терминами, в этом случае называющиеся принципами онтогенетического изменения органов. Таким образом, теорией типов филогенетических изменений органов могут рассматриваться общие направления изменений живых систем.

II. Определения и аксиомы теории типов изменений живых систем

На основе теории типов филогенетических изменений органов можно разрабатывать некоторые близкие к ней теории. Теорию, изучающую направления изменений функций, назовем теорией типов изменений функций. Теорию, рассматривающую проявляющиеся в таких случаях направления изменений структуры,— теорией типов изменений структуры, а теорию, предметом изучения которой являются сочетания направлений изменений, принадлежащих к этим группам,— теорией типов изменений органов. Объединяющую их теорию назовем теорией типов изменений живых систем. В качестве ее исходных определений примем следующие.

1) Организмом называется только каждый такой объект, развитие которого представляет собой только развитие индивидуума, все части которого в течение всего его существования принимают участие в обмене его веществ с внешней по отношению к нему средой.

2) Органом называется только каждая морфологически обособленная часть организма.

3) Живой системой называется только каждый организм и каждый орган.

4) Функцией называется только непосредственный результат влияния одного объекта на другой.

5) Филогенетическим развитием называется только каждое такое развитие, которое свойственно ряду поколений организмов, одни из которых происходят от других из них.

6) Филогенетическим изменением называется только каждая происходящая в течение филогенетического развития замена одного объекта другим, свойственным тому же месту и времени в развитии организмов, которым свойственен заменяемый объект.

7) Онтогенезом называется только каждое индивидуальное развитие индивидуума.

8) Онтогенетическим изменением называется только каждое изменение, происходящее в течение онтогенеза.

9) Развитием данного объекта называется только каждое его филогенетическое, каждое его онтогенетическое изменение и каждая группа таких изменений.

10) Изменением данного объекта называется только каждое филогенетическое изменение данного объекта и каждое его онтогенетическое изменение.

11) Стадией развития называется только каждая такая его часть, которая во времени нигде не совпадает ни с какой другой его частью.

12) Признаком называется только каждое из того, что свойственно объекту или его части.

Типы филогенетических изменений функций представляют собой направления возможных изменений, являющиеся усилением (интенсификацией) функций, ослаблением функций, возникновением функций, исчезновением (утратой) функций и их сочетаниями (А. А. Махотин). Эта точка зрения является результатом развития вывода А. Н. Северцова о том, что интенсификация функций входит в состав других типов филогенетических изменений органов. Она обоснована анализом некоторых из таких сочетаний и все же недостаточна для возможности точного определения типов изменений функций.

Направления изменений функций, проявления которых входят в проявления направлений изменений органов, назовем типами изменений функций, а направления изменений структуры, проявления которых входят в первые, назовем типами изменений структуры.

Анализ положений о типах филогенетических и онтогенетических изменений органов показывает, что ими являются не только все возможные простейшие сочетания элементарных типов изменений функций с элементарными типами изменений структуры, но и все сочетания различных таких сочетаний, а также такие сочетания этих направлений, которые, кроме других, включают в себя проявления одинаковых направлений изменений функций, свойственных разным органам одних и тех же организмов, но не включают в себя одинаковых направлений изменений разных функций одних и тех же органов. При этом сочетания одинаковых направлений, различающихся между собой только тем, имеются ли среди них направления изменений одних и тех же функций и каково место последних в этих сочетаниях, также являются разными типами изменений органов. Разными типами изменений органов являются также простейшие сочетания элементарных типов изменений органов, свойственные разным органам одних и тех же организмов и различающиеся между собой лишь тем, в изменениях каких (разных или одинаковых) функций проявляются входящие в них направления изменений функций. Другие направления изменений не являются типами изменений органов, так как являются или частными случаями определенных здесь направлений, или направлениями изменений других объектов.

Для того чтобы более точно определить понятия «типы изменений органов», «типы изменений функций» и «типы изменений структуры», введем следующие обозначения:

1) усиление функций — i,
2) ослабление функций — j
3) возникновение функций — k,
4) утрата функций — l,
5) увеличение размера органа — t,
6) уменьшение размера органа — u,
7) возникновение органа — v,
8) утрата органа — w.
9) Сочетания, в которые входят i, j, k, l или только некоторые из них, в случае, когда они обозначают направления

изменений одного органа, обозначим написанием этих символов в одну строчку одни рядом с другими [например, ij, kl, jl].

10) Сочетания, в которые входят только t, u, v, w или только некоторые из них, обозначим написанием этих символов в одну строчку и помещением их в разные круглые скобки [например, $(u)(w)$, $((t)(v))$ $((v)((t)(w)))$].

11) Сочетания, в которые входят символы, обозначающие направления изменений функций разных органов, обозначим заключением их в разные круглые скобки [например, $(i)((j)(l))$].

12) Сочетания направлений изменений функций с направлениями изменений структуры обозначим символами, верхняя часть которых, расположенная непосредственно над другой, представляет собой обозначения направлений изменений функций, а нижняя — направлений изменений структуры [например, $((v)^j(w))(j^k)$].

13) Направления изменений одной и той же функции обозначим подчеркнутыми буквами или группами букв [например, $(\underline{i})(\underline{j}k)$, $(\underline{kl})((\underline{k})((\underline{i})(\underline{j})))$].

Понятие «типы изменений функций» определим следующими порождающими правилами:

(1) i, j, k, l — типы изменений функций.

(2) Если X и Y — любые такие типы изменений функций, каждый из которых является или i, или j, или k, или l, то $(\underline{X})(XY)$ и $(\underline{X})(X\underline{Y})$ — типы изменений функций.

(3) Если X, Y, Z — любые такие типы изменений функций, каждый из которых является или i, или j, или k, или l, то $(\underline{X})(YZ)$ и $(\underline{X})(\underline{Y}Z)$ — типы изменений функций.

(4) Если X и Y — любые типы изменений функций, то XY, $(X)(Y)$, $(\underline{X})(\underline{Y})$, $(\underline{X}Y)(\underline{X}Y)$, $(\underline{X}Y)(X\underline{Y})$, $(X\underline{Y})(X\underline{Y})$ — типы изменений функций.

(5) Если XYZ — любые такие типы изменений функций, каждый из которых не является ни i, ни j, ни k, ни l, то $\underline{XY}Z$ и $\underline{X}\,\underline{Y}Z$ — типы изменений функций.

Понятие «типы изменений структуры» определим следующими порождающими правилами:

(6) t, u, v, w — типы изменений структуры.

(7) Если X и Y — любые типы изменений структуры, то

$(X)(Y)$ — тип изменений структуры.

(8) Если X и Y — любые такие типы изменений структуры, каждый из которых не является ни t, ни u, ни v, ни w, то XY — тип изменений структуры.

Понятие «типы изменений органов» определим следующими порождающими правилами:

(9) Если X — любой такой тип изменений функций и Y — любой такой тип изменений структуры, что $\frac{X}{Y}$ не является ни $\frac{i}{v}$, ни $\frac{i}{w}$, ни $\frac{j}{v}$, ни $\frac{j}{w}$, ни $\frac{k}{w}$, ни $\frac{l}{v}$, то $\frac{X}{Y}$ — тип изменений органов.

(10) Если X и Y — любые типы изменений органов, то $(X)(Y)$ — тип изменений органов.

(11) Если X и Y — любые такие типы изменений органов, каждый из которых не является ни $\frac{i}{t}$, ни $\frac{i}{u}$, ни $\frac{j}{t}$, ни $\frac{j}{u}$, ни $\frac{k}{t}$, ни $\frac{k}{u}$, ни $\frac{k}{v}$, ни $\frac{l}{t}$, ни $\frac{l}{u}$, ни $\frac{l}{w}$, то XY — тип изменений органов.

Понятие «типы изменений живых систем» определим следующими порождающими правилами:

(12) Если X — тип изменений функций, тип изменений структуры или тип изменений органов, то X — тип изменений живых систем.

(13) Если X и Y — типы изменений живых систем, а Z — направление изменений, проявляющееся в каждом из них, то Z — тип изменений живых систем.

В качестве аксиом теории типов изменений живых систем примем следующие положения:

[1] каждая существующая стадия развития всех живых систем имеет группу типов изменений функций, проявляющуюся в филогенетическом и онтогенетическом изменениях данной живой системы;

[2] каждый объект не имеет группу типов изменений функций, одновременно свойственных разным элементарным частям некоторого объекта определенного типа;

[3] если существует каждый объект определенного типа, которому свойственна дифференциация функций данной живой системы, то ему свойственны типы изменений структуры, проявляющиеся в усложнении этой системы;

[4] если существует каждый объект определенного типа, которому свойственно упрощение функций живой системы,

то ему свойственны типы изменений структуры, проявляющиеся в упрощении такой системы.

Положение [1] является частным случаем положения об использовании живыми системами всех возможных общих направлений изменений, представляющего собой одну из основных предпосылок теории отбора, и поэтому является достаточно обоснованным.

Положение [2] является достаточно обоснованным, так как оно представляет собой результат применения логического закона противоречия к положению о существовании разных общих направлений изменений данной живой системы.

Положения [3] и [4] подтверждены всеми достаточно полными исследованиями онтогенеза и филогенеза и, таким образом, также являются достаточно обоснованными.

Из сказанного следует, что каждое из положений [1] — [4] является истинным.

III. Правила умозаключений, применяемые при построении теории типов изменений живых систем

При выведении положений теории типов изменений живых систем будем пользоваться следующими правилами умозаключений.

(I) Из положения, согласно которому каждый существующий объект определенного типа имеет группу несовместимых признаков, свойственных данному объекту как целому, следует, что каждый существующий объект определенного типа имеет или группу таких признаков, разные из которых свойственны одним и тем же частям данного объекта, или группу таких признаков, каждый из которых свойственен только одной из элементарных частей последнего.

(II) Пусть импликация двух высказываний характеризуется следующим: вхождение переменной в нее связано квантором общности; заключением ее является разделительная дизъюнкция двух высказываний, вхождение переменной в которую связано квантором существования. Пусть в отрицании высказывания, являющегося первым членом упомянутой выше дизъюнкции, вхождение переменной связано квантором общности. Из этой импликации и отрицания этого высказывания следует импликация двух высказываний, характеризующаяся следующим: вхождение переменной в нее связано тем же квантором, что в посылках умозаключения; посылка ее есть посылка импликации, являющейся одной из его посылок, а заключение — второй член дизъюнкции, являющейся ее заключением, вхождение переменной в который связано квантором существования.

(III) Из положения, согласно которому каждый существующий объект определенного типа имеет группу разных направлений изменений данного типа, причем каждое из этих направлений свойственно только одной из элементарных частей данного объекта, следует, что каждый существующий объект определенного типа как целое имеет дифференциацию признаков того же типа, что указанные направления.

(IV) Из двух импликаций двух суждений всеобщности, посылкой второй из которых является заключение первой из них, следует импликация двух суждений всеобщности, посылкой которой является посылка первой из этих импликаций, а заключением — заключение второй из них.

(V) Из положения, согласно которому каждый существующий объект определенного типа имеет усложнение данного объекта как целого, и положения, согласно которому каждый из таких объектов первого типа имеет признаки, свойственные данному объекту как целому, следует, что каждый существующий последовательный ряд объектов определенного типа имеет усложнение и увеличение количества и разнообразия признаков данного объекта, свойственных ему как целому.

(VI) Из положения, согласно которому каждый существующий объект определенного типа имеет группу разных направлений изменений объекта данного типа, каждое из которых свойственно только одной из элементарных частей объекта того же типа, следует, что каждый существующий объект определенного типа как целое имеет упрощение признаков того же типа, что указанные направления.

(VII) Из положения, согласно которому каждый существующий объект определенного типа имеет упрощение объекта данного типа как целого, и положения, согласно которому каждый из таких объектов первого типа имеет признаки, свойственные объекту данного типа как целому, следует, что каждый существующий последовательный ряд объектов определенного типа имеет упрощение и уменьшение количества и разнообразия признаков объекта данного типа, свойственных ему как целому.

(VIII) Из положения, согласно которому каждый существующий объект определенного типа имеет признак объекта данного типа, и положения, согласно которому каждый из таких объектов другого типа имеет другой признак, свойственный объекту данного типа, следует, что каждый существующий последовательный ряд объектов определенного типа имеет сочетание этих признаков, свойственное объекту данного типа.

(IX) Из положения, согласно которому каждый существующий объект определенного типа имеет усложнение объекта данного типа как целого, и положения, согласно которому каждый из таких объектов первого типа имеет признаки, свойственные объекту данного типа как целому, следует, что каждый существующий последовательный ряд объектов определенного типа имеет усложнение и увеличение количества и разнообразия признаков объекта данного типа, свойственных ему как целому.

(X) Из положения, согласно которому каждая существующая стадия развития объекта данного типа имеет направление изменения признака его части, следуют положения, согласно первому из которых существует потенциально бесконечный ряд последовательных стадий развития объекта данного типа, а согласно второму — каждое существующее развитие объекта этого типа потенциально бесконечно.

(XI) Из импликации двух высказываний, вхождение переменной в которую связано квантором существования, и нескольких импликаций двух высказываний, вхождение переменной в каждую из которых связано квантором общности, посылкой каждой из которых является посылкой первой импликации, а заключением — конъюнкция нескольких высказываний, вхождение переменной в которую связано квантором существования, следует импликация двух высказываний. Вхождение переменной в эту импликацию связано квантором существования; посылкой ее является дизъюнкция всех членов указанных конъюнкций, посылкой каждой из которых является результат замены символа, обозначающего понятие «имеет», символом, обозначающим понятие «является», во всех членах конъюнкций, входящих в указанные импликации, а заключением ее является заключение первой импликации.

(XII) Из положения, согласно которому каждое существующее развитие объекта данного типа потенциально бесконечно, следует, что каждое существующее развитие объекта этого типа является рядом стадий такого развития или группой таких рядов.

(XIII) Из импликации двух высказываний, вхождение переменной в которую связано квантором общности, заключением которой является дизъюнкция двух высказываний, вхождение переменной в которую связано квантором существования, и нескольких импликаций двух высказываний, вхождение переменной в каждую из которых связано квантором общности, посылкой каждой из которых является первый член указанной дизъюнкции, а заключением — конъюнкция нескольких высказываний, вхождение переменной в каждую из которых связано квантором существования, следует импликация, вхождение переменной в которую связано квантором существования, посылкой которой является дизъюнкция всех членов указанных конъюнкций, а заключением — посылка первой импликации.

Применение правил (I) — (XIII) к истинным высказываниям всегда приводит к истинным высказываниям. Правила (II), (IV) и (XIII) доказаны в логическом исчислении. Правила (I), (III) и (V) — (XII) являются, по сравнению с правилами (II), (IV) и (XIII), в некоторых отношениях более сложными [в них указывается логическая структура предикатов суждений], что в данном случае связано со спецификой суждений об изменяющихся объектах.

В правиле (I) указывается, как из суждений о принадлежности объекту некоторой группы несовместимых признаков выводятся суждения о том, что разные из них или свойственны одним и тем же частям объекта как целого, или каждый из них свойственен только одной из элементарных частей последнего. Допустимость умозаключений, происходящих по этому правилу, основана на том, что из закона исключенного третьего следует утверждение о наличии только этих двух возможностей распределения признаков, о которых в данном случае говорится в посылке умозаключения.

Правило (III) позволяет из суждений об одновременном изменении разных частей данного объекта в разных направлениях получать суждения о его дифференциации. Так как каждый объект может рассматриваться в качестве элементарного, то сравнение разных его частей до того, как у них возникли разные признаки, и после того, как они возникли у этих частей, приводит, поскольку разные направления изменений проявляются в возникновении разных признаков, к заключению о наличии у изменившегося таким путем объекта разных признаков. Сравнение последнего с тем объектом, изменение которого привело к нему, показывает, что в таких случаях происходит усложнение изменяющегося объекта. Результатом этих сравнений является положение, выводимое путем применения правила (III) к положению об одновременном изменении разных частей данного объекта в разных направлениях.

В каждом из правил (V), (VII) и (IX) объединены правила, применяемые непосредственно к двум исходным положениям, и правила, применяемые к результатам применения к этим положениям первых из этих правил, входящих в одно из рассматриваемых трех правил умозаключений.

В правиле (V) указывается, как из положений об усложнении данного объекта и о наличии у него некоторого признака вывести положения об усложнении признаков данного объекта и об увеличении их количества и разнообразия. Высказывания об усложнении признаков, выводимые по этому правилу, следуют из каждых первых двух посылок умозаключений, к которым применено это правило. Изменение сложности данного объекта как целого свойственно и всему тому, что он имеет как целое, т. е. его признакам, свойственным ему в целом, из чего и из положения о том, что усложнение этого объекта есть изменение его сложности, следует положение об усложнении признака этого объекта как целого, свойственного ему при его усложнении. Так как каждый такой признак принадлежит к числу признаков, то обобщение этого вывода и применение положения о том, что если разные признаки принадлежат данному объекту, то ему принадлежит и их сочетание, приводят к формулировке первого из правил, объединенных в правило (V), приводящее к указанному положению об усложнении признаков. Того же типа правилами, позволяющими получать непосредственные результаты применения этих правил к каждым двум таким исходным положениям, к которым они применимы, являются правила (VII) и (IX). Следующая часть правила (V), так же как и вторая часть правил (VII) и (IX), является результатом сравнения признаков многократного изменяющегося объекта на последовательных этапах его изменения. Вторая часть правила (VII) отличается от соответствующих частей правил (V) и (IX) тем, что в первом идет речь о суждениях об упрощении и уменьшении количества и разнообразия. Их первые части различаются между собой тем же, чем вторые.

Правило (VI) является правилом того же типа, как правило (III), и позволяет из суждений об одновременном изменении разных частей объекта в разных направлениях данного типа выводить суждения об упрощении признаков, изменяющихся в некоторых из этих направлений. Так же как и правило (III), оно основано на результатах сравнения изменений группы признаков, свойственных разным частям изменяющихся объектов данного типа, но в отличие от него здесь речь идет не о конкретном объекте, а о любых объектах определенного типа.

В правиле (VIII) указывается, как из положений о постоянных усложнении и упрощении объектов выводятся положения о направлениях их изменений. Поскольку сочетание признаков есть некоторый другой признак, то сочетание усложнения объекта определенного типа и его упрощения, согласно определению понятия «тип изменений структуры», является группой таких типов. Так как если объекту определенного типа свойственны разные признаки, то ему свойственно и их сочетание, то из положений об одновременной принадлежности каждому объекту определенного типа разных признаков следует положение о принадлежности ему и их сочетания. Частным случаем этого правила является правило (VIII), которое применимо к суждениям о каждом существующем объекте определенного типа.

Правило (X) дает способ выведения положений о существовании потенциально бесконечного ряда последовательных этапов развития и о потенциальной бесконечности такого развития, из положений о принадлежности каждому из них некоторого признака части изменяющегося в течение него объекта. Если каждый этап изменения некоторой группы объектов характеризуется направлением изменения признака некоторого из этих объектов, то он имеет направление его изменения. Сравнение измененных в этом случае объектов показывает, что в течение него возникает новый из таких объектов, т. е. такой, который имеет новые признаки. Если каждый этап данного изменения удовлетворяет только что указанному условию, то сказанное применимо к каждому из возникающих таким путем объектов. Поэтому какой бы из таких последовательных этапов данного изменения ни рассматривался, всегда имеется следующий его этап. Таким образом, это изменение является потенциально бесконечным, а следовательно, существует такой ряд последовательных его этапов (само движение является частным случаем такого ряда), который тоже потенциально бесконечен.

По правилу (XI) из положений о принадлежности некоторого свойства объекту данного типа и о принадлежности ему как целому определенных признаков выводятся положения о принадлежности этого свойства таким признакам. Применимость этого правила к указанным выше случаям основана на том, что признаки, которыми обладает ряд объектов, имеют его свойство, заключающееся в его потенциальной бесконечности и характеризующее его в целом в течение всего времени его существования. Поэтому если объект определенного типа как целое обладает некоторым признаком и вместе с тем имеет указанное свойство, то оно свойственно первому из них. Одним из частных случаев правила умозаключений, основанного на этом утверждении, является правило (XI).

По правилу (XII) из положений о потенциальной бесконечности развития объекта выводятся положения о том, что развитие такого объекта является рядом стадий этого развития или группой таких рядов. Так как потенциально бесконечным являются только ряд стадий некоторого процесса или группа таких рядов, то развитие может рассматриваться как ряд или группа рядов его стадий.

Поскольку обоснование применяемых в настоящей работе правил умозаключений не входит в ее задачи, то мы ограничимся замечаниями, сделанными об этих правилах.

IV. Выведение некоторых положений теории типов изменений живых систем

Отметим пути выведения следующих положений теории типов изменений живых систем, в формулировке которых слова «каждый существующий ряд последовательных стадий развития всех живых систем как целое» обозначим символом «α».

I. α имеет усложнение и увеличение количества и разнообразия групп типов изменений функций, проявлявшиеся в изменении данной живой системы.

II. α имеет упрощение и уменьшение количества и разнообразия групп типов изменений функций, проявляющиеся в изменении живой системы.

III. α имеет усложнение и увеличение количества и разнообразия групп типов изменений структуры, проявляющиеся в изменении живой системы.

IV. α имеет упрощение и уменьшение количества и разнообразия групп типов изменений структуры, проявляющиеся в изменении живой системы.

V. α имеет усложнение и увеличение количества и разнообразия групп типов изменений органов, проявляющиеся в изменении живой системы.

VI. α имеет упрощение и уменьшение количества и разнообразия групп типов изменений органов, проявляющиеся в изменении живой системы.

VII. Существуют такие усложнение и увеличение количества и разнообразия групп типов изменений функций, проявляющиеся в изменении данной живой системы, и усложнение, упрощение, увеличение и уменьшение количества и разнообразия групп типов изменений функций, групп типов изменений структуры и групп типов изменений органов, которые потенциально бесконечны.

VIII. Существует такой объект, который, являясь направлениями изменений, указанными в положении VII, представляет собой развитие всех живых систем.

Выведение положений I—VIII состоит из следующих этапов.

(1) Применение правила (I) к положению [1].

(2) Применение правила (II) к непосредственному результату этапа (1) и к положению [2].

(3) Применение правила (III) к непосредственному результату этапа (2).

(4) Применение правила (IV) к непосредственному результату этапа (3) и к положению [3].

(5) Применение правила (V) к непосредственному результату этапа (4) и к положению [1].

(6) Применение правила (VI) к непосредственному результату этапа (2).

(7) Применение правила (IV) к непосредственному результату этапа (6) и к положению [4].

(8) Применение правила (VII) к непосредственному результату этапа (7) и к положению [1].

(9) Применение правила (VIII) к непосредственным результатам этапов (4) и (7).

(10) Применение правила (IX) к непосредственным результатам этапов (4) и (9).

(11) Применение правила (VII) к непосредственным результатам этапов (7) и (9).

(12) Применение правила (VIII) к положению [1] и к непосредственному результату этапа (9).

(13) Применение правила (IX) к непосредственным результатам этапов (4) и (12).

(14) Применение правила (VII) к непосредственным результатам этапов (7) и (12).

(15) Применение правила (X) к положению [1].

(16) Применение правила (XI) к первому из непосредственных результатов этапа (15) и к непосредственным результатам этапов (5), (8), (10), (11), (13) и (14).

(17) Применение правила (XII) ко второму из непосредственных результатов этапа (15).

(18) Применение правила (XIII) к непосредственным результатам этапов (17), (5), (8), (10), (11), (13) и (14).

Положения I—VIII являются непосредственными результатами этапов (5), (8), (10), (11), (13), (14), (16) и (18) (те и другие указаны здесь в одинаковой последовательности). Непосредственными результатами этапов (1) — (4), (6), (7), (9), (12), (15) и (17) являются следующие положения, в которых слова «каждая существующая стадия развития всех живых систем» обозначим символом «β»:

1) β имеет или группу типов изменений функций, разные из которых свойственны одним и тем же частям данной живой системы, или группу таких типов, каждый из которых свойствен только одной из ее элементарных частей [выводится в этапе (1)].

2) β имеет группу типов изменений функций, каждый из которых свойствен только одной из элементарных частей данной живой системы [выводится в этапе (2)].

3) β имеет дифференциацию функций данной живой системы [выводится в этапе (3)].

4) β имеет усложнение данной живой системы [выводится в этапе (4)].

5) β имеет упрощение функций живой системы [выводится в этапе (6)].

6) β имеет упрощение живой системы [выводится в этапе (7)].

7) β имеет группу типов изменений структуры, проявляющуюся в изменении живой системы [выводится в этапе (9)].

8) β имеет группу типов изменений органов, проявляющуюся в изменении живой системы [выводится в этапе (12)].

9) Существует такой ряд последовательных стадий развития всех живых систем, который является потенциально бесконечным [выводится в этапе (15)].

10) Каждое существующее развитие всех живых систем потенциально бесконечно [выводится в этапе (15)].

11) Каждое существующее развитие всех живых систем является рядом последовательных стадий такого развития [выводится в этапе (17)].

Более точное изложение сформулированных выше положений рассматриваемой теории и их выведения даются в приложении к настоящей работе.

V. Возможности конкретизации и обобщения положений теории типов изменений живых систем

Выше изложен порядок выведения положений общей теории, являющейся обобщением теории типов изменений функций, теории типов изменений структуры и теории типов изменений органов (в первой части этой общей теории обобщена первая из последних, во второй — вторая и в третьей — третья). Не будем останавливаться здесь на аксиоматическом построении этих теорий. Отметим только, что если положения [1] — [4] заменить положениями, в первом из которых слова «имеет группу типов изменений функций» заменены словами «имеет усложнение функций, упрощение функций, возникновение функций и утрату функций», то многократно повторяющееся применение правил (I) — (XIII) в той же последовательности, в которой они применялись выше, приводит ко все более сложным положениям этих теорий. Такое последовательное применение правил (I) — (XIII) может продолжаться бесконечно.

Так как процессы изменения сложности, а также количества и разнообразия типов изменений функций, структуры и органов потенциально бесконечны, то выведение все более сложных и разнообразных положений соответствующих теорий путем повторного применения правил (I) — (XIII) потенциально бесконечно. Таким образом, количество символов, обозначающих такие типы изменений живых систем, может увеличиваться бесконечно, в связи с чем возникает вопрос о существовании определенного количества более общих направлений изменений функций, структуры и органов и о существовании символов, которыми могут быть обозначены эти направления.

Теория типов изменений живых систем в досеверцовский период своего развития ставила своей целью установление (открытие) таких направлений изменений, количество которых в то время рассматривалось, как весьма ограниченное. Отсюда и термин «принципы филогенетических изменений органов», которым обозначались соответствующие направления изменений. Описание значительного количества ранее неизвестных из них привело А. Н. Северцова (1931, 1939) к выводу, что одни из них входят в состав других. Позже это положение было разработано дальше А. А. Махотиным и автором настоящей работы, установившим потенциальную бесконечность их усложнения в течение морфологически или функционально прогрессивного развития организмов и их частей, т. е. живых систем. Таким образом, оказалось, что не удалось установить определенного количества общих направлений изменений функций, структуры и органов. Некоторые обобщения соответствующих теорий позволяют ответить на вопрос о возможности их существования и об их количестве.

Так как количество типов изменений функций, структуры и органов в течение филогенетического развития может неограниченно увеличиваться, то их, по мнению автора настоящей работы, не следует называть «принципами». Этим термином было бы правильнее обозначать некоторые более общие направления изменений, количество которых никогда не может бесконечно увеличиваться. Используя символы, которые были введены выше для обозначения типов изменений функций, структуры и органов, можно, как это показало исследование рассматриваемой проблемы, выполненное автором настоящей работы, указать символы, обозначающие более общие, по сравнению с отмеченными здесь, направления изменений. Чтобы показать, каковы последние, введем следующие обозначения:

14) | — знак, являющийся общим обозначением для каждого такого символа, который в обозначении данного направления изменений живых систем находится слева от одного из символов «*i*», «*j*», «*k*», «*l*», «*t*», «*u*», «*v*», «*w*».

15) ᵕ — знак, являющийся общим обозначением для знака «—» и для пустого слова, т. е. слова, не содержавшего в себе ни одного символа.

16) * — знак, являющийся общим обозначением для слова, которое в обозначении данного типа изменений живых систем находится справа от одного из символов «*i*», «*j*», «*k*», «*l*», «*t*», «*u*», «*v*», «*w*».

Пользуясь обозначениями 14) — 16), можно указать следующие символы, выражающие понятия об общих случаях, к которым принадлежат типы изменений функций, структуры и органов:

I) 1) $\underset{\smile}{i}*$, 2) $\underset{\smile}{j}*$, 3) $\underset{\smile}{k}*$, 4) $\underset{\smile}{l}*$, 5) $\underset{\smile}{t}*$, 6) $\underset{\smile}{u}*$, 7) $\underset{\smile}{v}*$, 8) $\underset{\smile}{w}*$, 9) $\underset{\smile}{\overset{i}{\breve{t}}}*$, 10) $\underset{\smile}{\overset{i}{\breve{u}}}*$, 11) $\underset{\smile}{\overset{j}{\breve{t}}}*$, 12) $\underset{\smile}{\overset{j}{\breve{u}}}*$, 13) $\underset{\smile}{\overset{k}{\breve{t}}}*$, 14) $\underset{\smile}{\overset{k}{\breve{u}}}*$, 15) $\underset{\smile}{\overset{k}{\breve{v}}}*$, 16) $\underset{\smile}{\overset{l}{\breve{t}}}*$, 17) $\underset{\smile}{\overset{l}{\breve{u}}}*$, 18) $\underset{\smile}{\overset{l}{\breve{w}}}*$;

II) 1) $|\underset{\smile}{i}*$, 2) $|\underset{\smile}{j}*$, 3) $|\underset{\smile}{k}*$, 4) $|\underset{\smile}{l}*$, 5) $|\underset{\smile}{t}*$, 6) $|\underset{\smile}{u}*$, 7) $|\underset{\smile}{v}*$, 8) $|\underset{\smile}{w}*$, 9) $|\underset{\smile}{\overset{i}{\breve{t}}}*$, 10) $|\underset{\smile}{\overset{i}{\breve{u}}}*$, 11) $|\underset{\smile}{\overset{i}{\breve{t}}}*$, 12) $|\underset{\smile}{\overset{j}{\breve{u}}}*$, 13) $|\underset{\smile}{\overset{k}{\breve{t}}}*$, 14) $|\underset{\smile}{\overset{k}{\breve{u}}}*$, 15) $|\underset{\smile}{\overset{k}{\breve{v}}}*$, 16) $|\underset{\smile}{\overset{l}{\breve{t}}}*$, 17) $|\underset{\smile}{\overset{l}{\breve{u}}}*$, 18) $|\underset{\smile}{\overset{l}{\breve{w}}}*$;

III) 1) $||\underset{\smile}{i}*$, 2) $||\underset{\smile}{j}*$, 3) $||\underset{\smile}{k}*$, 4) $||\underset{\smile}{l}*$, 5) $||\underset{\smile}{t}*$, 6) $||\underset{\smile}{u}*$, 7) $||\underset{\smile}{v}*$, 8) $||\underset{\smile}{w}*$, 9) $||\underset{\smile}{\overset{i}{\breve{t}}}*$, 10) $||\underset{\smile}{\overset{i}{\breve{u}}}*$, 11) $||\underset{\smile}{\overset{j}{\breve{t}}}*$, 12) $||\underset{\smile}{\overset{j}{\breve{u}}}*$, 13) $||\underset{\smile}{\overset{k}{\breve{t}}}*$, 14) $||\underset{\smile}{\overset{k}{\breve{u}}}*$, 15) $||\underset{\smile}{\overset{k}{\breve{v}}}*$, 16) $||\underset{\smile}{\overset{l}{\breve{t}}}*$, 17) $||\underset{\smile}{\overset{l}{\breve{u}}}*$, 18) $||\underset{\smile}{\overset{l}{\breve{w}}}*$;

. . . .

Так как количество типов изменений живых систем в некоторых случаях может бесконечно увеличиваться, то количество символов I) 1) — 18), II) 1) — 18), III) 1) — 18) и т. д. также может увеличиваться бесконечно. Однако в каждой из групп символов I), II), III) и т. д. имеется по восемнадцать символов, каждый из которых обозначает одно из таких направлений изменений живых систем, количество которых никогда не превышает восемнадцати. Направления изменений живых систем, количество которых в каждой из подобных групп не может увеличиваться бесконечно, могут быть обозначены и по другому (например, эти обозначения можно заменить так, чтобы символ «*» оказался непосредственно слева от символов «i», «j», «k», «l», «t», «u», «v», «w», а символы «|», «||», и т. д.— непосредственно справа от каждого из них. Кроме отдельных символов «i», «j», «k», «l», «t», «u», «v», «w», можно было бы ввести и некоторые из слов, являющихся их сочетаниями, или заменить в некоторых случаях символ «$\smile$» символом «—». Количество обозначаемых в этих случаях направлений изменений функций, структуры и органов при соответствующих ограничениях тоже не может бесконечно увеличиваться. С другой стороны, как обозначениями элементарных направлений изменений структуры и функций можно было бы пользоваться только некоторыми из букв «i» — «l» и «t» — «w». Тогда количество рассматриваемых направлений изменений окажется меньшим. Тем не менее количество их групп, а следовательно, и самих таких направлений может увеличиваться бесконечно. Можно ввести переменные, отдельными значениями которых являются символы, обозначающие любые из таких направлений изменений. В частности, если символом «$\langle\rangle$» обозначить то, что является общим обозначением для символа «*» и для всех символов «|», «||» и т. д., то этими переменными являются следующие:

$$1) \langle\rangle \underset{\smile}{i} \langle\rangle,\ 2) \langle\rangle \underset{\smile}{j} \langle\rangle,\ 3) \langle\rangle \underset{\smile}{k} \langle\rangle,\ 4) \langle\rangle \underset{\smile}{l} \langle\rangle,\ 5) \langle\rangle \underset{\smile}{t} \langle\rangle,\ 6) \langle\rangle \underset{\smile}{u} \langle\rangle,$$

$$7) \langle\rangle \underset{\smile}{v} \langle\rangle,\ 8) \langle\rangle \underset{\smile}{w} \langle\rangle,\ 9) \langle\rangle \underset{\smile}{\overset{i}{\overset{\smile}{t}}} \langle\rangle,\ 10) \langle\rangle \underset{\smile}{\overset{i}{\overset{\smile}{u}}} \langle\rangle,\ 11) \langle\rangle \underset{\smile}{\overset{j}{\overset{\smile}{t}}} \langle\rangle,$$

$$12) \langle\rangle \underset{\smile}{\overset{j}{\overset{\smile}{u}}} \langle\rangle,\ 13) \langle\rangle \underset{\smile}{\overset{k}{\overset{\smile}{t}}} \langle\rangle,\ 14) \langle\rangle \underset{\smile}{\overset{k}{\overset{\smile}{u}}} \langle\rangle,\ 15) \langle\rangle \underset{\smile}{\overset{k}{\overset{\smile}{v}}} \langle\rangle,\ 16) \langle\rangle \underset{\smile}{\overset{l}{\overset{\smile}{t}}} \langle\rangle,$$

$$(17) \langle\rangle \underset{\smile}{\overset{l}{\overset{\smile}{u}}} \langle\rangle,\ 18) \langle\rangle \underset{\smile}{\overset{l}{\overset{\smile}{w}}} \langle\rangle.$$

Переменные 1) — 18) для сокращения обозначим так:

$$1) \overline{|i|},\ 2) \overline{|j|},\ 3) \overline{|k|},\ 4) \overline{|l|},$$

$$5) \overline{|t|},\ 6) \overline{|u|},\ 7) \overline{|v|},\ 8) \overline{|w|},\ 9) \underset{t}{\overline{|i|}},\ 10) \underset{u}{\overline{|i|}},$$

$$11) \underset{t}{\overline{|j|}},\ 12) \underset{u}{\overline{|j|}},\ 13) \underset{t}{\overline{|k|}},\ 14) \underset{u}{\overline{|k|}},\ 15) \underset{v}{\overline{|k|}},\ 16) \underset{t}{\overline{|l|}},$$

$$17) \underset{u}{\overline{|l|}},\ 18) \underset{w}{\overline{|l|}}.$$

Эти переменные не являются наиболее общими переменными, могущими принимать значение направлений изменений живых систем, так как они различны для направлений количественных и для направлений качественных изменений, а также для направлений прогрессивных и направлений регрессивных изменений. Обобщая их, можно дать символы, обозначающие переменные, значениями которых являются наиболее общие из таких направлений изменений, которые могут быть названы принципами изменений живых систем. Такие переменные обозначим следующими символами (сначала указываются переменные, значениями которых являются направления количественных и качественных изменений, а затем — переменные, значениями которых являются направления прогрессивных и регрессивных изменений).

$$1)\ q,\ 2)\ Q,\ 3)\ r,\ 4)\ R,\ 5)\genfrac{}{}{0pt}{}{q}{r},\ 6)\ \genfrac{}{}{0pt}{}{Q}{r},\ 7)\ \genfrac{}{}{0pt}{}{Q}{R};$$

$$1')\ Q,\ 2')\ q,\ 3')\ R,\ 4')\ r,\ 5')\ \genfrac{}{}{0pt}{}{Q}{R},\ 6')\ \genfrac{}{}{0pt}{}{Q}{r},\ 7')\ \genfrac{}{}{0pt}{}{q}{R},\ 8')\ \genfrac{}{}{0pt}{}{q}{r}.$$

При этом, если направления количественных изменений функций обозначить символом «$\hat{q}$», направления их качественных изменений — символом «$\hat{Q}$», направления количественных изменений структуры — символом «$\hat{r}$», направления ее качественных изменений — символом «$\hat{R}$», направления прогрессивных изменений функций — символом «$\underset{\vee}{Q}$», направления их регрессивных изменений — символом «$\underset{\vee}{q}$», направления прогрессивных изменений структуры — символом «$\underset{\vee}{R}$», направления ее регрессивных изменений — символом «$\underset{\vee}{r}$», то наиболее общие из направлений изменений, являющихся принципами изменений живых систем, окажутся обозначенными следующими символами, где в первой половине номеров каждой группы указываются направления количественных и качественных изменений, а во второй — прогрессивных и регрессивных:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \hat{q} \\ 2)\ \hat{Q} \\ 3)\ \underset{\vee}{Q} \\ 4)\ \underset{\vee}{q} \end{array}\right\}\ \text{Принципы изменений функций.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5)\ \hat{r} \\ 6)\ \hat{R} \\ 7)\ \underset{\vee}{R} \\ 8)\ \underset{\vee}{r} \end{array}\right\}\ \text{Принципы изменений структуры.}$$

$$\left.\begin{array}{rl} 9) & \begin{matrix}\hat{q}\\ \hat{r}\end{matrix} \\ 10) & \begin{matrix}\hat{Q}\\ \hat{r}\end{matrix} \\ 11) & \begin{matrix}\hat{Q}\\ \hat{R}\end{matrix} \\ 12) & \begin{matrix}\underset{\vee}{Q}\\ \underset{\vee}{R}\end{matrix} \\ 13) & \begin{matrix}\underset{\vee}{Q}\\ \underset{\vee}{r}\end{matrix} \\ 14) & \begin{matrix}\underset{\vee}{q}\\ \underset{\vee}{R}\end{matrix} \\ 15) & \begin{matrix}\underset{\vee}{q}\\ \underset{\vee}{r}\end{matrix} \end{array}\right\}\text{Принципы изменений органов.}$$

Таким же путем можно получать символы, обозначающие все другие направления изменений функций, структуры и органов, являющиеся более общими, чем типы изменений живых систем. Ко всем этим направлениям изменений применимы аксиомы [1] — [4].

Заключение

В аксиоматическом построении теорий, составляющих учение о направлениях изменений живых систем, помимо правил классической логики, применяются и другие правила. Эти правила содержат формулы, в которые подставляются суждения об общей характеристике изменяющихся объектов. Во многих из них выражены результаты сравнения объектов по различным признакам.

При выведении положений рассматриваемой области биологии (за исключением наиболее абстрактных) исходные положения применяются к характеристике изменяющихся объектов, свойственных начальному этапу развития, в результате чего выводятся положения о следующем его этапе, после чего исходные и выведенные положения применяются к характеристике объектов, свойственных последнему, в результате чего выводятся положения о следующем после него этапе и т. д. Этот процесс в некоторых случаях потенциально бесконечен, что следует из некоторых исходных и некоторых выводимых из них положений. На всех этапах этого процесса выведения производится сравнение объектов по всем признакам, которые указываются в исходных и выводимых из них положениях. Эти особенности применения аксиоматического метода позволяют выводить не только сформулированные положения, но и совершенно новые.

Применение логической символики и формализация доказательства в изложении выведения рассматриваемых здесь теорий являются, конечно, весьма неполными, но их значение состоит в том, что благодаря им достигается большая точность формулировок и в значительной степени их сокращение.

Все положения, выведение которых излагается в настоящей работе, и положения, способ выведения которых указывается в ней, являются новыми и впервые получены путем применения аксиоматического метода, чем подтверждается его значение для разработки учения о направлениях изменений живых систем. Здесь рассматривались главным образом наиболее абстрактные из входящих в него теорий. Однако анализ положений об отдельных из изучаемых ими направлений изменений приводит к заключению о возможности выведения положений обо всех отдельных типах изменений функций, структуры и органов из системы аксиом, близкой к системе аксиом, принятой в настоящей работе.

Значение аксиоматического построения теорий учения о направлениях изменений живых систем и теорий других областей биологии состоит, прежде всего, в том, что, поскольку их аксиомы являются общими положениями, обоснованными в значительно большей степени, чем частные положения биологических наук, то выведение из этих аксиом других положений значительно повышает их обоснованность. Кроме того, оно способствует ускорению разработки проблем, рассматриваемых в теориях, допускающих выведение их положений из аксиом, и дает возможность сосредоточить эмпирические исследования на изучении основных проблем соответствующих областей знания. Особенности же аксиоматического построения теорий, разрабатывающих проблемы развития, и его специфические возможности, по-видимому, приводят к необходимости исследования логических особенностей умозаключений, осуществляющихся при обосновании положений о развивающихся объектах.

Приложение

Примем следующие обозначения.

1) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ $\mathfrak{A}_1,\ldots$, $\mathfrak{B}_1,\ldots$, $\mathfrak{C}_1,\ldots$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ — логико-предметные формулы.

2) $\forall\alpha\mathfrak{A}$ — для каждого значения переменной выполняется условие, обозначаемое формулой $\mathfrak{A}$ (также для формул $\forall\alpha\mathfrak{B}$, $\forall\alpha\mathfrak{L}$ и др).

3) $\exists\alpha$ы — существуют такие значения переменной, для каждого из которых выполняется условие, обозначаемое формулой $\mathfrak{A}$ (также для формул $\exists\alpha\mathfrak{B}$, $\exists\alpha\mathfrak{C}$ и др.).

4) $\neg$ — знак отрицания условия, обозначаемого формулой, стоящей непосредственно после него.

5) & — знак конъюнкции высказываний.

6) $\vee$ — знак дизъюнкции высказываний.

7) $\not\equiv$ — знак разделительной дизъюнкции высказываний.

8) $\supset$ — знак импликации высказываний.

9) : , c — символы, обозначающие логическую связку (символ «:», будучи поставлен между символами, обозначающими объекты, обозначает их отождествление; символ «с», будучи поставлен между этими символами, обозначает принадлежность объекту, который обозначен первым из них, объекта, который обозначен вторым из этих символов).

10) V — объект данного типа, полностью или частично совпадающий с другим объектом того же типа, о котором говорится в другом суждении того же умозаключения.

11) V_x — часть объекта данного типа.

12) V^v — данный объект.

13) a_i — признак данного типа, свойственный данному объекту как целому.

14) a_x и a_y — разные признаки.

15) a — сочетание разных признаков.

16) Σ — ряд последовательных объектов, один из которых

обозначен символом, стоящим непосредственно после символа «Σ».

17) $\lim \alpha = \infty$ — значение переменной потенциально бесконечно.

18) $\{|:\dot{\Sigma}\mathfrak{A}\}$ — результат замены символа «:» символом «Σ» в формуле $\mathfrak{A}$.

19) $\{|:\mathfrak{A}_1\}$ — результат замены символа «c» символом «:» в формуле $\mathfrak{A}_1$ (также для формулы $\mathfrak{B}_1$).

20) $\Gamma a_w V^y$ — группа несовместимых признаков, свойственная данному объекту.

21) $\Gamma a_w [b_1 V^y, \ldots]$ — группа несовместимых признаков, свойственных одним и тем же частям данного объекта.

22) $\lambda^x V^y$ — дифференциация данного объекта.

23) $\lambda a_i V$ — усложнение признака данного объекта, свойственного ему как целому (дальше словом «признак» будет обозначаться такой признак.)

24) λV — усложнение объекта данного типа, полностью или частично совпадающего с объектом того же типа, о котором говорится в другом суждении того же умозаключения.

25) $\lambda a_i V$ — усложнение признака объекта данного типа, удовлетворяющего условию, указанному в обозначении 24).

26) $\varphi a_i V^y$ — увеличение количества признаков данного объекта.

27) $\varphi a_i V$ — увеличение количества признаков объекта данного типа, удовлетворяющего условию, указанному в обозначении 25).

28) $\phi a_i V^y$ — увеличение разнообразия признаков данного объекта.

29) $\phi a_i V$ — увеличение разнообразия признаков объекта данного типа, удовлетворяющего условию, указанному в обозначении 27).

30) σV — упрощение объекта данного типа, удовлетворяющего условию, указанному в обозначении 29).

31) $\sigma a_i V$ — упрощение признака объекта данного типа, удовлетворяющего условию, указанному в обозначении 30).

32) $\varepsilon a_i V$ — уменьшение количества признаков объекта данного типа, удовлетворяющего условию, указанному в обозначении 31).

33) $\omega a_i V$ — уменьшение разнообразия признаков объекта данного типа, удовлетворяющего условию, указанному в обозначении 32).

34) η — направление изменений.

35) $[\rho_a^1, \ldots]$ — направления изменений данного типа.

36) $[b_1, \ldots]$ — разные элементарные части.

37) $(a^1 b_1 V^v)$ — несовместимые признаки, каждый из которых свойственен только одной из элементарных частей данного объекта.

38) $[\rho_a^1 b_1 V^v, \ldots]$ — разные направления изменений данного типа, принадлежащие данному объекту, разные из которых свойственны разным его частям $\{[S_a^1 b_1]$ — то же для $V\}$.

39) SV — развитие объекта данного типа.

40) $s_x SV$ — стадия развития объекта данного типа.

41) $\Sigma s_x SV$ — ряд последовательных стадий развития объекта данного типа.

42) $\Gamma \Sigma s_x SV$ — группа рядов последовательных стадий развития объекта данного типа.

43) A — все живые системы в целом.

44) A_x^y — данная живая система.

45) fA_x^y — функции данной живой системы.

46) A_x — живая система, полностью или частично совпадающая с живой системой, о которой говорится в суждении того же умозаключения.

47) fA_x — функции живой системы, удовлетворяющей условию, указанному в обозначении 45).

48) SA — развитие всех живых систем.

49) $s_x SA$ — стадия развития всех живых систем.

50) $\Sigma s_x SA$ — ряд последовательных стадий развития всех живых систем.

51) $\Gamma \Sigma s_x SA$ — группа рядов последовательных стадий развития всех живых систем.

52) $\Gamma \rho_x$ — группа типов изменений функций.

53) $\Gamma \rho_y$ — группа типов изменений структуры.

54) $\Gamma \rho_{y_x}$ — типы изменений структуры, проявляющиеся в ее усложнении.

55) $\Gamma \rho_{y_y}$ — типы изменений структуры, проявляющиеся в ее упрощении.

56) $\Gamma\rho$ — группа типов изменений органов.

57) $[\rho_x^1 b_1 A_x^y, \ldots]$ — типы изменений функций, разные из которых свойственны разным частям данной живой системы (в других случаях символ «....» также обозначает незавершенность перечисления разных объектов одного и того же типа).

Отметим следующие возможности подстановки одних символов на место других.

1) На место любого символа, обозначающего логико-предметную формулу, не содержащего в себе ни одного из символов «$\forall$», «$\exists$», «α», «$\neg$», «$\&$», «$\vee$», «$\not\models$», «$\supset$», «:», «с», «V», «V^y», «V_x», «a», «a_x», «a_y», «a_i», «a_w», «lim», «$=$», «∞», «{», «}», «(», «)», «[», «]», «|», «Σ», «Γ», «b_1», «a^1», «λ^x», «λ», «φ», «ψ», «σ», «ε», «ω», «ρ_a^1», «, ...» можно подставлять любую формулу, обозначающую данное суждение.

2) На место символа «V» можно подставлять символы «A», «A_x», «A_x^y».

3) На место символа «V_x» можно подставлять символ «A_x^y».

4) На место символа «V^y» можно подставлять символ «A_x^y».

5) На место символа «λ» можно подставлять символ «ΓS_{y_x}».

6) На место символа «σ» можно подставлять символ «$\Gamma\rho_{y_y}$».

7) На место символа «a_i» можно подставлять символы «f», «$\Gamma\rho_x$», «$\Gamma\rho_y$» и «$\Gamma\rho$».

8) На место символа «a_x» можно подставлять символы «$\Gamma\rho_{y_x}$» и «$\Gamma\rho_x$».

9) На место символа «a_y» можно подставлять символы «$\Gamma\rho_{y_y}$» и «$\Gamma\rho_y$».

10) На место символа «a» можно подставлять символ «$\Gamma\rho_y$» (в случае, когда символ «a_x» заменен символом «$\Gamma\rho_{y_x}$», а символ «a_y» — символом «$\Gamma\rho_{y_y}$») и символ «$\Gamma\rho$» (в случае, когда символ «a_x» заменен символом «$\Gamma\rho_x$», а символ «a_y» — символом «$\Gamma\rho_y$»).

11) На место символа «a_w» можно подставлять символ «ρ_x».

12) На место символа «a^1» можно подставлять символ «$\rho^1{}_x$».

13) На место символа «ρ_a^1» можно подставлять символ «ρ_x^1».

14) На место символа «η» можно подставлять символ «$\Gamma\rho_x$».

Любая формула, не начинающаяся символами «$\forall\alpha$», «$\exists\alpha$» или «$\neg$» и обозначающая элементарное высказывание или высказывание, являющееся конъюнкцией, дизъюнкцией, разделительной дизъюнкцией или импликацией высказываний, будет заключаться между символом «(«и символом»)». Правила умозаключений и умозаключения будут обозначаться в виде рядов формул, в каждом из которых посылки умозаключений и логические формулы, в которые они подставляются, находятся над чертой, а их заключения и логические формулы, в которые подставляются последние, — под чертой. Кроме того, отметим, что во всех таких формулах каждый предшествующий символ, за исключением специально оговариваемых случаев, обозначает объект, непосредственно свойственный объекту, обозначаемому символом, находящимся в ней непосредственно после первого.

Пользуясь введенными символами и исходя из высказанных здесь замечаний, аксиомы теории типов изменений живых систем можно сформулировать следующим образом.

$$[1]\ \forall\alpha\,((\alpha : s_x S A) \supset \exists\,\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho_x A^y_x)).$$

$$[2]\ \forall\alpha\ \neg\,(\alpha c\Gamma\rho_x\,[b_1 V^y, \ldots]).$$

$$[3]\ \forall\alpha\,(\exists\,\alpha(\alpha c\lambda^x f A^y_x) \supset \exists\,\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho_{y_x} A^y_x)).$$

$$[4]\ \forall\alpha\,(\exists\,\alpha\,(\alpha c\sigma f A_x) \supset \exists\,\alpha(\alpha c\Gamma\rho_{y_y} A_x)).$$

Пользуясь теми же символами и исходя из тех же замечаний о формулах и их рядах, доказательство положений I—VIII можно изложить следующим образом.

I. Выведение положения I

Умозаключения	Правила умозаключений
(1)	(I)
$\dfrac{\forall\alpha((\alpha : s_x S A) \supset \exists\alpha\ (\alpha c\Gamma\rho_x A^y_x))}{\forall\alpha\,((\alpha : s_x S A) \supset \exists\alpha\,((\alpha c\Gamma\rho_x [b_1 A^y_x, \ldots]) \not\equiv (\alpha c\,[\rho^1_x b_1 A^y_x, \ldots])))}$	$\dfrac{\forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c\Gamma a_w V^y))}{\forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,((\alpha c\Gamma a_w [b_1 V^y, \ldots]) \not\equiv (\alpha c\,[a^1 b_1 V^y, \ldots])))}$

(2)

$$\begin{array}{c}\forall\alpha\,((\alpha : s_x S A) \supset \exists\alpha\,((\alpha c \Gamma \rho_x\ [b_1 A^y_x,\ \ldots]) \not\equiv (\alpha c\ [\rho^1_x b_1 A^y_x,\ \ldots]))) \\ \forall\alpha\,\neg\,(\alpha c \Gamma \rho_x\ [b_1 V^y,\ \ldots]) \\ \hline \forall\alpha\,((\alpha : s_x S A) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\,[\rho^1_x b_1 A^y_x,\ \ldots]))\end{array}$$

(II)

$$\begin{array}{c}\forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\mathfrak{B} \not\equiv \mathfrak{C})) \\ \forall\alpha\,\neg\,\mathfrak{B} \\ \hline \forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\mathfrak{C})\end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{c}\forall\alpha\,((\alpha : s_x S A) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\ [\rho^1_x b_1 A^y_x,\ \ldots])) \\ \hline \forall\alpha\,((\alpha : s_x S A) \supset \exists\alpha\,(\alpha c \lambda^x / A^y_x))\end{array}$$

(III)

$$\begin{array}{c}\forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c\ [\rho^1_a b_1 V^y,\ \ldots])) \\ \hline \forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c \lambda^x a_i V^y))\end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{c}\forall\alpha\,((\alpha : s_x S A) \supset \exists\alpha\,(\alpha c \lambda^x / A^y_x)) \\ \forall\alpha\,(\exists\alpha\,(\alpha c \lambda^x / A^y_x) \supset \exists\alpha\,(\alpha c \Gamma \rho y_x A^y_x)) \\ \hline \forall\alpha\,((\alpha : s_x S A) \supset \exists\alpha(\alpha c \Gamma \rho_{y_x} A^y_x))\end{array}$$

(IV)

$$\begin{array}{c}\forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \\ \forall\alpha\,(\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \\ \hline \forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C})\end{array}$$

(5)

$$\begin{array}{c}\forall\alpha\,((\alpha :\ s_x S A) \supset \exists\alpha\,(\alpha c \Gamma \rho_{y_x} A^y_x)) \\ \forall\alpha\,((\alpha : s_x S A) \supset \exists\alpha\,(\alpha c \Gamma \rho_x A^y_x)) \\ \hline \forall\alpha((\alpha : \Sigma s_x S A) \supset \exists\alpha((\alpha c \lambda\,\Gamma \rho_x A^y_x)\ \& \\ \&\ (\alpha c \varphi \Gamma \rho_x A^y_x)\ \&\ (\alpha c \phi \Gamma \rho_x A^y_x)))\end{array}$$

(V)

$$\begin{array}{c}\forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c \lambda V^y)) \\ \forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c a_i V^y)) \\ \hline \forall\alpha(\{|:\dot{\Sigma}\mathfrak{A}\} \supset \exists\alpha((\alpha c \lambda a_i V^y)\ \& \\ \&\ (\alpha c \varphi a_i V^y)\ \&\ (\alpha c \phi a_i V^y)))\end{array}$$

II. Выведение положения II

Умозаключения	Правила умозаключений

(6)

$$\begin{array}{c}\forall\alpha\,((\alpha : s_x S A) \supset \exists\alpha\,(\alpha c[\rho^1_x b_1 A^y_x,\ \ldots])) \\ \hline \forall\alpha\,((\alpha : s_x S A) \supset \exists\alpha\,(\alpha c \sigma / A_x))\end{array}$$

(VI)

$$\begin{array}{c}\forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c\ [\rho^1_a b_1 V,\ \ldots])) \\ \hline \forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c \sigma a_i V))\end{array}$$

(7)

$$\begin{array}{c}\forall\alpha\,((\alpha : s_x S A) \supset \exists\alpha\,(\alpha c \sigma / A_x)) \\ \forall\alpha(\exists\alpha(\alpha c \sigma / A_x) \supset \exists\alpha\,(\alpha c \Gamma \rho_{y_y} A_x)) \\ \hline \forall\alpha\,((\alpha : s_x S A) \supset \exists\alpha\,(\alpha c \Gamma \rho_{y_y} A_x))\end{array}$$

(IV)

$$\begin{array}{c}\forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \\ \forall\alpha\,(\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \\ \hline \forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C})\end{array}$$

(8) (VII)

$$\frac{\begin{array}{c}\forall\alpha\,((\alpha : s_xSA) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho_{y_y}A_x)) \\ \forall\alpha\,((\alpha : s_xSA) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho_x A_x^y))\end{array}}{\begin{array}{c}\forall\alpha((\alpha : \Sigma s_xSA) \supset \exists\alpha((\alpha c\sigma\,\Gamma\rho_x A_x)\,\&\\ \&(\alpha c\varepsilon\Gamma\rho_x A_x)\,\&\,(\alpha c\omega\Gamma\rho_x A_x)))\end{array}} \qquad \frac{\begin{array}{c}\forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c\sigma V)) \\ \forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c a_i V))\end{array}}{\begin{array}{c}\forall\alpha\,(\{|:\dot{\Sigma}\mathfrak{A}\} \supset \exists\alpha\,((\alpha c\sigma a_i V)\,\&\\ \&\,(\alpha c\varepsilon a_i V)\,\&\,(\alpha c\omega a_i V)))\end{array}}$$

III. Выведение положения III

Умозаключения | Правила умозаключений

(9) (VIII)

$$\frac{\begin{array}{c}\forall\alpha\,((\alpha : s_xSA) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho_{y_x}A_x^y)) \\ \forall\alpha\,((\alpha : s_xSA) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho_{y_y}A_x))\end{array}}{\forall\alpha\,((\alpha : s_xSA) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho_y A_x))} \qquad \frac{\begin{array}{c}\forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c a_x V)) \\ \forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c a_y V))\end{array}}{\forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c a V))}$$

(10) (IX)

$$\frac{\begin{array}{c}\forall\alpha\,((\alpha : s_xSA) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho_{y_x}A_x^y)) \\ \forall\alpha\,((\alpha : s_xSA) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho_y A_x)\end{array}}{\begin{array}{c}\forall\alpha((\alpha : \Sigma s_xSA) \supset \exists\alpha((\alpha c\lambda\Gamma\rho_y A_x)\,\&\\ \&\,(\alpha c\varphi\Gamma\rho_y A_x)\,\&\,(\alpha c\phi\Gamma\rho_y A_x)))\end{array}} \qquad \frac{\begin{array}{c}\forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c\lambda V)) \\ \forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c a_i V))\end{array}}{\begin{array}{c}\forall\alpha\,(\{|:\dot{\Sigma}\mathfrak{A}\} \supset \exists\alpha\,((\alpha c\lambda a_i V)\,\&\\ \&\,(\alpha c\varphi a_i V)\,\&\,(\alpha c\phi a_i V)))\end{array}}$$

IV. Выведение положения IV

Умозаключение | Правило умозаключения

(11) (VII)

$$\frac{\begin{array}{c}\forall\alpha\,((\alpha : s_xSA) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho_{y_y}A_x)) \\ \forall\alpha\,((\alpha : s_xSA) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho_y A_x))\end{array}}{\begin{array}{c}\forall\alpha((\alpha : \Sigma s_xSA) \supset \exists\alpha((\alpha c\sigma\Gamma\rho_y A_x)\,\&\\ \&\,(\alpha c\varepsilon\Gamma\rho_y A_x)\,\&\,(\alpha c\omega\Gamma\rho_y A_x)))\end{array}} \qquad \frac{\begin{array}{c}\forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c\sigma V)) \\ \forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c a_i V))\end{array}}{\begin{array}{c}\forall\alpha\,(\{|:\dot{\Sigma}\mathfrak{A}\} \supset \exists\alpha((\alpha c\sigma a_i V)\,\&\\ \&\,(\alpha c\varepsilon a_i V)\,\&\,(\alpha c\omega a_i V)))\end{array}}$$

V. Выведение положения V

Умозаключения | Правила умозаключений

(12) (VIII)

$$\forall\alpha\,((\alpha : s_xSA) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho_x A_x^y)) \qquad \forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c a_x V))$$

$$\begin{array}{c} \forall\alpha\,((\alpha : s_xSA) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho_y A_x)) \\ \hline \forall\alpha\,((\alpha : s_xSA) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho A_x)) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha ca_yV)) \\ \hline \forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha caV)) \end{array}$$

(13) (IX)

$$\begin{array}{c} \forall\alpha\,((\alpha : s_xSA) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho_{y_x} A_x^y)) \\ \forall\alpha\,((\alpha : s_xSA) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho A_x)) \\ \hline \forall\alpha((\alpha : \Sigma s_xSA) \supset \exists\alpha((\alpha c\lambda\Gamma\rho A_x)\ \& \\ \&\ (\alpha c\varphi\Gamma\rho A_x)\ \&\ (\alpha c\psi\Gamma\rho A_x))) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c\lambda V)) \\ \forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha ca_iV)) \\ \hline \forall\alpha\,(\{| : \dot{\Sigma}\mathfrak{A}\} \supset \exists\alpha\,((\alpha c\lambda a_iV)\ \& \\ \&\ (\alpha c\varphi a_iV)\ \&\ (\alpha c\psi a_iV))) \end{array}$$

VI. Выведение положения VI

Умозаключение — Правило умозаключения

(14) (VII)

$$\begin{array}{c} \forall\alpha\,((\alpha : s_xSA) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho_{y_y} A_x)) \\ \forall\alpha\,((\alpha : s_xSA) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho A_x)) \\ \hline \forall\alpha((\alpha : \Sigma s_xSA) \supset \exists\alpha((\alpha c\sigma\Gamma\rho A_x)\ \& \\ \&\ (\alpha c\varepsilon\Gamma\rho A_x)\ \&\ (\alpha c\omega\Gamma\rho A_x))) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha c\sigma V)) \\ \forall\alpha\,(\mathfrak{A} \supset \exists\alpha\,(\alpha ca_iV)) \\ \hline \forall\alpha\,(\{| : \dot{\Sigma}\mathfrak{A}\} \supset \exists\alpha\,((\alpha c\sigma a_iV)\ \& \\ \&\ (\alpha c\varepsilon a_iV)\ \&\ (\alpha c\omega a_iV))) \end{array}$$

VII. Выведение положения VII

Умозаключения — Правила умозаключений

(15) (X)

$$\begin{array}{c} \forall\alpha\,((\alpha : s_xSA) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\Gamma\rho_x A_x^y)) \\ \hline \exists\alpha\,((\alpha : \Sigma s_xSA) \supset (\lim\alpha = \infty)) \\ \forall\alpha\,((\alpha : SA) \supset \exists\alpha\,(\lim\alpha = \infty)) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \forall\alpha\,((\alpha : s_xSV) \supset \exists\alpha\,(\alpha c\eta V_x)) \\ \hline \exists\alpha\,((\alpha : \Sigma s_xSV) \supset (\lim\alpha = \infty)) \\ \forall\alpha\,((\alpha : SV) \supset \exists\alpha\,(\lim\alpha = \infty)) \end{array}$$

(16) (XI)

$$\begin{array}{c} \exists\alpha\,((\alpha : \Sigma s_xSA) \supset (\lim\alpha = \infty)) \\ \forall\alpha\,((\alpha : \Sigma s_xSA) \supset \\ \supset \exists\alpha\,((\alpha c\lambda\Gamma\rho_x A_x^y)\ \&\ (\alpha c\varphi\Gamma\rho_x A_x^y)\ \& \\ \&\ (\alpha c\psi\Gamma\rho_x A_x^y))) \\ \hline \forall\alpha((\alpha : \Sigma s_xSA) \supset \exists\alpha((\alpha c\sigma\Gamma\rho_x A_y)\ \& \\ \&\ (\alpha c\varepsilon\Gamma\rho_x A_x)\ \&\ (\alpha c\omega\Gamma\rho_x A_x))) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \exists\alpha\,(\mathfrak{M} \supset \lim\alpha = \infty) \\ \forall\alpha\,(\mathfrak{M} \supset \exists\alpha\,(\mathfrak{A}_1 \& \ldots)) \\ \forall\alpha\,(\mathfrak{M} \supset \exists\alpha\,(\mathfrak{B} \& \ldots)) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \hline \exists\alpha((\{|^c : \mathfrak{A}_1\} \vee \ldots \\ \ldots \vee \{|^c : \mathfrak{L}_1\} \vee \ldots) \supset (\lim\alpha = \infty)) \end{array}$$

$$\forall\alpha((\alpha : \Sigma s_x SA)\supset\exists\alpha((\alpha c\lambda\Gamma\rho_y A\ )\ \&$$
$$\&\ (\alpha c\varphi\Gamma\rho_y A_x)\ \&\ (\alpha c\psi\Gamma\rho_y A_x)))$$
$$\forall\alpha((\alpha : \Sigma s_x SA)\supset\exists\alpha((\alpha c\sigma\Gamma\rho_y A_x)\ \&$$
$$\&\ (\alpha c\varepsilon\Gamma\rho_y A_x)\ \&\ (\alpha c\omega\Gamma\rho_y A_x)))$$
$$\forall\alpha((\alpha : \Sigma s_x SA)\supset\exists\alpha((\alpha c\lambda\Gamma\rho A_x)\ \&$$
$$\&\ (\alpha c\varphi\Gamma\rho A_x)\ \&\ (\alpha c\psi\Gamma\rho A_x)))$$
$$\forall\alpha((\alpha : \Sigma s_x SA)\supset\exists\alpha((\alpha c\sigma\Gamma\rho A_x)\ \&$$
$$\&\ (\alpha c\varepsilon\Gamma\rho A_x)\ \&\ (\alpha c\omega\Gamma\rho A_x)))\ .$$

$$\exists\alpha(((\alpha : \lambda\Gamma\rho_x A_x^y)\vee(\alpha : \varphi\Gamma\rho_x A_x^y)\vee$$
$$\vee\ (\alpha : \psi\Gamma\rho_x A_x^y)\vee(\alpha : \sigma\Gamma\rho_x A_x)\vee$$
$$\vee\ (\alpha : \varepsilon\Gamma\rho_x A_x)\vee(\alpha : \omega\Gamma\rho_x A_x)\vee$$
$$\vee\ (\alpha : \lambda\Gamma\rho_y A_x)\vee(\alpha : \varphi\Gamma\rho_y A_x)\vee$$
$$\vee\ (\alpha : \psi\Gamma\rho_y A_x)\vee(\alpha : \sigma\Gamma\rho_y A_x)\vee$$
$$\vee\ (\alpha : \varepsilon\Gamma\rho_y A_x)\vee(\alpha : \omega\Gamma\rho_y A_x)\vee$$
$$\vee\ (\alpha : \lambda\Gamma\rho A_x)\vee(\alpha : \varphi\Gamma\rho A_x)\vee$$
$$\vee\ (\alpha : \psi\Gamma\rho A_x)\vee(\alpha : \sigma\Gamma\rho A_x)\vee$$
$$\vee\ (\alpha : \varepsilon\Gamma\rho A_x)\vee(\alpha : \omega\Gamma\rho A_x))\supset$$
$$\supset(\lim\alpha=\infty))$$

VIII. Выведение положения VIII

Умозаключения	Правила умозаключений
(17)	(XII)
$\forall\alpha((\alpha : SA)\supset\exists\alpha(\lim\alpha=\infty))$	$\forall\alpha((\alpha : SV)\supset\exists\alpha(\lim\alpha=\infty))$
———	———
$\forall\alpha((\alpha : SA)\supset\exists\alpha((\alpha : \Sigma s_x SA)\vee$ $\vee(\alpha : \Gamma\Sigma s_x SA)))$	$\forall\alpha((\alpha : SV)\supset$ $\supset\exists\alpha((\alpha:\Sigma s_x SV)\vee(\alpha:\Gamma\Sigma s_x SV)))$
(18)	(XIII)
$\forall\alpha((\alpha : SA)\supset\exists\alpha((\alpha : \Sigma s_x SA)\vee$ $\vee(\alpha : \Gamma\Sigma s_x SA)))$	$\forall\alpha(\mathfrak{A}\supset\exists\alpha(\mathfrak{M}\vee\mathfrak{N}))$
$\forall\alpha(\alpha : \Sigma s_x SA)\supset\exists\alpha((\alpha c\lambda\Gamma\rho_x A_x^y)\ \&$ $\&\ (\alpha c\varphi\Gamma\rho_x A_x^y)\ \&\ (\alpha c\psi\Gamma\rho_x A_x^y)))$	$\forall\alpha(\mathfrak{M}\supset\exists\alpha(\mathfrak{B}_1\&\ldots))$ $\forall\alpha(\mathfrak{M}\supset\exists\alpha(\mathfrak{C}_1\&\ldots))$ . . . .
$\forall\alpha((\alpha : \Sigma s_x SA)\supset\exists\alpha((\alpha c\sigma\Gamma\rho_x A_x)\ \&$ $\&\ (\alpha c\varepsilon\Gamma\rho_x A_x)\ \&\ (\alpha c\omega\Gamma\rho_x A_x)))$	——— $\exists\alpha((\mathfrak{B}_1\vee\ldots\vee\mathfrak{C}_1\vee\ldots)\supset\mathfrak{A})$
$\forall\alpha((\alpha : \Sigma s_x SA)\supset\exists\alpha((\alpha c\lambda\Gamma\rho_y A_x)\ \&$	

$$
\begin{aligned}
&\quad \& (\alpha c\varphi\Gamma\rho_y A_x) \& (\alpha c\phi\Gamma\rho_y A_x)))\\
&\forall\alpha((\alpha : \Sigma s_x SA) \supset \exists\alpha((\alpha c\sigma\Gamma\rho_y A_x) \&\\
&\quad \& (\alpha c\varepsilon\Gamma\rho_y A_x) \& (\alpha c\omega\Gamma\rho_y A_x)))\\
&\forall\alpha((\alpha : \Sigma s_x SA) \supset \exists\alpha((\alpha c\lambda\Gamma\rho A_x) \&\\
&\quad \& (\alpha c\varphi\Gamma\rho A_x) \& (\alpha c\phi\Gamma\rho A_x)))\\
&\forall\alpha((\alpha : \Sigma s_x SA) \supset \exists\alpha((\alpha c\sigma\Gamma\rho A_x) \&\\
&\quad \& (\alpha c\varepsilon\Gamma\rho A_x) \& (\alpha c\omega\Gamma\rho A_x)))\\
\hline
&\exists\alpha (((\alpha c\lambda\, \Gamma\rho_x A_x^y) \vee (\alpha c\varphi\Gamma\rho_x A_x^y) \vee\\
&\vee (\alpha c\phi\Gamma\rho_x A_x^y) \vee (\alpha c\sigma\Gamma\rho_x A_x) \vee\\
&\vee (\alpha c\varepsilon\Gamma\rho_x A_x) \vee (\alpha c\omega\Gamma\rho_x A_x) \vee\\
&\vee (\alpha c\lambda\Gamma\rho_y A_x) \vee (\alpha c\varphi\Gamma\rho_y A_x) \vee\\
&\vee (\alpha c\phi\Gamma\rho_y A_x) \vee (\alpha c\sigma\Gamma\rho_y A_x) \vee\\
&\vee (\alpha c\varepsilon\Gamma\rho_y A_x) \vee (\alpha c\omega\Gamma\rho_y A_x) \vee\\
&\vee (\alpha c\lambda\Gamma\rho A_x) \vee (\alpha c\varphi\Gamma\rho A_x) \vee\\
&\vee (\alpha c\phi\Gamma\rho A_x) \vee (\alpha c\sigma\Gamma\rho A_x) \vee\\
&\vee (\alpha c\varepsilon\Gamma\rho A_x) \vee (\alpha c\omega\Gamma\rho A_x)) \supset\\
&\qquad \supset (\alpha : SA))
\end{aligned}
$$

Литература

1. J. H. Woodger. The axiomatic method in Biology. London, 1937; From biology to mathematics.«The British journal of Science», 1952, № 9
2. Ю. В. Петров. Взаимоотношение и единство филэмбриогенезов. «Зоологический журнал», 1956, т. XXXV, вып. 11. (Та же работа на немецком языке опубликована в журнале «Sowjetwissenschaft. Naturwissenschaftliche Beiträge», 1957, № 7). Аксиоматический метод в некоторых теориях эволюционной морфологии. «Вопросы философии», № 7, 1959.
3. A. Dohrn. Der Ursprung der Wirbeltiere und Princip des Funktionswechsels. Leipzig, 1875.
4. N. Kleinenberg. Die Entstehung der Annelids aus der Larve von Lopadorhynchus. «Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie», 1886, B. XXIV.
5. L. Plate. Deszendenztheorie. Handwörterbuch der Naturwissenschaft. B. II, Jena, 1912; Allgemeine Zoologie und Abstammungslehre, Bd. 2, 1924, S. 163.
6. А. Н. Северцов. О принципах филогенеза (предварительное сообщение). «Русский зоологический журнал». М., 1928, т. VIII, вып. 3; Эволюция брюшных плавников рыб и принцип выпадения промежуточных функций. «Природа», 1933, № 7; Morphologische Gesetzmässigkeiten der Evolution, Jena, 1931; Морфологические закономерности эволюции. Изд-во АН СССР, 1939.

7. Д. М. Федотов. О некоторых случаях морфологической и физиологической субституции. «Труды второго съезда зоологов, анатомов и гистологов». М., 1928.
8. А. Г. Рындзюнский. Типы связей между преобразованиями органов в филогенезе животных. Сб. памяти А. Н. Северцова, т. I, 1939.
9. А. А. Махотин. О взаимоотношениях типов филогенетических изменений органов. Сб. памяти А. Н. Северцова, т. II, часть 1, 1940.
10. Б. С. Матвеев. Закономерности эволюционной морфологии и дарвинизм. «Зоологический журнал», 1939, т. XVIII, вып. 4; О системе соотносительных изменений формы, функции и среды в эволюции животных. «Зоологический журнал», 1945, т. XXIV, вып. 2.
11. А. Н. Дружинин. К вопросу о систематизации принципов филогенетических изменений органов. «Изв. АН СССР», сер. биол., 1948, № 3.
12. A. Remane. Grundlagen des Natürlichen Systems, der vergleichenden Anatomie und der Phylogenetik. Leipzig, 1952.
13. V. A. Dogiel. Polymerisation als ein Prinzip der progressiven Entwicklung bei Protozoen. «Biologisches Centralblatt», 1929, Bd. 49; Олигомеризация гомологических органов как один из процессов эволюции животных организмов. «Архив анатомии, гистологии и эмбриологии», 1936, т. 15, № 3. Явления полимеризации и олигомеризации гомологических органов в животном царстве и их эволюционное значение. «Изв. АН СССР», сер. биол., 1947, № 4; Олигомеризация гомологических органов как один из главных путей эволюции животных. Изд. ЛГУ, 1954.

А. А. Зиновьев

ДЕДУКТИВНЫЙ МЕТОД В ИССЛЕДОВАНИИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ О СВЯЗЯХ

§ 1. Высказывания о связях [1] составляют значительную часть высказываний наук. Уже по одной этой причине систематическое исследование их является вполне оправданным.

Но всякое систематическое исследование предполагает в качестве предварительного или сопутствующего условия обсуждение самих методов этого исследования. Последние можно разбить на две группы, характеризующиеся, соответственно, эмпирическим и дедуктивным подходом к решению задачи исследования высказываний о связях. Эмпирический подход заключается в анализе тех конкретных средств, какие выработаны в языках наук для фиксирования связей. Дедуктивный же подход заключается в построении некоторой формальной системы, определенная интерпретация которой может дать описание путей построения высказываний о связях, описание их логических свойств и операций с ними.

Указанные подходы, конечно, взаимосвязаны. Достаточно сказать, что лишь эмпирический подход дает сам материал исследования, позволяет выяснить основные идейные установки его изучения, оправдывает само это изучение и определяет познавательную пригодность формальных построений или границы их приложений. Дедуктивный же подход является наиболее надежным средством систематического обзора эмпирических данных, коль скоро основные установки для него уже выработаны в результате некоторого знакомства с этими данными, и придает результатам исследования необходимую в науке доказательность. Так что здесь скорее нужно говорить о различных сторонах решения одной и той же задачи. Эти стороны, однако, до известной степени обособляются, и в интересах научной абстракции становится возможным обсуждать их самостоятельно.

В данной статье будет изложен один из возможных вариантов дедуктивного подхода к исследованию высказываний о связях. Поскольку цель статьи заключается не столько в построении теории, сколько в описании метода построения теории, она не может претендовать на исчерпывающее или даже достаточно полное решение проблемы. Что касается самого существа предлагаемого в статье метода, с самого начала надо иметь в виду следующее. Он дает лишь приближенное, упрощенное описание интересующей нас области. В частности, им будет охвачен лишь ограниченный круг высказываний, который не исчерпает круга высказываний, определяемого ходячим употреблением слова «связь», и, может быть, частично не совпадает с ним. Кроме того, языковые средства выражения этих высказываний (особые слова и конструкции предложений, таблицы, графики, схемы и т. п.) на этом пути не могут быть рассмотрены буквально в том виде, в каком они встречаются в обычных и научных языках.

Предлагаемое формальное построение должно быть осуществлено в два этапа. На первом этапе, который будет охарактеризован во втором параграфе, вводится система аксиом общелогического порядка: эта система аксиом и выводимые из нее положения сами по себе не дают еще возможности описать высказывания о связях в их специфике, какую бы интерпретацию ей не давали. Она может быть использована лишь для описания правил вывода, не зависящих от характера высказываний, участвующих в выводе. Введение этой системы аксиом можно рассматривать как элемент теории высказываний о связях лишь постольку, поскольку она конструируется применительно к особенностям стоящей задачи. Необходимость в первом этапе отпала бы, если бы имелось в наличии готовое формальное построение, на которое можно было бы просто сослаться. Но имеющиеся формальные системы, насколько нам известно, не приспособлены для решения поставленной здесь задачи или нуждаются в основательной перестройке. В частности, мы имеем в виду работы [2], наиболее близко соприкасающиеся с рассматриваемой здесь проблемой.

На втором этапе, который будет охарактеризован в третьем параграфе, вводится дополнительная система аксиом, определенная интерпретация которой (и выводимых из нее положений) даст описание специфических свойств высказываний о связях. В четвертом параграфе будут даны некоторые содержательные (в терминах обычной речи) пояснения употребляемых логических знаков и интерпретации, достаточные для уяснения пути такого рода описания. Следует сказать, что излагаемая в третьем параграфе аксиоматика отнюдь не исчерпывает всех возможностей теории высказываний о связях. Она характеризует лишь направление развития теории и вместе с тем составляет ее возможный фрагмент. Так что в принципе она может быть дополнена или изменена. Вопрос о том, как должна выглядеть система аксиом, которая позволила бы дать исчерпывающее описание высказываний о связях даже в рамках принятых определений, в статье вообще не обсуждается.

§ 2. Будем употреблять следующие логические знаки: $\cdot$, $:$, $\vdash$, $=$, $\urcorner$, $\rightarrow$. Примем следующее определение формулы:

1) x, y, z, u, v... и эти же знаки (буквы) с индексами суть формулы (причем каждый из знаков x, y, z,... обозначает любую формулу);

2) если x есть формула, то $\urcorner x$ есть формула;

3) если x и y суть формулы, то xRy есть формула (где R есть любой из логических знаков, указанных выше, кроме $\urcorner$);

4) никакие другие комбинации употребляемых знаков формулами не являются.

Легко показать, например, что комбинация знаков

$$x : y = x \cdot \urcorner y : \urcorner x \cdot y$$

есть формула по определению, так как

$$x,\ y,\ \urcorner x,\ \urcorner y,\ x : y,$$

$$x \cdot \urcorner y,\ \urcorner x \cdot y,\ x \cdot \urcorner y : \urcorner x \cdot y$$

суть формулы по определению, а комбинации

$$x:,\quad xy\vdash,\quad =x:$$

и т. п. формулами не являются.

Знак «·» будем обычно опускать, записывая соединяемые им формулы рядом, без интервала. С целью однозначности чтения формул будем употреблять скобки, расстановка которых дает некоторое правило записи и чтения формул. С целью сокращения числа скобок будем их опускать в ряде случаев, полагая, что они в таких случаях восстанавливаются по следующему правилу: группа формул, соединенных знаком «·», и только этим знаком, выделяется скобками; аналогично для знака «:»; первые выделяются прежде, чем вторые, если встречаются совместно. Например, в формуле

$$x:y=x\cdot\urcorner y:\urcorner x\cdot y$$

скобки будут расставлены так: первый шаг даст

$$x:y=(x\cdot\urcorner y):(\urcorner x\cdot y),$$

второй шаг даст

$$(x:y)=[(x\cdot\urcorner y):(\urcorner x\cdot y)].$$

Знак $\urcorner$ (отрицание) будет относиться только к одной ближайшей справа от него формуле, в том числе только к одной ближайшей справа от него формуле, заключенной в парные (однотипные и противоположно направленные) скобки. При этом он будет относиться к формуле в скобках, взятой как целое. Например, в формуле

$$\urcorner x(y:\urcorner z):\urcorner(y:v)u$$

первое отрицание относится только к x, второе — только к z, третье — только к $(y:v)$. Выражения типа

$$\urcorner\urcorner x,\quad \urcorner\urcorner\urcorner x$$

и т. д. всецело охватываются сказанным выше, так как

$$\urcorner x,\quad \urcorner\urcorner x$$

и т. д. по определению суть формулы. За счет такого употребления отрицания число скобок точно так же сокращается.

Будем называть формулу y вхождением в формулу x, если, и только если, x есть либо $\urcorner y$, либо zRy, либо yRz, либо $z : y : u$, либо zyu, либо y есть вхождение в z, а z есть вхождение в x. Например, вхождениями в формулу

$$(x : y)\, x \vdash \urcorner y$$

являются формулы

$$x,\ y,\ (x : y),\ (x : y)\, x,\ \urcorner y.$$

Одна и та же формула может входить в другую в нескольких местах. В приведенном примере каждая из x и y входит в данную формулу дважды. Будем считать, что независимо от того, сколько раз данная формула входит в другую, ее вхождение есть одно вхождение. В приведенном примере одно вхождение есть x, другое — y, третье — $\urcorner y$ и т. д. Комбинации такого рода, как

$$y)\, z,\ (x \urcorner y) : (\urcorner x,\ \urcorner y) : (\urcorner x,\ x) \vdash (y$$

и т. п. в число вхождений не включаются, так как слева и справа от R должны стоять взятые в скобки формулы в целом, если это действительно такие формулы, а не их графические части.

Примем систему аксиом A, определяющую свойства употребляемых логических знаков (за исключением $\rightarrow$, который определим ниже) и образованных при их помощи формул:

1. $\urcorner (x \urcorner x)$,
2. $[(x \vdash y) \urcorner y] \vdash \urcorner x$.
3. $x \vdash x$.
4. $(x = y) = (x \vdash y)(y \vdash x)(\urcorner x \vdash \urcorner y)(\urcorner y \vdash \urcorner x)$.
5. $(x \vdash y)(x \vdash z) = (x \vdash yz)$.
6. $(x \vdash y)(y \vdash z) \vdash (x \vdash z)$.
7. $\urcorner \urcorner x = x$.
8. $\urcorner x \vdash \urcorner (xx)$.
9. $xy = yx$, $x : y = y : x$, где xy и $x : y$ могут быть вхождениями в любые формулы.
10. $xyz = x(yz) = (xy)\, z$.
11. $xy \vdash x$, $xy \vdash y$.
12. $(x : y)z = xz : yz$, $(x : y : z)\, u = xu : yu : zu, \ldots, (x^1 : x^2 : \ldots$ $\ldots : x^n)\, y = x^1y : x^2y : \ldots : x^ny$.

13. $x:y = x\neg y:\neg xy,\quad x:y:z = x\neg y\neg z:\neg xy\neg z:\neg x\neg yz,\ldots$ $\ldots, x^1:x^2:\ldots:x^n = y^1:y^2:\ldots:y^n$, где $y^1 = x^1\neg x^2\ldots\neg x^n$ (все x^i, кроме x^1, имеют отрицания), $y^2 = \neg x^1x^2\ldots\neg x^n$ (все x^i, кроме x^2, имеют отрицания), $\ldots, y^n = \neg x^1\neg x^2\ldots x^n$ (все x^i, кроме x^n, имеют отрицания) и в каждую из y^i входят все формулы $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

14. $\neg(xy) = \neg xy:x\neg y:\neg x\neg y$

15. $\neg(x:y) = xy:\neg x\neg y,\quad \neg(x:y:z) = xyz:xy\neg z:x\neg yz:$ $:\neg xyz:\neg x\neg y\neg z,\ldots,\neg(x^1:x^2:\ldots:x^n) = z^1:z^2:\ldots:z^k$, где $z^1, z^2, \ldots, z^k$ суть формулы, в число которых включается формула $(x^1x^2\ldots x^n)$ и включаются все формулы, отличающиеся от нее наличием отрицания по крайней мере перед одной из x^i, за исключением формул $y^1, y^2, \ldots, y^n$, фигурирующих в $A13$.

16. $(x:y)\neg x \vdash y,\ (x:y:\ldots:z)\neg x \vdash (y:\ldots:z)$,

17. $(x=y)\vdash(u=v),\ (u=v)\vdash(x=y)$,

где u и v суть формулы, различающиеся тем и только тем, что одна из них имеет вхождение x, а другая — вхождение y (то есть одна из u и v образуется из другой путем замены одного из вхождений x и y на другое).

18. $x\vdash xy$, где y есть любая доказанная формула (определение дадим ниже).

Хотя в $A9$, $A13$, $A15$, $A17$ и $A18$ используются слова обычной речи, эти аксиомы суть формулы: слова обычной речи в них используются для определения фигурирующих в них формул. Следует сказать, что такого рода словесное дополнение требуется ко всем аксиомам, а именно: то, что каждый из знаков x, y, z,... по отдельности есть любая формула (разумеется, с учетом ограничений для $A13$, $A15$, $A17$ и $A18$). Например, если x и y фигурируют в одной формуле, то это означает: взята одна какая-то (любая, безразлично какая) формула и другая формула. В таком случае аксиомы $A1$ и $A2$, например, могут быть записаны так:

1. $\neg(\neg xx)$, где x есть любая формула.

2. $[(x\vdash y)\neg y]\vdash\neg x$, где x и y суть любые формулы. Это обстоятельство в другой форме выражает правило подстановки (сформулируем ниже).

На базе A выводится система новых формул. При этом мы сталкиваемся со следующей трудностью, усложняющей изложение: система аксиом A может быть использована для описания правил вывода (она, собственно говоря, для этого и вводится); в то же время требуется указать правила вывода, посредством которых из A выводятся новые формулы (в свою очередь, интерпретируемые как правила вывода). Поэтому нет ничего удивительного в том, что при формальном выражении вторых будет иметь место по крайней мере частичное совпадение с первыми. Опираясь на это, мы сформулируем определение доказанной формулы и правила подстановки, позволяющие использовать сами A для вывода новых формул.

Под доказанной формулой будем иметь в виду следующее:

1) аксиомы A суть доказанные формулы;

2) если x и $x \vdash y$ суть доказанные формулы, то y есть доказанная формула;

3) формула, принятая по соглашению за доказанную, есть доказанная формула.

На основе этого определения и аксиом 4 и 18 выводятся положения: если одна из x и y есть доказанная формула и $x = y$, то доказанной будет и другая; если x и y суть доказанные формулы, то xy есть доказанная формула.

Подстановка будет осуществляться по следующим правилам:

1) на место формул x, y, z,..., в $A1$ — $A12$, $A14$ и $A16$ могут быть подставлены любые формулы, а в $A13$, $A15$, $A17$ и $A18$ — любые формулы, удовлетворяющие указанным в них ограничениям; на место формул x, y, z,... в доказанных формулах вообще могут быть подставлены любые формулы;

2) подстановка может осуществляться неоднократно;

3) если формула x входит в доказанную формулу y в двух и более местах, то на каждом этапе допускается подстановка в разных местах вхождения x в y только одной и той же формулы u; если на различных этапах на место x подставляются разные формулы u и v, то должно быть $u = v$.

Общая схема доказательства такова. Подставляя какую-либо формулу на место x, y, z,..., в аксиомах (и вообще в доказанных формулах), мы практически принимаем за доказанную формулу типа

$$x = y,$$

где одна из x и y есть вхождение в аксиому (в доказанную формулу), а другая — любая подставляемая формула. Последняя может быть простой (какая-либо из букв x, y, z,...) или сложной (образованной из простых формул посредством логических знаков). Согласно $A17$ и определению будет доказанной формула

$$(x = y) \vdash (A = B),$$

где A — аксиома (вообще доказанная формула), а B — формула, образованная из нее путем замены x на y (или y на x в зависимости от того, какая из них есть вхождение в A). По определению и по условию

$$A = B$$

есть доказанная формула. Поскольку A есть доказанная формула, то по определению и B есть доказанная формула. Таким образом, всякая формула, образованная из A и из других доказанных формул в результате подстановки, есть доказанная формула. Это достигается за счет исходного соглашения.

Например, приняв за доказанные

$$x = y \text{ и } x = y : \urcorner y,$$

получим, соответственно,

$$(x = y) \vdash [\urcorner (x \urcorner x) = \urcorner (y \urcorner y)]$$

$$(x = y : \urcorner y) \vdash \{\urcorner (x \urcorner x) = \urcorner [(y : \urcorner y) \urcorner (y : \urcorner y)]\}.$$

По определению

$$\urcorner (y \urcorner y) \text{ и } \urcorner [(y : \urcorner y) \urcorner (y : \urcorner y)]$$

суть доказанные формулы. Другой пример. Возьмем

$$z \urcorner zu.$$

Примем, что

$$z \urcorner z = x \text{ и } u = y.$$

Согласно $A17$

$$(z \urcorner z = x) \vdash [(xy \vdash x) = (z \urcorner zy \vdash z \urcorner z)],$$

$$(u = y) \vdash [(z \urcorner zy \vdash z \urcorner z] = (z \urcorner zu \vdash z \urcorner z)].$$

По определению

$$z \urcorner zu \vdash z \urcorner z$$

есть доказанная формула. Доказанной будет и формула

$$(z \urcorner zu \vdash z \urcorner z) \urcorner (z \urcorner z)$$

(опять-таки посредством подстановки получим

$$\urcorner (x \urcorner x) = \urcorner (z \urcorner z)$$

и вывод о том, что $\urcorner (z \urcorner z)$ доказана). Осуществляя снова подстановку с целью придать формуле вид $A2$ и обратно с целью выразить результат в знаках z и u, получим, согласно $A2$,

$$(z \urcorner zu \vdash z \urcorner z) \urcorner (z \urcorner z) \vdash \urcorner (z \urcorner zu)$$

и вывод о том, что

$$\urcorner (z \urcorner zu)$$

доказана.

Из множества этапов такого рода, как в приведенной выше схеме, складывается процесс вывода. На каждом этапе главным является подбор доказанной формулы в качестве ближайшего основания вывода, операций над данной формулой. Поэтому если для краткости изложения отвлечься от подстановки и подведения под определение доказанной формулы, ход доказательства изобразится схемой

$$x \vdash y,$$

где x — данная формула, а y — результат применения к ней аксиом или выведенных из аксиом формул как правил преобразования. При этом y может быть как непосредственным следствием из x, так и опосредственным (согласно $A4$ и $A6$). Поскольку по определению доказанной формулы $A6$ и

$$(x \vdash y)(y \vdash z)$$

суть доказанные формулы, если доказаны

$$(x \vdash y) \text{ и } (y \vdash z),$$

то доказанной будет и

$$x \vdash z.$$

Так что ход доказательства можно еще более сократить, записывая его в форме

$$(x \vdash y \vdash \ldots \vdash z) \vdash (x \vdash z).$$

Аналогично для знака « = », определяемого в $A4$ через знак «$\vdash$».

Приведем несколько примеров формул, доказанных на основе A. Будем перед ними ставить знак «$\vdash$» для обозначения того, что они доказаны, и перед этим знаком будем перечислять номера формул, на основе которых они выведены. Итак, доказанными являются следующие формулы (назовем их формулами B):

1. $A4, 7, 9, 17 \vdash [(x = y) = (\urcorner x = \urcorner y)]$.
2. $A4, 7, 9, 13, 18 \vdash (x : y = \urcorner x : \urcorner y)$.
3. $A4, 9 \vdash [(x = y) = (y = x)]$.
4. $A4, 11 \vdash [(x = y)(y = z) \vdash (x = z)]$.
5. $A1, 2, 11, 18 \vdash \urcorner (x \urcorner xy)$.
6. $A3, 5, 6, 18 \vdash [(x \vdash y) \vdash (x \vdash xy)]$; $\vdash [(xy \vdash z) \vdash (xy \vdash xz)]$.
7. $A3, 4, 6, 8, 9, 11, 14, 16, 18, B6 \vdash (x = xx)$.
8. $A1, 6, 7, 14, 16, 17, 18 \vdash (\urcorner x : x)$.
9. $A1, 6, 7, 15, B7 \vdash \urcorner (x : x)$.
10. $A18, B8 \vdash [x \vdash x (y : \urcorner y)]$.
11. $A1, 6, 11, 12, 16 \vdash [(xy : z) \urcorner y \vdash z]$.
12. $A1, 6, 11, 12, 13, 16, 17 \vdash [(x : y)x \vdash \urcorner y]$; $\vdash [(x : y : z)x \vdash \urcorner y \urcorner z)]$.
13. $A1, 6, 11, 12 \vdash \{(xz : y) \vdash [xz : y (z : \urcorner z)]\}$.
14. $A1, 4, 6, 11, 12, 16, 17, 18, B7 \vdash [(xy : \urcorner x \urcorner y) x \vdash y]$;
$\vdash [(xy : \urcorner x \urcorner y) y \vdash x]$; $[(xy : \urcorner x \urcorner y) \urcorner x \vdash \urcorner y]$;
$\vdash [(xy : \urcorner x \urcorner y) \urcorner y \vdash \urcorner x]$.
15. $A1, 2, 11, 16, B6 \vdash \urcorner [(x : y) \urcorner x \urcorner y]$.
16. $A1, 2, 5, 6 \vdash [(x \vdash y)(x \vdash \urcorner y) \vdash \urcorner x]$.
17. $A12, 13, 15, B4 \vdash [(x : y) : z = x : (y : z)]$.
18. $A1, 11, 12, 13, 16, 18 \vdash [(x \vdash x : y) \vdash \urcorner y]$; $[(x \vdash x : y : z) \vdash \urcorner y \urcorner z]$;
$\vdash \{[x \vdash (x : y^1 : y^2 : \ldots : y^n)] \vdash (\urcorner y^1 \urcorner y^2 \ldots \urcorner y^n)\}$.

§ 3. Рассмотрим доказательство $B14$ подробнее, поскольку оно особенно важно для дальнейшего. Итак возьмем формулу

$$(xy : \urcorner x \urcorner y) x.$$

Согласно $A12$

$$(xy : \urcorner x \urcorner y) x = (xy) x : (\urcorner x \urcorner y) x.$$

Согласно $A9$, $A17$ и $A10$

$$(xy)\,x : (\neg x \neg y)\,x = xxy : \neg xx \neg y.$$

Согласно $B7$ и $A17$

$$xxy : \neg xx \neg y = xy : \neg xx \neg y.$$

Согласно $A18$ и $B5$

$$xy : \neg xx \neg y \vdash (xy : \neg xx \neg y) \neg (\neg xx \neg y).$$

Согласно $A16$

$$(xy : \neg xx \neg y) \neg (\neg xx \neg y) \vdash xy.$$

Согласно $A11$

$$xy \vdash y.$$

В целом, согласно $A4$ и $A6$ (записывая вывод в сокращенной форме), имеем

$$\{[(xy : \neg x \neg y)\,x] = [(xy)x : (\neg x \neg y)\,x] = (xxy : \neg xx \neg y) = \\ = (xy : \neg xx \neg y) \vdash [(xy : \neg xx \neg y) \neg (\neg xx \neg y)] \vdash (xy) \vdash y\} \vdash \\ \vdash [(xy : \neg x \neg y)\,x \vdash y].$$

Аналогично доказываются остальные три формулы $B14$.

Обратимся к формуле

$$xy : \neg x \neg y.$$

Она является отправным пунктом следующего шага, а именно: перехода к формулам связи, в основе которых лежит определенного рода упорядочивание формул, входящих в нее. Упорядочивать будем посредством индексор

$$1,\ 2,\ \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ 1\mathrm{I},\ 1\mathrm{II},\ 2\mathrm{I},\ 2\mathrm{II}.$$

При этом важным будет лишь распределение этих индексов, так что аксиома $A9$ сохраняет силу. Что касается аксиом A вообще, то они будут действовать в рамках ограничений, которые мы здесь и изложим.

Примем аксиому C1:

1 а) при упорядоченности

$$x1\mathrm{I}y2\mathrm{I} : \neg x1\mathrm{II} \neg y2\mathrm{II},$$

т. е. при таком распределении порядковых индексов между формулами и их отрицаниями, доказанной будет считаться только одна из формул, указанных в $B14$, а именно:

$$(x1\mathrm{I}y2\mathrm{I} : \neg x1\mathrm{II} \neg y2\mathrm{II})\,x \vdash y;$$

остальные формулы, т. е.

$$(x1\mathrm{I}y2\mathrm{I} : \neg x1\mathrm{II} \neg y2\mathrm{II})\, y \vdash x,$$
$$(x1\mathrm{I}y2\mathrm{I} : \neg x1\mathrm{II} \neg y2\mathrm{II}) \neg x \vdash \neg y$$
$$(x1\mathrm{I}y2\mathrm{I} : \neg x1\mathrm{II} \neg y2\mathrm{II}) \neg y \vdash \neg x,$$

доказанными считаться не будут;

1. в) формула

$$ux \vdash y,$$

где u отличается от

$$x1\mathrm{I}y2\mathrm{I} : \neg x1\mathrm{II} \neg y2\mathrm{II}$$

только иной расстановкой порядковых индексов, не является доказанной.

Например,

$$(x2\mathrm{I}y1\mathrm{I} : \neg x2\mathrm{II} \neg y1\mathrm{II})\, x \vdash y$$

есть недоказанная формула. Выбор одной из четырех формул в качестве доказанной формулы с логической точки произволен, так как любой из них можно дать одну и ту же интерпретацию.

Примем аксиому $C2$, определяющую знак «$\rightarrow$», и аксиому $C3$, упрощающую оперирование порядковыми индексами:

2. $(x \rightarrow y) = x1\mathrm{I}y2\mathrm{I} : \neg x1\mathrm{II} \neg y2\mathrm{II}$,

3. $(xy)k = xkyk, \qquad (x : y)\, k = xk : yk,$

где i есть любой из порядковых индексов.

Легко видеть, что

$$C2B14 \vdash [(x \rightarrow y)\, x \vdash y.$$

Формулы же

$$(x \rightarrow y)\, y \vdash x, \ (x \rightarrow y) \neg x \vdash \neg y, \ (x \rightarrow y) \neg y \vdash \neg x$$

доказанными (согласно $C1$ и $C2$) не являются.

Формулу

$$x \rightarrow y$$

будем называть элементарной формулой связи. Производные же формулы связи можно представить как результат соединения элементарных и их отрицаний знаками R, а также как результат подстановки на место формул в элементарных формулах связи различного рода сложных формул (формул с отрицаниями и со знаками R). Никаких других логических знаков в принципе не требуется. Если их и можно ввести для сокращения записи, определив посредством знаков R, то не представляет труда включить их в число R, не меняя существа принятых определений.

Приведем несколько примеров производных формул связи:

$$x \to \neg y,\ \neg x \to y,\ xy \to z,\ x : y \to z,$$
$$(x \to y)(y \to x),\ (x \to y)(\neg y \to \neg x).$$

Приведем также пример расстановки порядковых индексов при переходе от формулы со знаком «$\to$» к упорядоченному множеству формул и их отрицаний:

$$(x : y \to z) = [(x : y)\, 1 \mathrm{I} z 2 \mathrm{I} : \neg (x : y)\, 1\, \mathrm{II} \neg z 2 \mathrm{II}] =$$
$$= [(x1 \neg y1 z2)\, \mathrm{I} : (\neg x1 y1 z2)\, \mathrm{I}] : [(x1 y1 \neg z2)\, \mathrm{II} :$$
$$(\neg x1 \neg y1 \neg z2)\, \mathrm{II}].$$

Определение формулы связи зависит от цели, для которой вводится определение. Так, если ставится задача исследовать свойства любых формул, в которых фигурирует знак $\to$, то возможно такое определение:

1) если x и y суть формулы, то $x \to y$ есть формула связи;

2) если x есть формула связи, то $\neg x$ есть формула связи;

3) если x есть формула связи, и, вместе с тем, вхождение в формулу y, то y есть формула связи;

4) никаких других формул связи нет.

Но такое определение не обязательно, Можно, например, исключить из определения третий пункт или заменить его другим, например — таким: если x и y суть формулы связи, то xy и $x : y$ суть формулы связи. Этот произвол в определениях обусловлен тем, что интуитивное понимание связи имеется лишь для простейшего случая, указанного в первом пункте. Знак $\neg$ здесь фигурирует лишь потому, что его нельзя исключить из числа употребляемых. Он не соответствует интуитивному пониманию отрицания связи, которое означает запрещение делать вывод, указанный в В14 и С1. Этому запрещению более соответствует формула

$x \to y : \neg y$. Однако и она имеет ряд свойств, которые исключают возможность использования ее в качестве экспликации такого отрицания. В частности, если принять ее за отрицание $x \to y$, то правило двойного отрицания не будет выполняться.

Уже на базе системы аксиом A и $C1$ — $C3$ выясняется целый ряд свойств формул связи. Приведем несколько примеров. Возьмем

$$[(x : y) \to z]\, x.$$

Согласно $C2$ и $A18$

$$[(x : y) \to z]\, x = [(x : y)\, z : \neg (x : y) \neg z]\, x$$

(индексы опускаем, поскольку они не влияют на доказательство; они важны лишь для применения $C2$). Согласно $A13$ и $A15$

$$(x : y)\, z : \neg (x : y) \neg z]\, x = [(x \neg y : \neg xy)\, z : (xy : \neg x \neg y) \neg z]\, x.$$

Согласно $A12$

$$[(x \neg y : \neg xy)\, z : (xy : \neg x \neg y) \neg z]\, x = x \neg yzx : \neg xyzx : : xy \neg zx : \neg x \neg y \neg zx.$$

Согласно $B5$, $A16$, $B7$ и $A9$

$$x \neg yzx : \neg xyzx : xy \neg zx : \neg x \neg y \neg zx \vdash x \neg yz : xy \neg z.$$

Согласно $A12$

$$x \neg yz : xy \neg z = x(\neg yz : y \neg z).$$

Согласно $A11$

$$x(\neg yz : y \neg z) \vdash \neg yz : y \neg z.$$

Согласно $C2$ и $C3$ имеем

$$(\neg y1z2)\,\mathrm{I} : (y1 \neg z2)\,\mathrm{II} = (\neg y \to z).$$

Наконец, согласно $C2$, $A4$ и $A6$

$$(x : y \to z)\, x \vdash (\neg y \to z).$$

Аналогично выводятся формулы

$$C2,\ B6,\ B14 \vdash [(x \to y)(x \to z)\, x \vdash yz],$$
$$C2,\ A1,\ A6,\ A11,\ A12 \vdash \{[(x \to y) : (x \to z)]\, x \vdash (y : z)\},$$
$$C2,\ A11,\ A12,\ A16,\ B5,\ B9,\ B10 \vdash \{[(x \to z) : (y \to z)]\, x \vdash (z : \neg z)\},$$
$$C2,\ B6,\ B14 \vdash \{[x \to (x \to y)]\, x \vdash y\},$$
$$C2,\ A2,\ A12,\ A13,\ A15 \vdash \neg [(x \to y)(x : y)],$$

и т. д. Однако скоро мы убеждаемся, что аксиом $C1$ — $C3$ недостаточно для решения даже простых задач.

Возьмем, например,

$$\neg (x \to y).$$

Согласно $C2$ и $A15$

$$\neg (x \to y) = (x1y2)\,\mathrm{I}\,(\neg x1 \neg y2)\,\mathrm{II} : \neg (x1y2)\,\mathrm{I} \neg (\neg x1 \neg y2)\,\mathrm{II}.$$

Согласно $C3$, $A12$ и $A14$

$$(x1y2)\,\mathrm{I}\,(\neg x1 \neg y2)\,\mathrm{II} : \neg (x1y2)\,\mathrm{I} \neg (\neg x1 \neg y2)\,\mathrm{II} =$$
$$= x1\mathrm{I}y2\mathrm{I} \neg x1\mathrm{II} \neg y2\mathrm{II} : \neg x1\mathrm{I}y2\mathrm{I}x1\mathrm{II} \neg y2\mathrm{II} : \neg x1\mathrm{I}y2\mathrm{I} \neg x1\mathrm{II}y2\mathrm{II} :$$
$$: \neg x1\mathrm{I}y2\mathrm{I}x1\mathrm{II}y2\mathrm{II} : x1\mathrm{I} \neg y2\mathrm{I}x1\mathrm{II} \neg y2\mathrm{II} : x1\mathrm{I} \neg y2\mathrm{I} \neg x1\mathrm{II}y2\mathrm{II} :$$
$$: x1\mathrm{I} \neg y2\mathrm{I}x1\mathrm{II}y2\mathrm{II} : \neg x1\mathrm{I} \neg y2\mathrm{I}x1\mathrm{II} \neg y2\mathrm{II} : \neg x1\mathrm{I} \neg y2\mathrm{I} \neg x1\mathrm{II}y2\mathrm{II} :$$
$$: \neg x1\mathrm{I} \neg y2\mathrm{I}x1\mathrm{II}y2\mathrm{II}.$$

Согласно $B5$, $A4$, $A6$ и $A16$

$$\neg (x \to y) \vdash (\neg x1y2)\,\mathrm{I}\,(\neg x1y2)\,\mathrm{II} : (x1 \neg y2)\,\mathrm{I}\,(x1 \neg y2)\,\mathrm{II}.$$

Таким образом, встречаются ситуации типа

$$(\neg x1y2)\,\mathrm{I}\,(\neg x1y2)\,\mathrm{II}.$$

Могут встретиться также ситуации типа

$$(x1y2)\,\mathrm{I} : (x1 \neg y2)\,\mathrm{II},$$
$$(x1y2)\,\mathrm{I} : (\neg x1y2)\,\mathrm{II},$$
$$(x1y1z2)\,\mathrm{I} : (\neg x1 \neg y2 \neg z2)\,\mathrm{II},$$
$$(x1y2z2)\,\mathrm{I} : (\neg x1 \neg y2z2)\,\mathrm{II} : (\neg x1y2 \neg z2)\,\mathrm{II}$$

и т. д. Естественно, надо установить какие-то правила упорядочивания такого рода случаев посредством знака «$\to$», подобрать какие-то формулы со знаком «$\to$», соответствующие такого рода упорядоченным формулам.

Знаками

$$X, Y, Z, \ldots, X^1Y^1, \ldots$$

будем обозначать формулы, которые характеризуются следующими свойствами: 1) они образованы из формул x, y, z,... и их отрицаний посредством знака «·», и только этого знака; 2) не содержат вхождений типа $x \neg x$; 3) различаются только тем, что одна имеет в качестве вхождения по крайней мере одну формулу такую, что другая имеет в качестве вхождения отрицание этой формулы; в частности, расстановкой порядковых индексов 1 и 2 они не различаются, т. е. если некоторая формула x входит в формулу $X : Y$, то оба ее вхождения имеют одинаковый порядковый индекс 1 или 2. Например,

$$X = x1y1 \neg z1 \neg v2w2,$$
$$Y = \neg x1y1z1 \neg v2 \neg w2$$

и т. п. Очевидно, что формулы

$$\neg(XY),\ \neg(XZ),\ \neg(XYZ)$$

и т. д. являются доказанными.

Возможен следующий путь решения поставленной выше задачи: установить правила записи формул типа

$$X\mathrm{I} : Y\mathrm{II}$$

формулами со знаками «→» и правила комбинирования в такие пары вхождений X, Y, Z,... в формулы типа

$$X\mathrm{I} : Y\mathrm{I} : Z\mathrm{II},\ X\mathrm{I} : Y\mathrm{II} : Z\mathrm{II},\ X\mathrm{I} : \ldots : Y\mathrm{I} : Z\mathrm{II} : \ldots : U\mathrm{II},$$

чтобы последние точно так же записать формулами со знаками «→».

Проиллюстрируем этот путь. Примем следующие аксиомы D (они не являются единственно возможными):

1. $(x1y2)\,\mathrm{I} : (x1 \neg y2)\,\mathrm{II} \vdash (x \to y : \neg y)$,
$(x1y2z2)\,\mathrm{I} : (x1 \neg y2 \neg z2)\,\mathrm{II} \vdash (x \to yz : \neg y \neg z)$,
$(x1y2z2 \ldots u2)\,\mathrm{I} : (x1 \neg y2 \neg z2 \ldots \neg u2)\,\mathrm{II} \vdash (x \to yz \ldots u :$
$: \neg y \neg z \ldots \neg u)$.
2. $(x1y2)\,\mathrm{I} : (\neg x1y2)\,\mathrm{II} \vdash (x : \neg x \to y)$,
$(x1y1z2)\,\mathrm{I} : (\neg x1 \neg y1z2)\,\mathrm{II} \vdash (xy : \neg x \neg y \to z)$,
$(x1y1 \ldots z1u2)\,\mathrm{I} : (\neg x1 \neg y1 \ldots \neg z1u2)\,\mathrm{II} \vdash (xy \ldots z : \neg x \neg y \ldots$
$\ldots \neg z \to u)$.

Поскольку

$$x : \neg x = \neg x : x, \quad xy : \neg x \neg y = \neg x \neg y : xy$$

и т. д.,

$$(x : \neg x \to y) = (\neg x : x \to y), \ (x \to y : \neg y) = (x \to \neg y : y)$$

и т. д. Путем подстановки на место формул с индексом 1 в $D1$ и формул с индексом 2 в $D2$ формул типа xy, xyz и т. д. выводятся формулы для любого числа формул с этими индексами. Например,

$$(x1y1z2)\,\mathrm{I} : (x1y1 \neg z2)\,\mathrm{II} \vdash (xy \to z : \neg z).$$

3. $(x1y2z2)\,\mathrm{I} : (x1y2u2)\,\mathrm{II} \vdash [(x1z2)\,\mathrm{I} : (x1u2)\,\mathrm{II}]\,y$,

где z и u различаются тем, что одна есть формула типа x, xy, xyz и т. д., а другая — $\neg x$, $\neg x \neg y$, $\neg x \neg y \neg z$ и т. д.

4. $(x1y1z2)\,\mathrm{I} : (u1v1w2)\mathrm{II} \vdash [(x1z2)\mathrm{I} : (u1w2)\mathrm{II}][(y1z2)\mathrm{I} : (v1w2)\mathrm{II}]$, где $u1$ есть формула, либо отличающаяся от $x1$ лишь наличием отрицания (отрицаний), либо тождественная ей; аналогично отношение $v1$ и $y1$.

5. $(x1y2z2)\mathrm{I} : (u1v2w2)\,\mathrm{II} \vdash [(x1y2)\mathrm{I} : (u1v2)\mathrm{II}]\,[x1z2)\mathrm{I} : (u1w2)\mathrm{II}]$, где либо $x1 = u1$, либо различаются наличием отрицания (отрицаний) в одной из них; аналогично отношение $v2$ с $y2$ и $w2$ с $z2$; разбиение формул с индексом 2 на группы y и z (соответственно, v и w) осуществлено в соответствии с $D1$—$D3$ Приведем несколько примеров применения этих аксиом, разъясняющих их:

$$(x1y2z2)\,\mathrm{I} : (\neg x1 \neg y2 \neg z2)\,\mathrm{II} \vdash [(x1y2)\,\mathrm{I} : (\neg x1 \neg y2)\,\mathrm{II}] \cdot$$
$$\cdot [(x1z2)\,\mathrm{I} : (\neg x1 \neg z2)\,\mathrm{II}] \vdash (x \to y)\,(x \to z),$$
$$(x1y1z2)\,\mathrm{I} : (\neg x1 \neg y1 \neg z2)\,\mathrm{II} \vdash [(x1z2)\,\mathrm{I} : (\neg x1 \neg z2)\,\mathrm{II}] \cdot$$
$$\cdot [(y1z2)\,\mathrm{I} : (\neg y1 \neg z2)\,\mathrm{II}] \vdash (x \to z)\,(y \to z),$$
$$(x1y1z2u2)\,\mathrm{I} : (\neg x1y1 \neg z2u2)\,\mathrm{II} \vdash [(x1z2u2)\,\mathrm{I} : (\neg x1 \neg z2u2)\,\mathrm{II}] \cdot$$
$$\cdot [(y1z2u2)\,\mathrm{I} : (y1 \neg z2u2)\,\mathrm{II}] \vdash [(x1z2)\,\mathrm{I} : (\neg x1 \neg z2)\,\mathrm{II}] \cdot [(x1u2)\,\mathrm{I} :$$
$$: (\neg x1u2)\mathrm{II}]\,[(y1z2)\mathrm{I} : (y1 \neg z2)\,\mathrm{II}] \vdash (x \to z)\,(x : \neg x \to u)(y \to z : \neg z)$$

На основе A,B и C доказываются формулы

$$(x \to y)\,(x \to z) \vdash (x1y2z2)\,\mathrm{I} : (\neg x1 \neg y2 \neg z2)\,\mathrm{II},$$
$$(x \to z)\,(y \to z) \vdash (x1y1z2)\mathrm{I} : (\neg x1 \neg y1 \neg z2)\,\mathrm{II},$$
$$(x \to y : \neg y) \vdash (x1y2)\,\mathrm{I} : (x1 \neg y2)\,\mathrm{I},$$
$$(x : \neg x \to y) \vdash (x1y2)\,\mathrm{I} : (\neg x1y2)\,\mathrm{I}$$

и т. д., анализ которых является основанием для введения D. При этом приходится, правда, делать некоторые исключения в отношении употребления порядковых индексов. Например, формула

$$(x1y2)\,\mathrm{I} : (x1 \neg y2)\,\mathrm{I}$$

берется как

$$(x1y2)\,\mathrm{I} : (x1 \neg y2)\,\mathrm{II},$$

что оправдано с точки зрения предполагаемой интерпретации (индексы выступают как номера ситуаций, которым соответствуют формулы, принимаемые как высказывания).

Комбинирование формул

$$X\mathrm{I},\ Y\mathrm{I}, \ldots, Z\mathrm{II},\ U\mathrm{II}, \ldots$$

в пары, позволяющие применить к ним $D1 - D5$, может осуществляться точно так же (аксиомы $D1 - D5$ не единственно возможные) различными путями. Примем, например, следующие D:

6. $X\mathrm{I} : Y\mathrm{II} : \ldots : Z\mathrm{II} \vdash (X\mathrm{I} : Y\mathrm{II}) : \ldots : (X\mathrm{I} : Z\mathrm{II})$,
7. $X\mathrm{I} : \ldots : Y\mathrm{I} : Z\mathrm{II} \vdash (X\mathrm{I} : Z\mathrm{II}) : \ldots : (Y\mathrm{I} : Z\mathrm{II})$,
8. $X\mathrm{I} : \ldots : Y\mathrm{I} : Z\mathrm{II} : \ldots : U\mathrm{II} \vdash X\mathrm{I} : \ldots : Y\mathrm{I} : (Z : \ldots \cdot U)\mathrm{II}$.

Примеры для $D6 - D8$:

$$(xyz)\mathrm{I} : (\neg xy \neg z)\mathrm{II} : (x \neg yz)\mathrm{II} \vdash [(xyz)\mathrm{I} : (\neg xy \neg z)\mathrm{II}] : [(xyz)\mathrm{I} : (x \neg yz)\mathrm{II}],$$
$$(xyz)\mathrm{I} : (x \neg yz)\mathrm{I} : (\neg xy \neg z)\mathrm{II} \vdash [(xyz)\mathrm{I} : (\neg xy \neg z)\mathrm{II}] : [(x \neg yz)\mathrm{I} : : (\neg xy \neg z)\mathrm{II}];$$
$$(X\mathrm{I} : Y\mathrm{I} : Z\mathrm{II} : U\mathrm{II}) \vdash [(X\mathrm{I} : Z\mathrm{II}) : (X\mathrm{I} : U\mathrm{II})] : [(Y\mathrm{I} : Z\mathrm{II}) : (Y\mathrm{I} : U\mathrm{II})].$$

Пример применения $D1 - D8$:

$$(x1y2z2)\mathrm{I} : (x1 \neg y2z2)\mathrm{I} : (\neg x1 \neg y2 \neg z2)\mathrm{II} \vdash [(x1y2z2)\mathrm{I} : : (\neg x1 \neg y2 \neg z2)\,\mathrm{II}] : [(x1 \neg y2z2)\mathrm{I} : (\neg x1 \neg y2 \neg z2)\,\mathrm{II}] \vdash \vdash [(x \to y)\,(x \to z)] : [(x : \neg x \to \neg y)\,(x \to z)].$$

Выбор варианта $D6 - D8$ зависит от причин, на которых останавливаться здесь не представляется возможным. К числу D добавим также следующие аксиомы:

9. Если формула $X\mathrm{I}$ (и, соответственно, $Y\mathrm{II}$) имеет вхождения $x1$ и $x2$, то

$$XI : YII \vdash (X^1 I : Y^1 II)(X^2 I : Y^2 II),$$

где X^1 и Y^1 отличаются от X и, соответственно, Y только тем, что имеют одно, и только одно, из вхождений $x1$ и $x2$, а X^2 и Y^2 отличаются от X и, соответственно, Y только тем, что имеют другое из вхождений $x1$ и $x2$.

10. $XIXII : YIYII \vdash (XI : YII) : : (XII : YI)$,

где знак «: :» определяется так

$$x : : y = x \neg y : \neg xy : xy$$

и включается в число знаков R.

Примеры для $D9$:

$$(x \to y)(y \to x) \vdash (x1x2y1y2)\, I : (\neg x1 \neg x2 \neg y1 \neg y2)\, II \vdash$$
$$\vdash [(x1y2)\, I : (\neg x1 \neg y2)\, II]\, [(y1x2)\, I\, (\neg y1 \neg x2)\, II],$$
$$(x \to y)(y \to z) \vdash (x1y1y2z2)\, I : (\neg x1 \neg y1 \neg y2 \neg z2)\, II \vdash$$
$$\vdash [(x1y1z2)\, I : (\neg x1 \neg y1 \neg z2)\, II]\, [(x1y2z2)\, I : (\neg x1 \neg y2 \neg z2) II] \vdash$$
$$\vdash (x \to z)(y \to z)(x \to y)(x \to z) \vdash (x \to z).$$

Примеры для $D10$:

$$\neg (x \to y) \vdash (\neg x1y2)\, I\, (\neg x1y2)\, II : (x1 \neg y2)\, I\, (x1 \neg y2)\, II \vdash$$
$$\vdash [(\neg x1y2)\, I : (x1 \neg y2)\, II] :: [(x1 \neg y2)\, I : (\neg x1y2)\, II] \vdash$$
$$\vdash (x \to \neg y) : : (\neg x \to y),$$
$$\neg (x \to y : \neg y) \vdash (\neg x \to y : \neg y),$$
$$\neg (x : \neg x \to y) \vdash (x : \neg x \to \neg y).$$

В последних двух формулах такой результат получился потому, что доказываются формулы

$$(x : : y) \neg x \vdash y,$$
$$\neg [x \to \neg (y : \neg y)],$$
$$\neg [\neg (x : \neg x) \to y].$$

Как мы видели,

$$\neg (x \to y) \vdash [(x \to \neg y) : : (\neg x \to y)],$$

Однако, можно показать, что

$$\neg [(x \to \neg y) : : (\neg x \to y)] \vdash [(x \to y) :: (\neg x \to \neg y)]$$
$$\neg [(x \to y) : : (\neg x \to \neg y)] \vdash [(x \to \neg y) :: (\neg x \to y)]$$
$$\neg (x \to \neg y) \vdash [(x \to \neg y) :: (\neg x \to y)]$$

и т. п. Положение ничуть не улучшится, если знак :: в аксиоме Д10 заменить на знак : или на знак $\cdot$, так как и в этом случае выводятся положения

$$\neg(\neg x \to \neg y) \vdash [(x \to \neg y) : (\neg x \to y)]$$
$$\neg(\neg x \to \neg y) \vdash [(x \to \neg y) \cdot (\neg x \to y)]$$
$$\neg[(x \to \neg y) \cdot (\neg x \to y)] \vdash [(x \to y) \cdot (\neg x \to \neg y)]$$

и т. п., не отвечающие требованиям к отрицанию. Так что по крайней мере с точки зрения описания специфики отрицания связи система Д может рассматриваться лишь как предварительная.

Несколько слов о знаке «::». Для него доказываются формулы

$$xz :: yz \vdash (x :: y)\, z, \quad (x :: y)\, x \vdash (y : \neg y),$$
$$(x :: y) \neg x \vdash y, \quad x :: y = \neg(\neg x \neg y)$$

и т. п. Уже из сравнения

$$(x :: y)\, x \vdash (y :: \neg y) \text{ и } (x : y)\, x \vdash \neg y$$

видно неудобство знака «::» для формулировки идей, выраженных в аксиомах A. Хотя доказывается формула

$$xy :: \neg x \neg y \vdash xy : \neg x \neg y,$$

однако использовать знак «::» при переходе к формулам связей нельзя, так как формулы

$$xy : \neg x \neg y \vdash xy :: \neg x \neg y,$$
$$xy : \neg x \neg y = xy :: \neg x \neg y$$

не являются доказанными. Непосредственное же использование его как первичного (основного) знака означает допущение формул типа

$$XY,\ XZ,\ YZ$$

и т. д., относительно которых доказанным является

$$\neg(XY),\ \neg(XZ),\ \neg(YZ)$$

и т. д., поскольку

$$X :: Y = \neg XY : X \neg Y : XY.$$

Имеется группа формул

$$X\,\mathrm{I} : \ldots : Y\,\mathrm{II},$$

которые могут быть записаны посредством знаков «$\rightarrow$» без D, исключительно при помощи A, B, и C. Например, согласно $C2$, $C3$ и A

$$\begin{gathered}(xy \rightarrow z) = (x1y1z2)\,\mathrm{I} : (\neg x1\, y1 \neg z2)\,\mathrm{II} : (x1 \neg y1 \neg z2)\,\mathrm{II} : \\ : (\neg x1 \neg y1 \neg z2)\,\mathrm{II}, \\ (x \rightarrow yz) = (x1y2z2)\,\mathrm{I} : (\neg x1 \neg y2\, z2)\,\mathrm{II} : (\neg x1y2 \neg z2)\,\mathrm{II} : \\ : (\neg x1 \neg y2 \neg z2)\,\mathrm{II}, \\ (x : y \rightarrow z) = (x1 \neg y1z2)\,\mathrm{I} : (\neg x1y1z2)\,\mathrm{I} : (x1y1 \neg z2)\,\mathrm{II} : \\ : (\neg x1 \neg y1 \neg z2)\,\mathrm{II}, \\ (x : y \rightarrow z : u) = (x1 \neg y1z2 \neg u2)\,\mathrm{I} : (\neg x1y1 \neg z2u2)\,\mathrm{I} : \\ : (x1 \neg y1 \neg z2u2)\,\mathrm{I} : (\neg x1y1z2 \neg u2)\,\mathrm{I} : (x1y1z2u2)\,\mathrm{II} : \\ : (x1y1 \neg z2 \neg u2)\,\mathrm{II} : (\neg x1 \neg y1z2u2)\,\mathrm{II} : (\neg x1 \neg y1 \neg z2 \neg u2)\,\mathrm{II}\end{gathered}$$

и т. д. Не представляет труда поменять местами формулы справа и слева от знака « $=$ », чтобы представить это как переход от формул с порядковыми индексами к формулам связи. В ряде случаев требуется предварительное доказательство формул B. Например, формулу

$$(x1y2z2)\,\mathrm{I} : (x1y2 \neg z2)\,\mathrm{I} : (\neg x1 \neg y2z2)\,\mathrm{II} : (\neg x1 \neg y2 \neg z2)\,\mathrm{II}$$

на основе $C3$ можно записать в виде

$$[x1\,(yz : y \neg z)\,2]\,\mathrm{I} : [\neg x1\,(\neg yz : \neg y \neg z)\,2]\,\mathrm{II}.$$

Непосредственно усмотреть, что

$$\begin{gathered}\neg(yz : y \neg z) = (\neg yz : \neg y \neg z), \\ (yz : y \neg z) = \neg(\neg yz : \neg y \neg z)\end{gathered}$$

(а это необходимо для подстановки) нельзя, требуется доказательство этих формул.

Возможны случаи, когда в данной формуле отсутствуют вхождения, без которых использование $C2$, $C3$, A и B становится невозможным.

Например, в формуле

$$(x1y2z2)\,\mathrm{I} : (\neg\, x1y2 \neg\, z2)\,\mathrm{II} : (\neg\, x1 \neg\, y2z2)\,\mathrm{II}$$

недостает вхождения

$$(\neg\, x1 \neg\, y2 \neg\, z2)\,\mathrm{II} \text{ или } (x1 \neg\, y2 \neg\, z2)\,\mathrm{I},$$

чтобы записать ее в форме

$$(x \to yz) \text{ или } (x \to yz : \neg\, y \neg\, z).$$

Поскольку не известно, будет это формула с x или с $\neg x$, приходится считаться с двумя, а в других случаях с тремя и более вариантами. Здесь возникает интересная проблема, которая частично рассмотрена в [1].

§ 4. Дадим некоторые разъяснения логических знаков и сформулируем условия интерпретации формул связи как высказываний о связях. Будем рассматривать формулы как высказывания. В таком случае употребляемые логические знаки будут иметь следующий смысл:

«$\vdash$» — признав утверждаемое слева от этого знака (согласившись с тем, о чем говорится в высказывании слева от этого знака), мы должны признать и утверждаемое справа от него,

« = » — в высказывании с одной стороны от этого знака говорится то же самое, что и в высказывании справа от него,

«·» — каждое из того, о чем говорится в высказываниях, соединенных этим знаком;

«:» — одно из того, о чем говорится в высказываниях, соединенных этим знаком;

«::» — по крайней мере одно из того, о чем говорится в соединенных этим знаком высказываниях;

«$\neg$» — отрицания того, о чем говорится в высказывании.

Следует сказать, что выражение «одно из ...» имеет несколько значений:

1. $x \vdash x : y \vdash x : y : z$ и т. д. (то, о чем говорится, находится среди таких-то предметов); например, если известно, что преступление совершил человек a, и дана группа людей a, b,..., то совершивший преступление человек есть один из

a, b ...; если известно, что преступником является один из a и b, то преступник — один из a, b и c и т. д.;

2. $[(x:y) \vdash z]\, x \vdash z$, $[(x:y) \vdash z]\, y \vdash z$ и т. д. для трех и более высказываний, соединенных знаком «:»; здесь знак «:» употребляется в смысле «любой из ...»; например, какое бы из высказываний x и y мы ни взяли, из любого из них выводится z;

3. $[(x:y) \urcorner x \vdash y]$, $([x:y) \urcorner y \vdash x]$, $[(x:y)\, x \vdash \urcorner y]$ и т. д., то есть в том смысле, как он употребляется у нас; при этом формулы, указанные в первом и втором пункте, не являются доказанными.

При переходе к формулам связи необходимо ввести еще следующее ограничение: x, y, z..., суть высказываний, в которых говорится о различных объектах, т. е. о наличии или отсутствии некоторых свойств у различных предметов или различных свойств у одних и тех же предметов. Например, различными являются объекты, о которых говорится в высказываниях «Данная масса газа имеет объем P» и «Данная масса газа имеет давление Q», в высказываниях «Контакт a замкнут» и «Контакт b замкнут» и т. п.

Порядковые индексы можно интерпретировать как временную последовательность, в которой объекты нами выбираются (наблюдаются в той или иной форме, допускаются и т. п.) или создаются, как последовательность возникновения объектов, как их определенное расположение и т. д.,— короче говоря, как отображение некоторой реальной упорядоченности объектов в пространстве и времени или упорядоченности хода исследования, которая в конечном счете может быть сама интерпретирована как отображение реальной упорядоченности объектов (включая и случаи, когда имеет место лишь мысленное допущение объектов и их порядка, дающее базу для рассуждений). Например, ситуация, в которой контакт b замыкается вслед за контактом a, сменяется ситуацией, в которой a размыкается раньше, чем b, и это обстоятельство может быть отображено посредством особых слов, фраз, предложений. В обобщенном виде мы говорим просто о каком-то порядке и выбираем удобный способ его изображения. При этом одна и та же запись может иметь различные интерпретации, а различные формы записи — одинаковую интерпретацию. Эта интерпретация может быть различной в зависимости от характера реальных связей, с которыми приходится иметь дело. В частности, рассматривая последовательность расстановки индексов как отражение последовательности появления объектов во времени, мы можем встретиться с разными вариантами. Например, $x1\ y2$ может означать, что объект, о котором говорится в x, появляется раньше объекта, о котором говорится в y; но можно интерпретировать и наоборот; можно также считать, что объект, о котором говорится в x в $(x1\ y2)$ I, появляется раньше объекта, о котором говорится в y, но объект, о котором говорится в $\urcorner x$ в $(\urcorner x 1 \urcorner y 2 \urcorner)$ II, появляется позже объекта, о котором говорится в $\urcorner y$. Вопрос об интерпретации порядковых индексов выходит из области логики в область гносеологии, имеющей дело с фактическими способами выявления связей, и по существу является вопросом о приложении логики в сфере гносеологии. Это относится и к выбору доказанной формулы из числа $B14$, о чем уже говорилось.

Согласно указанному выше пониманию отрицания, формула

$$\urcorner (\urcorner xx)$$

истолковывается так: не может быть, чтобы один и тот же предмет в одно и то же время имел и не имел некоторое свойство. Отсюда ясно, что никакая реальная ситуация не может быть описана высказываниями типа

$$\urcorner xx.$$

Поэтому, в частности, знак «::», допускающий в качестве одной из возможностей при соединении высказываний X, Y, Z,... в высказывания XY, XZ, YZ, ..., не может быть непосредственно (без сведения к «:») использован для описания исключающих друг друга ситуаций.

При условии указанной интерпретации (или интерпретаций аналогичного рода) высказывание

$$x \rightarrow y$$

выступает как элементарное высказывание о связях, а производные формулы связи — как сложные высказывания о связях. Не представляет труда показать, что употребляемые в науках средства фиксирования связей с логической точки зрения могут быть описаны посредством комбинирования элементарных высказываний о связях и введенных логических знаков. Например, любую таблицу или график, фиксирующие функциональную зависимость величин, в принципе можно охарактеризовать таким образом.

Различие между знаками «$\vdash$» и «$\rightarrow$» таково: 1) первый есть знак следования вообще, второй — показатель способности высказывания особого рода участвовать в процессе вывода; 2) второй есть знак связи вообще, первый — знак логической связи особого рода. Поясним это различие подробнее. Второй не есть знак следования. Он указывает лишь на то, что из высказывания, содержащего этот знак, и высказывания, стоящего слева от него, выводится высказывание, стоящее справа от него. В реальных языках эта способность передается самыми различными способами, которые по отношению к правилам оперирования со знаком «$\rightarrow$» выступают как различные их интерпретации.

Следующий пример наглядно иллюстрирует указанное различие знаков. Высказывание «Металл медь электропроводен» следует из высказывания «Все металлы электропроводны» в силу значения слова «все» или из высказывания «Металл электропроводен» в силу определенного отношения слов «металл» и «металл медь», что регулируется привычной ясностью или определяется логическими аксиомами. Однако ни о какой связи различных объектов здесь не говорится. В высказывании «Если увеличивается температура данной массы газа, то (при постоянных прочих условиях) увеличивается его объем» говорится о связи температуры и объема газа. Высказывание «Объем данной массы газа увеличивается» не следует (не выводится) из высказывания «Температура данной массы газа увеличивается». Первое выводится лишь в том случае, если имеется второе и установлена связь объектов, о которых в них говорится, то есть имеется сложное высказывание в целом (постоянство условий предполагается, что мы опускаем с целью упрощения).

Хотя знак «$\vdash$» есть знак особой логической связи, определять его через знак связи (через «$\rightarrow$») было бы ошибочно, так как это привело бы к кругу в определениях. Поэтому мы и приняли его как первичный знак, полагая, что с содержательной точки зрения он привычно ясен. В частности, он может быть разъяснен так, как мы это сделали выше. •

Вопрос о том, насколько принятая система аксиом A надежна, обсудить в данной статье не представляется возможным. Ограничимся кратким замечанием. Примем следующее определение:

1) $x \urcorner x$ есть недопустимая формула ($A1$);

2) если $x \vdash y$ и y есть недопустимая формула, то x есть недопустимая формула ($A2$);

3) остальные формулы допустимы.

Систему аксиом мы называем надежной, если она позволяет установить недопустимые формулы и исключает возможность вывода недопустимых формул из допустимых. Принятая система аксиом позволяет установить недопустимые формулы, и этого достаточно для целей статьи. Во всяком случае, если сложится парадоксальная ситуация, на основе A делается вывод о недопустимости какой-либо формулы или вхождения в формулу. Пусть, например, x есть доказанная формула. Тогда, согласно $A18$,

$$\urcorner x \vdash \urcorner xx$$

и, согласно $A1$ и $A2$,

$$(\urcorner x \vdash \urcorner xx) \urcorner (\urcorner xx) \vdash \urcorner \urcorner x,$$

то есть формула $\urcorner x$ недопустима.

Вопрос о недопустимых формулах связи решается на общих основаниях. Формула

$$(x \rightarrow y)(\urcorner x \rightarrow y)$$

недопустима согласно $C2$, $A1$, $A12$, $A16$, $A18$. Для доказательства недопустимости формулы

$$(x \rightarrow y)(x \rightarrow \urcorner y)$$

можно вывести следующую формулу В:

$$A1, 12, 14, 16, 18 \vdash [\urcorner (xy) x \vdash \urcorner y]$$
$$A1, 12, 14, 16, 18 \vdash [\urcorner (xy) y \vdash \urcorner x],$$

Словами ее можно сформулировать так: если xy есть недопустимая формула и x (или y) есть допустимая формула, то y (соответственно, x) есть недопустимая формула. Поскольку

$$(x \to y)(x \to \neg y)\, x \vdash y \neg y$$

и x допустима, имеем

$$\neg [(x \to y)(x \to \neg y)].$$

В первом параграфе мы отмечали, что известные нам формальные системы (и вообще логические системы, которые легко формализовать) не могут быть без реконструкции использованы для решения поставленной здесь задачи. Рассмотрим, в заключение, систему строгой импликации Аккермана [2], наиболее близко примыкающую к системе аксиом A. Назовем ее WA. Вместо знаков «$\wedge$» и «$\vee$» будем употреблять, соответственно, знаки «.» и «: :», совпадающие с ними по значению, а вместо знака «$\to$» — аналогичный ему знак «$\vdash$». Система WA такова:

1. $x \vdash x$.
2. $(x \vdash y) \vdash [(y \vdash z) \vdash (x \vdash z)]$.
3. $(x \vdash y) \vdash [(z \vdash x) \vdash (z \vdash y)]$.
4. $[x \vdash (x \vdash y)] \vdash (x \vdash y)$.
5. $xy \vdash x$.
6. $xy \vdash y$.
7. $(x \vdash y)(x \vdash z) \vdash (x \vdash yz)$.
8. $x \vdash x :: y$.
9. $y \vdash x :: y$.
10. $(x \vdash z)(y \vdash z) \vdash (x :: y \vdash z)$.
11. $x(y :: z) \vdash y :: (xz)$.
12. $(x \vdash y) \vdash (\neg y \vdash \neg x)$.
13. $x \neg y \vdash \neg (x \vdash y)$.
14. $x \vdash \neg \neg x$.
15. $\neg \neg x \vdash x$.
16. $(x \vdash 0) \vdash \neg x$.
17. $x \neg x \vdash 0$.

Знак 0 обозначает абсурд, что соответствует недопустимой формуле в нашем понимании.

Сравним WA с A. В системе A имеются $WA1$ ($A3$), $WA5$ и $WA6$ ($A11$) и $WA7$ ($A5$). В системе A выводится $B7$, из которого следуют $WA14$ и $WA15$. Вместо $WA16$ и $WA17$ в A приняты $A1$ и $A2$, играющие ту же роль и отличающиеся от первых лишь формулировкой. Аксиомы $WA2$ и $WA3$ в системе A (для целей статьи) компенсируются аксиомой $A6$, а аксиома $WA12$ — аксиомой $A2$ и доказанной формулой $B1$. Аксиомы $WA4$, $WA8$, $WA9$, $WA10$ и $WA13$ в системе A не являются доказанными формулами.

Главная причина, почему WA не годится для решения поставленной в статье задачи, заключается в неудобстве знака «: :», о чем говорилось выше, и в отсутствии в ней ряда аксиом, необходимых для выяснения свойств формул связи. В частности, это относится к $A16$, позволяющей исключать недопустимые вхождения в некоторую формулу.

Литература

1. А. А. Зиновьев. Логическое строение знаний о связях. В сб. «Логические исследования». Изд-во АН СССР, 1959.
2. W. Ackermann. Über die Beziehung zwischen strikter und strenger Implikation. «Dialektica», 1958, № 47/48. Die Begründung eine strenge Implikation. The journal of symbolic logic, v. 21, № 2, 1956.

А. А. Зиновьев

К ВОПРОСУ ОБ ОБЩНОСТИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ О СВЯЗЯХ

Вопрос об общности высказываний о связях расчленяется на два: 1) вопрос об определении самого понятия общности, т. е. о том, что называется частным случаем (примером) связи данного рода и какова область истинности высказывания об этой связи; 2) вопрос о том, как высказывания о связях приобретают свойство общности, т. е. каким образом изучение частных случаев связей позволяет получать высказывания, истинные в отношении любых других частных случаев связи данного рода. В данной статье мы изложили некоторые чисто логические соображения на этот счет, акцентируя внимание на специфике проблемы общности высказываний о связях и на первом из указанных вопросов.

Примем следующие обозначения. Предметы будем обозначать символами a и b (с индексами и без них), а их признаки (свойства) — символами P, Q, R, ... (точно так же с индексами и без них). Предметы с их признаками (объекты) будем изображать символами типа Pa, Pb, Qa, ..., $P(a, b)$, $P(a^1, ..., a^n)$ и т. д., а также символами x и y, когда будет безразлично расчленение объекта на предмет и его признак. Знаки, обозначающие предметы и признаки и построенные из них высказывания, будем изображать, заключая знаки предметов, признаков и объектов в кавычки (это будет относиться и к различию связей и соответствующих им высказываний). В качестве ограничителей комбинаций знаков, рассматриваемых как целое, будем употреблять скобки. Поскольку нас будут интересовать лишь самые фундаментальные вопросы, относящиеся к общности высказываний о связях, последние достаточно будет взять в простейшей форме «x/y», где знак «/» (знак связи) означает допустимость вывода «x/y» $\cdot$«x»$\vdash$«y». Знак «$\vdash$» есть знак следования.

Введем предварительно определения частного случая предмета и признака применительно к атрибутивной форме высказываний: 1) $(a \supset b) =$ («Pb»$\vdash$«Pa»), где P — любой признак; 2) $(P \supset Q) =$ («Pa»$\vdash$«Qa»), где a — любой предмет. Читаться эти определения будут так: предмет a есть частный случай предмета b (включается в число предметов b), если, и только если, для любого признака (какой бы мы ни взяли) выполняется указанное в правой части определения; аналогично второе. Другими словами, знак «=» заменяет здесь выражение «Если и только если». Причем из «Pb» следует «Pa» в первом определении и из «Pa» следует «Qa» во втором без каких-бы то ни было дополнительных высказываний (как логических, так и нелогических). Например, Сократ есть частный случай человека, если, и только если, при любом P из «Человек имеет признак P» следует «Сократ имеет признак P»; признак быть березовым есть частный случай признака быть деревянным, если, и только если, при любом a из «Предмет a березовый» следует «Предмет a деревянный».

Принятые определения можно усилить, добавив конъюнктивно к правой части их выражения, содержащие отрицания: к первому — выражение («$-Pb$»$\vdash$ «$-Pa$»), ко второму — выражения («$-Qa$»$\vdash$ «$-Pa$»), где знак «—» означает, что предмет не имеет признака. Однако для дальнейшего это «усиление» определений не является необходимым, и мы удовольствуемся принятыми (ослабленными) определениями.

Особенность предложенного пути состоит в том, что он противоположен принятому пути, согласно которому из общего следует частное, но что́ есть общее и частное — это предполагается данным, тогда как здесь отношение общего и частного определяется через отношение следования, которое предполагается данным. И это, на наш взгляд, более соответствует сути дела, когда мы не оперируем кванторами и (в особенности) когда по виду терминов нельзя судить о их отношении. Нам представляется также, что многие трудности в исследовании проблемы общности высказываний возникают именно оттого, что дело представляется в перевернутом виде.

Высказывания о связях относятся к числу полипредметных высказываний, т. е. таких высказываний, в которых говорится о двух или более различных предметах (в которых имеется по два или более субъекта). Обозначим эти высказывания символом «$P(a^1, \ldots, a^n)$», где $a^1, \ldots, a^n$ суть предметы, о которых говорится в высказывании, а «P» есть то, что образуется из высказывания после замены «a^1», ..., «a^n» порядковыми номерами последовательности фиксирования предметов (другими словами, P есть то, чем характеризуются $a^1, \ldots, a^n$ совместно, а не каждый по отдельности). Например, высказывание «Точка A находится между точками B и C» может быть записано так: «Точки A B и C имеют тот признак, что первая (по порядку обозначения, названия) находится между второй и третьей».

В приведенном примере высказыванию можно придать также вид «Точка A имеет тот признак, что она находится между точками B и C», «Точки A и B имеют тот признак, что первая находится между второй и точкой C» и т. п. Так что сказанное выше можно обобщить: 1) $a^1, \ldots, a^n$ есть множество предметов, о которых говорится в данном высказывании; 2) $a^j, \ldots, a^i$ есть некоторое подмножество предметов из этого множества; в частности, это подмножество может включить каждый из $a^1, \ldots, a^n$ по отдельности, попарно и т. д.— в общем, $a^j, \ldots, a^i$ есть какое-либо из возможных сочетаний предметов $a^1, \ldots, a^n$. Легко видеть, что определения частного случая предмета и признака распространяются и на случай объектов с двумя и более предметами, т. е. объектов $P(a, b, \ldots)$.

Примем обозначения: a^j = любой из $a^1, \ldots, a^n$; $a^{k1} \supset a^1, \ldots, \ldots, a^{kn} \supset a^n$; a^{jk} = любой из $a^{k1}, \ldots, a^{kn}$; «w» = «$a^1, \ldots, a^n$»; «w^*» = результат подстановки в «w» на место по крайней мере одного из «a^j», соответствующего «a^{jk}». Знак «=» здесь и ниже заменяет выражение «есть». Примем, далее, утверждение: 3) «$P(a^1, \ldots, a^n)$» $\vdash$ «$P^* a^j$», «$P^* a^j$» $\vdash$ «$P(a^1, \ldots, a^n)$», где «P^*» есть то, что говорится об a^j в «$P(a^1, \ldots, a^n)$». Например, из

«Точка A лежит между точками B и C» следует «Точка A характеризуется тем, что она лежит между B и C», и наоборот. Утверждение 3 можно обобщить, рассмотрев a^j как любое сочетание из $a^1, \ldots, a^n$.

Из определений 1 и 2 и из утверждения 3 выводится утверждение: 4) «$P(w)$» $\vdash$ «$P(w^*)$». Доказательство. Берем любой из «a^j» (допустим, «a^1»), на место которого подставляется соответствующий «a^{jk}» (допустим, «a^{k1}»), преобразуем «$P(w)$» в «$P^* a^1$», где «P^*» есть то, что говорится в «$P(w)$» об a^1; согласно первому определению и условию «$P^*(a^1)$» $\vdash$ «$P^*(a^{k1})$»; согласно утверждению 3 и транзитивности следования «$P(w)$» $\vdash$ «$P(w_1^{*1})$», где «w_1^{*1}» есть результат замены «a^1» в «w» на «a^{k1}», т. е. «$P(w)$» $\vdash$ «$P^*(a^{k1})$» $\vdash$ «$P(w_1^{*1})$». Аналогично делаем для каждого «a^j» по отдельности, получая «$P(w)$» $\vdash$ «$P(w_2^{*1})$», ..., «$P(w)$» $\vdash$ «$P(w_n^{*1})$». Берем любой другой «a^j» (допустим, «a^2»), на место которого точно так же поставлен соответствующий «a^{jk}» (т. е. «a^{k2}»); на тех же основаниях получаем «$P(w_1^{*1})$» $\vdash$ «$P(w_1^{*2})$», где «w_1^{*2}» есть результат замены «a^2» в «w_1^{*1}» на «a^{k2}»; делаем так до тех пор, пока не переберем все подстановки; если «w_1^{*n}» есть результат последней подстановки, получим «$P(w)$» $\vdash$ «$P(w_1^{*1})$» $\vdash \ldots \vdash$ «$P(w_1^{*n})$», откуда следует (на основе транзитивности следования) «$P(w)$» $\vdash$ «$P(w_1^{*i})$», где «w_1^{*i}» — любое из «w_1^{*1}», ..., «w_1^{*n}». Аналогично делаем, взяв за исходное «$P(w_2^{*1})$», ..., «$P(w_n^{*1})$» и получив, соответственно: «$P(w)$» $\vdash$ «$P(w_2^{*i})$», где «w_2^{*i}» — любое из «w_2^{*1}», ..., «w_2^{*n}»; ...; «$P(w)$» $\vdash$ «$P(w_n^{*i})$», где «w_n^{*i}» есть любое из «w_n^{*1}», ..., «w_n^{*n}». Тем самым мы переберем все возможные «w^*», получив «$P(w)$» $\vdash$ «$P(w^*)$». Доказав утверждение для $(a^1, \ldots, a^n)$, мы доказали его и для $(a^1, \ldots, a^m)$.

Для случая, когда число a^j бесконечно (практически он не может встретиться), может быть использована математическая индукция. Впрочем, к ней можно прибегнуть и в случае конечного числа a^j. При этом в качестве звена доказательства будет фигурировать такое рассуждение: пусть для n-й подстановки выполняется «$P(w)$» $\vdash$ «$P(w_n)$», где «w_n» — результат некоторой подстановки на n-м шаге; тогда можно доказать, что «$P(w)$» $\vdash$ «$P(w_{n+1})$», где «w_{n+1}» есть подстановка в «w_n» в соответствии с первым определением.

Примем определения: 5) частный предметный случай $P(w) = P(w^*)$; предметная область «$P(w)$»$=$множество всех возможных $P(w^*)$. В таком случае для монопредметных высказываний (с одним субъектом) будем иметь: частный предметный случай $Pb=Pa$; предметная область «Pb»$=$множество всех возможных Pa (обозначения см. в определениях 1 и 2). Заметим между прочим, что мы не прибегаем к помощи кванторов общности потому, что с точки зрения стоящей перед нами задачи записи «Pa» и «aPa», «$P(a^1, \ldots, a^n)$» и «$a^1, \ldots, a^n P(a^1, \ldots, a^n)$» и т. д. попарно не различаются (a перед P означает «для всех a» или «все a»). Например, если a есть человек, то предметная область высказывания не зависит от того, будет в высказывании фигурировать выражение «все люди» или просто слово «человек», если все остальное сохраняется.

Аналогично не используем кванторы общности и для предикатов (соответственно, признаков). Примем определения: 6) частный признаковый случай $Qa = Pa$; признаковая область «Qa»$=$множество всех возможных Pa; 7) частный случай $Qb= Qa$, Pa и Pb; область «Qb»$=$множество всех возможных Qa, Pa и Pb (обозначения см. в определениях 1 и 2).

Легко видеть, что утверждение, аналогичное утверждению 4, для признаковой области (а значит, и для области вообще) высказывания не выводится согласно определению 2. Определение 2 распространяется и на полипредметные высказывания, однако это не представляет интереса, так как при этом из внимания исключается главное — строение «P». Последнее обстоятельство особо важную роль играет для высказываний о связях, для которых, как увидим, вообще невозможно дать определения частных случаев без рассмотрения строения «P».

Возьмем высказывание «Если a увеличивается вдвое, то b уменьшается втрое». Его можно представить в форме «a и b характеризуются тем, что если первый увеличивается вдвое, то второй уменьшается втрое». Относительно признака увеличиваться вдвое очевидно, что он есть частный случай признака увеличиваться, а относительно признака уменьшаться втрое — что он есть частный случай признака уменьшаться. Но относительно признака, обозначаемого выражением «если первый увеличивается вдвое, то второй уменьшается втрое», без дополнительного анализа усмотреть что-либо очевидное нельзя.

Произведем в приведенном выше примере высказывания подстановку (замену) предикатов. Получим высказывания: «Если a увеличивается, то b уменьшается втрое», «Если a увеличивается, то b уменьшается» и «Если a увеличивается вдвое, то b уменьшается». Из чисто содержательных соображений очевидно, что только последнее высказывание следует из исходного (если истинно исходное, то наверняка истинно и последнее из приведенных высказываний). Тогда как первое и второе из исходного не следуют. Например, возможно, что при увеличении a втрое (а это есть увеличение) b будет не уменьшаться, а увеличиваться. Опираясь на такого рода содержательные соображения, примем утверждение: 8) («x/y» $\cdot$««x» $\vdash$ «z»») $\vdash$ «x/z»; («x/y» $\cdot$««z» $\vdash$ «x»») $\vdash$ «z/y». Из него и определения 2 для случаев, когда ($Q\supset R$) и ($S\supset T$), выводятся утверждения: 9) «x/Sb» $\vdash$«x/Tb»; 10) «Ra/x» $\vdash$ «Qa/x»; 11) «Ra/Sb» $\vdash$ «Qa/Tb».

Как видим, части высказывания слева и справа от знака «/» существенно различаются: слева допускается логический переход от общего к частному, а справа — от частного к общему. Поясним, в чем тут дело. Каждое из Ra, Qa, Sb и Tb можно взять в целом и рассматривать как предмет, соответственно, (a, имеющий R), (a, имеющий Q), (b, имеющий S) и (b, имеющий T). Например, высказывание «Контакт замкнут» можно рассмотреть как субъект (знак, обозначающий предмет) «Замкнутый контакт». В результате получим (приняв $Ra = c^1$, $Qa = c^2$, $Sb = c^3$ и $Tb = c^4$): $c^2\supset c^1$ (т. е. $Qa\supset Ra$), $c^3\supset c^4$ (т. е. $Sb\supset Tb$), т. е. Qa есть частный случай Ra, а Sb — частный случай Tb. Таким образом, левая часть высказывания ведет себя аналогично «b» в первом определении, а правая — аналогично «P» во втором определении.

Это различие сказывается, в частности, в следующем. Если мы исходим из «Ra/x», то зная объем «R» (допустим, $Q^1 \supset R$, $Q^2 \supset R, \ldots$), мы используем утверждение 9 как правило дедукции. Если же мы исходим из «x/Tb», то, зная объем «T» (допустим, $S^1 \supset T$, $S^2 \supset T, \ldots$), мы не можем сделать достоверный вывод «x/S^1b», «x/S^2b» и т. п. (возможен лишь вывод типа «x/либо S^1b, либо S^2b, либо. . .»). Если, далее, мы исходим из «Q^1a/x», . . . ,

«$Q^n a/x$», то можем обобщить «Q^1», . . . , «Q^n» лишь по принципу определения «R=любой из $Q^1, \ldots, Q^n$»; ограничиваясь обобщением таким, что $Q^1 \supset R, \ldots, Q^n \supset R$, мы не будем гарантированы от того, что некоторое Q^m будет $Q^m \supset R$, однако «$Q^m a/x$» может оказаться неистинным. Тогда как имея «$x/S^1 b$», . . . , «$x/S^n b$», мы при обобщении предикатов «S^1», . . . , «S^n» предикатом «T» можем ограничиться отношением $S^1 \supset T, \ldots, S^n \supset T$ и получить при этом истинное «x/Tb» (при истинных исходных высказываниях) согласно утверждению 8; более того, здесь достаточно одного «x/Sb» для такого обобщения и вывода.

При введении дальнейших определений можно пойти различными путями. В частности, возможен путь, основывающийся на указанной выше аналогии. Примем определения: 12) собственно частный предметный случай связи $(Ra/x) = (Qa/x)$; собственно признаковый частный случай связи $(x/Tb) = (x/Sb)$; 13) собственная предметная область «Ra/x» = множество всех возможных $(Q^i a/x)$; собственно признаковая область «x/Tb» = множество всех возможных $(x/S^i b)$. Эти определения можно обобщить: 14) частный случай $P(w) = P(w^*)$ или $P^*(w)$ или $P^*(w^*)$, где «P^*» есть результат замены по крайней мере одного из предикатов высказываний, образующих «$P(w)$», в соответствии с определением 12; область «$P(w)$» = множество всех возможных $P(w^*)$, $P^*(w)$ и $P^*(w^*)$.

Введение определений такого рода, как сделано выше, является необходимым условием решения второго из поставленных в начале статьи вопросов. При решении его, надо думать, речь идет о высказываниях о связях, которые не выводятся из других высказываний, так как в отношении выводных высказываний никакой трудности здесь нет. Собственная предметная область выбирается и определяется — выбираются $Q^1 a, \ldots, Q^n a$ и строится «R» по принципу «R=либо Q^1, ..., либо Q^n». Без этого принципа мы выйдем в область гипотез, что не специфично для высказываний о связях. Таким образом, и здесь проблемы нет. Достаточно сказать, что при проверке «Ra/x» предполагается, что частные случаи Ra даны. Очевидно, речь должна идти о собственной признаковой области высказывания о связях, т. е. о том, благодаря чему высказывание «x», полученное в результате вывода «Ra/x»·«Ra» $\vdash$ «x», оказывается истинным в отношении любой ситуации, в которой имеет место Ra (истинно «Ra»).

Рассматривая дело исключительно с этой точки зрения, необходимо сказать следующее. Высказывания о связях приобретают свойство общности благодаря учету условий, в которых фиксируются (обнаруживаются, познаются) связи. И хотя в большинстве случаев об условиях явно не говорят, принимая их как нечто данное, очевидное, само собой разумеющееся и т. д., однако не представляет труда показать, что они так или иначе учитываются, предполагаются. В простейшем виде (т. е. насколько это схватывается в определениях, исходных для детального решения проблемы) учет условий можно описать так. Пусть U есть некоторая связь, а V — нечто отличное от U. Примем определения: 15) V есть условие U (или условие истинности «U») = («V» $\vdash$ U»); V^1, ..., V^n есть область условий U = («V^1» $\vdash$ «U»)$\cdot$ ...$\cdot$(«V^n» $\vdash$ «U»). Учет V, согласно первому из них, придает «U» условную общность для стандартных (повторяющихся) условий, учет V^1, ..., V^n, согласно второму из них, придает ему условную общность для переменной области условий.

Представим себе теперь следующую картину: 1) выясняется, что «V^1» $\vdash$ «x/S^1b», ..., «V^n» $\vdash$ «x/S^nb»; 2) строится обобщение «S^1», ..., «S^n» предикатом «T» так, что $S^1 \supset T, \ldots, S^n \supset T$. На основе утверждения 9 и определения 15 можно сказать, что $V^1, \ldots, V^n$ будет областью условий (x/Tb). Будем в таком случае называть (определение 16) T собственным признаком связи (x/Tb), инвариантным относительно области условий $V^1, \ldots, V^n$, или просто инвариантом (x/Tb) относительно $V^1, \ldots, V^n$. Именно выявление таких инвариантов, на наш взгляд, является основным моментом в проблеме общности высказываний о связях.

Сказанное выше можно развить применительно к сложным (производным) связям, сложным (расчлененным и различным образом упорядоченным) условиям и их комбинациям, поскольку сложные случаи могут быть представлены как комбинации простых посредством логических знаков.

А. А. Зиновьев

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

В данном сообщении мы изложим некоторые ориентировочные идеи относительно пути построения одного из возможных вариантов теории определений, который нам представляется удобным для систематического обзора допустимых структур определений и доказательства касающихся их правил. В качестве иллюстрации к этим идеям изложим краткий фрагмент предполагаемой теории определений, не претендующий на полную строгость.

При построении теории определений в предлагаемом направлении, как вообще во всех случаях построения теорий, придется пойти на «жертвы», в частности рассматривать определения исключительно с точки зрения их структуры, отвлекаться от разнообразия их функций в процессе познания, отказаться от намерения угнаться за всеми ходячими употреблениями слова «определение» как от неосуществимого и т. д. Однако такого рода «жертвы» окупаются, если на базе построенной теории появляется возможность более эффективно изучить то, чем жертвуют в силу необходимости строить именно теорию, а не просто перечень сведений об изучаемом предмете. Показать в данном сообщении достоинства предлагаемого варианта теории в этом плане не представляется возможным. Мы ограничимся лишь отдельными замечаниями «между прочим», не затемняющими основную линию изложения о возможном варианте теории определений.

В качестве первичного термина введем термин «выбор». Выбирать предмет — представить или воспринять его, произнести или написать его название, построить о нем высказывание и т. п.; к числу частных случаев выбора относится то, что обозначается словами: «пусть дан такой-то предмет», «возьмем такой-то предмет» и т. п. Выбор предмета предполагает существование другого предмета, производящего выбор. Мы имеем в виду человека. Однако сходную способность можно приписать животным и особого рода машинам, рассматриваемым по аналогии с человеком (с его умственной деятельностью). В отношении выбирающего предмета допустим, что дальнейшее изложение будет касаться любого одного и во всех случаях выбора одного и того же выбирающего предмета, а также, что выбирающий предмет обладает способностью различать выбираемые предметы. Будем в таком случае говорить о различии предметов в выборе и обозначать его посредством различия индексов у знаков предметов — $П^1$, $П^2$, $П^3$, ... Частные способы выбора различных предметов и одного и того же предмета могут быть тождественными и различными, что для нас значения не имеет. Важно одно: в пределах одного и того же утверждения при повторении записи предмета тождество способа выбора будет предполагаться. Тот факт, что предмет выбран или не выбран, будем записывать, ставя после знака предмета, соответственно, знак «+» или «—».

Выбор двух и более предметов будем называть сопоставлением этих предметов. Примерами сопоставления являются измерение одного предмета другим, установление зависимости величин, выяснение строения предметов и т. п. Это широко действующая операция, обнаруживаемая всегда, когда приходится так или иначе принимать во внимание два или более различных предмета (факта, события и т. п.). Сопоставление характеризуется упорядоченностью или порядком выбора предметов. Например, если сопоставление $П^1$ и $П^2$ при построении высказывания «$П^1$ больше $П^2$» характеризуется порядком, который можно обозначить фразой «$П^1$ есть первый по порядку, $П^2$ — второй», то сопоставление этих же предметов при построении высказывания «$П^2$ меньше $П^1$» будет характеризоваться порядком, который обозначится фразой «$П^2$ есть первый по порядку, а $П^1$ — второй». Упорядоченность сопоставления отчетливо видна в построении графиков, схем, таблиц и т. п. Если упорядоченность безразлична, то это есть частный случай упорядоченности, который сводится к комбинации упорядоченных сопоставлений. Например, при построении высказывания «$П^1$ равен $П^2$» порядок выбора предметов безразличен, что может быть выражено утверждением об эквивалентности этого высказывания и высказывания «$П^2$ равен $П^1$» или утверждением о безразличии порядка написания знаков предметов в высказывании. Для нас в дальнейшем будет важна упорядоченность сопоставления, имеющая место при фиксировании связей [1, 2].

Примем обозначения:

«$\cdot$» — каждое из того, знаки чего соединены этим знаком («и»).

«:» — любое одно, только одно и только из того, знаки чего сведены этим знаком (исключающее «или», применяемое к двум и более членам и допускающее произвол выбора).

«$\vee$» — по крайней мере одно из того, знаки чего соединены этим знаком (не исключающее «или»).

«$\vdash$» — знак следования (признав утверждаемое слева от этого знака, мы должны признать утверждаемое справа от него).

«=» — знак тождества, который здесь может быть определен (этого определения достаточно для целей статьи) так: $(x = y) \vdash (x \vdash y) \cdot (y \vdash x)$; x и y суть знаки объектов (предметов с их признаками) или высказывания о наличии или отсутствии признаков у предметов.

«/» — знак связи, который для целей статьи достаточно определить так: $(x/y) \cdot x \vdash y$.

«скобки» — ограничители комбинаций знаков, взятых как целое. Очевидно, что $(П+)$ и $(П-)$ суть частные случаи объектов (т. е. могут быть поставлены на место x и y). Очевидно также, что $((П+) : (П-))$.

Связи, обозначения которых могут быть представлены в конечном счете как комбинации знаков из числа «$П+$», «$П-$», «$\cdot$», «:», «/», знаков отрицаний и ограничителей, и только из числа этих знаков, будем называть связями соответствия. Отрицания мы выше не ввели с целью упрощения. Знак «$\vee$» мы не указали потому, что он определяется через «·» и «:». Для связей соответствия может быть введена система сокращающих определений DI. Примем, например, такие определения:

$$1)\ (П^1 \to П^2) = (П^1 + / П^2 +),$$
$$2)\ (П^1 - \to П^2) = (П^1 + / П^2 -),$$
$$3)\ (П^1 \leftrightarrow П^2) = (П^1 \to П^2) \cdot (П^2 \to П^1),$$
$$4)\ (П^1 - \leftrightarrow П^2) = (П^1 - \to П^2) \vee (П^2 - \to П^1).$$

В силу свойств знака «/» и определений 1 и 3 имеем: $(П^1 \to П^2)\cdot(П^1 +) \vdash (П^2 +)$, $(П^1 \leftrightarrow П^2)\cdot(П^2 +) \vdash (П^1 +)$. Чтобы приблизить эти определения к обычному пониманию соответствия, можно сделать уточнения. Для первого определения: $(П^1 \to П^2)$ в том, и только в том, случае, если выбирается $П^1$ и выбирается какой-либо предмет из определенного множества предметов, то этот предмет есть $П^2$. Аналогично для прочих определений. Впрочем, это уточнение не влияет на свойства введенных знаков, которые должны быть заданы особыми утверждениями.

Для знаков, введенных определениями DI, должна быть принята система утверждений AI, из которой и из DI выводится система утверждений TI. Но это — не единственно возможный путь: если имеется система аксиом для знака «/», то AI не требуется, так как в этом случае просто из DI и утверждений для «/» выводятся утверждения TI. Более того, последний путь правильнее, так как он означает приложение логического аппарата, построенного для фиксирования связей вообще, к фиксированию частного случая связей — связей соответствия.

Примем (в качестве иллюстрации) следующие утверждения:

$$1)\ (П^1 \to П^2) : (П^1 - \to П^2),$$
$$2)\ (П^1 \to П^2) \cdot (П^2 \to П^3) \vdash (П^1 \to П^3),$$
$$3)\ (П^1 - \to П^2) \vee (П^2 - \to П^3) \vdash (П^1 - \to П^3),$$
$$4)\ ((П^1 : П^2) \to П^3) \cdot (П^1 +) \vdash (П^3 +),$$
$$((П^1 : П^2) \to П^3) \cdot (П^2 +) \vdash (П^3 +).$$

Принимая эти утверждения, мы здесь просто не доказываем их, не заботясь о их принципиальной доказуемости или недоказуемости в какой-либо логической системе. Из этих утверждений и принятых выше определений выводится, например, что $(П^1 \leftrightarrow П^2) \cdot (П^2 \leftrightarrow П^3) \vdash (П^1 \leftrightarrow П^3), (П^1 - \leftrightarrow П^2) \vee (П^2 - \leftrightarrow П^3) \vdash$ $\vdash (П^1 - \leftrightarrow П^3)$ и т. п. утверждения.

В приведенных утверждениях (это будет встречаться и в дальнейшем) встречаются случаи, когда один и тот же предмет фигурирует в нескольких связях, знаки которых соединены посредством «$\cdot$», а именно: $(П^1 \rightarrow П^2) \cdot (П^2 \rightarrow П^3)$, $(П^1 \leftrightarrow П^2) \cdot$ $\cdot (П^2 -\!\!- \rightarrow П^3)$ и т. п. Для этих случаев необходимо иметь в виду следующее (помимо уточнения определения знака «$\rightarrow$»). Акт выбора предмета есть ограниченное во времени событие. Поэтому естественно, что число связей соответствия, в которые может вступить данный предмет, зависит от числа актов его выбора или продолжительности отдельного акта выбора. В дальнейшем будем это иметь в виду, полагая, что повторение записи знака предмета в пределах одного утверждения в указанных случаях означает либо повторение выбора, либо такое свойство выбирающего предмета, когда продолжительность одного акта выбора достаточна для возникновения последующей связи.

Пусть $(П^1 s П^2)$ есть такая связь, что $(П^1_S\, П^2) \vdash (П^1 \rightarrow П^2) \vee$ $\vee (П^2 \rightarrow П^1)$. Будем рассматривать $П^1$ как предмет, обладающий одним единственным признаком (от остальных признаков отвлечемся), а именно: он находится в связи s с предметом $П^2$. Другими словами, будем рассматривать $П^1$ как предмет, специально предназначенный (выбранный, созданный, воспроизводимый и т. п.) выбирающим предметом для того, чтобы находиться в связи $(П^1_S\, П^2)$, и только для этого. Рассматриваемый таким образом $П^1$ будем называть знаком для $П^2$, $П^2$ — обозначаемым для $П^1$. Конечно, и другие признаки $П^1$ могут рассматриваться для каких-либо целей (в частности, без этого невозможен выбор $П^1$). Однако при этом он будет выступать просто как предмет наряду с $П^2$, а не как знак для него. Какие именно предметы становятся знаками для других, это зависит от обстоятельств, лежащих вне сферы нашего внимания (соображения удобства, естественноисторически сложившаяся традиция и т. п.).

Если знак может стать составной частью высказывания в данном языке (субъектом, предикатом или логическим знаком — квантором, знаком атрибутивности, связи и т. п.), будем называть его термином в этом языке. Термины будем обозначать символами Z, Z^1, Z^2, ... Различие индексов будет обозначать только то, что термины различаются просто как предметы в выборы, т. е. безотносительно к связям соответствия.

Термины сами могут стать предметами особых высказываний. В этом случае возможно (обычно так и делается), что в высказываниях о них будут фигурировать эти же термины с дополнительными знаками или в модифицированном виде,— термином для Z становится термин, содержащий Z в качестве части или представляющий модификацию его. Но это не обязательно, поскольку всякий термин, становясь предметом внимания, может быть сам обозначен другим термином (мы будем употреблять кавычки).

Смешение Z и «Z» обычно происходит потому, что при рассмотрении Z складываются условия для вывода («Z»s^1Z) $\cdot$ $\cdot(Zs^2\Pi)\vdash$(«Z»$s^3\Pi$), где s^1, s^2 и s^3 могут быть различными или тождественными (попарно или все три). Но этого вывода можно избежать, если учесть сказанное выше об акте выбора (о его повторении или продолжительности) или создать условия, исключающие одну из этих связей Z.

Между терминами возможны различного рода отношения — $((Z^1 : Z^2)\rightarrow\Pi)$, $(\Pi\rightarrow(Z^1 : Z^2))$, $(Z^1\rightarrow\Pi^1)\cdot(Z^2\rightarrow(\Pi^1 : \Pi^2))$ и т. п. Эти отношения могут быть закреплены определениями D11, вводящими знаки R такие, что эти отношения запишутся в виде (Z^1RZ^2), $(R;\ Z^1;\ Z^2;\ Z^3)$ и т. п. При этом в правой части определений могут фигурировать только знаки «Π», «Z», «$\cdot$», «:», «$\rightarrow$», «$\longrightarrow$», и производные от них знаки; причем $((Z^1 : Z^2)\rightarrow$ $\rightarrow\Pi) = (((Z^1+) : (Z^2+))/(\Pi +))$, $((Z^1\cdot Z^2)\rightarrow\Pi) = (((Z^1+)\cdot$ $\cdot(Z^2+))/(\Pi+))$ и т. п. Из принятых ранее определений и утверждений может быть выведена система утверждений T11.

Примем, например, такие определения, соответственно, тождества, различия, включения и невключения терминов по их значению (т. е. по их соответствию с Π):

1) $$(Z^1\alpha Z^2) = ((Z^1 : Z^2 : \ldots)\rightarrow\Pi),$$

где многоточие означает, что в скобках может быть любое число Z, соединенных знаком «:»;

$$(Z^1\beta Z^2) = (\Pi\rightarrow(Z^1 : Z^2 : \ldots))$$

$$(Z^1 \approx Z^2) = (Z^1 \alpha Z^2) \cdot (Z^1 \beta Z^2)$$

2) $(Z^1 - \alpha Z^2) = (Z^1 - \to \Pi) \vee (Z^2 - \to \Pi)$

$(Z^1 - \beta Z^2) = (\Pi - \to Z^1) \vee (\Pi - \to Z^2)$

$(Z^1 - \approx Z^2) = (Z^1 - \alpha Z^2) \vee (Z^1 - \beta Z^2)$

3) $(Z^1 e Z^2) = (Z^1 \to \Pi) \cdot (Z^2 \to (\Pi : \ldots))$,

где многоточие означает, что неизвестно, имеется здесь $(Z^2 \to \Pi)$ или $(Z^2 \to (\Pi : \Pi^1))$, $(Z^2 \to (\Pi : \Pi^1 : \Pi^2))$ и т. д., т. е. что допускается возможность последних;

$(Z^1 f Z^2) = (\Pi \to Z^1) \cdot ((\Pi : \ldots) \to Z^2)$

$(Z^1 \supset Z^2) = (Z^1 e Z^2) \cdot (Z^1 f Z^2)$

4) $(Z^1 - e Z^2) = (Z^1 - \to \Pi) \vee (Z^2 - \to (\Pi : \ldots))$

$(Z^1 - f Z^2) = (\Pi - \to Z^1) \vee ((\Pi : \ldots) - \to Z^2)$

$(Z^1 - \supset Z^2) = (Z^1 - e Z^2) \vee (Z^1 - f Z^2)$

5) $(Z^1 \sim Z^2) = (Z^1 \supset Z^2) \cdot (Z^2 \supset Z^1)$

$(Z^1 - \sim Z^2) = (Z^1 - \supset Z^2) \vee (Z^2 - \supset Z^1)$.

Выводятся, например, такие утверждения: $(Z^1 \alpha Z^2) = (Z^2 \alpha Z^1)$, $(Z^1 \alpha Z^2) \cdot (Z^2 \alpha Z^3) \vdash (Z^1 \alpha Z^3)$, $(Z^1 - \approx Z^2) \vdash (Z^1 - \leftrightarrow \Pi) \vee (Z^2 - - \leftrightarrow \Pi)$, $(Z^1 \sim Z^2) \vdash (Z^1 \leftrightarrow \Pi) \cdot (Z^2 \leftrightarrow \Pi)$ и т. п.

Высказываниями о терминах в данной теории определений будем называть такие высказывания о терминах, которые содержат в качестве предикатов только знаки R (т. е. высказывания типа «R; Z^1; Z^2; ...»). Значения истинности таких высказываний определяются по тем же принципам, что и высказывания вообще. Например, «$Z^1 \supset Z^2$» истинно, если, и только если, $(Z^1 \supset Z^2)$. К ним применимы также оценки их как логически истинных («$Z \approx Z$», «$(Z^1 \approx Z^2) : (Z^1 - \approx Z^2)$» и т. п.) и логически ложных («$Z - \approx Z$», «$(Z^1 \approx Z^2) \cdot (Z^1 - \approx Z^2)$» и т. п.)

Если $(Z^1 s \Pi)$ устанавливается таким способом, который описывается выводом $(Z^1 R Z^2) \cdot (Z^2 s^1 \Pi) \vdash (Z^1 s^2 \Pi)$, где s^1 и s^2 могут быть тождественными и различными, то термин Z^1 будем называть опосредствованным. Если для установления $(Z^1 s^2 \Pi)$ не требуется $(Z^1 R Z^2)$ и указанный вывод, то Z^1 будем называть непосредственным.

Термин, не расчленяемый на другие термины, будем называть простым, а расчленяемый на два или более различных по значению термина — сложным. Сложные термины будем изображать символом $(Z^1 + Z^2 + \ldots)$. По каким правилам данного языка осуществляется построение сложного термина, здесь безразлично. Что касается правил, не зависящих от свойств данного языка, то здесь возможно введение различного рода систем аксиом AII, определяющих свойства знака «+» и дающих основу для вывода утверждений $TIII$.

Если Z^1 и Z^2 различны в выборе и тождественны (тип тождества может быть указан в зависимости от определений) по значению и если по крайней мере один из них есть $(Z^3 + Z^4 + \ldots)$, то они различны, будем считать, по смыслу. Определять различие по смыслу просто как различие в выборе (по физической структуре) было бы неточно, так как в случае, если оба термина простые, говорить о каком бы то ни было их смысле вряд ли вообще целесообразно. Смысл термина есть его строение как сложного термина, что в обычной речи не всегда обнаруживается непосредственно и явно.

Примем, например, такие AII:

1) $(Z^1 + Z^2) \supset Z^1, \quad (Z^1 + Z^2) \supset Z^2$
2) $(Z^1 \supset Z^2) \vdash ((Z^1 + Z^3) \supset (Z^2 + Z^3))$
3) $((Z^1 + Z^2) \rightarrow \Pi) \vdash (Z^1 -\!\!\rightarrow \Pi) \cdot (Z^2 -\!\!\rightarrow \Pi)$.

Выводятся, например, такие утверждения $TIII$: $(Z^1 \sim Z^2) \vdash$ $\vdash ((Z^1 + Z^3) \sim (Z^2 + Z^3))$, так как по определению «$\sim$» из $(Z^1 \sim Z^2)$ следует $(Z^1 \supset Z^2) \cdot (Z^2 \supset Z^1)$, откуда, согласно только что принятому второму утверждению, следует $((Z^1 + Z^3) \supset (Z^2 +$ $+ Z^3)) \cdot ((Z^2 + Z^3) \supset (Z^1 + Z^3))$ и по определению «$\sim$» следует $((Z^1 + Z^3) \sim (Z^2 + Z^3))$; «$Z^1 \sim (Z^1 + Z^2)$» логически ложно, так как $(Z^1 \sim (Z^1 + Z^2)) \vdash (Z^1 \leftrightarrow \Pi) \cdot ((Z^1 + Z^2) \leftrightarrow \Pi) \vdash ((Z^1 + Z^2) \rightarrow$ $\rightarrow \Pi) \cdot (Z^1 \rightarrow \Pi)$, что противоречит третьему утверждению; «$(Z^1 \sim (Z^2 + Z^3)) \cdot (Z^2 \sim (Z^1 + Z^4))$» логически ложно, так как $(Z^1 \sim (Z^2 + Z^3)) \cdot (Z^2 \sim (Z^1 + Z^4)) \vdash (Z^1 \supset (Z^2 + Z^3)) \cdot (Z^2 \supset (Z^1 +$ $+ Z^4))$, $(Z^2 + Z^3) \supset Z^2$, откуда следует $(Z^1 \supset (Z^1 + Z^4))$, $(Z^1 \sim$ $\sim (Z^1 + Z^4))$ и, наконец, $(Z^1 \rightarrow \Pi) \cdot ((Z^1 + Z^4) \rightarrow \Pi)$, что противоречит третьему принятому утверждению.

Пусть Z^* есть некоторый произвольно выбранный предмет. Предварительно он может быть произвольно сконструирован, в частности сконструирован из терминов. Высказывание, благодаря которому этот предмет становится термином, будем называть определением. Z^* до определения будем называть предтермином, раз он берется как кандидат в термины, а после определения — понятием. Понятие, таким образом, выступает как термин, поставленный в соответствие с предметом посредством определения. И никакой проблемы понятия, отличной от проблемы определения, с этой точки зрения нет. В силу того, что Z^* выбирается с целью превратить его в термин, указанный произвол ограничен условиями выбора и свойствами Z^*. Одно то, что он должен будет фигурировать в высказываниях в качестве их части, предопределяет круг предметов, из числа которых он будет выбран. Другими словами, этот выбор определяет возможность в тех или иных условиях конструировать с его помощью предметы, подобные по своим физическим свойствам высказываниям.

Определение есть, таким образом, высказывание «Z^*; Z; R; U» (символ учитывает только состав определения), где «Z^*» есть непустое множество терминов, соответствующих предтерминам; «Z» — непустое множество терминов, соответствующих терминам; R — знаки, введенные определениями DII; U — принятые логические знаки. Это — высказывание в полном смысле слова, содержавшее термины «Z^*» и «Z» (субъекты), соответствующие предметам Z^* и Z, предикат R и какие-либо дополнительные логические знаки. Императивы, вроде «будем», «назовем» и т. п., исключаются. Логические принципы, имеющие силу в отношении высказываний, сохраняют и здесь силу. В частности, «Z^*; Z; R; U» логически истинно (правильно, непротиворечиво), если из конъюкции его и любого истинного высказывания не может быть выведено логически ложное (противоречивое) высказывание, и логически ложно (неправильно, противоречиво), если из него следует логически ложное высказывание. Вместе с тем, в силу особенностей Z и R, возникает ряд фактов, составляющих предмет теории определений, а не теории высказываний вообще.

Высказывание «Z^*; Z; R; U» превращает Z^* в термин при условии, если выполняются логические требования к составу и упорядоченности его и допускается возможность повторения выбора терминов, предтерминов и предметов вообще. Пусть, например, имеется высказывание «$Z^* \sim Z$». Поскольку ($ZsII$)

и по определению «$\sim$» выводится, что $(Z^* \leftrightarrow П) \cdot (Z \leftrightarrow П)$, то благодаря «$Z^* \sim Z$» устанавливается $(Z^* \leftrightarrow П)$. В общем виде имеем: $(Z^*RZ) \cdot (Zs^1П^*) \vdash (Z^*s^2П^*)$, где $П^*$ есть предмет, с которым устанавливается соответствие Z^*, а s^1 и s^2 могут быть тождественны. Непосредственно, т. е. без (Z^*RZ), связь $(Z^*sП^*)$ не устанавливается.

Рассматривать определение как образование знака вообще (а не только термина) было бы нецелесообразно по следующей причине. Мы можем высказать: «Пусть $П^1$ будет знаком для $П^2$». Но неизвестно, станет ли так на самом деле. Требуется установить какие-то реальные связи $П^1$ и $П^2$, из которых лишь абстрагируется связь соответствия. В определении же эта связь устанавливается самим определением, что возможно лишь для терминов. Причем термины — это не только слова, но могут быть вообще любыми определенными символами.

Соединение множества терминов, соответствующих терминам и предтерминам, и знаков R и U есть упорядоченное множество. Рассмотрение способов его упорядочивания и соответствующих правил составляет основную задачу общей теории определений. Остальные задачи, в частности рассмотрение выводов из определений, являются производными от нее. Остановимся лишь на некоторых моментах этой проблемы.

Указать тот или иной способ упорядочения «Z^*», «Z», R и U значит описать способ (тип, форму) определения. Для этого описания, естественно, можно пользоваться только теми знаками, которые введены: это — знаки терминов и предтерминов, знаки R, знаки «$\cdot$», «:», «/» и «+». Для упорядочения важны следующие понятия. Предтермин будем называть простым, если он не расчленяется на термины или (не исключающее «или») предтермины, и сложным, если он расчленяется таким образом. Сложные предтермины могут быть образованы двумя путями: а) только из терминов и б) из терминов и предтерминов, Во втором случае превращение предтермина, входящего в сложный предтермин, в термин есть функция от превращения сложного предтермина в термин. В первом случае комбинация терминов становится предтермином.

Будем говорить, что определение является простым (или состоит из одного высказывания), если оно содержит только один знак R. Сложным определением будем называть определение, состоящее из двух или более простых. Сложные определения образуются посредством знаков « · », «:» и «/». Систематический обзор допустимых определений необходимо, очевидно, начать с выяснения всевозможных типов простых определений и с выведения их правил. Дальнейший шаг — выяснение всевозможных их соединений в сложные, правил их построения, сведения к простым и т. д. При этом необходимо будет, помимо строения предтермина, учесть строение терминов (только со знаком «$+$»).

Высказывания типа «$Z \supset Z^*$» и «$Z^* \supset Z$» характеризуются тем, что $(Z \supset Z^*) \cdot (Z^* \leftrightarrow \Pi) \vdash (\Pi \rightarrow Z^*) \cdot (Z \rightarrow \Pi^*)$ и $(Z^* \supset Z) \cdot$ $\cdot (Z^* \leftrightarrow \Pi^*) \vdash (\Pi^* \rightarrow Z) \cdot (Z^* \rightarrow \Pi)$. Как видим, хотя здесь и устанавливается соответствие Z^* с предметом, но в выводе никогда не устанавливается $(Z^* \rightarrow \Pi^*) \vee (\Pi^* \rightarrow Z^*)$, если это уже не дано в посылках. Поэтому такие высказывания практически не играют роли определений, если они берутся сами по себе, не в системе других высказываний. Как элементы сложных определений они играют роль. Высказывания, содержащие знаки «α», «$\approx$» и «$\sim$», выполняют функции определений. Например, если «$Z^* \alpha Z$», то $(Z^* : Z) \rightarrow \Pi$; а согласно четвертому из AI$((Z^* :$ $: Z) \rightarrow \Pi) \cdot (Z^* +) \vdash (\Pi +)$. Для определения со знаком « $\sim$ », согласно выведенным выше второму и третьему утверждениям, имеем: «$(Z^* \sim (Z^1 + Z^2)) \cdot (Z^1 \sim (Z^* + Z^3))$» и «$Z^* \sim (Z^* + Z)$» логически ложны (неправильны, недопустимы). Доказательство этих утверждений можно рассматривать как доказательство известных правил определений — недопустимости круга и тавтологии. Эти правила можно дифференцировать, выведя соответствующие утверждения для знаков «α», «$\approx$» и др.

С точки зрения изложенного можно дать такое разъяснение аналитическим «определениям». Здесь нельзя говорить об определении в собственном смысле слова. Здесь имеет место соединение определения, допустим «$Z^* R^1 Z^1$», и высказывания «$Z^* R^2 Z^2$», где Z^* определен этим определением, а Z^2 поставлен в соответствие с предметом каким-то другим путем. Поскольку возможен вывод $(Z^* R^1 Z^1) \cdot (Z^* R^2 Z^2) \vdash (Z^1 R^3 Z^2)$, то это соединение воспринимается как аналитическое определение термина Z^2. Поскольку заранее предполагается $(Z^* R^2 Z^2)$, то Z^* определяется так, чтобы это задание было выполнено. С точки зрения структуры определения этот факт ничего нового не привносит. И если аналитические «определения» лишить звания определений, от этого ничто не пострадает: в теории определений такие логические образования могут быть вполне изучены.

Мы рассмотрели один из возможных путей построения общей теории определений и затронули с этой точки зрения лишь некоторые (случайно взятые) вопросы теории определений. Нам представляется возможным на основе изложенного сделать следующий вывод: общая теория определений может быть построена в предлагаемом направлении как дедуктивная теория, охватывающая самую разнообразную проблематику теории определений.

Литература

1. А. А. Зиновьев. Дедуктивный метод в исследовании высказываний о связях (в данном сборнике).
2. А. А. Зиновьев. Логическое строение знаний о связях. В сб.: «Логические исследования», Изд-во АН СССР, 1959.

Г. Н. Поваров

О ГРУППОВОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

ВВЕДЕНИЕ

С XIX в. по настоящее время теория булевых алгебр продолжает быть важным аппаратом математической логики. Возникновение и развитие этой теории дало ученым и инженерам в руки новое, весьма действенное средство решения комбинаторных логических задач. Особенно успешным было внедрение теории булевых алгебр и основанных на ней логических исчислений в логику проектирования релейных схем [По-12] [1].

Среди булевых алгебр особое место занимает алгебра булевых функций n переменных, которая является свободной булевой алгеброй с n образующими; любая другая булевая алгебра с n образующими есть гомоморфный образ алгебры булевых функций n переменных и тем самым изоморфна алгебре классов эквивалентности, задаваемой в алгебре булевых функций каким-нибудь отношением конгруентности [Би].

Для дальнейшего развития применений теории булевых алгебр к логическим вопросам науки и техники очень важно изучать свойства и систематику булевых функций. Это видно на примере теории релейных схем, где исследование систематики булевых функций тесно связано с систематизацией

[1] Буквы и цифры в квадратных скобках означают ссылки на литературу, указанную в списке в конце статьи.

логических условий работы релейных схем и помогает выявлять особенности синтеза разных классов схем [По-1], [По-10].

С указанной точки зрения большой интерес представляют явления групповой инвариантности булевых функций, и в частности явления симметрии булевых функций. Идея групповой инвариантности, оказавшаяся столь плодотворной в классической алгебре (теория Галуа), геометрии (Эрлангенская программа Клейна), кристаллографии (Федоров), физике (теория относительности Лоренца — Эйнштейна), вносит много интересного и в теорию булевых алгебр.

Еще в XIX в. стали изучать группу преобразований булевых функций, которую можно назвать группой преобразований однотипности. В частности, ее изучали Джевонс [Дж] и Клиффорд [Кл]. Используя эту группу и устанавливаемое ею отношение эквивалентности между булевыми функциями (которые в логике изображают сложные высказывания и сложные понятия), мы получаем возможность рассматривать булевы функции (сложные высказывания, сложные понятия) независимо от «координат» — системы наименований аргументов (простых высказываний, простых понятий). Инвариантная, «бескоординатная» характеристика булевой функции относительно этой группы преобразований называется типом булевой функции.

На фоне группы преобразований однотипности выделяются своим особо закономерным, замечательным строением те булевы функции, которые обнаруживают инвариантность относительно тех или иных преобразований однотипности, принимая «одинаковый вид» в «разных системах координат». В этом отношении весьма интересны симметрические булевы функции, инвариантные относительно перестановок аргументов — важной подгруппы преобразований однотипности. Симметрические булевы функции занимают, так сказать, в булевой алгебре место, аналогичное месту правильных многогранников в евклидовой геометрии.

В теории релейных схем булевы функции одного типа реализуются физически одинаковыми схемами, а инвариантность некоторых булевых функций относительно преобразований однотипности, в частности симметрия булевых функций, существенно упрощает синтез схем, реализующих булевы функции.

В связи с таким применением идеи групповой инвариантности к теории булевых алгебр (а через последнюю — к теории релейных схем) можно в некотором смысле говорить о распространении обобщенной Эрлангенской программы на теорию булевых алгебр (и, соответственно, на теорию релейных схем) [2]. Геометрическое значение Эрлангенской программы проявляется здесь, между прочим, в том, что теории групповой инвариантности булевых функций можно придать чисто геометрический смысл. Изображая булевы функции в виде гиперкубов с вершинами, окрашенными в два цвета, можно показать, что группа преобразований однотипности, действующая в алгебре булевых функций, изоморфна группе симметрии гиперкуба в многомерном евклидовом пространстве. Изучение и использование симметрии геометрических фигур искони составляли важный метод естествознания и техники [Шу], и потому интересно отметить применимость древнего метода к теории булевых алгебр,

В аналогичном аспекте можно рассматривать и другие группы преобразований булевых алгебр. Так, Ф. И. Маутнер [Му] сделал попытку рассматривать всю теорию булевых алгебр с точки зрения обобщенной Эрлангенской программы, представляя теорию булевых алгебр как теорию инвариантов некоей группы преобразований.

Следует, разумеется, сказать, что успешное применение идеи групповой инвариантности в разных областях не делает ее единственным исследовательским методом. Так, даже в геометрии есть отделы, где эта идея не получает непосредственного приложения [Ка]. Тем менее возможна «эрлангенизация» всей логики, которая, конечно, гораздо шире логических исчислений, основанных на теории булевых алгебр.

В настоящей статье рассматривается группа преобразований однотипности и излагаются результаты исследований автора по инвариантности булевых функций относительно этой группы. Приводимые оригинальные результаты частью печатались

---

[2] Идеи, получившие название «Эрлангенской программы», были изложены Ф. Клейном во вступительной лекции, прочитанной в Эрлангене в 1872 г. [Ке]; см. также [Ка]. Алгебраическая формулировка обобщенной Эрлангенской программы дается, например, Г. Вейлем [Ве]. Однако последний пишет о ней в несколько гносеологизированном стиле.

ранее порознь, в кратких заметках. Ввиду отсутствия обзорной литературы приведены основные сведения о групповой инвариантности булевых функций. На более специальные результаты других авторов делаются в большинстве случаев только ссылки.

Сведения из математической логики и теории булевых алгебр, нужные для настоящей статьи, читатель может найти в [Би], [ГлА], [Кт], [Се]. Сведения из теории групп можно найти в [Ва], [Ве], [Кр].

Основные идеи статьи докладывались на секции математической логики III Всесоюзного математического съезда (июнь 1956) и на семинаре по логике в Институте философии АН СССР (март 1957).

Автор выражает благодарность Ю. Л. Сагаловичу, просмотревшему подробно рукопись статьи и сделавшему ряд полезных замечаний.

Глава I

ПОНЯТИЕ ТИПА БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

§ 1.1. Определение 1. Булева функция n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функцией одного типа с булевой функцией n переменных $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переходит в $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при некоторой перестановке аргументов и замене некоторых аргументов их отрицаниями.

Например, функция $f(\overline{y}, x, z)$ — одного типа с функцией $f(x, y, z)$, ибо $f(\overline{y}, x, z)$ переходит в $f(x, y, z)$ при перестановке x и y и последующей замене переменной x ее отрицанием $\overline{x}$.

Вместо слов «замена переменной отрицанием ее» мы будем пользоваться также выражением «инверсирование переменной», поскольку операция отрицания в булевой алгебре иначе называется операцией инверсии.

Отношение однотипности рефлексивно, симметрично и транзитивно и поэтому является отношением эквивалентности. Множество булевых функций n переменных распадается на попарно непересекающиеся классы — множества однотипных функций. Каждую функцию данного класса можно выбрать в качестве представителя этого класса. Говоря о типе булевой функции, мы имеем в виду о б щ и е с в о й с т в а членов класса, к которому принадлежит эта функция. Понятие типа булевой функции аналогично понятию мощности множества или понятию типа упорядоченного множества в том, что оно опирается на определение через абстракцию [3]. Для краткости мы иногда будем заменять термин «тип булевой функции n переменных» термином «n-местный булев тип».

Можно сказать, что булевы функции одного типа отличаются только наименованиями аргументов, и потому описывают в исчислении высказываний по существу одну и ту же логическую форму сложных высказываний, а в исчислении понятий — одну и ту же логическую форму сложных понятий. Действительно, что такое перестановка аргументов, как не их переименование? С другой стороны, в классической логике благодаря закону двойного отрицания ($\bar{\bar{x}} = x$) имеет место симметрия утверждения и отрицания как для высказываний (суждений), так и для понятий. Не изменяя критерия истинности и ложности, любое высказывание можно представить либо в виде утверждения, либо в виде отрицания («идет снег» = «неправда, что снег не идет»); не изменяя содержания и объема понятия, можно определить понятие либо через положительный, либо через отрицательный термин (металлоид = неметалл). Поэтому замена x на $\bar{x}$ и, следовательно, $\bar{x}$ на $\bar{\bar{x}} = x$ — это не что иное, как переименование взаимозависимых переменных x и $\bar{x}$.

С этой точки зрения систему наименования n переменных, включая их положительное или отрицательное представление, можно назвать «системой координат (системой отсчета)» в «пространстве» булевых функций n переменных. Если в этом смысле выбрать для всех булевых функций n переменных одну и ту же «систему координат», то однотипные булевы функции будут аналогами геометрических фигур одинаковой формы, занимающих различное положение относительно одной и той же системы геометрических координат. В то же время однотипные функции можно рассматривать как запись одной и той же логической формы в разных «системах координат»; при этом булев тип служит а б с о л ю т н о й характеристикой логической формы,

[3] О таких определениях см. [Ал], гл. I, § 3, 5.

подобно тому как векторы и тензоры служат абсолютными характеристиками геометрических и физических величин, заданных в пространстве.

§ 1.2. Типы булевых функций изучались еще в XIX в. Джевонсом ([Дж], гл. VII) применительно к проблемам индуктивной (вернее, традуктивной) логики. Джевонс рассматривал высказывания об объемных связях между классами (качествами) и умозаключения полной индукции, посредством которых такие высказывания преобразуются из «грубой», эмпирической формы, перечисляющей все непустые пересечения классов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и их отрицаний, в более простые, более правильные формы, которые показывали бы в явном виде существующие включения между классами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или их комбинациями. Такая полная индукция носит по существу комбинаторный характер. Джевонс называл ее также выводом законов взаимозависимости качеств (классов) из находимых в опыте комбинаций качеств (классов) [4].

Алгебраически высказывания о включениях между классами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или их комбинациями равносильны булеву уравнению $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, где $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — булева функция от классов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, равная сумме непустых конституентов единицы по $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Таким образом, речь шла о переводе булевой функции, разложенной на конституенты единицы, в некую более простую форму. Для булевых функций одного типа эта простая форма по существу одинакова, так как функции одного типа совпадают с точностью до переименования аргументов. Следовательно, множество типов булевых функций n переменных характеризует многообразие возможных законов объемной взаимозависимости n понятий (классов, качеств). Ввиду этого, полагал Джевонс, можно было бы облегчить полную индукцию, составив таблицу, где для каждого типа буле-

---

[4] Исследование этих комбинаторных умозаключений составляет только часть учения об индукции, изложенного в трудах Джевонса, в частности в книге [Дж]. Следует сказать, что в целом Джевонс понимал индукцию очень упрощенно и односторонне; так, он сводил все научные законы к объемным законам взаимозависимости качеств (классов). Кроме того, его учение о неполной индукции пронизано нарочитым агностицизмом, с помощью которого он хотел примирить естествознание и теологию.

вых функций n переменных указывались бы объемные связи между n классами (понятиями), соответствующие этому типу. Полная индукция объемных законов сводилась бы тогда к отысканию типа булевой функции и переименованию классов в табличном типовом законе. Джевонс построил [Дж] такие таблицы для $n = 2$ и $n = 3$. В эти таблицы входят и обычные силлогистические связи понятий.

После У. С. Джевонса типы булевых функций исследовал ряд других авторов, в том числе У. К. Клиффорд [Кл], Э. Шрёдер [Шр] и Д. Пойя [Пя] [5]. Статья последнего важна четкими определениями и современной математической трактовкой вопроса на теоретико-групповой основе. В отличие от Джевонса, Пойя рассматривал булевы функции как сложные высказывания, состоящие из простых высказываний. Разумеется, это не меняет алгебраического существа проблемы. Подобно Джевонсу, Пойя указывал на применимость теории булевых типов к «эвристике».

§ 1.3. В настоящее время изучение типов булевых функций нашло важные применения в технической логике. Назовем прежде всего теорию релейных схем, для которой теория булевых типов важна тем, что булевы функции одного типа реализуются физически одинаковыми схемами. Это позволяет свести схемную реализацию множества булевых функций n переменных к схемной реализации множества типовых булевых функций, выбранных по одной из каждого класса однотипных функций n переменных. Тем самым расширяются, например, возможности табулирования схем.

В самом деле, естественно попытаться собрать итоги применения всего многообразия существующих методов синтеза в виде таблиц наилучших схемных реализаций булевых функций, а также заготовить таблицы впрок. Но так как число булевых функций n переменных равно 2^{2^n}, то табулирование всех возможных булевых функций, легко осуществимое при $n = 1$

[5] Эти исторические ссылки не являются исчерпывающими и не устанавливают чьего-либо приоритета. Обзор ранних исследований по групповой инвариантности булевых функций мог бы послужить темой самостоятельной работы. Фамилию «Д. Пойя» автор в предыдущих работах транскрибировал как «Г. Полья», что менее точно.

и $n = 2$, делается несколько громоздким уже при $n = 3$, а при $n = 4$ оно представляет значительные трудности. Действительно,

$$2^{2^1} = 4;\ 2^{2^2} = 16;\ 2^{2^3} = 256;\ 2^{2^4} = 65\,536.$$

Если, однако, табулировать лишь типовые функции, то случай $n = 4$ делается вполне обозримым, а случай $n = 3$ — даже тривиально легким, ибо в этих случаях число типов намного меньше числа функций.

В книге [Шт] дана таблица типовых функций четырех переменных и их электронноламповых реализаций (см. [Шт], приложение, табл. 3) [6]. Автор [По-3] построил таблицу контактных реализаций этих же типовых функций четырех переменных. Аналогичная таблица контактных реализаций была опубликована также в книгах Р. Игонне и Р. Греа [ИГ-1] (первый вариант), [ИГ-2] (второй вариант). Таким образом, синтез комбинаторных электронноламповых схем с четырьмя входными напряжениями и синтез контактных двухполюсников с четырьмя распорядительными реле сведены к пользованию этими таблицами. Особые таблицы ([Шт], приложение, табл. 1 и 2) позволяют найти для каждой функции четырех переменных ее типовую функцию. Указанные таблицы типовых схем являются в некотором роде аналогами таблиц Джевонса.

Теория типов булевых функций применима, далее, в теории кодирования, так как однотипными булевыми функциями изображаются эквивалентные двоичные коды (см. § 3.6).

Предложение Джевонса использовать типы булевых функций для более легкого выявления объемных связей между классами, по-видимому, может найти практическое применение в области информационных (справочно-библиографических) поисков, где сейчас ведется интенсивная работа по созданию новых методов, допускающих механизацию и автоматизацию. Укажем, например, на статью [ТВ] о применении исчисления классов для выявления объемных связей между классами элементов информации по заданному перечню непустых и пустых

---

[6] В книге [Шт] пользуются понятием типа булевой функции неявно, без употребления этого термина, на что я указывал в рецензии [По-4]. Но, разумеется, замена термина не меняет существа дела.

пересечений (произведений) этих классов в случае, когда информация организована по методу координатной индексации. Именно такая традукция рассматривалась Джевонсом, и его таблицы могли бы использоваться здесь.

В этом же плане возможно применение таблиц Джевонса в логических машинах и самоорганизующихся системах типа гомеостата Эшби [Бо], [Эб].

Известны попытки применять теорию типов булевых функций и к другим, уже не техническим вопросам. Так, В. Белевич [Бе] использовал теорию типов булевых функций в своем исследовании числа и характеристик фонем в различных языках, в особенности в русском; правда, предложенное Белевичем применение основано на физиологических гипотезах, требующих специального обсуждения и проверки, и потому также носит гипотетический характер. Автор лично не берется судить здесь об этих гипотезах.

§ 1.4. Так как алгебра булевых функций n переменных есть свободная булева алгебра с n образующими, то любая другая булева алгебра B с n образующими есть гомоморфный образ алгебры булевых функций n переменных и отношение однотипности между булевыми функциями индуцирует в алгебре B отношение эквивалентности, выражающее равноправие образующих алгебры B по отношению друг к другу и по отношению к своим отрицаниям; элементы алгебры B тоже можно распределить по булевым типам.

Если, однако, эта алгебра B не изоморфна алгебре булевых функций и, следовательно, не свободна, то между образующими имеются дополнительные зависимости, не вытекающие из общих аксиом булевой алгебры и потому позволяющие видоизменять и расширять условия равноправия образующих в алгебре B. При таком расширенном понимании условий равноправия образующих получаются различные видоизменения и обобщения понятия типа булевой функции, учитывающие специфику различных несвободных булевых алгебр.

Так, обобщением понятия типа булевой функции является введенное автором [По-3] понятие типа последовательности (кортежа) булевых функций и понятие типа булевой матрицы, которое ввел И. Ниномия [Ни]. Эти обобщения были вызваны применением соответствующих булевых алгебр к теории релейных схем.

Две последовательности k булевых функций n переменных называются последовательностями одного типа, если одна последовательность переходит в другую при перестановке членов последовательности, или перестановке переменных, или при инверсировании переменных. Например, последовательность $f(x, y), g(x, y), h(x, y)$ одного типа с последовательностью $g(y, \bar{x}), f(y, \bar{x}), h(y, \bar{x})$.

Две $k \times k$-матрицы $\|f_{ij}\|$ и $\|g_{ij}\|$ булевых функций от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются матрицами одного типа, если одна матрица переходит в другую при перестановке строк, сопровождаемой перестановкой соответствующих столбцов, или при перестановке аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, или при инверсировании этих аргументов (всех или некоторых) [Нп].

Дальнейшим обобщением было бы понятие типа m-мерной булевой матрицы порядка k. Можно также заменить квадратные матрицы прямоугольными и производить перестановку столбцов независимо от перестановки строк.

При $n = 0$ последовательности булевых функций суть последовательности нулей и единиц, а булевы матрицы суть матрицы из нулей и единиц. Матрицы из нулей и единиц описывают различные отношения. Так, $k \times k$-матрицы описывают двучленные (диадические) отношения, заданные на множестве из k элементов; $p \times q$-матрицы описывают двучленные (диадические) отношения между элементами множества мощности p и элементами множества мощности q; многомерные матрицы описывают многочленные (полиадические) отношения. Однотипность матриц означает изоморфизм («равноструктурность») описываемых ими отношений. Структура («реляционное число») отношения ϱ, как известно, определяется через абстракцию как свойство, которое отличает все отношения, изоморфные с ϱ.

Таким образом, обобщения понятия типа булевой функции тесно связаны с основными понятиями теории отношений и в этом аспекте могут представить интерес для исследований по основаниям математики.

Наконец, можно видоизменить понятие типа булевой функции в понятие типа «предикативной» функции, областью значений которой служит двухэлементная булева алгебра и аргументы которой принимают значения из произвольных множеств. Такие функции составляют булеву алгебру с образующими x_i^j, где j есть элемент области значений аргумента x_i и где $x_i^j = 1$ тогда и только тогда, когда $x_i = j$ (см. [Ост], § 1). В логике эти функции описывают предикаты, так что их алгебру можно понимать как узкое исчисление предикатов. Две «предикативные» функции n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будут однотипными, если одна из них получается из другой путем перестановки аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и перестановки значений всех или некоторых аргументов. Перестановка значений аргумента x_i влечет соответствующую перестановку образующих x_i^j, что в случае двухэлементной области значений аргумента x_i равносильно инверсированию аргумента x_i. Явления групповой инвариантности предикативных (в нашем смысле) функций относительно перестановок значений аргументов изучались, в частности, Ф. И. Маутнером [Му]. Конечно, можно пойти дальше и ввести понятия типов последовательностей и матриц предикативных функций. Все эти понятия были бы, между прочим, интересны для теории контактных схем с шаговыми переключателями, как это ясно, например, из работ [Гл-1], [Ост].

Глава 2

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОДНОТИПНОСТИ

§ 2.1. **Определение 2.** Описанные в определении 1 преобразования, которые переводят однотипные булевы функции друг в друга, мы будем называть **преобразованиями однотипности.**

Нетрудно видеть, что преобразования однотипности булевых функций n переменных образуют группу степени 2^{2^n}. В самом деле, множество каких-либо преобразований называется группой, если оно: а) содержит вместе с любыми двумя своими преобразованиями также и их произведение; б) вместе с любым своим преобразованием содержит также преобразование, обратное к этому преобразованию [Кр]. Произведением $T_2 T_1$

двух преобразований T_2 и T_1 называется преобразование, состоящее в последовательном выполнении сначала преобразования T_1 и затем [7] преобразования T_2. Очевидно, что множество преобразований однотипности булевых функций n переменных удовлетворяет этим требованиям, а следовательно, действительно является группой. Степень группы равна мощности преобразуемого множества, а эта последняя равна в случае булевых функций n переменных числу 2^{2^n}.

Из группового свойства преобразований однотипности следует, что они являются взаимнооднозначными отображениями множества булевых функций на себя. Классы однотипных функций суть области транзитивности этой группы. Группу преобразований однотипности булевых функций n переменных мы обозначим символом $\mathfrak{T}_n$.

Сказанное в § 1.1 означает, что n-местные булевы типы инвариантны относительно группы $\mathfrak{T}_n$. С точки зрения обобщенной Эрлангенской программы можно сказать, что группа $\mathfrak{T}_n$, устанавливая отношение эквивалентности (однотипности) между булевыми функциями n переменных, тем самым характеризует степень однородности их «пространства», подобно тому как группа движений характеризует однородность метрического евклидова пространства, а группа преобразований Лоренца — однородность четырехмерного мира теории относительности [8].

При заданной «системе координат» (т. е. системе наименования аргументов) группа $\mathfrak{T}_n$ описывает преобразования «пространства» булевых функций, не нарушающие его строения, и потому может рассматриваться как группа автоморфизмов этого пространства. С другой стороны, группу $\mathfrak{T}_n$ можно рассматривать как группу преобразований координат в «пространстве» булевых функций n

---

[7] Порядок записи перемножаемых преобразований есть дело соглашения. Часто принимают обратный порядок; $T_2\,T_1$ означает тогда: сначала T_2, затем T_1 (см. [Ва], стр. 30). Такой обратный порядок принят, в частности, в цитируемой здесь книге [Кр] и статье К. Э. Шеннона [Ше-2].

[8] Ниже, в гл. 3, § 3 мы увидим, что множество булевых функций действительно является метрическим пространством.

переменных, которая характеризует «относительность» производимых в нем «наблюдений» [9].

§ 2.2. Преобразования однотипности изучались еще Джевонсом [Дж] и Клиффордом [Ки], которые, однако, использовали теоретико-групповые идеи в неявном виде. Систематически группу $\mathfrak{T}_n$ исследовали Пойя [Пя], Шеннон [Ше-2], Слепян [Сл-1] и др. Здесь мы перечислим ее основные свойства.

Нетрудно видеть, что группа $\mathfrak{T}_n$ порождена [10] двумя своими подгруппами: подгруппой перестановок аргументов и подгруппой инверсирований аргументов. Первая подгруппа изоморфна симметрической группе $\mathfrak{S}_n$ степени n, и ее порядок равен $n!$. Мы обозначим эту подгруппу также символом $\mathfrak{S}_n$. Вторая подгруппа является периодической абелевой группой порядка 2^n, где каждый элемент имеет порядок 2; мы обозначим ее символом $\mathfrak{N}_n$. Итак, $\mathfrak{T}_n = \{\mathfrak{S}_n, \mathfrak{N}_n\}$.

Перестановка аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, выражаемая подстановкой (взаимнооднозначным отображением)

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_{i_1} & x_{i_2} & \ldots & x_{i_n} \end{pmatrix},$$

обозначается символом $S_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$. Инверсирование аргументов обозначается символом $N_{c_1, c_2, \ldots, c_n}$, где $c_i = 1$, если x_i инверсируется (заменяется на $\bar{x}_i$), и $c_i = 0$, если x_i не инверсируется. Если аргументы обозначены разными буквами, например буквами $x, y, z, \ldots$, то эти буквы считаются занумерованными в алфавитном порядке. Для краткости можно опускать запятые в индексах $i_1, i_2, \ldots, i_n$ и $c_1, c_2, \ldots, c_n$, если только нет опасности принять получаемые выражения $i_1 i_2 \ldots i_n$ и $c_1 c_2 \ldots c_n$

[9] То обстоятельство, что понятие типа булевых функций, определенное через абстракцию, оказалось связанным с некоторой группой преобразований, отнюдь не случайно. Наоборот, смысл Эрлангенской программы как раз в том, чтобы дать теоретико-групповую характеристику отношений эквивалентности и абстрагируемых с их помощью понятий.

[10] Подгруппа группы G, состоящая из всех произведений, которые можно образовать из конечного числа степеней элементов, взятых из подгрупп $H, K, L, \ldots$ группы G, называется **порожденной** подгруппами $H, K, L, \ldots$ и обозначается символом $\{H, K, L, \ldots\}$ (см. [Кр]). В нашем случае подгруппой $\{\mathfrak{S}_n, \mathfrak{N}_n\}$ является сама группа $\mathfrak{T}_n$.

за произведения. Вместо индекса $i_1, i_2, \ldots, i_n$ (или $i_1 i_2 \ldots i_n$) при букве S пишут также циклическое разложение подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n \\ i_1 & i_2 \ldots i_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$N_{101} f(x_1, x_2, x_3) = f(\overline{x_1}, x_2, \overline{x_3}), \quad N_{101} f(x_2, x_1, x_3) = f(x_2, \overline{x_1}, \overline{x_3}),$$
$$S_{312} f(x_1, x_2, x_3) = S_{(132)} f(x_1, x_2, x_3) = f(x_3, x_1, x_2),$$
$$S_{312} S_{312} f(x_1, x_2, x_3) = S_{231} f(x_1, x_2, x_3) = S_{(123)} f(x_1, x_2, x_3) =$$
$$= f(x_2, x_3, x_1),$$
$$N_{011} S_{312} N_{101} S_{231} f(x, y, z) = N_{011} S_{312} N_{101} f(y, z, x) =$$
$$= N_{011} S_{312} f(y, \overline{z}, \overline{x}) = N_{011} f(x, \overline{y}, \overline{z}) = f(x, y, z).$$

Мы видим, что символы $N_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ устанавливают взаимно-однозначное соответствие между элементами группы $\mathfrak{N}_n$ и n-разрядными двоичными числами [11] $c_1 c_2 \ldots c_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \, 2^{n-i}$; поэтому преобразований группы $\mathfrak{N}_n$ столько же, сколько n-разрядных двоичных чисел, т. е. действительно 2^n. Для краткости можно, подобно Э. Дж. Мак-Класки [Мк], писать N_α вместо $N_{c_1 c_2 \ldots c_n}$, где α — десятичный эквивалент двоичного числа $c_1 c_2 \ldots c_n$; например,

$$N_{101} = N_5, \quad N_{111} = N_7, \quad N_{001} = N_1.$$

Пусть $c_1 c_2 \ldots c_n$ и $d_1 d_2 \ldots d_n$ — произвольные n-разрядные двоичные числа. Тогда

$$N_{c_1 c_2 \ldots c_n} N_{d_1 d_2 \ldots d_n} = N_{c_1 \oplus d_1, \, c_2 \oplus d_2, \, \ldots, \, c_n \oplus d_n},$$

где $c_i \oplus d_i = c_i \overline{d_i} + \overline{c_i} d_i$ (знак $+$ означает булево сложение). Коммутативность булевой операции $\oplus$ сразу же указывает на то, что группа $\mathfrak{N}_n$ абелева [12].

Положим по определению

$$c_1 c_2 \ldots c_n \oplus d_1 d_2 \ldots d_n = c_1 \oplus d_1, c_2 \oplus d_2, \ldots, c_n \oplus d_n$$

и условимся называть выражение в левой части равенства **поразрядной суммой** двоичных чисел $c_1 c_2 \ldots c_n$ и $d_1 d_2 \ldots d_n$.

[11] Символ $c_1 c_2 \ldots c_n$ двоичного числа следует понимать как последовательность $c_1, c_2, \ldots, c_n$ с опущенными запятыми; c_1 есть старший разряд числа, c_n — младший разряд.

[12] О свойствах операции $\oplus$ см. ниже, гл. 9.

Тогда

$$N_{c_1 c_2 \dots c_n} N_{d_1 d_2 \dots d_n} = N_{c_1 c_2 \dots c_n \oplus d_1 d_2 \dots d_n},$$

откуда вытекает, что группа $\mathfrak{N}_n$ изоморфна группе (модулю), образованной n-разрядными двоичными числами относительно операции поразрядного сложения. Поэтому результаты, полученные для этой последней группы, например в работе Д. Слепяна [Сл-2], непосредственно применимы и к $\mathfrak{N}_n$.

Пусть I — тождественное преобразование. Тогда $N_{00\dots 0} = I$ и

$$N_{c_1 c_2 \dots c_n} N_{c_1 c_2 \dots c_n} = N_{c_1 \oplus c_1,\, c_2 \oplus c_2, \dots, c_n \oplus c_n} = N_{00\dots 0} = I,$$

так что каждое преобразование $N_{c_1 c_2 \dots c_n}$ действительно имеет порядок 2. Иными словами, каждое преобразование $N_{c_1 c_2 \dots c_n}$ обратно к себе самому:

$$(N_{c_1 c_2 \dots c_n})^{-1} = N_{c_1 c_2 \dots c_n}.$$

В группе $\mathfrak{S}_n$

$$S_{12\dots n} = I.$$

Тождественное преобразование $I = N_{00\dots 0} = S_{12\dots n}$ является единственным общим элементом групп $\mathfrak{N}_n$ и $\mathfrak{S}_n$. При $n > 2$ группа $\mathfrak{S}_n$ является неабелевой и содержит элементы более чем 2-го порядка. Справедливы соотношения [13]:

$$S_{k_1 k_2 \dots k_n} S_{i_1 i_2 \dots i_n} = S_{t_1 t_2 \dots t_n},$$
$$S^{-1}_{i_1 i_2 \dots i_n} = S_{j_1 j_2 \dots j_n},$$

где

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

---

[13] Необходимо помнить, что, согласно принятому нами порядку записи перемножаемых преобразований, произведение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

означает: сначала $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$, потом $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$.

§ 2.3. Группа $\mathfrak{N}_n$ не является циклической при $n > 2$, группа $\mathfrak{S}_n$ — при $n > 3$. Группа $\mathfrak{N}_n$ имеет неприводимую систему образующих [14] из n элементов:

$$N_1, N_2, \ldots, N_{2^{i-1}}, \ldots, N_{2^{n-1}},$$

где $1, 2, \ldots, 2^{i-1}, \ldots, 2^{n-1}$ — десятичные эквиваленты соответствующих двоичных чисел; а именно, числу 2^{n-i} отвечает двоичное число $c_1 c_2 \ldots c_n$, в котором $c_i = 1$, $c_1 = \ldots = c_{i-1} = c_{i+1} = \ldots = c_n = 0$. Группа же $\mathfrak{S}_n$ имеет (см. [Кр], стр. 40) неприводимую систему образующих всего из двух элементов, например из элементов

$$S_{2134\ldots n} = S_{(12)} \text{ и } S_{23\ldots n1} = S_{(12\ldots n)}.$$

Группы $\mathfrak{N}_n$ и $\mathfrak{S}_n$ перестановочны. Более того, каждый элемент группы $\mathfrak{S}_n$ перестановочен с группой $\mathfrak{N}_n$, а именно

$$\left.\begin{aligned} N_{c_1 c_2 \ldots c_n} S_{i_1 i_2 \ldots i_n} &= S_{i_1 i_2 \ldots i_n} N_{c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_n}} \\ S_{i_1 i_2 \ldots i_n} N_{c_1 c_2 \ldots c_n} &= N_{c_{j_1} c_{j_2} \ldots c_{j_n}} S_{i_1 i_2 \ldots i_n} \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

где

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Например,

$$S_{2314} N_{1100} f(w, x, y, z) = N_{0110} S_{2314} f(w, x, y, z) = f(\bar{x}, \bar{y}, w, z).$$

Ввиду равенств (1) всякий элемент из $\mathfrak{T}_n$, например какой-нибудь элемент вида $S_\delta N_\varepsilon S_\vartheta N_\eta S_\omega$, можно представить в виде $N_\alpha S_\beta = S_\beta N_\gamma$. Так как группы $\mathfrak{S}_n$ и $\mathfrak{N}_n$ имеют только один общий элемент — тождественное преобразование I, то такое представление единственно. Иными словами, группа $\mathfrak{T}_n$ является произведением своих подгрупп $\mathfrak{S}_n$ и $\mathfrak{N}_n$ и имеет порядок

---

[14] Системой образующих какой-либо группы G называется такое множество M, что любой элемент из G может быть записан хотя бы одним способом в виде произведения конечного числа степеней элементов из M. Система образующих группы G называется неприводимой, если никакая собственная подсистема этой системы не является системой образующих для G.

$n!\,2^n$. Символически

$$\mathfrak{T}_n = \mathfrak{S}_n \mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}_n \mathfrak{S}_n.$$

Равенства (1), кроме того, означают, что $\mathfrak{N}_n$ есть нормальный делитель группы $\mathfrak{T}_n$.

Справедливо также равенство

$$N_{11\ldots 1} S_{i_1 i_2 \ldots i_n} = S_{i_1 i_2 \ldots i_n} N_{11\ldots 1},$$

означающее, что преобразование $N_{11\ldots 1} = N_{2^n-1}$ перестановочно с группой $\mathfrak{S}_n$. Других нетождественных преобразований $N_{c_1 c_2 \ldots c_n}$, перестановочных с группой $\mathfrak{S}_n$, не существует.

Как известно, подгруппа H группы G, состоящая из всех элементов группы G, перестановочных с подгруппой H группы G, называется нормализатором группы H в группе G. Из сказанного выше следует, что нормализатором подгруппы $\mathfrak{N}_n$ в группе $\mathfrak{T}_n$ является вся группа $\mathfrak{T}_n$, а нормализатором подгруппы $\mathfrak{S}_n$ в группе $\mathfrak{T}_n$ является подгруппа $\{N_{11\ldots 1}\}\,\mathfrak{S}_n$, т. е. произведение подгруппы $\mathfrak{S}_n$ на подгруппу $\{N_{11\ldots 1}\}$, порожденную преобразованием $N_{11\ldots 1}$ и потому состоящую из двух элементов: $N_{11\ldots 1}$ и $I = N_{11\ldots 1}^2$. Кратко мы будем обозначать группу $\{N_{11\ldots 1}\}\,\mathfrak{S}_n = \{N_{2^n-1}\}\,\mathfrak{S}_n$ символом $\hat{\mathfrak{S}}_n$.

Глава 3
СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ОДНОТИПНЫМИ БУЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

§ 3.1. Булевы функции n переменных можно с точностью до изоморфизма отождествить с множествами конституентов единицы по n переменным, т. е. с множествами точек (атомов) алгебры булевых функций n переменных (см. [Би], гл. X). Как известно, конституенты единицы по n переменным суть произведения вида

$$\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_n,$$

где $\tilde{x}_i$ есть либо x_i, либо $\bar{x}_i$; число их равно 2^n. Сокращенно конституент $\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_n$ обозначается символом $p_{d_1 d_2 \ldots d_n}$, где

$d_i = 1$ при $\tilde{x}_i = x_i$ и $d_i = 0$ при $\tilde{x}_i = \bar{x}_i$; вместо $p_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ пишут также p_α, где α — десятичный эквивалент двоичного числа $d_1 d_2 \ldots d_n$ (d_1 принимается за старший разряд, d_n — за младший). Например, $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = p_{100} = p_8$, $\bar{x}_1 \bar{x}_1 x_3 = p_{001} = p_1$.

Каждое преобразование однотипности $S_{i_1 i_2 \ldots i_n} N_{c_1 c_2 \ldots c_n} \in \mathfrak{T}_n$ есть вместе с тем перестановка конституентов единицы $p_{d_1 d_2 \ldots d_n}$. А именно

$$S_{i_1 i_2 \ldots i_n} N_{c_1 c_2 \ldots c_n} p_{d_1 d_2 \ldots d_n} = S_{i_1 i_2 \ldots i_n} p_{c_1 \oplus d_1,\, c_2 \oplus d_2, \ldots, c_n \oplus d_n} =$$
$$= p_{c_{i_1} \oplus d_{i_1},\, c_{i_2} \oplus d_{i_2}, \ldots, c_{i_n} \oplus d_{i_n}} = p_{c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_n} \oplus d_{i_1} d_{i_2} \ldots d_{i_n}}.$$

Таким образом, при преобразованиях однотипности конституенты (атомы) переходят в конституенты (атомы), а группа $\mathfrak{T}_n$ может быть вложена в группу т о ч е ч н ы х п р е о б р а з о в а н и й алгебры булевых функций n переменных. Точечные преобразования, т. е. перестановки точек (атомов) этой алгебры, образуют группу, изоморфную симметрической группе $\mathfrak{S}_{2^n}$ степени 2^n. Следовательно, группа $\mathfrak{T}_n$ изоморфна подгруппе группы $\mathfrak{S}_{2^n}$.

Число конституентов единицы $p_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ в функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ мы назовем ее р а н г о м[15]. Так как при преобразованиях однотипности конституенты единицы переходят в конституенты единицы, то однотипные функции всегда обладают одним и тем же рангом; ранг функции n переменных есть инвариант группы $\mathfrak{T}_n$. Поэтому можно говорить о р а н г е т и п а. Так как равенство ранга есть необходимое условие однотипности функций, то неравенство рангов есть достаточное условие разнотипности функций.

§ 3.2. Отношение R между булевыми функциями f и g называется и н в а р и а н т н ы м относительно данной группы G преобразований булевых функций, если для всех $T \in G$ и всех f и g наличие fRg влечет $(Tf) R (Tg)$; операция $\varphi(f, g, \ldots, k)$ над булевыми функциями $f, g, \ldots, k$ называется и н в а р и а н т н о й относительно G, если для всех $T \in G$ и всех $f, g, \ldots, k$ равенство $F = \varphi(f, g, \ldots, k)$ влечет $TF = \varphi(Tf, Tg, \ldots, Tk)$.

---

[15] Число булевых функций ранга m от n переменных равно $C_{2^n}^m$. Булевы функции n переменных распределяются по рангу на $2^n + 1$ классов; эти классы имеют, соответственно, ранги 0, 1, 2,..., 2^n.

Нетрудно видеть, что булевы операции $f+g, fg, f \oplus g, \overline{f}$ и отношения $f \geqslant g, f \leqslant g, f > g, f < g, f = g$ инвариантны относительно группы $\mathfrak{T}_n$. Более того, они инвариантны относительно группы $\mathfrak{S}_{2^n}$ всех точечных преобразований алгебры булевых функций n переменных. Итак, для любого $T \in \mathfrak{T}_n$ и любых булевых функций n переменных справедливы тождества:

$$T(f+g) = Tf + Tg,\ T(fg) = (Tf)(Tg),\ T\overline{f} = \overline{Tf},$$
$$T(f \oplus g) = Tf \oplus Tg.$$

Это означает, в частности, что отрицания однотипных функций суть однотипные функции. В самом деле, если $f = Tg$, то $\overline{f} = \overline{Tg} = T\overline{g}$. Следовательно, на множестве n-местных булевых типов можно определить операцию отрицания, ставящую в соответствие типу функции f тип функции $\overline{f}$. Если данный тип обладает рангом m $(m = 0, 1, \ldots, 2^n)$, то отрицание данного типа обладает рангом $2^n - m$. При $m = 2^{n-1}$ ранг типа и ранг его отрицания совпадают. Более того, в то время как функция всегда отлична от своего отрицания, тип при $m = 2^{n-1}$ может совпадать со своим отрицанием. Это означает однотипность булевой функции с ее отрицанием.

Определение 3. Булева функция, однотипная со своим отрицанием, будет называться **антивариантной**.

Всякая антивариантная функция n переменных имеет ранг 2^{n-1}, т. е. содержит 2^{n-1} конституентов единицы по n переменным. Примером антивариантной функции двух переменных может служить $f(x, y) = x\overline{y} + \overline{x}y$, ибо $\overline{f}(x, y) = xy + \overline{x}\overline{y} = f(x, \overline{y}) = N_{01} f(x, y)$.

К антивариантным функциям принадлежат, в частности, все **самодвойственные** функции, т. е. функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых $\overline{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$. Ясно, что если функция антивариантна, то и все однотипные с ней функции антивариантны.

§ 3.3. Возможность понимания булевых функций n переменных как множеств точек $p_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ вполне гармонирует со сделанным в § 1.1 сравнением между однотипными функциями и геометрическими фигурами одинаковой формы. Это сравнение можно углубить.

Как все точки геометрического пространства одинаковы, неразличимы по своим геометрическим свойствам, так и все 2^n точек алгебры булевых функций n переменных суть функции одного и того же типа, т. е. одинаковы с точки зрения теории булевых алгебр. В самом деле, любой конституент $p_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ переходит в любой другой конституент $p_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ с помощью преобразования $N_{c_1 c_2 \ldots c_n \oplus d_1 d_2 \ldots d_n}$. Таким образом, существует лишь один n-местный тип ранга 1, а следовательно, лишь один n-местный тип ранга $2^n - 1$.

Заметим, что ни одно нетождественное преобразование $N_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ не имеет неподвижных точек, т. е. не оставляет ни одного конституента неизменным. Зато каждое нетождественное преобразование $S_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ имеет в точности две неподвижные точки, а именно: $p_0 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$ и $p_{2^n-1} = x_1 x_2 \ldots x_n$.

Определение 4. Число инверсирований аргументов, необходимое для перевода точки $p_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ в точку $p_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ (т. е. число единичных разрядов в двоичном числе $c_1 \oplus d_1, c_2 \oplus d_2, \ldots$ $\ldots c_n \oplus d_n$), называется расстоянием между точками $p_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ и $p_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ и обозначается символом $\Delta(p_{c_1 c_2 \ldots c_n}, p_{d_1 d_2 \ldots d_n})$.

Легко видеть, что расстояние $\Delta(p_\alpha, p_\beta)$, где α и β — два n-разрядных двоичных числа (или их десятичные эквиваленты), удовлетворяет условиям:

1) $\Delta(p_\alpha, p_\beta) = 0$ тогда и только тогда, когда $p_\alpha = p_\beta$, или, что то же самое, когда $\alpha = \beta$;

2) $\Delta(p_\alpha, p_\beta = \Delta(p_\beta, p_\alpha)$ (условие симметрии);

3) $\Delta(p_\alpha, p_\beta) + \Delta(p_\beta, p_\gamma) \geqslant \Delta(p_\alpha, p_\gamma)$ (неравенство треугольника).

Это значит, что наименование числа $\Delta(p_\alpha, p_\beta)$ «расстоянием» вполне оправдано и что множество 2^n точек $p_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ есть метрическое пространство (в смысле [Би], стр. 11)[16].

Определение 5. Метрическое пространство, образованное точками алгебры булевых функций n переменных с расстоянием в смысле определения 4, называется n-мерным булевым пространством (ср. [Мл]).

---

[16] Понятием расстояния в смысле определения 4 пользовался уже У. К. Клиффорд в 1877 г. ([Кл]; [Дж], стр. 141). В современной литературе это расстояние часто связывают с именем Р. В. Хэмминга [Хэ].

Максимальное расстояние между точками n-мерного булева пространства равно n, а минимальное расстояние равно 0. Точки (конституенты), расстояние между которыми равно 1, называются *соседними*. Множество всех точек p_θ, отстоящих от данной точки p_α на расстояние $\Delta(p_\theta, p_\alpha) \leqslant k$, называется k-*окрестностью* точки p_α. Нетрудно показать, что k-окрестности точек p_α и p_β не пересекаются (т. е. не содержат общих точек) тогда и только тогда, когда $\Delta(p_\alpha, p_\beta) > 2k$.

§ 3.4. Точечные преобразования n-мерного булева пространства, сохраняющие его метрику (т. е. расстояния между точками), называются *изометрическими*.

Теорема 1. Группа всех изометрических преобразований n-мерного булева пространства есть группа $\mathfrak{T}_n$.

В самом деле, любое преобразование однотипности $T = S_{i_1 i_2 \ldots i_n} N_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ является изометрическим. Доказать это нетрудно. Если $p_\alpha = N_{d_1 d_2 \ldots d_n} p_\beta$, то

$$Tp_\alpha = TN_{d_1 d_2 \ldots d_n} p_\beta.$$

Так как $\mathfrak{N}_n$ — абелева группа, то

$$S_{i_1 i_2 \ldots i_n} N_{c_1 c_2 \ldots c_n} N_{d_1 d_2 \ldots d_n} = S_{i_1 i_2 \ldots i_n} N_{d_1 d_2 \ldots d_n} N_{c_1 c_2 \ldots c_n} = N_{d_{j_1} d_{j_2} \ldots d_{j_n}} S_{i_1 i_2 \ldots i_n} N_{c_1 c_2 \ldots c_n}.$$

Следовательно, $p_\alpha = N_{d_1 d_2 \ldots d_n} p_\beta$ влечет

$$Tp_\alpha = N_{d_{j_1} d_{j_2} \ldots d_{j_n}} Tp_\beta,$$

где двоичное число $d_{j_1} d_{j_2} \ldots d_{j_n}$ получается из двоичного числа $d_1 d_2 \ldots d_n$ перестановкой разрядов и поэтому содержит то же число единиц.

Обратно, всякое изометрическое преобразование в булевом пространстве есть преобразование однотипности. В самом деле, пусть точечное преобразование W, сохраняющее расстояния в n-мерном булевом пространстве, переводит конституент p_α в конституент $p_{W(\alpha)}$ $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1)$. Тогда, ввиду однотипности всех конституентов единицы по n переменным, существует такое единственное преобразование $N_{c_1 c_2 \ldots c_n}$, что $p_{W(0)} = N_{c_1 c_2 \ldots c_n} p_0$. Далее, из $\Delta(p_0, p_{2^{n-j}}) = 1$ вытекает $\Delta(p_{W(0)}, p_{W(2^{n-j})}) = 1$; здесь $j = 1, 2, \ldots n$. Следовательно, двоичное число $W(2^{n-j})$ отличается от двоичного числа $W(0)$ только одним разрядом и существует такое единственное число $i_j \geqslant 1$, что

$$W(2^{n-j}) \oplus W(0) = 2^{n-i_j}, \quad N_{c_1c_2\ldots c_n} p_{W(2^{n-j})} = p_{2^{n-i_j}}.$$

С другой стороны, пусть $N_{c_1c_2\ldots c_n} p_{W(d_1d_2\ldots d_n)} = p_{e_1e_2\ldots e_n}$. Из $\Delta(p_{d_1d_2\ldots d_n}, p_0) = k$ вытекает

$$\Delta(p_{d_1d_2\ldots d_n}, p_{2^{n-j}}) = \left\{\begin{matrix} k & \text{при } d_j = 0 \\ k-1 & \text{при } d_j = 0 \end{matrix}\right\},$$

а из $\Delta(p_{e_1e_2\ldots e_n}, p_0) = l$ вытекает

$$\Delta(p_{e_1e_2\ldots e_n}, p_{2^{n-i_j}}) = \left\{\begin{matrix} l & \text{при } e_{i_j} = 0 \\ l-1 & \text{при } e_{i_j} = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Но

$$\Delta(p_{e_1e_2\ldots e_n}, p_0) = \Delta(N_{c_1c_2\ldots c_n} p_{e_1e_2\ldots e_n}, N_{c_1c_2\ldots c_n} p_0) =$$
$$= \Delta(p_{W(d_1d_2\ldots d_n)}, p_{W(0)}) = \Delta(p_{d_1d_2\ldots d_n}, p_0).$$

Следовательно, $l = k$. В то же время

$$\Delta(p_{l_1l_2\ldots l_n}, p_{2^{n-i_j}}) = \Delta(N_{c_1c_2\ldots c_n} p_{e_1e_2\ldots e_n}, N_{c_1c_2\ldots c_n} p_{2^{n-i_j}}) =$$
$$= \Delta(p_{W(d_1d_2\ldots d_n)}, p_{W(2^{n-j})}) = \Delta(p_{d_1d_2\ldots d_n}, p_{2^{n-j}}).$$

Ввиду $l = k$ следует тождество $e_{i_j} = d_j$. Следовательно.

$$p_{W(d_1d_2\ldots d_n)} = N_{c_1c_2\ldots c_n} p_{e_1e_2\ldots e_n} = N_{c_1c_2\ldots c_n} S^{-1}_{i_1i_2\ldots i_n} p_{d_1d_2\ldots d_n},$$

что и требовалось доказать.

§ 3.5. Минимальное расстояние между конституентами функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и конституентами функции $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **расстоянием** между f и g. Максимальное расстояние между конституентами функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно назвать ее **диаметром**. Мы введем также понятие **дисперсии** (разброса) функции: дисперсия функции ранга 0 или 1 по определению будет равна 0, а дисперсия функции ранга $m > 1$ будет равна наименьшему положительному расстоянию между конституентами функции. Ясно, что дисперсия функции не больше диаметра функции.

Нетрудно видеть, что расстояния между функциями (множествами точек) и диаметры и дисперсии функций (множеств точек) суть инварианты группы $\mathfrak{T}_n$. Поэтому все однотипные функции имеют одинаковый диаметр и одинаковую дисперсию и можно говорить о диаметре и дисперсии типа, понимая под диаметром типа диаметр функций этого типа, а под дисперсией типа — дисперсию функций этого типа. Более подробной метрической характеристикой булевой функции и булева типа является **матрица расстояний** между конституентами функции (рассматриваемая, конечно, с точностью до одновременных перестановок строк и столбцов).

Например, функция 4-го ранга $xyz + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$ и все функции одного типа с ней имеют диаметр 2, дисперсию 2 и матрицу расстояний (с точностью до одновременных перестановок строк и столбцов)

$$\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Расстояние между функциями $xyz + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$ и $\bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z} + \bar{x}yz$ равно 1.

Так как равенство диаметров, равенство дисперсий и (с точностью до одновременных перестановок строк и столбцов) равенство матриц расстояний суть необходимые условия однотипности функций, то нарушение хотя бы одного из этих равенств есть достаточное условие разнотипности функций.

Максимальный диаметр и максимальная дисперсия функции n переменных равны n, как показывает пример функции

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n + x_1x_2 \ldots x_n = p_0 + p_{2^n-1}.$$

Все n-мерное булево пространство в целом (т. е., если перейти к функциям, несобственная функция 1) имеет диаметр n и дисперсию 1.

§ 3.6. К исследованию n-мерного булева пространства сводится, в частности, задача построения двоичных кодов с обнаружением и исправлением ошибок. Коды с обнаружением ошибок позволяют обнаруживать ошибки, возникающие вследствие действия помех (шума) во время передачи сигналов по каналам связи; коды с исправлением ошибок, или (другое название) самокорректирующие коды, позволяют не только обнаруживать, но и исправлять такие ошибки.

Поставим в соответствие двоичному сигналу $d_1 d_2 \ldots d_n$ конституент единицы (точку булева пространства) $p_{d_1 d_2 \ldots d_n}$. Рассматриваемые ошибки состоят в инверсировании некоторых разрядов d_i сигнала, т. е. в переходе некоторых единиц сигнала в нули и некоторых нулей — в единицы. Поэтому помехи (шум), действующие в канале связи, можно представить преобразованием однотипности $N_{c_1 c_2 \ldots c_n}$, и если конституент $p_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ изображает сигнал, переданный (посланный) в канал на одном конце, то конституент $p_{c_1 c_2 \ldots c_n \oplus d_1 d_2 \ldots d_n} = N_{c_1 c_2 \ldots c_n} \times$ $\times\, p_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ будет изображать сигнал, принятый из канала на другом конце. Двоичное число $c_1 c_2 \ldots c_n$, определяющее это преобразование $N_{c_1 c_2 \ldots c_n}$, называют «структурой помех (шума)». Ошибка называется k-кратной, если структура помех содержит не более k единиц (и, следовательно, не менее $n-k$ нулей), или, иными словами, если искаженный сигнал $p_{c_1 c_2 \ldots c_n \oplus d_1 d_2 \ldots d_n}$ лежит в k-окрестности истинного сигнала $p_{d_1 d_2 \ldots d_n}$. Ошибка, k-кратная, но не $(k-1)$-кратная, называется строго k-кратной.

Под r-сигнальным n-разрядным двоичным кодом мы понимаем множество M, состоящее из r двоичных n-разрядных сигналов α, предусмотренных для использования при передачах; эти сигналы называются кодовыми, а прочие $2^n - r$ двоичных n-разрядных сигналов называются некодовыми, или паразитными. Такой код всегда можно изобразить булевой функцией ранга r от n переменных

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha \in M} p_\alpha .$$

Для того чтобы r-сигнальный n-разрядный двоичный код, где $r \geqslant 2$, обнаруживал все k-кратные ошибки, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, изображающая этот код, имела дисперсию $l > k$. Иными словами, требуется, чтобы ни один конституент функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не лежал в k-окрестности ни одного другого конституента этой функции. Действительно, в этом случае кодовый сигнал, посланный в канал, не может перейти под действием помех в другой кодовый сигнал и прием кодового сигнала гарантирует правильность передачи (с точностью до ошибок высшей кратности, т. е. кратности $k' > k$), а прием паразитного сигнала указывает на появление ошибки.

Для того чтобы r-сигнальный n-разрядный двоичный код, где $r \geqslant 2$, исправлял (корректировал) k-кратные ошибки, необходимо и достаточно, чтобы k-окрестности конституентов функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, изображающей код, не пересекались. Действительно, в этом случае по принятому сигналу можно однозначно восстановить посланный сигнал: послан был, очевидно, тот кодовый сигнал, который ближе всего лежит к принятому сигналу; этот кодовый сигнал единствен. Согласно сказанному выше, требование, чтобы k-окрестности конституентов функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, изображающей код, не пересекались, равносильно требованию, чтобы функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имела дисперсию $l > 2k$. Следовательно, код, изображаемый функцией с дисперсией l, обнаруживает $(l-1)$-кратные ошибки и исправляет $E\left(\frac{l-1}{2}\right)$-кратные ошибки, где $E\left(\frac{l-1}{2}\right)$ — целая часть от $\frac{l-1}{2}$.

Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ изображает код с обнаружением или исправлением k-кратных ошибок, то и все функции одного типа с $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ изображают коды с обнаружением или, соответственно, с исправлением k-кратных ошибок. Коды, изображаемые однотипными функциями, одинаковы; поэтому они называются эквивалентными кодами.

Мы рассматривали только случай $r \geqslant 2$ потому, что при $r = 1$ задача не имеет смысла. При помощи единственного сигнала, без каких-либо альтернатив к нему, нельзя передать никакую информацию[17]. Вообще чем больше r, тем больше информации можно передать при помощи кодовых сигналов.

---

[17] При $r = 1$ единственный сигнал должен передаваться все время, без перерывов, ибо непосылка сигнала есть тоже сигнал и может быть отождествлена, например, с кодовым сигналом 00...0. Следовательно, если передача информации осуществляется при помощи некоторого сигнала, который можно либо посылать, либо не посылать, то в действительности мы имеем дело с двумя сигналами и $r = 2$.

Поэтому задачу построения n-разрядных двоичных кодов с обнаружением (исправлением) k-кратных ошибок можно поставить так: найти булеву функцию n переменных, которая имела бы дисперсию $l > k$ (а при самокоррекции — дисперсию $l > 2k$) и максимальный возможный ранг r. Если n определяется аппаратурой связи, а k — статистикой ошибок в канале связи, то максимальное r укажет, сколько информации можно передавать надежно, без существенного риска ошибок.

Эту же задачу можно поставить несколько иначе: при данном r найти функцию наименьшего числа n аргументов, которая имела бы дисперсию $l > k$ (а при самокоррекции — дисперсию $l > 2k$). Здесь r определяется передаваемой информацией, k по-прежнему определяется статистикой ошибок в канале связи, а n выражает требования к аппаратуре связи.

В обоих вариантах задача очень трудна и еще не решена в общем виде [Сл-2],[Гл-2]. При $l = 2$ лучшие функции суть $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ и $\overline{x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n}$ ранга $r = 2^{n-1}$ (об этих функциях см. ниже гл. 9); соответствующие коды исправляют однократные ошибки [Хэ]. Понятно, что если некоторая функция служит решением задачи, то и все однотипные с ней функции суть решения. Р. В. Хэмминг и Э. Н. Гилберт [Гл-2] получили следующую оценку для максимального ранга $r_0(n, k)$ булевой функции n переменных с дисперсией $l \geqslant 2k+1$:

$$\frac{2^n}{N(n, 2k)} \leqslant r_0(n, k) \leqslant \frac{2^n}{N(n, k)},$$

где $N(n, k) = \sum_{i=0}^{k} C_n^i$ есть число точек в k-окрестности данной точки ([Гл-2], стр. 507, теорема 1).

Глава 4

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОДНОТИПНОСТИ

§ 4.1. Геометрически булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно представить себе как единичный n-мерный гиперкуб, вершины которого окрашены в два цвета, скажем в черный и белый. Центр гиперкуба служит началом координат; перпендикуляры, опущенные из центра гиперкуба на ограничивающие его $(n-1)$-мерные гиперкубы («гиперграни»), служат координатными осями; длина каждого из $2^{n-1}n$ ребер гиперкуба равна 1. Тогда координаты вершин суть $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, где $\xi_i = \pm \frac{1}{2}$. Число вершин n-мерного гиперкуба равно 2^n, число $(n-1)$-мерных гиперграней равно $2n$. Пусть $c_i = 1$ при $\xi_i = \frac{1}{2}$ и $c_i = 0$ при $\xi_i = -\frac{1}{2}$; тогда вершина $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ окрашена в черный цвет при $f(c_1, c_2, \ldots, c_n) = 1$ и в белый цвет при $f(c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$.

В этом случае конституенту (точке алгебры булевых функций) $p_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ соответствует вершина $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, где $\eta_i = \frac{1}{2}$ при $d_i = 1$ и $\eta_i = -\frac{1}{2}$ при $d_i = 0$. Представление функции в виде множества вершин гиперкуба (окрашенных в черный цвет), очевидно, соответствует представлению ее в виде множества конституентов единицы (множества точек булева пространства), о чем шла речь в § 3.1.

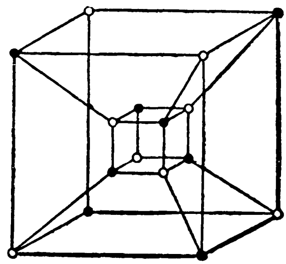


Рис. 1

Как пример рассмотрим функцию $f(w, x, y, z) = p_0 + p_3 + p_5 + p_7 + p_9 + p_{10} + p_{12} + p_{16}$. Соответствующий ей четырехмерный куб изображен на рис. 1 в проекции на плоскость (общие правила для изображения многомерных гиперкубов в проекции на плоскость см. в книге [Гл КФ], гл. III, § 23).

Нетрудно видеть, что расстояние (в обычном, геометрическом смысле) между вершинами $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ гиперкуба равно корню квадратному из расстояния $\Delta(p_{c_1 c_2 \ldots c_n}, p_{d_1 d_2 \ldots d_n})$ в булевом пространстве, где конституенты $p_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ и $p_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ соответствуют вершинам $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $(\eta, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. «Булево» расстояние $\Delta(p_{c_1 c_2 \ldots c_n}, p_{d_1 d_2 \ldots d_n})$ можно истолковать также как минимальное число ребер гиперкуба, по которым нужно пройти, чтобы прийти из вершины $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ в вершину $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. Таким образом, n-мерное булево пространство изоморфно n-мерному единичному гиперкубу в евклидовом пространстве.

k-окрестности конституента $p_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ соответствует n-мерный гипершар радиуса $\sqrt{k}$ с центром в вершине $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, изображающей этот конституент. Поэтому задача выбора функции максимального ранга от n переменных, которая имела бы дисперсию $l > 2k$ и потому изображала бы код с исправлением k-кратных ошибок (см. § 3.6), равносильна задаче о наиплотнейшем размещении гипершаров радиуса $\sqrt{k}$ по вершинам единичного n-мерного гиперкуба. Конституентам, отстоящим от конституента $p_{d_1 d_2 \ldots d_n}$ на расстояние k, соответствуют вершины гиперкуба, заполняющие гиперсферу радиуса $\sqrt{k}$ с центром в вершине, соответствующей конституенту $p_{d_1 d_2 \ldots d_n}$.

Геометрия гиперкуба и других правильных гипертел в n-мерном евклидовом пространстве исследовалась еще в XIX в. [Стр]. Изоморфизм n-мерного булева пространства с n-мерным гиперкубом дает возможность вывести геометрические свойства последнего при помощи теории булевых алгебр[18]. n-мерное булево пространство можно отождествить также с n-мерным гипероктаэдром — гипертелом, двойственным n-мерному гиперкубу и вписываемым в него. Переход от гиперкуба к гипероктаэдру соответствует дуальному автоморфизму алгебры булевых функций и может быть уподоблен переходу от конституентов единицы к конституентам нуля[19].

§ 4.2. Преобразованиям однотипности булевых функций n переменных соответствуют преобразования координат $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, состоящие из перестановок координатных осей и изменений их ориентации. А именно, пусть $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$ — новые координаты, а $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — старые. Тогда преобразованию $S_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ отвечает преобразование

$$\xi'_{i_1} = \xi_1, \ \xi'_{i_2} = \xi_2, \ \ldots, \ \xi'_{i_n} = \xi_n; \qquad (2)$$

преобразованию $N_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ отвечает преобразование

$$\xi'_1 = (-1)^{c_1}\xi_1, \ \xi'_2 = (-1)^{c_2}\xi_2, \ \ldots, \ \xi'_n = (-1)^{c_n}\xi_n. \qquad (3)$$

---

[18] Этим пользовался уже Клиффорд ([Дж], стр. 142).

[19] В пояснение к этому можно сказать, что вообще принцип двойственности в геометрии есть частный случай принципа двойственности в теории структур [Би].

В силу относительности движения можно считать, что движется гиперкуб, а система координат («система отсчета») неподвижна. В этом случае $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$ в уравнениях (2) и (3) следует понимать как координаты образа вершины $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Так как $\mathfrak{T}_n$ есть группа изометрических преобразований n-мерного булева пространства и так как последнее изоморфно n-мерному единичному гиперкубу в евклидовом пространстве, то группа $\mathfrak{T}_n$ изоморфна группе всех изометрических преобразований n-мерного евклидова пространства, переводящих этот гиперкуб в себя. Эту группу, переводящую гиперкуб в себя, принято называть г р у п п о й с и м м е т р и и гиперкуба. Таким образом, группа $\mathfrak{T}_n$ изоморфна группе симметрии n-мерного гиперкуба в евклидовом пространстве.

Преобразования $S_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in \mathfrak{S}_n$ оставляют неподвижными точки $p_0 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$ и $p_{2^n-1} = x_1 x_2 \ldots x_n$, и потому им отвечают вращения гиперкуба вокруг оси, проходящей через вершины $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$, (или) зеркальные отражения относительно гиперплоскостей, проходящих через эту ось. Преобразование $N_{2^{i-1}} \in \mathfrak{N}_n$ представляет собой, очевидно, зеркальное отражение гиперкуба относительно $(n-1)$-мерной координатной гиперплоскости $\xi_i = 0$. Преобразование $N_{c_1 c_2 \ldots c_n} \in \mathfrak{N}_n$, где $c_{i_1} = c_{i_2} = \ldots = c_{i_k} = 1$, а все прочие c_i равны 0, представляет собой зеркальное отражение гиперкуба относительно $(n-k)$-мерной координатной гиперплоскости $\xi_{i_1} = \xi_{i_2} = \ldots = \xi_{i_k} = 0$; в частности, преобразование $N_{2^n-1} \in \mathfrak{N}_n$ есть зеркальное отражение относительно центра гиперкуба.

Подробное геометрическое описание группы симметрии трехмерного куба см., например, в [Шу]. Группа $\mathfrak{T}_n$ изоморфна также группе симметрии n-мерного гипероктаэдра [То].

Глава 5

ИНВАРИАНТНЫЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

§ 5.1. Отношение однотипности рефлексивно, и потому каждая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переходит в себя хотя бы при одном преобразовании $T \in \mathfrak{T}_n$. Иными словами, для каждой булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существует преобразование однотипности $T = N_{c_1 c_2 \ldots c_n} S_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, при котором

$Tf(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Таким преобразованием всегда может служить тождественное преобразование I. Однако возможны и менее тривиальные случаи, когда $T \neq I$. Нетрудно видеть, что преобразования однотипности, переводящие функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в себя, образуют подгруппу группы $\mathfrak{T}_n$.

Определение 6. Булева функция будет называться инвариантной[20], если существует хотя бы одно нетождественное преобразование однотипности, переводящее ее в себя. В противном случае она будет называться обыкновенной. Группа преобразований однотипности, переводящих булеву функцию в себя, будет называться группой инерции этой функции.

Итак, у обыкновенных функций, и только у них, группа инерции есть единичная подгруппа группы $\mathfrak{T}_n$. Изучение групп инерции булевых функций позволяет выявлять «симметрию», «правильность строения» логических форм. Это вторая сторона идеи групповой инвариантности: первая состояла в выявлении однородности пространства булевых функций. Если преобразования однотипности рассматривать как преобразования «логических координат» (§ 1.1), то инвариантные булевы функции можно сравнить с фигурами, которые «выглядят» одинаково в разных «системах отсчета».

§ 5.2. Пусть $\mathfrak{F}$ — группа инерции функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если разложить группу $\mathfrak{T}_n$ на левосторонние смежные классы по $\mathfrak{F}$, то каждому такому классу $U\mathfrak{F}$, где $U \in \mathfrak{T}_n$, будет соответствовать одна и только одна функция $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, однотипная с $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; а именно,

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = UFf(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Uf(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где F — любой элемент группы $\mathfrak{F}$.

Назовем число функций в типе мощностью этого типа. Тогда мощность типа функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна индексу группы $\mathfrak{F}$ в группе $\mathfrak{T}_n$, т. е. числу левосторонних смежных классов группы $\mathfrak{T}_n$ по $\mathfrak{F}$. Если k — порядок группы $\mathfrak{F}$, а j — ее индекс, то, согласно теореме Лагранжа о конечных группах ([Кр], стр. 53),

$$jk = n!2^n. \tag{4}$$

[20] К. Э. Шеннон [Ше-2] пользовался в этом смысле термином «нетривиально инвариантная булева функция».

Подгруппы инерции однотипных функций, очевидно, являются сопряженными подгруппами в $\mathfrak{T}_n$, а потому они изоморфны и имеют равный порядок. Их индексы в $\mathfrak{T}_n$ также равны. Это значит, в частности, что если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обыкновенна, то и все однотипные с ней функции обыкновенны, а если она инвариантна, то и все однотипные с ней функции инвариантны. Поэтому булев тип мы назовем в первом случае обыкновенным типом, а во втором случае — инвариантным типом. Согласно равенству (4), каждый обыкновенный тип содержит ровно $n!2^n$ функций, а всякий инвариантный n-местный тип содержит заведомо меньше чем $n!2^n$ функций.

Каждому n-местному булеву типу отвечает класс сопряженных подгрупп группы $\mathfrak{T}_n$. Как сказано, эти подгруппы служат группами инерции функций, из которых состоит тип. Согласно теоремам теории групп ([Кр], стр. 73), число подгрупп, сопряженных с подгруппой $\mathfrak{F}$ группы $\mathfrak{T}_n$, равно индексу нормализатора подгруппы $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{T}_n$. Поэтому группы инерции однотипных функций часто не только изоморфны, но даже полностью совпадают. В частности, все функции данного типа имеют одинаковую группу инерции тогда и только тогда, когда эта группа есть нормальный делитель группы $\mathfrak{T}_n$. Таков, например, случай обыкновенного типа: все функции, принадлежащие к нему, имеют группу инерции $\{I\}$. Этот же пример показывает, что один и тот же класс сопряженных подгрупп может соответствовать многим булевым типам. Булевы типы с одинаковыми классами сопряженных подгрупп мы назовем изомерными.

Ввиду инвариантности операции отрицания относительно $\mathfrak{T}_n$ однотипность функций $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ и $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равносильна однотипности функций $\overline{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\overline{g}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В самом деле, если $g = Tf$, где $T \in \mathfrak{T}_n$, то $\overline{g} = \overline{Tf} = T\overline{f}$, и обратно. Следовательно, функции f и $\overline{f}$ обладают одинаковыми группами инерции и их типы изомерны.

§ 5.3. Для иллюстрации сказанного разберем простой пример. Группа $\mathfrak{T}_2$ состоит из $2!2^2 = 8$ преобразований:

$$I,\ S_{21},\ N_{01},\ N_{10},\ N_{11},\ N_{01}S_{21},\ N_{10}S_{21},\ N_{11}S_{21}.$$

Применяя их по очереди к функции $x+y$, легко убедиться, что ее группа инерции состоит из преобразований I и S_{21} и, таким образом, совпадает с $\mathfrak{S}_2$. Следовательно, $x+y$ — инвариантная функция. Табл. 1 содержит левостороннее разложение группы $\mathfrak{T}_2$ по $\mathfrak{S}_2$; для каждого смежного класса указана функция, получаемая из $x+y$ посредством преобразований этого класса. Порядок группы $\mathfrak{S}_2$ равен 2, ее индекс равен 4, так что произведение порядка на индекс равно 8, т. е. порядку всей группы $\mathfrak{T}_2$. Мощность типа функции $x+y$ равна 4, т. е. индексу группы инерции.

Таблица 1

Разложение $\mathfrak{T}_2$ по $\mathfrak{S}_2$

Смежные классы	Булевы функции
I, S_{21}	$x+y$
N_{01}, $N_{01}\,S_{21}$	$x+\bar{y}$
N_{10}, $N_{10}\,S_{21}$	$\bar{x}+y$
N_{11}, $N_{11}\,S_{21}$	$\bar{x}+\bar{y}$

Таблица 2

Подгруппы, сопряженные с $\mathfrak{S}_2$

Сопряженные подгруппы (группы инерции)	Булевы функции
I, S_{21}	$x+y$
I, $N_{11}\,S_{21}$	$x+\bar{y}$
I, $N_{11}\,S_{21}$	$\bar{x}+y$
I, S_{21}	$\bar{x}+\bar{y}$

Типу функции $x+y$ соответствует класс сопряженных подгрупп группы $\mathfrak{T}_2$, перечисленный в табл. 2. Эти сопряженные подгруппы, которые служат группами инерции для функций в правой части таблицы, получаются из $\mathfrak{S}_2$ посредством трансформирования[21] элементами, взятыми из левосторонних смежных классов группы $\mathfrak{T}_2$ по $\mathfrak{S}_2$. Трансформируя группу $\mathfrak{S}_2$

[21] Говорят, что элемент b группы G получается из элемента a посредством трасформирования элементом g, если $b = gag^{-1}$.

разными элементами одного и того же смежного класса, мы всегда получим одну и ту же подгруппу, сопряженную с $\mathfrak{S}_2$.

Как видим, рассматриваемый класс сопряженных подгрупп группы $\mathfrak{T}_2$ состоит из двух элементов: подгруппы $\{I, S_{21}\} = \mathfrak{S}_2$ и подгруппы $\{I, N_{11}S_{21}\}$. Перебором всех элементов группы $\mathfrak{T}_2$ легко убедиться, что с подгруппой $\mathfrak{S}_2$ перестановочны лишь преобразования I, S_{21}, N_{11}, $N_{11}S_{21}$. Эти элементы и образуют нормализатор группы $\mathfrak{S}_2$. Его порядок равен 4; отсюда, по теореме Лагранжа, его индекс равен $8/4 = 2$, что и дает число сопряженных подгрупп в классе, соответствующем типу функции $x + y$.

§ 5.4. Чтобы найти группу инерции функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и тем самым обнаружить инвариантность или обыкновенность последней, можно применить к ней все $n!2^n$ преобразований группы $\mathfrak{T}_n$ и посмотреть, при каких преобразованиях функция перейдет в себя. К. Э. Шеннон ([Ше-2], теорема 14) показал, впрочем, что достаточно сравнить друг с другом лишь $n! + 2^n$ функций $S_{i_1 i_2 \ldots i_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $N_{c_1 c_2 \ldots c_n} \times \times f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ибо из $N_\alpha f = S_\beta f$ следует $f = N_\alpha S_\beta f$. Однако и этот процесс весьма трудоемкий. Более экономный способ описан Э. Дж. Мак-Класки [Мк]. Существуют и другие более частные способы.

Эта задача часто называется задачей *опознания* групповой инвариантности булевых функций.

Глава 6

ОБЛАСТИ ИНВАРИАНТНОСТИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ[22]

§ 6.1. *Определение* 7. Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет называться *инвариантной относительно подгруппы* $\mathfrak{S}$ группы $\mathfrak{T}_n$, если любое преобразование из $\mathfrak{S}$ переводит $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в себя.

---

[22] Из теорем этой главы теоремы 2—8 были мной сформулированы в работе [По-13], доложенной впервые на семинаре группы АТС в Лаборатории по разработке научных проблем проводной связи АН СССР (июнь 1958 г.), а затем на семинаре по техническим приложениям математической логики в МГУ (октябрь 1958 г.). В работе [По-13] формулируются также понятия, задаваемые определениями 7—10.

Для того чтобы функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ была инвариантна относительно подгруппы $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{T}_n$, необходимо и достаточно, чтобы группа $\mathfrak{G}$ была подгруппой группы инерции функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ инвариантна относительно $\mathfrak{G}$, то функции одного типа с $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ инвариантны относительно подгрупп, сопряженных с $\mathfrak{G}$. Эти подгруппы получаются из $\mathfrak{G}$ посредством трансформирования элементами, взятыми из левосторонних смежных классов разложения группы $\mathfrak{T}_n$ по $\mathfrak{G}$.

Определение 8. Совокупность булевых функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, инвариантных относительно подгруппы группы $\mathfrak{T}_n$, будет называться областью инвариантности булевых функций n переменных относительно $\mathfrak{G}$ и обозначаться через $D(\mathfrak{G})$.

Как известно [Кр], [Би], множество всех подгрупп данной группы есть структура, где теоретико-структурным произведением двух подгрупп $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ служит их пересечение $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}$, а теоретико-структурной суммой двух подгрупп $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ служит подгруппа $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{G}\}$, порожденная ими; роль теоретико-структурного включения играет теоретико-множественное включение, роль единицы (наибольшего элемента) играет вся данная группа, рассматриваемая как своя несобственная подгруппа, роль нуля (наименьшего элемента) играет единичная подгруппа $\{I\}$.

Теорема 2. Множество всех областей инвариантности булевых функций n переменных есть структура относительно теоретико-множественного включения, дуально гомоморфная структуре подгрупп группы $\mathfrak{T}_n$.

В самом деле, если подгруппа $\mathfrak{F}$ содержится в подгруппе $\mathfrak{G}$, то $D(\mathfrak{G})$ содержится в $D(\mathfrak{F})$. С другой стороны, пересечение областей $D(\mathfrak{F})$ и $D(\mathfrak{G})$ есть область $D(\{\mathfrak{F}, \mathfrak{G}\})$, т. е. область инвариантности относительно теоретико-структурной суммы подгрупп $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$. Область же $D(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G})$, т. е. область инвариантности относительно теоретико-структурного произведения подгрупп $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$, является наименьшей областью инвариантности, содержащей одновременно $D(\mathfrak{T})$ и $D(\mathfrak{G})$.

Следствие. Роль нуля в структуре областей инвариантности играет область $D(\mathfrak{T}_n)$, роль единицы — область $D(\{I\})$, которая, конечно, совпадает со всем множеством булевых функций n переменных[23].

Сегментом $[a, b]$ структуры называется множество всех таких элементов x структуры, что $a \leqslant x \leqslant b$, где $\leqslant$ есть знак теоретико-структурного включения. Сегмент структуры всегда сам является структурой. Поэтому, например, множество всех областей инвариантности, содержащихся в данной области инвариантности, и множество всех областей инвариантности, содержащих данную область инвариантности, суть структуры.

Определение 9. Области инвариантности относительно сопряженных подгрупп будут называться однотипными. Говоря о типе области инвариантности, мы будем иметь в виду общие свойства того класса однотипных областей инвариантности, к которым принадлежит данная область; это определение типа области, являющееся определением через абстракцию, аналогично определению типа булевой функции в § 1.1.

Число областей инвариантности, однотипных с областью $D(\mathfrak{G})$, равно, конечно, индексу нормализатора подгруппы $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{T}_n$. Условимся говорить, что данный тип булевой функции представлен в данной области инвариантности k функциями, если эта область содержит в точности k функций этого типа. Тогда очевидна

Теорема 3. Однотипные области инвариантности равномощны и каждый тип булевых функций представлен одним и тем же числом функций в каждой из этих однотипных областей.

Таким образом, можно говорить о представительстве типа булевых функций в типе областей инвариантности.

§ 6.2. Из инвариантности операций $f+g$, fg, $\bar{f}$ относительно $\mathfrak{T}_n$ следует, что каждая область инвариантности замкнута относительно этих операций и, следовательно, является подалгеброй булевой алгебры. Но любая подалгебра булевой алгебры сама есть булева алгебра. Следовательно, справедлива

[23] Аналогично можно определить области инвариантности в произвольном множестве M относительно подгрупп произвольной группы G, действующей в M. Эти области по-прежнему будут образовывать структуру, дуально гомоморфную структуре подгрупп группы G.

Теорема 4. Каждая область инвариантности $D(\mathfrak{G})$ есть булева алгебра.

Булева алгебра, образуемая областью инвариантности, обычно является несвободной, в отличие от алгебры всех булевых функций n переменных.

Определение 10. Сумма конституентов единицы, составляющая область транзитивности[24] подгруппы $\mathfrak{G}$ группы $\mathfrak{T}_n$ в множестве всех конституентов единицы по n переменным, будет называться блоком над $\mathfrak{G}$.

Иными словами, блок над $\mathfrak{G}$ есть сумма такого множества конституентов $p_{d_1 d_2 \dots d_n} = p_\alpha$, которое вместе с любым своим элементом p_α содержит любой элемент $p_\beta = Tp_\alpha$, где $T \in \mathfrak{G}$.

Теорема 5. Блоки над $\mathfrak{G}$ суть точки (атомы) булевой алгебры $D(\mathfrak{G})$.

В самом деле, блоки над $\mathfrak{G}$ инвариантны относительно $\mathfrak{G}$ и потому входят в $D(\mathfrak{G})$, а любая функция из $D(\mathfrak{G})$ содержит вместе с конституентом $p_{d_1 d_2 \dots d_n}$ весь блок, куда входит $p_{d_1 d_2 \dots d_n}$.

Следствие. Область $D(\mathfrak{G})$ содержит ровно $2^{M(\mathfrak{G})}$ функций, где $M(\mathfrak{G})$ — число блоков над $\mathfrak{G}$.

Например, область $D(\{I\})$ инвариантности относительно единичной подгруппы $\{I\}$ содержит все 2^{2^n} функций n переменных потому, что каждый блок над $\{I\}$ состоит лишь из одного конституента.

Теорема 5 соответствует общему результату теории булевых алгебр, что точки подалгебры булевой алгебры B суть суммы точек этой алгебры B (см. [Би], гл. X, § 7).

Чтобы проверить, инвариантна ли функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ относительно $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{T}_n$ (т. е., иными словами, входит ли она в $D(\mathfrak{G})$), нет необходимости применять к функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ все преобразования из $\mathfrak{G}$. Достаточно применить к $f(x_1 x_2 \dots, x_n)$ лишь преобразования, которые входят в неприводимую систему образующих группы $\mathfrak{G}$. Другой путь состоит в том, чтобы

[24] Областями транзитивности какой-либо группы преобразований в множестве, где она действует, называют подмножества этого множества, обладающие тем свойством, что любые элементы такого подмножества переводятся группой G друг в друга и ни один элемент подмножества не переводится группой G в элемент, не принадлежащий подмножеству (см. [Ва], § 49). Распадение множества на области транзитивности группы G совершенно однозначно.

построить блоки над $\mathfrak{S}$ и посмотреть, разложима ли $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в эти блоки.

§ 6.3. Говорят, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ несущественно зависит от переменной x_i и что эта переменная является ее несущественным аргументом, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представима в виде функции $n-1$ переменных $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Так, функция $x_1x_2x_3 + x_1x_2$ несущественно зависит от x_3, ибо $x_1x_2x_3 + x_1x_2 = x_1x_2$. Несобственные функции 0 и 1 (и только они) несущественно зависят от любых аргументов[25].

Теорема 6. $D(\mathfrak{R}_n) = \{0, 1\}$, где $\{0, 1\}$ есть класс несобственных функций 0 и 1.

В самом деле, согласно сказанному в § 3.1 единственный блок над $\mathfrak{R}_n$ есть сумма всех 2^n конституентов, которая как раз равна единице.

Следствие 1. $D(\mathfrak{T}_n) = \{0, 1\}$.

Следствие 2. Только функции 0 и 1 имеют группу инерции $\mathfrak{T}_n$ и типы мощности 1.

Следствие 3. Ни одна область инвариантности не пуста.

Теорема 7. Структура областей инвариантности булевых функций n переменных не изоморфна структуре подгрупп группы $\mathfrak{T}_n$.

В самом деле, $D(\mathfrak{R}_n) = D(\mathfrak{T}_n)$ при $\mathfrak{R}_n \subset \mathfrak{T}_n$.

Теорема 8. Не всякая подгруппа группы $\mathfrak{T}_n$ может быть группой инерции булевой функции n переменных.

В самом деле, $\mathfrak{R}_n$, ввиду следствия 1 к теореме 6, не может быть группой инерции никакой булевой функции (при $n > 1$).

Теорема 9. Несущественная зависимость функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от x_i равносильна инвариантности $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно $N_{2^{n-i}}$; область $D(\{N_{2^{n-i}}\})$, где $\{N_{2^{n-1}}\}$ — группа, порожденная преобразованием $N_{2^{n-i}}$ и состоящая из $N_{2^{n-1}}$ и $I = N^2_{2^{n-1}}$, есть множество $2^{2^{n-1}}$ функций $n-1$ переменных

[25] Из 2^{2^n} функций n переменных существенно зависят от n переменных функций [Ше-1], т. е. при больших n почти все функции.

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i \, 2^{2^i}$$

$x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$; блоки над $\{N_{2^{n-1}}\}$ суть конституенты единицы по $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$.

Следствие. Несущественная зависимость функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ равносильна инвариантности $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно группы $\mathfrak{H} = \{N_{2^{n-i_1}}, N_{2^{n-i_2}}, \ldots, \ldots, N_{2^{n-i_m}}\}$; область $D(\mathfrak{H})$ есть множесто $2^{2^{n-m}}$ функций $n-m$ переменных $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-m}}$, где множество $\{j_1, j_2, \ldots, j_{n-m}\}$ есть дополнение множества $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ до множества $\{1, 2, \ldots, n\}$; блоки над $\mathfrak{H}$ суть конституенты единицы по $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-m}}$.

Заметим для примера, что блок над $\{N_{2^{n-i}}\}$ имеет вид

$$\tilde{x}_1 \ldots \tilde{x}_{i-1} \tilde{x}_{i+1} \ldots \tilde{x}_n = \tilde{x}_1 \ldots \tilde{x}_{i-1} x_i \tilde{x}_{i+1} \ldots \tilde{x}_n + \\ + \tilde{x}_1 \ldots \tilde{x}_{i-1} \bar{x}_i \tilde{x}_{i+1} \ldots \tilde{x}_n,$$

будучи суммой двух соседних конституентов единицы по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$; здесь $\tilde{x}_j$ есть либо x_j, либо $\bar{x}_j$.

Итак, мы изучили области инвариантности относительно любых подгрупп группы $\mathfrak{N}_n$, в которых система образующих состоит из преобразований вида N_{2^l}. Менее тривиальны области инвариантности относительно других подгрупп группы $\mathfrak{N}_n$. Пример — область инвариантности относительно подгруппы $\mathfrak{N}_n'$, состоящей из преобразований $N_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ с четным числом единиц в последовательности $c_1 c_2 \ldots c_n$. Область $D(\mathfrak{N}_n')$ есть класс полисимметрических функций n переменных (см. гл. 9).

§ 6.4. Пусть существенные аргументы функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m})$ суть $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}$ и пусть $\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-m}\} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$. Пусть, далее, $\mathfrak{H}_m$ есть группа инерции функции $g(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m})$ в группе преобразований однотипности для функций переменных $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}$ и $\mathfrak{N}$ есть подгруппа всех перестановок и инверсирований переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-m}}$ в $\mathfrak{T}_n$. Тогда группа инерции функции $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ в группе $\mathfrak{T}_n$ есть

$$\mathfrak{H}_n = \mathfrak{N}\mathfrak{H}_m' = \mathfrak{H}_m'\mathfrak{N}, \tag{5}$$

где $\mathfrak{H}_m'$ — подгруппа группы $\mathfrak{T}_n$, состоящая из всех преобразований, получаемых из элементов группы $\mathfrak{H}_m$ добавлением условия, что x_{i_α} переходит в x_{i_α} («остается неподвижным»), $\alpha = 1, \ldots, n-m$. В самом деле, всякое другое преобразование из $\mathfrak{T}_n$ переводит $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в функцию с другими существенными аргументами.

Конечно, группа $\mathfrak{R}$ изоморфна группе $\mathfrak{T}_{n-m}$ и имеет тот же порядок. Отсюда ясно, что если $\mathfrak{H}_m$ имеет порядок k, то группа $\mathfrak{R}\mathfrak{H}_m'$ имеет порядок $(n-m)!\,2^{n-m}k$.

Функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ и $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ принадлежат всегда к одному и тому же n-местному булеву типу, ибо

$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = S_{1\ldots(i-1)(i+1)\ldots ni}\, f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

Но, как легко заметить, однотипность функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ и $g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ относительно группы $\mathfrak{T}_{n-1}$ равносильна их однотипности относительно группы $\mathfrak{T}_n$. Поэтому типы тех булевых функций n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые зависят существенно не более чем от $n-1$ переменных, можно отождествить с типами булевых функций $n-1$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и считать, что множество $(n-1)$-местных булевых типов есть подмножество множества n-местных булевых типов. Аналогично множество $(n-i)$-местных булевых типов, где $0 \leqslant i \leqslant n$, будет подмножеством множества n-местных булевых типов.

Ясно, что число существенных аргументов булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть инвариант группы $\mathfrak{T}_n$; все однотипные функции существенно зависят от одного и того же числа аргументов. Поэтому можно говорить о с у щ е с т в е н н о m-м е с т н о м булевом типе.

Т е о р е м а 10. Пусть j — мощность существенно m-местного типа в множестве булевых функций m переменных. Тогда мощность этого типа в множестве булевых функций n переменных равняется $C_n^m j$.

В самом деле, возьмем какую-либо функцию m переменных, принадлежащую к рассматриваемому типу. По теореме Лагранжа (§ 5.2), ее группа инерции в $\mathfrak{T}_m$ имеет порядок $m!\,2^m/j$. Ввиду соотношения (5) группа инерции этой функции в группе $\mathfrak{T}_n$ имеет порядок

$$(n-m)!\,2^{n-m}(m!\,2^m)/j = (n-m)!\,m!\,2^n/j.$$

Применяя снова теорему Лагранжа, получим, что мощность рассматриваемого булева типа в множестве функций n переменных равна

$$\frac{n!\,2^n\,j}{(n-m)!\,m!\,2^n} = C_n^m\,j.$$

Следствие. Пусть j — мощность произвольного m-местного типа в множестве булевых функций m переменных. Тогда мощность этого типа в множестве булевых функций n переменных равняется

$$C_n^m\,j\,/\,C_{n-p}^{n-m},$$

где $p \leqslant m$ есть число существенных «мест» рассматриваемого типа, т. е. число существенных аргументов функций этого типа.

Например, функция yz имеет 4 однотипные функции двух переменных y, z, 12 однотипных функций трех переменных x, y, z и 24 однотипные функции четырех переменных w, x, y, z. В согласии с теоремой 10,

$$12 = C_3^2\cdot 4,\;\; 24 = C_4^2\cdot 4,\;\; 24 = C_4^3\cdot 12\,/\,C_{4-2}^{4-3}.$$

Глава 7.

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ И ПОДСЧЕТ ТИПОВ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

§ 7.1. Применения теории типов булевых функций часто связаны с построением таблиц типовых функций, и это делает необходимым рассмотрение вопроса о методике построения таблиц типовых функций n переменных и о числе типов булевых функций n переменных (числе n-местных булевых типов).

Методика построения таблиц типовых функций в основном сводится к перебору булевых функций n переменных одной за другой и к применению к каждой функции всех $n!\,2^n$ преобразований группы $\mathfrak{T}_n$. Для облегчения этого весьма трудоемкого процесса, который Джевонс ([Дж], стр. 137) сравнивал с методом эратосфенова решета в теории чисел, используются следующие соображения.

Пусть Q_n — число типов булевых функций n переменных (число n-местных булевых типов), а $Q_{n,m}$ — число типов булевых функций ранга m от n переменных. Тогда ввиду инвариантности ранга функций относительно $\mathfrak{T}_n$ (см. § 3.1)

$$Q_n = \sum_{m=0}^{2^n} Q_{n,\,m},$$

а ввиду инвариантности операции отрицания (см. § 3.2)

$$Q_{n,\,m} = Q_{n,\,2^n-m}, \qquad Q_n = 2\sum_{m=0}^{2^{n-1}-1} Q_{n,m} + Q_{n,\,2^{n-1}}.$$

Поэтому для получения таблицы типовых функций n переменных достаточно построить таблицы типовых функций последовательно для классов функций n переменных с рангом 0,1, $2, \ldots, 2^{n-1}$, а затем взять отрицания от полученных типовых функций с рангами $2^{n-1}-1$, $2^{n-1}-2, \ldots, 2, 1, 0$. Методика построения таблицы типовых функций ранга m от n переменных изложена, например, в книге [Шт] и гласит:

1) Выбрать любую функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ранга m и записать ее в начале списка A.

2) Подвергнуть функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ всем $n!\,2^n$ преобразованиям однотипности.

3) Из полученных $n!\,2^n$ преобразованных функций выбрать только $d \leqslant n!\,2^n$ различных функций и внести их в список B.

4) Выбрать любую функцию $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ранга m, которой нет в списке B, и внести ее в список A.

5) Повторять шаги 2) — 4), пока полное число функций в списке B не станет равным $C^m_{2^n}$. Тогда список A и будет таблицей типовых функций ранга m от n переменных.

Можно использовать при составлении таблицы типовых функций n переменных также таблицы типовых функций меньшего числа переменных. Действительно, на основании § 6.4 в таблицу типовых функций n переменных можно включить все функции из таблицы типовых функций $n-1$ переменных; теорема 10 позволяет легко определить новые мощности типов. Пусть Q^*_n есть число существенно n-местных булевых типов, тогда

$$Q_n = Q^*_n + Q_{n-1} = \sum_{i=0}^{n} Q^*_i, \qquad Q^*_0 = 2.$$

Сам Джевонс [Дж] интересовался типами не всех 2^{2^n} булевых функций n переменных, а лишь типами тех булевых функций n переменных, которые, если воспользоваться современной терминологией, не являются π-функциями. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется π-функцией, если $f = \tilde{x}_i f'$, где $\tilde{x}_i$ есть либо x_i, либо $\bar{x}_i$ и f' не зависит от x_i. В джевонсовской постановке задачи аргументу x_i такой π-функции $f(x_1 x_2, \ldots, x_n) = \tilde{x}_i f'$ отвечает несобственный класс: универсальный класс 1 при $\tilde{x}_i = x_i$ и пустой класс 0 при $\tilde{x}_i = \bar{x}_i$; Джевонс же хотел рассматривать взаимосвязи лишь между собственными классами — непустыми и имеющими непустые отрицания. Число «джевонсовых» (т. е. не являющихся π-функциями) функций n переменных равно ([Пя], [Ше-2], стр. 74)

$$(-1)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k 2^{2^{n-k}+k} \geqslant 2^{2^n} - 2n2^{2^{n-1}}.$$

Число типов джевонсовых функций равно $Q_{n,m} - Q_{n-1,m}$ при $m \leqslant 2^{n-1}$ и равно $Q_{n,m}$ при $m > 2^{n-1}$.

§ 7.2. Джевонс ([Дж], стр. 141) сначала не различал вопроса о построении таблицы типовых функций n переменных от вопроса о подсчете числа Q_n типов булевых функций. Действительно, построение таблицы типовых функций n переменных само собой дает точное значение числа Q_n. Однако уже работа Клиффорда [Ки] показала, что подсчет числа Q_n есть более простая задача, разрешимая менее громоздким путем, чем перебор булевых функций. С другой стороны, смысл построения таблицы типовых функций в значительной мере зависит от числа Q_n. Если последнее будет слишком велико (с практической точки зрения), то бесполезно строить таблицу типовых функций для облегчения обзора всего множества булевых функций.

Джевонс [Дж] подсчитывал число интересовавших его типов для $n = 2$ и $n = 3$ путем построения таблиц типовых функций. Клиффорд [Ки] произвел бестабличный подсчет числа Q_4, используя метрику функций четырех переменных (матрицы расстояний); однако он допустил ошибки для некоторых $Q_{4,m}$

и тем самым для всего Q_4, как это впоследствии обнаружил Д. Пойя [Пя].

В работах Пойя [Пя] и Слепяна [Сл-1] были предложены алгорифмические методы подсчета чисел $Q_{n,m}$ и Q_n при любом n и получено Q_n для $n = 1 \div 6$ (см. табл. 3; значения $Q_{n,m}$ при $n = 1 \div 4$ см. в табл. 4)[26].

Таблица 3

n	Q_n	2^{2^n}
0	2	2
1	3	4
2	6	16
3	22	256
4	402	65 536
5	1 228 158	4 294 967 296
6	400 507 806 843 728	18 446 744 073 709 551 616

Таблица 4

Значения $Q_{n,m}$

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2								
1	1	1	1						
2	1	1	2	1	1				
3	1	1	3	3	6	3	3	1	1
4	1	1	4	6	19	27	50	56	74

§ 7.3. Хотя методы Пойя и Слепяна позволили подсчитывать число Q_n для конкретных значений n, однако отсутствовала общая оценка числа Q_n. Автор указал в статье [По-5] общую асимптотическую оценку числа типов булевых функций n переменных, исходя из результата Шеннона ([Ше-2], стр. 94, теорема 13), согласно которому число инвариантных (в смысле определения 6) булевых функций n переменных не превышает

[26] См. также [Зи] и [Эш].

$n!\,2^n\cdot 2^{3\cdot 2^{n-2}}$. В силу этой теоремы Шеннона почти все (в теоретико-числовом смысле [ХР]) булевы функции n переменных обыкновенны, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,2^n\cdot 2^{3\cdot 2^{n-2}}}{2^{2^n}}=0.$$

Здесь мы приведем подробное доказательство указанной асимптотической оценки.

Лемма 1.

$$Q_n<\frac{2^{2^n}}{n!\,2^n}+(n!\,2^n-1)\,2^{3\cdot 2^{n-2}}.$$

В самом деле, в силу теоремы Шеннона существует хотя бы одно множество M, состоящее ровно из $2^{2^n}-n!\,2^n\cdot 2^{3\cdot 2^{n-2}}$ обыкновенных функций n переменных. Пусть M^* — множество функций n переменных, однотипных с функциями, входящими в дополнение $\overline{M}$ множества M до множества всех булевых функций n переменных. Тогда число типов функций, входящих в дополнение множества M^* до множества всех булевых функций n переменных, не превышает

$$\frac{2^{2^n}}{n!\,2^n}-2^{3\cdot 2^{n-2}}.$$

Но число типов функций множества M^* равно числу типов функций множества $\overline{M}$, а последнее число заведомо меньше мощности множества $\overline{M}$, т. е. меньше числа $n!\,2^n\cdot 2^{3\cdot 2^{n-2}}$. Следовательно,

$$Q_n<\frac{2^{2^n}}{n!\,2^n}+(n!\,2^n-1)\,2^{3\cdot 2^{n-2}}.$$

Следствие. Каково бы ни было действительное число $\varepsilon>0$, существует такое n_0, что при $n>n_0$

$$Q_n<\frac{(1+\varepsilon)\,2^{2^n}}{n!\,2^n}.$$

В самом деле,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!\,2^n-1)\,n!\,2^n\cdot 2^{3\cdot 2^{n-2}}}{2^{2^n}}=0.$$

Лемма 2.

$$Q_n>\frac{2^{2^n}}{n!\,2^n}.$$

В самом деле, всякий тип функций n переменных состоит из $n!\,2^n$ или менее функций.

Теорема 11. Q_n асимптотически стремится к $\dfrac{2^{2^n}}{n!\,2^n}$.

Действительно, начиная с некоторого n_0,

$$\frac{2^{2^n}}{n!\,2^n}<Q_n<\frac{(1+\varepsilon)\,2^{2^n}}{n!\,2^n},$$

где ε произвольно мало. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n}{\dfrac{2^{2^n}}{n!\,2^n}}=1.$$

Заметим, что уже при $n=6$ фактическая относительная ошибка меньше $1^0/_{00}$.

Следствие. Почти все типы булевых функций n переменных обыкновенны.

В самом деле, доля инвариантных типов не превосходит

$$\frac{(n!\,2^n)^2\cdot 2^{3\cdot 2^{n-2}}}{2^{2^n}}.$$

Но

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!\,2^n)^2\cdot 2^{3\cdot 2^{n-2}}}{2^{2^n}}=0.$$

§ 7.4. Теорема 11 позволяет сделать некоторые выводы об эффективности применения таблиц типовых функций для облегчения обзора всей совокупности 2^{2^n} булевых функций n переменных с эвристическими, индуктивными и тому подобными целями. А именно, применение таблиц типовых функций дает эффект, но не для слишком больших n. Сведение 65 536 булевых функций четырех переменных к 402 типам является весьма эффективным примером, но уже при $n = 6$ мы имеем дело с квадриллионами типов против квинтиллионов функций.

Отсюда, в частности, ясно, что, вопреки предположению Дж. Боумена и У. Питтса [Бо], гомеостат (самоорганизующая система) со сколько-нибудь большим числом входов останется фантастически сложным даже после замены перебора булевых функций перебором булевых типов [27].

Однако в реальных прикладных задачах, как правило, требуется обозревать не всю совокупность 2^{2^n} булевых функций n переменных, где n способно возрастать неограниченно, а лишь какое-то, большей частью не вполне ясно очерченное подмножество этой совокупности, охватывающее все 2^{2^n} булевых функций в крайнем случае лишь при каких-то малых n. Так, нам вряд ли в обозримом будущем потребуется на практике умение строить релейные схемы для всех $2^{2^{20}}$ булевых функций 20 переменных, ибо это число, пожалуй, превзойдет число атомов в известной нам части Вселенной. Поэтому построение таблиц типовых функций может оказаться эффективным и для больших n, но применительно к специальным классам или семействам булевых функций. Таким образом, мы повторяем высказанный во введении тезис о том, что для дальнейшего развития научно-технических применений теории булевых алгебр очень важно изучать свойства и систематику булевых функций.

В качестве примера исследования типов специальных классов булевых функций можно указать на исследование типов симметрических булевых функций, о чем рассказывается ниже, в гл. 10.

С этой точки зрения исследование типов всех 2^{2^n} булевых функций n переменных дает лишь общий теоретический фон для исследования типов «реальных» булевых функций, что и позволяет, например, ограничиться подсчетом числа Q_n или исследованием его асимптотики без построения таблиц.

---

[27] Отметим также ошибочность утверждения Дж. Боумена [Бо], что из функции Шеффера $\bar{p} \,\&\, \bar{q}$ можно перестановками и инверсированиями аргументов получить все 15 остальных функций от p и q: суперпонирование и однотипность — разные вещи.

Упомянем еще одно интересное обстоятельство. Количество информаций (сведений) в булевой функции n переменных равно $\log_2 2^{2^n} = 2^n$ двоичным единицам, а количество информации в n-местном булевом типе равно $\log_2 Q_n$ двоичным единицам. Поэтому эффективность сведения 2^{2^n} функций к Q_n типам можно оценить величиной

$$R(n) = 2^n / \log_2 Q_n.$$

Теорема 11 означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}(R)(n) = 1$. Пользуясь результатами Д. Слепяна [Сл-1], В. Белевич [Бе] нашел максимум $R = 1/0{,}53 = 1{,}89$ при $11 < 2^n < 12$. Таким образом, сведение булевых функций к типам представляется наиболее эффективным из теоретико-информационных соображений как раз при $n = 4$.

§ 7.5. В связи с перечислением в § 1.4 некоторых обобщений понятия типа булевых функций упомянем также о подсчетах чисел этих обобщенных типов.

Р. Л. Дэйвис [Дэ] предложил метод подсчета структур m-членных (m-адических) отношений на множестве из k элементов, т. е. метод подсчета типов m-мерных матриц порядка k из нулей и единиц. Дэйвис составил таблицу числа структур различных диадических отношений при $k = 2 \div 5$.

И. Ниномия [Ни] предложил метод для подсчета типов симметрических идемпотентных $k \times k$-матриц $\|f_{ij}\|$ булевых функций n переменных, где все $f_{ii} = 1$. Под симметрией матрицы подразумевается тождество $\|f_{ij}\| = \|f_{ji}\|$, под идемпотентностью — тождество $\|f_{ij}\|\|f_{ij}\| = \|f_{ij}\|$, где умножение понимается в смысле обычного матричного умножения. При $n = 0$ таким типам будут соответствовать структуры диадических отношений эквивалентности на множестве из k элементов; число структур этих отношений равно числу всех возможных разбиений числа k на слагаемые.

Глава 8

СИММЕТРИЧЕСКИЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

§ 8.1. Весьма важную область инвариантности (в смысле определения 8) составляют симметрические булевы функции. Эти функции изучались индийской исследовательницей

С. Панкаджам [Па-1], [Па-2], К. Э. Шенноном [Ше-1], [Ше-2], Р. Риги [Ри], автором [По-1], [По-2], [По-3], [По-7], [По-8], [По-9], [По-13] и др.

Определение 11. Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, инвариантная относительно группы $\mathfrak{S}_n$, называется симметрической.

Иными словами, симметрическая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ должна переходить в себя при любых перестановках переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Например, симметрической является функция

$$f(x, y, z) = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz.$$

Ясно, что симметрические функции принадлежат к числу инвариантных булевых функций в смысле определения 6. Множество симметрических булевых функций n переменных есть область инвариантности относительно $\mathfrak{S}_n$ и по определению 8 может быть обозначено символом $D(\mathfrak{S}_n)$. Согласно § 6.1, группа $\mathfrak{S}_n$ есть подгруппа группы инерции любой симметрической булевой функции n переменных.

Как опознать симметрическую булеву функцию? Этот вопрос имеет важное прикладное значение для теории релейных схем, так как симметрические булевы функции реализуются весьма простыми схемами [Ше-1], [По-9]. Автором была получена [По-7] следующая

Теорема 12. Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является симметрической тогда и только тогда, когда

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1).$$

Справедливость теоремы очевидна, если вспомнить, что, согласно § 6.2, для проверки инвариантности функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно данной группы, т. е. в нашем случае относительно $\mathfrak{S}_n$, достаточно применить к $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ преобразования, составляющие неприводимую систему образующих этой группы. Как говорилось в § 2.2, группа $\mathfrak{S}_n$ обладает неприводимой системой образующих всего из двух элементов:

$$S_{2134\ldots n} = S_{(12)} \text{ и } S_{23\ldots n1} = S_{(12\ldots n)}.$$

Перестановка $S_{(12)}$ есть транспозиция, а перестановка $S_{(12\ldots n)}$ — циклический сдвиг.

Итак, для опознания симметрии булевой функции

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ достаточно сравнить ее с функциями $(f x_2, x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n)$ и $f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$. Этот прием позволяет легко опознавать симметрические булевы функции при любом n. Другие методы опознания симметрических булевых функций были предложены С. Х. Колдуэллом [Ко], М. П. Маркусом [Мр], Р. Риги [Ри], Э. Дж. Мак-Класки [Мк] и др.

Исследование симметрии булевых функций важно для теории релейных схем, поскольку эта симметрия обычно упрощает синтез схем, реализующих булевы функции. Использованию симметрии булевых функций для упрощения синтеза контактных схем посвящено много работ, и в частности [Кор], [По-2], [По-3], [По-6], [По-9], [По-11], [Пу], [Уш], [Ше-1], [Ше-2], [Ябл]; в области электронноламповых схем можно упомянуть аналогичную работу [Эн]. Из обобщений понятия симметрической булевой функции упомянем понятие частично симметрической булевой функции. Так называется функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, инвариантная относительно группы всех перестановок переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_m}$, $2 \leqslant m \leqslant n$ (см. [Ше-2]). Упомянем также об изучении симметрии произвольных предикатов [Ост], [Коп Х].

§ 8.2. Нетрудно видеть, что значение симметрической булевой функции зависит только от числа аргументов, которые имеют значение 1. Обратно, булева функция, значение которой зависит только от числа аргументов, имеющих значение 1, является симметрической. При этом, понятно, всякая булева функция нуля переменных и всякая булева функция одной переменной являются симметрическими.

Определение 12. Число аргументов, равенство которых единице влечет равенство симметрической булевой функции единице, называется **рабочим числом** этой функции.

Нахождение рабочих чисел симметрической функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не представляет труда и может быть выполнено $n+1$ операциями, i-я из которых $(0 \leqslant i \leqslant n)$ состоит в вычислении выражения

$$f(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{i \text{ раз}}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-i \text{ раз}})$$

по правилам булевой алгебры.

Ясно, что симметрическая функция однозначно задается своими рабочими числами. Мы будем обозначать симметрическую булеву функцию переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ с рабочими числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, символом[28] $S_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При этом мы будем считать, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$. Например,

$$xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz = S_{2,3}(x, y, z).$$

Возможные рабочие числа симметрических функций n переменных суть $0, 1, 2, \ldots, n$. Их общее количество равно $n+1$. Так как каждое из этих чисел либо принадлежит, либо не принадлежит симметрической функции, то существует 2^{n+1} симметрических функций n переменных. Из них две функции: $0 = S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $1 = S_{0,1,2,\ldots,n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — являются несобственными. Все остальные $2^{n+1} - 2$ симметрических функций n переменных зависят существенно от всех n аргументов.

Область $D(\mathfrak{S}_n)$, конечно, замкнута относительно операций булева сложения, булева умножения и отрицания, образуя булеву алгебру (см. § 6.2). При этом $S_A + S_B = S_{A+B}$, $S_A S_B = S_{AB}$, $\bar{S}_A = S_{\bar{A}}$, где A и B — некоторые множества рабочих чисел; $A+B$ — сумма множеств A и B; AB — произведение множеств A и B; $\bar{A}$ — дополнение множества A до множества $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Отсюда ясно, что булева алгебра $D(\mathfrak{S}_n)$ изоморфна булевой алгебре, образуемой всеми подмножествами множества мощности $n+1$.

§ 8.3. Определение 13. Симметрическая булева функция ровно с одним рабочим числом называется *элементарной симметрической функцией*[29].

Элементарные симметрические функции n переменных суть, очевидно, блоки над $\mathfrak{S}_n$, а следовательно, являются точками (атомами) булевой алгебры $D(\mathfrak{S}_n)$. Ясно, что элементарная симметрическая функция $S_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть сумма всех конституентов $\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_n$, которые содержат ровно i переменных без отрицания и $n-i$ переменных с отрицанием. Отсюда

---

[28] Для краткости можно опускать запятые в индексе $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, если это не приводит к двусмысленности.

[29] Мы пользуемся термином С. Панкаджам [Па-1]. Дж. Эпштайн [Эп] называет такую функцию *фундаментальной* симметрической функцией.

вытекает другой прием опознания симметрических булевых функций — разложить функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на конституенты единицы и посмотреть, можно ли их сгруппировать в элементарные симметрические функции.

Существует $n+1$ элементарных симметрических функций n переменных. Их рабочие числа суть, соответственно, $0, 1, 2, \ldots, n$. Любая симметрическая функция n переменных однозначно разлагается в сумму элементарных симметрических функций этих переменных:

$$S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} S_{\alpha_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Как точки алгебры $D(\mathfrak{S}_n)$, элементарные симметрические функции служат ее образующими. Однако возможны и более простые системы образующих этой алгебры. Например, пусть $[\alpha, \beta]$ есть множество всех таких целых чисел x, что $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ и $x \leqslant n$. Рассмотрим симметрические функции n переменных, заданные следующими наборами (множествами) рабочих чисел:

1) $[0, E(n/2)]$;

2) $[0, E(n/4)]$, $[E(n/2)+1, E(n/2)+E(n/4)+1]$;

3) $[0, E(n/8)]$, $[E(n/4)+1, E(n/4)+E(n/8)+1]$;
$[E(n/2)+1, E(n/2)+E(n/8)+1]$, $[E(n/2)+E(n/4)+2,$
$E(n/2)+E(n/4)+E(n/8)+2]$;

⋮

i) $[0, E(n/2^i)]$, $[E(n/2^{i-1})+1, E(n/2^{i-1})+E(n/2^i)+1]$,
$[E(n/2^{i-2})+1, E(n/2^{i-2})+E(n/2^i)+1]$,
$[E(n/2^{i-2})+E(n/2^{i-1})+2, E(n/2^{i-2})+E(n/2^{i-1})+$
$+E(n/2^i)+2], \ldots, \left[\sum_{j=1}^{i-1} E(n/2^{i-j})+i-1, \sum_{j=0}^{i-1} E(n/2^{i-j})+i-1\right]$;

⋮

s) $0, 2, 4, \ldots, 2E(n/2)$.

Здесь $E(n/2^i)$ означает целую часть от $n/2^i$; символом s обозначено наименьшее целое число, большее или равное $\log_2(n+1)$. Иными словами, s есть наименьшее целое число, при котором $E(n/2^s)=0$.

Нетрудно видеть, что эти s симметрических функций осуществляют дихотомическую классификацию рабочих чисел (дихотомическую классификацию множества из $n+1$ элементов), а потому любая элементарная симметрическая функция n переменных однозначно разлагается в произведение этих «дихотомических» функций и их отрицаний. «Дихотомические» функции составляют систему образующих алгебры $D(\mathfrak{S}_n)$. Они играют в ней такую же роль, как переменные $x_1, x_2, \ldots, x_s$ в алгебре булевых функций s переменных. Следовательно, справедлива

Теорема 13. Алгебра $D(\mathfrak{S}_n)$ гомоморфна свободной булевой алгебре с s образующими, где s — наименьшее целое число, большее или равное $\log_2(n+1)$. При $n=2^s-1$ алгебра $C(\mathfrak{S}_n)$ изоморфна свободной булевой алгебре с s образующими.

§ 8.4. Определение 14. Число аргументов, равенство которых единице влечет равенство симметрической булевой функции нулю, называется нерабочим числом этой функции [По-6].

Симметрическая функция однозначно задается своими нерабочими числами. Симметрические функции n переменных обладают возможными нерабочими числами $0, 1, 2, \ldots, n$. Симметрическую функцию переменных с набором нерабочих чисел A можно [По-6] обозначить через $S^*_A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Конечно. $S^*_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S_{\overline{A}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $S_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S^*_{\overline{A}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Кроме того, $S^*_A + S^*_B = S^*_{AB}, S^*_A S^*_B = S^*_{A+B}$, $\overline{S^*_A} = S^*_{\overline{A}}$. В частности, $0 = S^*_{0, 1, 2, \ldots, n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $1 = S^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Определение 15. Симметрическая булева функция ровно с одним нерабочим числом будет называться коэлементарной симметрической функцией [30].

Коэлементарные симметрические функции суть отрицания элементарных симметрических функций и играют в булевой алгебре $D(\mathfrak{S}_n)$ роль, аналогичную роли конституентов нуля в алгебре булевых функций n переменных. Очевидно, существует $n+1$ коэлементарных симметрических функций n переменных. Всякая симметрическая функция n переменных однозначно разлагается в произведение коэлементарных сим-

---

[30] В статье [По-6] в этом смысле использовался термин «двойственная элементарная симметрическая функция».

метрических функций этих переменных:

$$S^{*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{k} S^{*}_{\alpha_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

§ 8.5. Каково бы ни было m, $0 \leqslant m \leqslant n$, симметрическая функция n переменных однозначно разлагается в сумму произведений элементарных симметрических функций одних и тех же $n - m$ переменных на симметрические функции остальных m переменных.

В самом деле,

$$\begin{aligned} S_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}) S_A(0, 0, \ldots, 0, x_{n-m+1}, \ldots, x_n) + \\ + S_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}) S_A(1, 0, \ldots, 0, x_{n-m+1}, \ldots, x_n) + \\ + S_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}) S_A(1, 1, \ldots 0, x_{n-m+1}, \ldots, x_n) + \ldots + \\ + S_{n-m}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}) S_A(1, 1, \ldots, 1, x_{n-m+1}, \ldots, x_n) = \\ = \sum_{i=0}^{n-m} S_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}) S_{\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_{l_i}}}(x_{n-m+1}, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Однозначность этого разложения очевидна.

Большое число различных формул разложения симметрических булевых функций приведено в статье Р. Риги [Ри]. С разложением симметрических булевых функций n переменных на элементарные симметрические функции по $n - m$ переменным связан следующий геометрический признак симметрии булевых функций, найденный автором [По-3], [По-8]:

Теорема 14. Булева функция

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = \sum_{i=0}^{n-m} S_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}) S_{\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_{l_i}}}(x_{n-m+1}, \ldots, x_n),$$

где $0 \leqslant m \leqslant n$, является симметрической тогда и только тогда, когда точки (i, α_{i_j}) либо сплошь заполняют, либо сплошь не заполняют каждую идущую слева вниз направо диагональ точечной решетки из $m + 1$ горизонтальных и $n - m + 1$ вертикальных рядов (рис. 2).

В самом деле, каждая такая диагональ есть геометрическое место точек, у которых сумма абсциссы и ординаты постоянна.

Поэтому каждая диагональ соответствует одному из $n+1$ рабочих чисел, а каждая точка диагонали соответствует разложению рабочего числа на слагаемые, откуда и следует доказываемое.

Теорема 14 дает простой способ отыскивать рабочие числа коэффициентов разложения симметрической функции n переменных на элементарные симметрические функции по $n-m$ переменным. Чтобы получить эти числа, следует начертить точечную решетку из $m+1$ горизонтальных и $n-m+1$ вертикальных рядов и провести в ней диагонали для каждого рабочего числа разлагаемой функции. Тогда рабочие числа коэффициента разложения при $S_i(x_1, \ldots, x_{n-m})$ суть ординаты точек сечения диагоналей i-й вертикалью. Эту решетку мы назовем **картой разложения** симметрической функции, а точки (i, α_{i_j}) — **рабочими точками** карты. Описанный способ может быть полезен, в частности, при анализе и синтезе симметрических релейных схем.

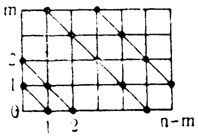


Рис. 2

Глава 9

ПОЛИСИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 9.1. Особый класс составляют симметрические булевы функции, чье значение однозначно определяется классом вычетом по модулю два от числа аргументов, имеющих значение 1, или, говоря проще, только четностью или нечетностью числа аргументов, имеющих значение 1. Таких функций n переменных, очевидно, четыре: несобственные функции 0 и 1 и функции $S_{0,2,4,\ldots,n'}(x_1, \ldots, x_n)$, $S_{1,3,5,\ldots,n''}(x_1, \ldots, x_n)$, где

$$n' = \begin{Bmatrix} n & \text{при четном } n \\ n-1 & \text{при нечетном } n \end{Bmatrix}, \quad n'' = \begin{Bmatrix} n-1 & \text{при четном } n \\ n & \text{при нечетном } n \end{Bmatrix}.$$

Иными словами, рабочими числами функции $S_{0,2,4,\ldots,n'}(x_1, \ldots, x_n)$ служат все четные числа между 0 и n, а рабочими числами функции $S_{1,3,5,\ldots,n''}(x_1, \ldots, x_n)$ служат все нечетные числа между 0 и n. Нетрудно видеть, что

$$S_{0,\,2,\,4,\,\ldots,\,n'}(x_1,\,\ldots,\,x_n) = \overline{S}_{1,\,3,\,5,\,\ldots,\,n''}(x_1,\,\ldots,\,x_n).$$

Определение 16. Функции $0, 1$, $S_{0,\,2,\,4,\,\ldots,\,n'}(x_1,\,\ldots,\,x_n)$ и $S_{1,\,3,\,5,\,\ldots,\,n''}(x_1,\,\ldots,\,x_n)$ мы назовем **полисимметрическими** функциями n переменных, а все остальные симметрические булевы функции n переменных — **гаплосимметрическими** булевыми функциями n переменных.

При $n = 2$ в класс полисимметрических функций входят $0, 1$, $S_{0,\,2}(x_1,\,x_2) = \overline{x}_1\overline{x}_2 + x_1x_2$ и $S_1(x_1,\,x_2) = \overline{x}_1x_2 + x_1\overline{x}_2$. Функцию $S_1(x_1,\,x_2)$ часто называют суммой по модулю два переменных x_1 и x_2 и обозначают символом $x_1 \oplus x_2$. В исчислении высказываний эта функция известна под названием альтернативы (или строгой альтернативы) и передает исключающее «или». Функция $S_{0,\,2}(x_1,\,x_2)$ называется в исчислении высказываний эквивалентностью, ибо она равна 1 в том и только том случае, когда $x_1 = x_2$; мы обозначим эту функцию символом $x_1 \odot x_2$.

Операции $\oplus$ и $\odot$ ассоциативны и коммутативны:

$$(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3),\ (x_1 \odot x_2) \odot x_2 = x_1 \odot (x_2 \odot x_3),$$
$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1,\ \ x_1 \odot x_2 = x_2 \odot x_1.$$

Коммутативность, конечно, вытекает из симметрии функций. Далее, относительно операции $\oplus$ дистрибутивно булево умножение, а относительно операции $\odot$ дистрибутивно булево сложение:

$$(x_1 \oplus x_2)\,x_3 = x_1x_3 \oplus x_2x_3,$$
$$(x_1 \odot x_2) + x_3 = (x_1 + x_3) \odot (x_2 + x_3).$$

Наконец,

$$\overline{x_1 \oplus x_2} = x_1 \oplus \overline{x}_2 = \overline{x}_1 \oplus x_2 = x_1 \odot x_2,$$
$$\overline{x_1 \odot x_2} = x_1 \odot \overline{x}_2 = \overline{x}_1 \odot x_2 = x_1 \oplus x_2.$$

Ввиду ассоциативности операций $\oplus$ и $\odot$ можно опускать скобки в многочленных «альтернативах» и «эквивалентностях» и писать просто:

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n,$$
$$x_1 \odot x_2 \odot \ldots \odot x_n.$$

Вследствие соотношения

$$x_1 \odot x_2 = \overline{x_1 \odot \overline{x}_2} = \overline{\overline{x}_1 \odot x_2}$$

имеет место равенство

$$x_1 \odot x_2 \odot \ldots \odot x_n = \left\{ \begin{array}{ll} x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n & \text{при нечетном } n \\ \overline{x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n} & \text{при четном } n \end{array} \right\}. \tag{6}$$

При любом n справедливы соотношения:

$$\overline{x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n} = \bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n, \tag{7}$$
$$\overline{x_1 \odot x_2 \odot \ldots \odot x_n} = \bar{x}_1 \odot x_2 \odot \ldots \odot x_n.$$

К. Э. Шеннон [Ше-1] предложил символ $\overset{n}{\underset{i=1}{\Xi}} x_i$ для сокращенного обозначения функции $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$.

Как легко видеть,

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n = S_{1,3,5,\ldots,n''}(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\overline{x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n} = \bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n = S_{0,2,4,\ldots,n'}(x_1, \ldots, x_n).$$

Поэтому в алгебре полисимметрических функций удобно пользоваться символом $\oplus$ и писать функции $S_{1,3,5,\ldots,n''}(x_1, \ldots, x_n)$ и $S_{0,2,4,\ldots,n'}(x_1, \ldots, x_n)$, соответственно, в виде $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ и $\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots + x_n$. Можно также пользоваться символом $\odot$, руководствуясь соотношением (6). В настоящей статье предпочитается первый способ записи, через символ $\oplus$.

§ 9.2. Пусть $\mathfrak{N}_n'$ — группа всех инверсирований четного числа переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, иными словами — группа всех преобразований $N_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ с четным числом единиц в последовательности $c_1 c_2 \ldots c_n$. Порядок группы $\mathfrak{N}_n'$ равен 2^{n-1}.

Теорема 15. Область $D(\mathfrak{N}_n')$ есть класс полисимметрических функций n переменных [31].

В самом деле, единственные блоки над $\mathfrak{N}_n'$ суть функции

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \text{ и } \bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n.$$

Следствие 1. Класс полисимметрических булевых функций есть булева алгебра, изоморфная свободной булевой алгебре с двумя образующими.

В самом деле, применим теорему 4.

Следствие 2. $D(\{\mathfrak{N}_n', \mathfrak{S}_n\}) = D(\mathfrak{N}_n')$.

---

[31] Теоремы 15 и 16 и лемма 3 из настоящего параграфа были сформулированы автором в [По-13].

Это следствие вытекает из того обстоятельства, что полисимметрические функции n переменных, будучи симметрическими функциями, инвариантны относительно $\mathfrak{S}_n$.

Лемма 3. Пусть группа $\{N_\alpha, \mathfrak{S}_n\}$ порождена группой $\mathfrak{S}_n$ и преобразованием N_α, где $\alpha = c_1c_2\ldots c_n$ есть n-разрядное двоичное число. Тогда $\{N_\alpha, \mathfrak{S}_n\} = \mathfrak{S}_n$ при $\alpha = 0$; $\{N_\alpha, \mathfrak{S}_n\} = \hat{\hat{\mathfrak{S}}}_n$ при $\alpha = 2^n - 1$, где $\hat{\hat{\mathfrak{S}}}_n = \{N_{2^n-1}\}\mathfrak{S}_n$; $\{N_\alpha, \mathfrak{S}_n\} = \mathfrak{N}_n'\mathfrak{S}_n$ при $0 < \alpha < 2^n - 1$ и четном числе единиц в последовательности $c_1c_2\ldots c_n$ $\{N_\alpha, \mathfrak{S}_n\} = \mathfrak{T}_n$ при $0 < \alpha < 2^n - 1$ и нечетном числе единиц в последовательности $c_1c_2\ldots c_n$.

В самом деле, в $\{N_\alpha, \mathfrak{S}_n\}$ содержатся преобразования

$$N_{c_1c_2\ldots c_n}S_{i_1i_2\ldots i_n} = S_{i_1i_2\ldots i_n}N_{c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_n}}$$

и преобразования

$$N_{c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_n}} = S_{i_1i_2\ldots i_n}^{-1}S_{i_1i_2\ldots i_n}N_{c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_n}},$$

а следовательно, и вся группа $\mathfrak{M}_\alpha$, порожденная совокупностью преобразований $N_{d_1d_2\ldots d_n}$ со столькими же единицами в последовательности $d_1d_2\ldots d_n$, как в последовательности $c_1c_2\ldots c_n$. Но $\mathfrak{M}_\alpha = \{I\}$ при $\alpha = 0$; $\mathfrak{M}_\alpha = \{N_{2^n-1}\}$ при $\alpha = 2^n - 1$; $\mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{N}_n'$ при $0 < \alpha < 2^n < 1$ и четном числе единиц в $c_1c_2\ldots c_n$; $\mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{N}_n$ при $0 < \alpha < 2^n - 1$ и нечетном числе единиц в $c_1c_2\ldots c_n$.

Следствие 1. $\{\mathfrak{N}_n', \mathfrak{S}_n\} = \mathfrak{N}_n'\mathfrak{S}_n$.

Следствие 2. Класс полисимметрических функций n переменных есть область $D(\mathfrak{N}_n'\mathfrak{S}_n)$.

Ясно, что порядок группы $\{\mathfrak{N}_n', \mathfrak{S}_n\} = \mathfrak{N}_n'\mathfrak{S}_n$ равен $n!\,2^{n-1}$.

После сказанного очевидна

Теорема 16. Группа инерции полисимметрических функций $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ и $\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ есть $\mathfrak{N}_n'\mathfrak{S}_n$.

Следствие. Мощность типа функций $\widetilde{x_1} \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ равна 2.

В самом деле, индекс группы инерции этой функции в группе $\mathfrak{T}_n$ равен $\dfrac{n!\,2^n}{n!\,2^{n-1}} = 2$, что и доказывает следствие.

Ввиду соотношения (7) функции $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ и $\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \oplus \ldots \oplus x_n$ однотипны. Итак, они обладают тем замечательным свойством, что они вместе составляют n-местный булев тип мощности 2. С другой стороны, соотношение (7) означает антивариантность этих функций.

Остальные полисимметрические функции: 0 и 1 — имеют группу симметрии $\mathfrak{T}_n$ и составляют каждая отдельный тип мощности 1 (см. § 6.3).

Теорема 17. Область $D(\mathfrak{N}'_n\mathfrak{S}_n)$ составляет отдельный тип областей инвариантности.

В самом деле, в силу леммы 3 нормализатор группы $\mathfrak{N}'_n\mathfrak{S}_n$ в группе $\mathfrak{T}_n$ есть сама группа $\mathfrak{T}_n$.

Глава 10

ТИПЫ СИММЕТРИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

§ 10.1. Определение 17. Гаплосимметрические булевы функции n переменных с несимметрическим расположением рабочих чисел относительно $n/2$ называются **моносимметрическими** булевыми функциями этих переменных, а гаплосимметрические булевы функции n переменных с симметрическим расположением рабочих чисел относительно $n/2$ называются **бисимметрическими** булевыми функциями n переменных [По-8].

Моносимметрической является, например, функция $S_{0,2}(x, y, z)$, бисимметрической — функция $S_{0,3}(x, y, z)$. Заметим, что, как показал Р. Риги [Ри], элементарная симметрическая функция $S_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является бисимметрической тогда и только тогда, когда n есть четное число и $i = \frac{n}{2}$; во всех остальных случаях элементарные симметрические функции являются моносимметрическими.

Определение 18. Булевы функции, однотипные с симметрическими функциями, принято называть **обобщенными симметрическими** функциями [Ше-1], [Ри]. Аналогично булевы функции, однотипные с гаплосимметрическими функциями, будут называться **обобщенными гаплосимметрическими** функциями; функции, однотипные с моносимметрическими функциями, — **обобщенными моносимметрическими функциями**; функции, однотипные с бисимметрическими функциями,— **обобщенными бисимметрическими** функциями.

Полисимметрические функции не требуют такого рода обобщения, ибо, согласно § 9.2, функция одного типа с полисимметрической функцией сама является полисимметрической. Следовательно, любая обобщенная симметрическая функция есть либо полисимметрическая функция, либо обобщенная гаплосимметрическая функция.

§ 10.2. Нетрудно видеть, что обобщенная симметрическая функция получается из симметрической функции инверсированием некоторых аргументов последней. Действительно, всякое преобразование однотипности представимо в виде $N_{c_1c_2\ldots c_n}S_{i_1i_2\ldots i_n}$, а ввиду инвариантности симметрических функций относительно $\mathfrak{S}_n$ справедливо равенство

$$N_{c_1c_2\ldots c_n}S_{i_1i_2\ldots i_n}S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = N_{c_1c_2\ldots c_n}S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пусть m — число единиц в последовательности $c_1c_2\ldots c_n$, определяющей преобразование $N_{c_1c_2\ldots c_n}$ и обобщенную симметрическую функцию $N_{c_1c_2\ldots c_n}S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если $m=0$, то $N_{c_1c_2\ldots c_n}=I$, и все ясно без особого рассмотрения. Исследуем отдельно два других случая: 1) $m=n$; 2) $0<m<n$.

В случае $m=n$ из симметрической функции снова получается симметрическая функция.

Теорема 18[32].

$$N_{11\ldots1}S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) = \\ = S_{n-\alpha_l,\, n-\alpha_{l-1},\ldots,n-\alpha_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

В самом деле, $S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)=1$ тогда и только тогда, когда число тех из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые имеют значение 0, равно одному из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$. Но это и значит, что число аргументов, принявших значение 1, равно одному из чисел $n-\alpha_l, n-\alpha_{l-1}, \ldots, n-\alpha_1$.

Следствие 1. $S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)=S_{\alpha_1\alpha_1\ldots\alpha_l}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда, когда числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ расположены симметрически относительно числа $n/2$.

---

[32] Теоремы из § 10.2—10.3 настоящей главы были сформулированы автором в [По-8], а теоремы § 10.4— в [По-13].

В самом деле, $\frac{n}{2} - \alpha_h = (n - \alpha_h) - \frac{n}{2}$, $h = 1, 2, \ldots, l$.

Следствие 2. Каждая бисимметрическая функция переходит в себя при инверсировании всех аргументов.

Теперь перейдем к случаю $0 < m < n$. Здесь нам будет нужна следующая

Лемма 4. Любая обобщенная симметрическая функция представима в виде $S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(\bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_m}, x_{i_{m+1}}, \ldots, x_{i_n})$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$, $i_{m+1} < i_{m+2} < \ldots < i_n$, $0 \leqslant m \leqslant n$.

В самом деле, пусть в последовательности $c_1c_2\ldots c_n$, определяющей обобщенную симметрическую функцию $N_{c_1c_2\ldots c_n}S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}\times$ $\times(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, разряды $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m}$ равны 1, а все остальные разряды равны 0. Пусть $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$, и пусть разряды, равные 0, суть $c_{i_{m+1}}, c_{i_{m+2}}, \ldots, c_{i_n}$, $i_{m+1} < i_{m+2} < \ldots < i_n$. Тогда

$$\begin{aligned} &N_{c_1c_2\ldots c_n}S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ &= N_{c_1c_2\ldots c_n}S_{i_1i_2\ldots i_n}S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ &= N_{c_1c_2\ldots c_n}S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) = \\ &= S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(\bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_m}, x_{i_{m+1}}, \ldots, x_{i_n}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать[33].

Теорема 19. Функция

$$N_{c_1c_2\ldots c_n}S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(\bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_m}, x_{i_{m+1}}, \ldots, x_{i_n})$$

является симметрической тогда и только тогда, когда функция $S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является полисимметрической.

В самом деле, построим карту разложения функции $S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) = S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по переменным $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$. Инверсирование переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ равносильно зеркальному отражению карты относительно левого края. Следовательно, функция

$$S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(\bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_m}, x_{i_{m+1}}, \ldots, x_{i_n})$$

является симметрической тогда и только тогда, когда в карте

---

[33] В работе [По-8] обобщенная симметрическая функция $S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(\bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_m}, x_{i_{m+1}}, \ldots, x_{i_n})$ условно записывалась в виде $S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$.

разложения функции $S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ по $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$, а следовательно, и в карте разложения функции $S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по $x_1, x_2, \ldots, x_m$ каждая идущая слева вверх направо и каждая идущая слева вниз направо диагональ либо сплошь заполнены, либо сплошь не заполнены рабочими точками. Карт с такими диагоналями только четыре (рис. 3); им отвечают полисимметрические функции 0 (рис. 3, г), 1 (рис. 3, в), $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ (рис. 3, а) и $\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ (рис. 3, б). Тем самым теорема доказана.

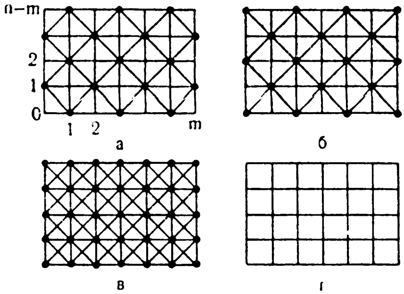


Рис. 3

Итак, при некоторых преобразованиях однотипности симметрическая функция переходит в себя, при других она переходит в другие симметрические функции, а при третьих — в несимметрические функции. Приведенное выше разделение симметрических функций на полисимметрические, бисимметрические и моносимметрические основано как раз на способности симметрической функции переходить в себя.

После сказанного вполне очевидна

Теорема 20. Группа инерции моносимметрической функции n переменных есть $\mathfrak{S}_n$; группа инерции бисимметрической функции n переменных есть $\hat{\mathfrak{S}}_n$.

Следствие. Мощность типа моносимметрической функции n переменных равна 2^n; мощность типа бисимметрической функции n переменных равна 2^{n-1}.

В самом деле, порядок группы $\mathfrak{S}_n$ равен $n!$, а порядок группы $\hat{\mathfrak{S}}_n$ равен $n!\,2^{n-1}$. Применяя теорему Лагранжа согласно § 5.2, получим указанные мощности типов.

Теоремы 6, 16 и 20 вместе дают полное описание групп инерции и мощностей типов симметрических булевых функций n переменных.

§ 10.3. Обозначим через ν_n число типов симметрических булевых типов n переменных и через $\varkappa_n$ — число обобщенных симметрических функций n переменных. Пусть

$$\eta(n) = n + 1 - 2E\left(\frac{n+1}{2}\right) = \left\{\begin{matrix} 1 \text{ при четном } n \\ 0 \text{ при нечетном } n \end{matrix}\right\}.$$

Теорема 21. $\nu_n = 2^n + 2^{E(n/2)} - \eta(n)$.

В самом деле, число гаплосимметрических функций n переменных равно $2^{n+1} - 4$. Из них у $2^{E(n/2)+1} - 2 - 2\eta(n)$ функций рабочие числа расположены симметрически относительно $n/2$. В этой разности вычитаемое 2 соответствует несобственным функциям 0 и 1, которые также обладают симметрическим расположением рабочих чисел относительно $n/2$; а вычитаемое $2\eta(n)$ учитывает симметрическое расположение рабочих чисел у полисимметрических функций $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ и $\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \oplus \ldots \oplus x_n$. Следовательно, существует $2^{n+1} - 2^{E(n/2)+1} + 2\eta(n) - 2$ моносимметрических функций n переменных. Тип бисимметрической функции представлен в классе симметрических функций только одной функцией, а именно этой самой бисимметрической функцией; тип моносимметрической функции представлен в классе симметрических функций двумя функциями, а именно: этой самой моносимметрической функцией и функцией, получаемой из нее инверсированием всех аргументов. Так как, с другой стороны, при любом n существует только три типа полисимметрических функций, то

$$\nu_n = 2^n - 2^{E(n/2)} + \eta(n) - 1 + 2^{E(n/2)+1} - 2 - 2\eta(n) + 3 =$$
$$= 2^n + 2^{E(n/2)} + \eta(n).$$

Теорема 22. $\varkappa_n = 2^{2n} - 2^{n+1} + 4$.

В самом деле,

$$\varkappa_n = 2^n \cdot \frac{1}{2}\left[2^{n+1} - 2^{E(n/2)+1} + 2\eta(n) - 2\right] + 2^{n-1}\left[2^{E(n/2)+1} -\right.$$
$$\left. - 2 - 2\eta(n)\right] + 4 = 2^{2n} - 2^{n+1} + 4.$$

Таблица 5

Ранг (число конституентов единицы)	Номер функции в табл. 3 из [Шт]	Функция	Мощность типа	Вид симметрии
0	0	$0=S\,(w,x,y,z)$	1	Полисимметрия
1	1	$S_0\,(w,x,y,z)$	16	Моносимметрия
2	5	$S_{0,4}\,(w,x,y,\bar{z})$	8	Бисимметрия
4	26	$S_1\,(w,x,y,\bar{z})$	16	Моносимметрия
5	34	$S_{0,1}\,(w,x,y,z)$	16	»
5	56	$S_{1,4}\,(w,x,y,\bar{z})$	16	»
6	72	$S_{0,1,4}\,(w,x,y,z)$	16	»
6	107	$S_2\,(\bar{w},x,y,\bar{z})$	8	Бисимметрия
7	163	$S_{0,2}\,(w,x,y,z)$	16	Моносимметрия
8	237	$S_{0,2,4}\,(w,x,y,z)$	2	Полисимметрия

Как пример рассмотрим обобщенные симметрические функции четырех переменных. В табл. 5 приведены типовые обобщенные симметрические функции ранга $r \leqslant 8$ от 4 переменных и мощности их типов, согласно табл. 3 из книги [Шт]. Так как за типовые функции ранга $r > 8$ можно принять отрицания типовых функций ранга $r < 8$ и так как мощность типа равна мощности отрицания типа, то из табл. 5 находим

$$\varkappa_4 = 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 8\cdot 4 + 16\cdot 12 = 228.$$

Это же число получается по теореме 22:

$$\varkappa_4 = 2^{2\cdot 4} - 2^5 + 4 = 228.$$

Таким образом, теоретическое и эмпирическое значение числа $\varkappa_4$ полностью совпадают.

§ 10.4. Теперь мы рассмотрим области инвариантности, содержащиеся в классе симметрических булевых функций n переменных, и типы этих областей. Это позволит получить более ясное понимание общей картины взаимосвязей симметрических и однотипных с ними функций.

Теорема 23. Структура $[\mathfrak{S}_n, \mathfrak{T}_n]$ состоит из четырех элементов:

$$\mathfrak{S}_n,\ \hat{\mathfrak{S}}_n,\ \mathfrak{N}'_n\mathfrak{S}_n \text{ и } \mathfrak{T}_n.$$

В самом деле, любая подгруппа $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{S}_n$ содержит хотя бы одно преобразование $N_\alpha S_{i_1 i_2 \dots i_n}$, где $\alpha > 0$, а следовательно содержит хотя бы одно преобразование $N_\alpha = N_\alpha S_{i_1 i_2 \dots i_n} S^{-1}_{i_1 i_2 \dots i_n}$. Но тогда $\mathfrak{G}$ содержит группу $\{N_\alpha, \mathfrak{S}_n\}$, что ввиду леммы 3 и доказывает теорему.

Следствие 1. Структура $[N_\alpha \mathfrak{S}_n N_\alpha, \mathfrak{T}_n]$ состоит из четырех элементов: $N_\alpha \mathfrak{S}_n N_\alpha$, $\{N_{2^n-1}\} N_\alpha \mathfrak{S}_n N_\alpha = N_\alpha \hat{\mathfrak{S}}_n N_\alpha$, $\mathfrak{R}'_n \mathfrak{S}_n$ и $\mathfrak{T}_n$.

В самом деле, $[N_\alpha \mathfrak{S}_n N_\alpha, \mathfrak{T}_n] = [N_\alpha \mathfrak{S}_n N_\alpha, N_\alpha \mathfrak{T}_n N_\alpha]$ получается из $[\mathfrak{S}_n, \mathfrak{T}_n]$ трансформированием при помощи N_α. При этом $N_\alpha \hat{\mathfrak{S}}_n N_\alpha = N_\alpha \{N_{2^n-1}\} \mathfrak{S}_n N_\alpha = \{N_{2^n-1}\} N_\alpha \mathfrak{S}_n N_\alpha$, $N_\alpha \mathfrak{R}'_n \mathfrak{S}_n N_\alpha = \mathfrak{R}'_n N_\alpha \mathfrak{M}_\alpha \mathfrak{S}_n = \mathfrak{R}'_n \mathfrak{S}_n$.

Следствие 2. Пусть $\alpha = c_1 c_2 \dots c_n$, $\beta = d_1 d_2 \dots d$ суть n-разрядные двоичные числа. Тогда $\{N_\alpha \mathfrak{S}_n N_\alpha \ N_\beta \mathfrak{S}_n N_\beta\} = N_\alpha \mathfrak{S}_n N_\alpha = N_\beta \mathfrak{S}_n N_\beta$ при $\alpha = \beta$ или $\alpha = \bar{\beta} = \bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots \bar{d}_n$; $\{N_\alpha \mathfrak{S}_n N_\alpha, N_\beta \mathfrak{S}_n N_\beta\} = \mathfrak{R}'_n \mathfrak{S}_n$ при $\alpha \neq \beta$ и $\alpha \neq \bar{\beta}$.

В самом деле, при $N_\alpha \mathfrak{S}_n N_\alpha \neq N_\beta \mathfrak{S}_n N_\beta$ их теоретико-структурной суммой может быть только $\mathfrak{R}'_n \mathfrak{S}_n$. Но $N_\alpha \mathfrak{S}_n N_\alpha = N_\alpha \mathfrak{S}_n N_\beta$ влечет принадлежность преобразования $N_{c_1 c_2 \dots c_n \oplus d_1 d_2 \dots d_n} = N_\alpha N_\beta$ к нормализатору $\hat{\mathfrak{S}}_n$ группы $\mathfrak{S}_n$ и $\mathfrak{T}_n$, а тем самым к группе $\{N_{2^n-1}\}$.

Теорема 24. Структура $[\hat{\mathfrak{S}}_n, \mathfrak{T}_n]$ состоит из элементов $\hat{\mathfrak{S}}_n$ и $\mathfrak{T}_n$ при нечетном n и из элементов $\hat{\mathfrak{S}}_n$, $\mathfrak{R}'_n \mathfrak{S}_n$ и $\mathfrak{T}_n$ при четном n.

Доказательство тривиально.

Следствие 1. Структура $[N_\alpha \hat{\mathfrak{S}}_n N_\alpha, \mathfrak{T}_n]$ состоит из элементов $N_\alpha \hat{\mathfrak{S}}_n N_\alpha$ и $\mathfrak{T}_n$ при нечетном n и из элементов $N_\alpha \hat{\mathfrak{S}}_n N_\alpha$, $\mathfrak{R}'_n \mathfrak{S}_n$ и $\mathfrak{T}_n$ при четном n.

Следствие 2. $\{N_\alpha \hat{\mathfrak{S}}_n N_\alpha, N_\beta \hat{\mathfrak{S}}_n N_\beta\} = N_\alpha \hat{\mathfrak{S}}_n N_\alpha = N_\beta \hat{\mathfrak{S}}_n N_\beta$ при $\alpha = \beta$ или $\alpha = \bar{\beta}$; $\{N_\alpha \hat{\mathfrak{S}}_n N_\alpha, N_\beta \hat{\mathfrak{S}}_n N_\beta\} = \mathfrak{T}_n$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \bar{\beta}$ и нечетном n; $\{N_\alpha \hat{\mathfrak{S}}_n N_\alpha, N_\beta \hat{\mathfrak{S}}_n N_\beta\} = \mathfrak{R}'_n \mathfrak{S}_n$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \bar{\beta}$ и четном n.

Теорема 25. К типу области $D(\mathfrak{S}_n)$ принадлежат 2^{n-1} областей инвариантности $D(N_\alpha \mathfrak{S}_n N_\alpha)$, включая саму область $D(\mathfrak{S}_n)$; каждая из них содержит по 2^{n+1} функций; пересечение двух различных областей есть класс полисимметрических функций n переменных.

В самом деле, нормализатор $\hat{\mathfrak{S}}_n$ группы $\mathfrak{S}_n$ в $\mathfrak{T}_n$ имеет индекс 2^{n-1}. По теореме 3 мощность каждой области равна мощности области $D(\mathfrak{S}_n)$, т. е. числу симметрических функций n переменных. Наконец, последняя часть теоремы вытекает из теоремы 2 и следствия 2 к теореме 23.

Нетрудно видеть, что теорему 22 можно получить как очевидное следствие теоремы 25. Таким образом, мы предложили два доказательства оценки $\varkappa_n = 2^{2^n} - 2^{n+1} + 4$.

Теорема 26. К типу области $D(\hat{\mathfrak{S}}_n)$ принадлежат 2^{n-1} областей инвариантности, содержащих каждая по $2^{E(n/2)+1}$ функций; пересечение двух различных областей есть класс несобственных функций $\{0,1\}$ при нечетном n и класс полисимметрических функций n переменных при четном n.

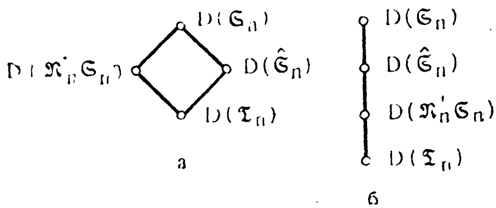


Рис. 4

В самом деле, область $D(\mathfrak{S}_n)$ при нечетном n есть класс бисимметрических функций n переменных, пополненный несобственными функциями 0 и 1, а при нечетном n — класс бисимметрических и полисимметрических функций n переменных Остальное вытекает из теорем 2, 3 и 24.

Теорема 27. Структура $[D(\mathfrak{T}_n), D(\mathfrak{S}_n)]$ состоит из четырех элементов: $D(\mathfrak{T}_n)$, $D(\mathfrak{N}'_n\mathfrak{S}_n)$, $D(\hat{\mathfrak{S}}_n)$ и $D(\mathfrak{S}_n)$.

В самом деле, вспомним теоремы 2 и 23.

Следствие. Структура $[D(\mathfrak{T}_n], D(N_\alpha\mathfrak{S}_nN_\alpha)]$ состоит из четырех элементов: $D(\mathfrak{T}_n)$, $D(\mathfrak{N}'_n\mathfrak{S}_n)$, $D(N_\alpha\hat{\mathfrak{S}}_nN_\alpha)$ и $D(N_\alpha\mathfrak{S}_nN_\alpha)$.

Теорема 28. Структура $[D(\mathfrak{T}_n), D(\hat{\hat{\mathfrak{S}}}_n)]$ состоит из элементов $D(\mathfrak{T}_n)$ и $D(\hat{\hat{\mathfrak{S}}}_n)$ при нечетном n и из элементов $D(\mathfrak{T}_n)$, $D(\mathfrak{N}'_n\mathfrak{S}_n)$ и $D(\hat{\hat{\mathfrak{S}}}_n)$ при четном n.

В самом деле, вспомним теоремы 2 и 24.

Следствие. Структура $[D(\mathfrak{T}_n),\ D(N_\alpha\hat{\mathfrak{S}}_n N_\alpha)]$ состоит из элементов $D(\mathfrak{T}_n)$ и $D(N_\alpha\hat{\mathfrak{S}}_n N_\alpha)$ при нечетном n и из элементов $D(\mathfrak{T}_n)$, $D(\mathfrak{R}'_n\mathfrak{S}_n)$ и $D(N_\alpha\hat{\mathfrak{S}}_n N_\alpha)$ при четном n.

Теоремы 27 и 28 описывают всю совокупность областей инвариантности, содержащихся в классе симметрических булевых функций, а следствия из этих теорем описывают типы этих областей. Для большей наглядности приведем еще «диаграмму Хассе», изображающую структуру $[D(\mathfrak{T}_n),\ D(\mathfrak{S}_n)]$ (рис. 4: а — при нечетном n; б — при четном n). На этой диаграмме области, расположенные выше, содержат в себе области, расположенные ниже.

Глава 11
СИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ДРУГИХ КЛАССАХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

§ 11.1. В этой главе мы исследуем соотношения между классом симметрических функций и некоторыми другими классами булевых функций, определяемыми посредством понятий, не обязательно принадлежащих теории групп [34].

Определение 19. Булева функция n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функционально разделимой, если существуют такие функции $g(z_1, z_2, \ldots, z_{n-s+1})$ и $h(z_1, z_2, \ldots, z_s)$, что хотя бы для одной подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g\,[h(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}),\ x_{i_{s+1}}, \ldots, x_{i_n}]$ и $1 < s < n$.

Иными словами, функционально разделимая булева функция представима в виде подстановки функции не менее двух переменных в функцию не менее двух же переменных [По-1]. Ввиду такого определения функциональная разделимость возможна лишь с $n = 3$. Тривиальным примером функционально разделимых функций являются суммы и произведения, составленные из переменных и их отрицаний. Несобственные функции 0 и 1, формально удовлетворяющие определению 19, мы также будем считать функционально разделимыми функциями n переменных.

---

[34] Результаты из § 11.1 были сформулированы автором в основном в [По-1], [По-3], а результаты из § 11.2 — в [По-8]. Работа [По-1] предварительно докладывалась на семинаре по математической логике в МГУ в 1952 г.

Теорема 29. Кроме 0 и 1, единственными функционально разделимыми симметрическими функциями n переменных являются

$$x_1 x_2 \ldots x_n, \quad \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \quad \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_n,$$
$$x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n, \quad \bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n.$$

В самом деле, согласно критерию функциональной разделимости, данному автором [По-1], функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функционально разделима тогда и только тогда, когда хотя бы для одного множества переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$, где $0 < r < n-1$, существует такая функция $h(x_{i_{r+1}}, x_{i_{r+2}}, \ldots, x_{i_r})$, где $\{i_{r+1}, i_{r+2}, \ldots, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$, что все коэффициенты разложения функции f по $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ равны либо 0, либо 1, либо h, либо $\bar{h}$.

Это значит, что если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — симметрическая функция, то ее карта разложения имеет не более двух вертикалей, различающихся по их заполнению рабочими точками и содержащих одновременно как рабочие, так и пустые (нерабочие) точки, и эти вертикали взаимно дополнительны (в теоретико-множественном смысле). В то же время, согласно теореме 14, каждая идущая слева вниз направо диагональ этой карты должна быть либо сплошь заполнена, либо сплошь не заполнена рабочими точками.

Карт, удовлетворяющих этим двум условиям, только восемь (рис. 5). Действительно, наличие в карте хотя бы одной пустой вертикали делает пустыми все вертикали, кроме первой или кроме последней (но не обеих сразу). В первой вертикали может быть занята только самая нижняя, в последней — только самая верхняя точка (вырожденные диагонали). Наличие хотя бы одной сплошь заполненной вертикали делает все вертикали также сплошь заполненными, кроме первой или кроме последней. В первой вертикали может быть пустой только самая нижняя, в последней — только самая верхняя точка. Если же все вертикали содержат одновременно и пустые, и рабочие точки, то карта построена из двух взаимно-дополнительных вертикалей, которые чередуются. А это возможно лишь при чередовании заполненных и пустых диагоналей. Так чередоваться диагонали могут лишь двумя способами. Итого 8 карт рис. 4, которым отвечают функции: 0 (рис. 5, а), 1 (рис. 5, б), $x_1 x_2 \ldots x_n$ (рис. 5, в), $\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n$ (рис. 5, г), $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ (рис. 5, д), $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_n$ (рис. 5, е), $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ (рис. 5, ж), и $\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ (рис. 5, з).

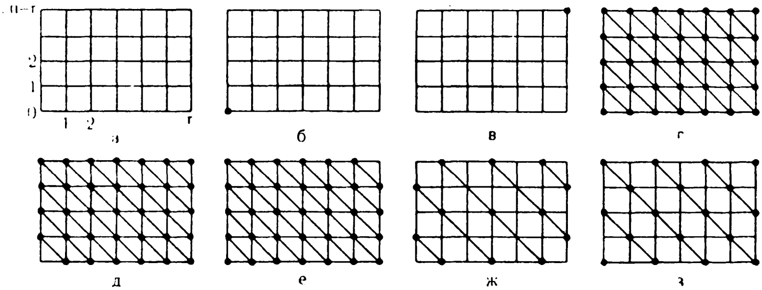


Рис. 5

Тем самым теорема доказана.

В теории релейных схем функциональная разделимость функций $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$ и $\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$ позволяет добиться их особенно простой реализации в классе параллельно-последовательных контактных двухполюсников ([Ше-2], стр. 80, примечание; [Ябл]). В классе же произвольных контактных схем для этих функций получаются еще более простые реитеративные реализации [Ше-1], [По-3].

§ 11.2. Определение 20. Булева функция, представимая выражением без отрицаний, называется монотонно неубывающей; функция, получаемая из монотонно неубывающей булевой функции инверсированием всех аргументов, называется монотонно невозрастающей.

Теорема 30. Единственными монотонно неубывающими симметрическими функциями n переменных являются $n+2$ функций

$$0 = S(x_1, \ldots, x_n), \quad S_n(x_1, \ldots, x_n),$$
$$S_{n-1,n}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, S_{1,2,\ldots,n}(x_1, \ldots, x_n),$$
$$1 = S_{0,1,2,\ldots,n}(x_1, \ldots, x_n).$$

В самом деле, по определению монотонно неубывающую симметрическую функцию можно представить выражением без отрицаний. Раскрытием скобок это выражение можно преобразовать в булеву сумму, в которой слагаемыми будут произведения переменных. Возьмем какое-либо произведение с наименьшим числом переменных в нем. В силу симметрии функции наша сумма должна содержать среди слагаемых все произведения, составленные из сочетаний такого же числа переменных, выбираемых среди всех аргументов функции. Все другие произведения, входящие в сумму, будут наверняка содержать эти минимальные произведения в качестве множителей и потому поглощаются ими по закону $a + ab = a$. Таким образом, всякая монотонно неубывающая симметрическая функция представима в виде $\Sigma x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}$, где суммирование производится по всем сочетаниям из n индексов по m. Но

$$\Sigma\, x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m} = S_{m,\, m+1, \ldots, n}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Следствие. Единственными монотонно невозрастающими симметрическими функциями n переменных являются $n + 2$ функций

$$0 = S(x_1, \ldots x_n), \quad S_0(x_1, \ldots, x_n), \quad S_{0,1}(x_1, \ldots, x_n),$$
$$S_{0,1,2, \ldots, n-1}(x_1, \ldots, x_n), \quad 1 = S_{0,1,2, \ldots, n}(x_1, \ldots, x_n).$$

В самом деле, из теорем 18 и 30 вытекает

$$\Sigma\, \bar{x}_{i_1} \bar{x}_{i_2} \ldots \bar{x}_{i_m} = S_{0,1, \ldots, n-m}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

что и доказывает следствие.

Итак, всякая монотонно неубывающая симметрическая функция представима в виде

$$S_{m, m+1, \ldots, n}(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m},$$

а всякая монотонно невозрастающая симметрическая функция представима в виде

$$S_{0,1, \ldots, n-m}(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma\, \bar{x}_{i_1} \bar{x}_{i_2} \ldots \bar{x}_{i_m};$$

в обоих случаях суммирование производится по всем сочетаниям из n индексов по m. Легко видеть, что монотонно невозрастающие симметрические функции суть отрицания монотонно неубывающих симметрических функций, и обратно:

$$S_{0,1, \ldots, n-m}(x_1, \ldots, x_n) = \bar{S}_{n-m+1,\, n-m+2, \ldots, n}(x_1, \ldots, x_n),$$

$$S_{m,m+1,\ldots,n}(x_1,\ldots,x_n) = \overline{S}_{0,1,\ldots,m-1}(x_1,\ldots,x_n).$$

Но по законам де Моргана

$$\overline{S}_{n-m+1,\ n-m+2,\ldots,n}(x_1,\ldots,x_n) = \Pi(\bar{x}_{i_1} + \bar{x}_{i_2} + \ldots + \bar{x}_{i_{n-m+1}}),$$

$$\overline{S}_{0,1,\ldots,m-1}(x_1,\ldots,x_n) = \Pi(x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_{n-m}}),$$

где умножение производится по всем сочетаниям из n индексов по $n-m+1$. Следовательно, всякая монотонно неубывающая симметрическая функция представима также в виде

$$S_{m,\ m+1,\ldots,n}(x_1,\ldots,x_n) = \Pi(x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_{n-m+1}}),$$

а всякая монотонно невозрастающая симметрическая функция — в виде

$$S_{0,1,\ldots,n-m}(x_1,\ldots,x_n) = \Pi(\bar{x}_{i_1} + \bar{x}_{i_2} + \ldots + \bar{x}_{i_{n-m+1}}).$$

Отсюда вытекают соотношения:

$$\Sigma\, x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_m} = \Pi(x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_{n-m+1}}),$$

$$\Sigma\, \bar{x}_{i_1}\bar{x}_{i_2}\ldots \bar{x}_{i_m} = \Pi(\bar{x}_{i_1} + \bar{x}_{i_2} + \ldots + \bar{x}_{i_{n-m+1}}),$$

$$\overline{\Sigma\, x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_m}} = \Sigma\, \bar{x}_{i_1}\bar{x}_{i_2}\ldots \bar{x}_{i_{n-m+1}},$$

$$\overline{\Sigma\, \bar{x}_{i_1}\bar{x}_{i_2}\ldots \bar{x}_{i_m}} = \Sigma\, x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{n-m+1}},$$

$$\overline{\Pi(x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_m})} = \Pi(\bar{x}_{i_1} + \bar{x}_{i_2} + \ldots + \bar{x}_{i_{n-m+1}}),$$

$$\overline{\Pi(\bar{x}_{i_1} + \bar{x}_{i_2} + \ldots + \bar{x}_{i_m})} = \Pi(x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_{n-m+1}}),$$

где суммирование и умножение в левой части равенств производятся по всем сочетаниям из n по m, а в правой части — по всем сочетаниям из n по $n-m+1$. Например,

$$wxy + wxz + wyz + xyz = (w+x)(w+y)(w+z)(x+y)(y+z),$$

$$\overline{wxy + wxz + wyz + xyz} = \bar{w}\bar{x} + \bar{w}\bar{y} + \bar{w}\bar{z} + \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z},$$

$$xy + xz + yz = (x+y)(x+z)(y+z),$$

$$\overline{xy + xz + yz} = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z}.$$

Определение 21. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *особенной относительно* x_i, если $f = \tilde{x}_i f' + f''$, где $\tilde{x}_i$ есть x_i или $\bar{x}_i$, а f' и f'' не зависят от x_i. Функция, особенная относительно хотя бы одного аргумента, называется *особен-*

н о й. Функция, особенная относительно каждого аргумента, называется с о в е р ш е н н о о с о б е н н о й.

Автор доказал [По-3], [По-5], что булева функция является совершенно особенной тогда и только тогда, когда она одного типа хотя бы с одной монотонно неубывающей функцией. Так как всякая особенная симметрическая функция, конечно, является совершенно особенной, то из теоремы 30 и следствия к ней вытекает

Т е о р е м а 31. Единственными особенными симметрическими функциями n переменных являются $2n+2$ функций

$$0 = S(x_1, \ldots, x_n), \quad S_0(x_1, \ldots, x_n), \quad S_{0,1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots$$
$$\ldots, S_{0,1,\ldots,n-1}(x_1, \ldots, x_n),$$
$$1 = S_{0,1,\ldots,n}(x_1, \ldots, x_n), \quad S_n(x_1, \ldots, x_n),$$
$$S_{n-1,n}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, S_{1,2,\ldots,n}(x_1, \ldots, x_n).$$

С л е д с т в и е 1. Особенная симметрическая функция моносимметрична.

С л е д с т в и е 2. Единственными особенными обобщенными симметрическими функциями n переменных являются $2^n n+2$ функций

$$0 = S(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad S_0(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n),$$
$$S_{0,1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n), \ldots, S_{0,1,\ldots,n-1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n),$$
$$1 = S_{0,1,\ldots,n}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Объединение теоремы 29 с теоремой 31 дает перечисление булевых функций, входящих сразу в три класса: симметрических, функционально разделимых и особенных функций.

Т е о р е м а 32. Кроме 0 и 1, единственными симметрическими функциями n переменных, функционально разделимыми и в то же время особенными, являются

$$x_1 x_2 \ldots x_n, \quad \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \quad \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_n.$$

Теоремы 30—32 были получены автором в работе [По-8]. Аналогичные исследования проводил Р. Риги [Ри], рассматривавший функции $S_{k,k+1,\ldots,n}(n)$ и $S_{0,1,\ldots,k-1}(n)$. Он назвал эти функции фронтальными симметрическими и антифронтальными симметрическими, соответственно. Неособенные в нашем смысле симметрические функции Риги назвал полными симметрическими функциями.

Этими вопросами занимался также Дж. Эпштейн [Эп]. Он назвал монотонно неубывающие симметрические функции простыми симметрическими функциями. В его работе выведена формула

$$S_i(x_1, \ldots, x_n) = S_{i,\,i+1,\,\ldots,\,n}(x_1, \ldots, x_n)\ \overline{S}_{i+1,\,\ldots,\,n}(x_1, \ldots, x_n),$$

позволяющая представить через монотонно неубывающие («простые») симметрические функции любую элементарную («фундаментальную», по его терминологии) симметрическую функцию, а следовательно, и любую симметрическую функцию вообще. Такое представление дает возможность оценить минимальное число инверсий, с которыми может быть записана симметрическая булева функция, а это число может иметь значение при синтезе электронноламповых схем [Эп]. Например, указанная формула означает, что элементарную симметрическую функцию всегда можно реализовать не более чем с одной инверсией.

Заметим еще, что особенные симметрические функции могут представлять интерес при проектировании помехоустойчивых релейных устройств (см., например, [Ге]).

§ 11.3. Наконец, исследуем соотношения между симметрическими и антивариантными (в смысле определения 3) функциями. Очевидна

Теорема 33. Единственными антивариантными симметрическими функциями n переменных являются полисимметрические функции $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ и $\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ и все моносимметрические функции n переменных с асимметрическим расположением рабочих чисел относительно $n/2$ (т. е. с таким расположением, при котором ни одно рабочее число α_i не равно разности $n - \alpha_i$ и ни одно нерабочее число β_i не равно $n - \beta_i$).

В самом деле, антивариантность функций $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ и $\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ уже была нами установлена. Антивариантность же моносимметрических функций с асимметрическим расположением рабочих чисел относительно $n/2$ следует из того, что отрицанием такой моносимметрической функции

$S_A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является (ввиду теоремы 18) функция $S_A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$.

Следствие 1. При нечетном n все антивариантные симметрические функции n переменных самодвойственны; при четном n единственными несамодвойственными антивариантными симметрическими функциями являются $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ и $\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$.

Следствие 2. Число антивариантных симметрических функций n переменных равно

$$2^{E(n/2)-\eta(n)} - 2\eta(n) + 2.$$

Следствие 3. Число типов антивариантных симметрических функций n переменных равно

$$2^{E(n/2)-\eta(n)-1} - \eta(n) + 1.$$

Следствие 4. Число антивариантных обобщенных симметрических функций n переменных равно

$$2^n [2^{E(n/2)-\eta(n)-1} - \eta(n)] + 2.$$

Например, при $n = 3$ существует 4 антивариантные симметрические функции:

$$S_{0,1}(x, y, z) = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z}, \quad S_{0,2}(x, y, z) = \bar{x} \oplus y \oplus z,$$
$$S_{1,3}(x, y, z) = x \oplus y \oplus z, \quad S_{2,3}(x, y, z) = xy + xz + yz;$$

зато при $n = 4$ существуют только две антивариантные симметрические функции:

$$S_{0,2,4}(w, x, y, z) = \bar{w} \oplus x \oplus y \oplus z, \quad S_{1,3}(w, x, y, z) = w \oplus x \oplus y \oplus z.$$

Теорема 34. Единственными функционально разделимыми антивариантными симметрическими функциями n переменных являются

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \text{ и } \bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n.$$

Теорема 35. Единственными особенными антивариантными симметрическими функциями n переменных при нечетном n являются

$$S_{0,1,\ldots,E(n/2)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ и } S_{E(n/2)+1,\ldots,n}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

а при четном n не существует ни одной особенной антивариантной симметрической функции.

Следствие. Все особенные антивариантные симметрические функции самодвойственны.

В другой форме теорема 35 была получена Р. Риги ([Ри], § 9).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы видим, что изучение групповой инвариантности, и в частности симметрии, булевых функций выявляет разнообразные зависимости между булевыми функциями — зависимости, представляющие интерес для различных отраслей науки и техники, и в особенности для теории релейных схем. Переход от рассмотрения отдельных функций к рассмотрению их типов увеличивает возможности эффективного практического применения алгебры булевых функций и облегчает такое применение, делает его более простым; то же можно сказать и о выделении областей инвариантности в качестве подалгебр алгебры булевых функций.

Дальнейшая работа в этом направлении может вестись по нескольким линиям. Укажем следующие:

1) более детально изучить различные области инвариантности булевых функций n переменных и образуемую ими структуру;

2) продолжить изучение того, как пересекаются различные классы булевых функций с различными областями инвариантности (подобно исследованиям в гл. 11);

3) продолжить изучение типового состава различных классов булевых функций, примером чего служит гл. 10 (о важности этой задачи шла речь в § 7.4);

4) продолжить разработку методов оценки числа типов для всего множества булевых функций n переменных или для какой-либо его части;

5) глубже изучить n-мерное булево пространство, особенно с точки зрения теории кодирования;

6) произвести аналогичное исследование явлений групповой инвариантности для различных обобщений и видоизменений понятия типа булевых функций (типы последовательно-

стей булевых функций, матриц булевых функций, «предикативных» функций и т. д.), имея в виду, в частности, что здесь можно предвидеть смычку с проблематикой оснований математики (см. § 1.4, 8.1);

7) исследовать более подробно историю изучения явлений групповой инвариантности в алгебре булевых функций и других «алгебрах логики» с учетом взаимосвязей с общей историей логики и математики.

Литература

[Ал] Александров П. С. Введение в общую теорию множеств и функций. М.— Л., Гостехиздат, 1948.

[Бе] Белевич В. (Belevitch V.). Propositions pour une théorie mathématique de la structure du langage. Revue quest. sci., 1955, t. 16, pp. 182—198.

[Би] Биркгоф Г. Теория структур. М., ИЛ, 1952.

[Бо] Боумен Дж. Р. (Bowman J. R.). Reduction of the Number of Possible Boolean Functions Trans. of the 9 nth Conference on Cybernetics, Mace Foundation. New York, 1953.

[Ва] Ван-дер-Варден В. Л. Современная алгебра, ч. I.М.—Л., Гостехиздат, 1947.

[Ве] Вейль Г., Классические группы. М. ИЛ, 1947.

[Ге] Гейтс К. Р. (Gates C. R.). Coincidence Detectors for Binary Pulses. Conven. Рес. IRE, 1953, № 8, p. 132—136.

[Гл-1] Гилберт Э. Н. (Gilbert E. N.). N-Terminal Switching Circuits. BSTJ, 1951, vol. 30, № 3, p. 668—688.

[Гл-2] Гилберт Э. Н. (Gilbert E. N.). A Comparison of Signalling Alphabets. BSTJ, 1952, vol. 31, No 3, p. 504—522.

[Гл-А] Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. М., ИЛ, 1947.

[ГлКФ] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.—Л., Гостехиздат, 1951.

[Дж] Джевонс У. С. (или В. С.). Основы науки. СПб., 1881.

[Дэ] Дэйвис Р. Л. (Davis R. L.). The Number of Structures of Finite Relations. Proc. Amer. Math. Soc., 1953, vol. 4, No 3, p. 486—495.

[Зи] Зингер Т. (Singer Th.). The Theory of Counting Techniques. Proc. Assn for Computing Machinery, meeting at Pittsburgh. Rimbach, Pittsburgh, Pa., 1952, p. 287—291.

[ИГ-1] Игонне Р., Греа Р. (Higonnet R., Gréa R.). Etude logique des circuits électriques et des systèmes binaires. Berger-Levrault, Paris, 1955.

[ИГ-2] Игонне Р., Греа Р. (Higonnet R., Gréa R.).

Logical Design of Electrical Circuit. McGrow-Hill, New York—Toronto—London, 1958.

[Ка] К а г а н В. Ф. Основы теории поверхностей, ч. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1947.

[Ке] К л е й н Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований. в кн.: «Об основаниях геометрии». Под ред. А. П. Нордена. М., Гостехиздат, 1956, стр. 393—434.

[Кл] К л и ф ф о р д У. К. (C l i f f o r d W. K.). On the Types of Compound Statment Involving Four Classes. Proc. of the Literary and Phil. Soc. of Manchester, 1877, Vol. 16, Jan. p. 88—101.

[Ко] К о л д у э л л С. Х. (C a l d w e l l S. H.). The Recognition and Identification of Symmetric Switching Functions. Trans. AIEE, 1954, vol. 73, Pt. 1, p. 142—147.

[КопХ] К о п и И. М., Х э р а р и Ф. (C o p i I. M., H a r a r y F.). Some Properties of n-adic Relations. Portugaliae Math., 1953, Vol. 12, Fasc. 4, p. 143—152.

[Кор] К о р о б к о в В. К. Реализация симметрических функций в классе Π-схем. Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 2, стр. 260—263.

[Кр] К у р о ш А. Г. Теория групп. М., Гостехиздат, 1953.

[Кт] К у т ю р а Л. Алгебра логики. «Mathesis», Одесса, 1909.

[Мк] М а к - К л а с к и Э. Дж. (M c C l u s k e y E. J., Jr.). Detection of Group Invariance or Total Symmetry of a Boolean Function. BSTJ, 1956, vol. 35, № 6, p. 1445—1453.

[Мл] М а л л е р Д. Ю. (M u l l e r D. E.). Application of Boolean Algebra to Switching Circuit Design and to Error Detection. IRE Trans., 1954, vol. EC-3, № 3, p. 6—12.

[Мр-1] М а р к у с М. П. (M a r c u s M. P.). The Detection and Identification of Symmetric Switching Functions with the Use of Tables of Combinations. IRE Trans., 1956, vol. EC-5, No 4, p. 237—239.

[Мр-2] М а р к у с М. П. (M a r c u s M. P.). Detecting Symmetric Switching Functions. Prod. Engng, 1956, vol. 27, No 12, p. 164—166.

[Му] М а у т н е р Ф. И. (M a u t n e r F. I.). An Extension of Klein's Erlanger Program: Logic as Invariant-Theory. Amer. J. Math., 1946, vol. 68, No 3, p. 345—384.

[Нн] Н и н о м и я И. (N i n o m i y a I.). On the Number of Types of Symmetric Boolean Output Matrices. Mem. Fac. Engng Nagoya Univ. 1955, vol. 7, No 2, p. 115—124.

[Ост] О с т и а н у В. М. Синтез схем с шаговыми переключателями. Сб. работ по автоматике и телемеханике. Изд-во АН СССР, 1956, стр. 253—267.

[Па-1] П а н к а д ж а м С. (P a n k a j a m S.). On Symmetric Functions of n Elements in a Boolean Algebra. J. Indian Math. Soc., 1936/7, vol. 2, No 5, p. 198—210.

[Па-2] П а н к а д ж а м С. (P a n k a j a m S.). On Symmetric Functions of m Symmetric Functions in a Boolean Algebra. Proc. Indian Acad. Sci., 1939, vol. 9, Sec. A, No 2, p. 95—102.

[По-1] П о в а р о в Г. Н. О функциональной разделимости булевых функций. Докл. АН СССР, 1954, т. 94, № 5, стр. 801—803; 1958, т. 123, № 5, стр. 774.

[По-2] П о в а р о в Г. Н. О синтезе контактных многополюсников. Докл. АН СССР, 1954, т. 94, № 6, стр. 1075—1078; т. 96, № 6, стр. 1084.

[По-3] П о в а р о в Г. Н. Исследование контактных схем с минимальным числом контактов. Диссертация. ИАТ АН СССР, 1954.

[По-4] П о в а р о в Г. Н. Рецензия на книгу «Синтез электронных вычислительных и управляющих схем». Автоматика и телемеханика, 1954, т. 15, № 6, стр. 567—569.

[По-5] П о в а р о в Г. Н. Математическая теория синтеза контактных (1, k)-полюсников. Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 5, стр. 909—912; т. 102, № 2, стр. 196.

[По-6] П о в а р о в Г. М. Новий метод синтеза симетричних контактних схем. Donobigi. АН УРСР, 1955, № 2, стор. 115—117.

[По-7] П о в а р о в Г. Н. О методике анализа симметрических контактных схем. «Автоматика и телемеханика», 1955, т. 16, № 4, стр. 364—366.

[По-8] П о в а р о в Г. Н. К изучению симметрических булевых функций с точки зрения теории релейно-контактных схем. Докл. АН СССР, 1955, т. 104, № 2, стр. 183—185; 1958, т. 123, № 5, стр. 774.

[По-9] П о в а р о в Г. Н. К синтезу симметрических контактных схем. Сб. работ по автоматике и телемеханике. Изд-во АН СССР, 1956, стр. 268—277.

[По-10] П о в а р о в Г. Н. Состояние вопроса о минимальном числе структурных элементов в релейно-контактных схемах. Сб. «Телемеханизация в народном хозяйстве». Изд-во АН СССР, 1956, стр. 134—138.

[По-11] П о в а р о в Г. М. До питання про структурне проектування симетричних контактних схем. Автоматика (Київ), 1956, № 4, стор. 48—53.

[По-12] П о в а р о в Г. Н. Логика и автоматизация. Сб. «Логические исследования». Изд-во АН СССР, 1959, стр. 300—314.

[По-13] П о в а р о в Г. Н. О групповой инвариантности булевых функций. Analele Ştiinţ Universităţii «Al. I. Cuza» (Iaşi), Sect. I, 1958, t. 4, fasc. 1, p. 39—44.

[Пя] П о й я Ю. (P ó l y a G.). Sur les types des propositions composées. J. Symbolic Logic, 1940, vol. 5, № 3, p. 98—103.

[Пу] Ван дер П у л ь В. Л. (van der P o e l W. L.). Enige bijzondere onderwerpen uit de schattelalgebra. De Ingenieur (Utrecht). 1955, vol. 67, Nr. I, blz. E. 9 — E. 14.

[Ри] Р и г и Р. (R i g h i R.). Le funzioni di commutazione in genere e quelli simmetriche in particolare. Ingegneria ferroviaria, 1955, An. 10, N 10, p. 719—737.

[Се] Серрелл Р. (Serrell R.) Elements of Boolean Algebra for the Study of Information-Handling Systems. Proc. IRE, 1953, vol. 41, No 10, p. 1366—1380; 1954, vol. 42, No 2, p. 475.

[Сл-1] Слепян Д. (Slepian D.). On the Number of Symmetry Types of Boolean Functions of n Variables. Canad. J. Math., 1953, vol. 5, No 2, pp. 185—193.

[Сл-2] Слепян Д. Класс двоичных сигнальных алфавитов. В кн.: «Теория передачи сообщений». Пер. под ред. В. И. Сифорова. М., ИЛ, 1957, стр. 82—113.

[Стр.] Стрингхэм В. И. Правильные фигуры в n-мерном пространстве. Успехи мат. наук, 1944, вып. 10, Гостехиздат, стр. 22—33.

[ТВ] Таубе М., Вахтель И. С. (Taube M., Wachtel Irma S.). The Logical Structure of Coordinate Indexing. In the book: Taube M. & Ass., Studies in Coordinate Indexing. Documentation Inc., USA, 1953, p. 73—76.

[То] Тодд Дж. А. (Todd J. A.). The Groups of Symmetrics of the Regular Polytops. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1931, vol. 27, p. 212—231.

[Уш] Уошберн С. Х. (Washburn S. H.). Relay «Trees» and Symmetric Circuits. Trans. AIEE, 1949, vol. 68, Pt. 1, p. 582—586.

[ХР] Харди Г. Х., Райт Э. М. (Hardy G. H., Wright E. M). An Introduction to Theory of Numbers. The Clarendon Press, Oxford. 1945.

[Хэ] Хэмминг Р. В. Коды с обнаружением и исправлением ошибок. В кн.: «Коды с обнаружением и исправлением ошибок». Пер. под ред. А. М. Петровского. М., ИЛ, 1956, стр. 7—22.

[Шс-1] Шеннон К. Э. (Shannon C. E.). A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits. Trans. AIEE, 1938, vol. 57, p. 713—723.

[Шс-2] Шеннон К. Э. (Shannon C. E.). The Synthesis of Two-Terminal Switching Circuits. BSTJ, 1949, vol. 28, No 1, p. 59—98.

[Шт] Шестаков В. И. (ред. пер.). Синтез электронных вычислительных и управляющих схем. М., ИЛ, 1954.

[Шр] Шрёдер Э. (Schröder E.). Vorlesungen über die Algebra der Logik. Bd. 1, Anhang 6, S. 647—683.

[Шу] Шубников А. В. Симметрия. Изд-во АН СССР, 1940.

[Эб] Эшби У. Р (Ashby W. R.). Homeostasis. Trans. of the 9nth Conference on Cybernetics. Mace Foundation, New York, 1953.

[Эп] Эпштейн Дж. (Epstein G.). Synthesis of Electronic Circuits for Symmetric Functions. IRE Trans., 1958, vol. EC—7, No 1, p. 57—60.

[Эш] Эшенхерст Р. Л. (Ashenhurst R. L). The Application of Counting Techniques. Proc. Assn for Computing Machinery, meeting at Pittsburgh. Rimbach, Pittsburgh, Pa., 1952, p. 293—305.

[Ябл] Яблонский С. В. Реализация линейной функции в классе $П$-схем. Докл. АН СССР, 1954, т. 94, № 5, стр. 805—806.

В. И. Шестаков

О ДВОЙНОЙ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ТРЕХЗНАЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЭТОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПОСРЕДСТВОМ РЕЛЕЙНО-КОММУТАТОРНЫХ СХЕМ [1]

Введение

Моделирование какого-либо логического исчисления посредством каких-либо переключательных схем заключается в том, что операциям, производимым над объектами этого исчисления, т. е. над объектами логической природы, однозначно сопоставляются операции над некоторыми физическими величинами — параметрами переключательных схем, используемых для моделирования операций данного логического исчисления. При моделировании трехзначного исчисления высказываний посредством трехпозиционных коммутаторов, управляемых трехпозиционными реле, объектам этого исчисления, т. е. трехзначным высказываниям, должны быть однозначно сопоставлены некоторые физические величины — параметры схем, построенных из трехпозиционных коммутаторов и управляющих ими трехпозиционных реле. Но, как известно,

[1] Основная часть данной работы была доложена автором 22.XI и 28.XI 1957 г. в МГУ на семинаре по техническим приложениям математической логики. Пользуюсь случаем выразить признательность Д. А. Бочвару и другим участникам семинара за обсуждение этой работы.

параметры, характеризующие состояния трехпозиционных реле, управляющих этими коммутаторами, являются совершенно различными физическими величинами, принимавшими значения из множеств различной мощности. Именно это последнее обстоятельство и приводит к двойной арифметической интерпретации трехзначного исчисления высказываний: посредством операций над переменными, принимающими значения лишь из множества $\{-1, 0, 1\}$, и посредством операций над любыми действительными переменными.

В § 1 этой работы рассматриваются основные понятия и операции трехзначного исчисления высказываний. Устанавливается, что трехзначное исчисление высказываний, предложенное Д. А. Бочваром [1, 2], содержится в трехзначной логике С. К. Клини [3, 4]. Для обозначения операций исчисления Бочвара используются предложенные им символы, а для обозначения операций логики Клини, не содержащихся в исчислении Бочвара, используются обозначения Клини. Это исчисление Клини — Бочвара расширено здесь до функционально полного исчисления высказываний путем использования функции Вебба [5] — обобщения известной функции Шеффера [6].

В § 2 излагается двойная арифметическая интерпретация операций трехзначного исчисления высказываний, о которой идет речь.

В § 3 выясняется физический смысл этой двойной арифметической интерпретации и рассматриваются примеры ее использования при моделировании трехзначного исчисления высказываний посредством схем, построенных из трехпозиционных коммутаторов и управляющих ими трехпозиционных реле, т. е. посредством трехпозиционных релейно-коммутаторных схем. В этом параграфе используются некоторые понятия и операции, введенные автором ранее [7, 8, 9].

§ 1. Основные понятия и операции трехзначного исчисления высказываний

В трехзначном логическом исчислении Бочвара [1, 2] впервые было введено различение понятий «высказывание» и «предложение». Согласно Бочвару, высказывание имеет *смысл*, если оно истинно или ложно. Высказывание называется *предложением* в том, и только в том, случае, если оно имеет смысл. Высказывание, не имеющее смысла, называется *бессмысленным* или также *бессодержательным*. Согласно этим определениям, всякое высказывание либо не имеет смысла, либо истинно, либо ложно. Таким образом, переменные, обозначающие в исчислении Бочвара высказывания, могут принимать лишь три значения: «истина», «ложь» и «бессмыслица».

Кроме исчисления Бочвара, существуют другие трехзначные логические исчисления, в которых переменные, обозначающие высказывания (или трехзначные предложения), могут принимать также лишь три различных значений, обычно называемые «значениями истинности». Два из этих значения во всех этих исчислениях называются одинаково: «истина» и «ложь»; в то же время третье значение в различных исчислениях называется по-разному, а иногда в одном и том же исчислении оно в различных случаях имеет различные логические интерпретации. Так, например, в сильной трехзначной логике Клини [3, 4] это третье значение истинности интерпретируется в различных случаях следующими различными понятиями: «не определено», «неизвестно», «значение не существенно», «неизвестно, истинно ли или ложно», «ни истинность, ни ложность не установимы алгоритмически».

При содержательной интерпретации трехзначного исчисления высказываний мы будем применять в дальнейшем первую из только что перечисленных интерпретаций третьего, отличного от «истины» и «лжи» значения истинности. Эта интерпретация третьего значения истинности является наиболее широкой из всех возможных и имеет то преимущество, что не исключает возможности преобразования трехзначного исчисления высказываний в любое n-значное исчисление, где $n > 3$.

Условимся вместо термина «значение истинности» применять в дальнейшем термин «логическое значение» высказывания.

Переменные высказывания условимся обозначать заглавными буквами P, Q, R, ..., а логические значения, которые могут принимать эти высказывания,— буквами: T (читается «истина»), F (читается «ложь») и U (читается «не определено»).

Будем, далее, называть высказывание *предложением* в том, только в том, случае, если оно истинно или ложно.

Для обозначения переменных предложений будем применять малые буквы p, q, r, ..., однако использовать такие обозначения будем лишь в тех случаях, когда необходимо подчеркнуть, что данное высказывание является именно *предложением*, а не любым высказыванием.

Высказывания, не являющиеся предложениями, будем называть *не-предложениями*, или также *неопределенными высказываниями*. Последний термин оправдан тем, что такие высказывания имеют логическое значение U («не определено») или, иначе говоря, имеют неопределенное логическое значение [2].

Таблица I

P	Q	$P \mid Q$
F	F	U
F	U	T
F	T	F
U	F	T
U	U	T
U	T	F
T	F	F
T	U	F
T	T	F

В качестве основной операции трехзначного исчисления высказываний мы возьмем операцию $P \mid Q$, определяемую табл. I. Эту операцию мы будем называть *функцией Вебба*, так как Д. Л. Вебб показал [5], что, пользуясь одной подобной функцией, можно построить любую операцию n-значного исчисления высказываний. Чтобы убедиться, что функция $P \mid Q$ действительно является функцией Вебба, достаточно заменить в табл. I логические значения F, U и T, соответственно, значениями истинности

[2] Если под истинными или ложными высказываниями мы будем понимать только совершенно (вполне) верные или совершенно (вполне) ложные высказывания, соответственно, то класс неопределенных высказываний будет содержать все не вполне верные («почти верные», «приблизительно верные» и т. п.) и не вполне ложные («почти ложные», «приблизительно ложные» и т. п.) высказывания, а также все бессмысленные (бессодержательные) или двусмысленные (имеющие несколько смыслов) высказывания. Если ввести значения истинности, промежуточные между T — «совершенной истиной» и F — «совершенной ложью», то из нашего трехзначного исчисления получится n-значное исчисление высказываний, где $n > 3$. Чем больше будет введено таких промежуточных значений истинности, тем больше будет число n, т. е. тем более многозначной будет получаемая таким образом логика.

t_0, t_1 и t_2 в n-значной логике Вебба (при $n = 3$) и сравнить полученную таким образом функцию с операцией, определяемой в статье Вебба формулой 1.01. Функция Вебба $P \mid Q$ представляет собой обобщение известной [6] функции Шеффера $p \mid q$.

Используя знак $=_D$, обозначающий равенство по определению, определим через функцию Вебба следующие операции:

$$P^1 \underset{D}{=} P \mid P, \tag{D1}$$

$$P^2 \underset{D}{=} P^1 \mid P^1, \tag{D2}$$

$$\sim P \underset{D}{=} (P^1 \mid P^2) \mid (P \mid P^2)^1, \tag{D3}$$

$$P \vee Q \underset{D}{=} (P \mid Q)^2, \tag{D4}$$

$$P \,\&\, Q \underset{D}{=} \sim (\sim P \vee \sim Q), \tag{D5}$$

$$P \rightarrowtail Q \underset{D}{=} \sim P \vee Q, \tag{D6}$$

$$P \supset\subset P \underset{D}{=} (P \rightarrowtail Q) \,\&\, (Q \rightarrowtail P), \tag{D7}$$

$$|P| \underset{D}{=} P \supset\subset P, \tag{D8}$$

$$P \dotplus Q \underset{D}{=} |P \supset\subset Q| \supset\subset \sim (P \vee Q), \tag{D9}$$

$$P \cup Q \underset{D}{=} \sim (P \dotplus Q), \tag{D10}$$

$$P \cap Q \underset{D}{=} \sim (\sim P \cup \sim Q), \tag{D11}$$

$$P \supset Q \underset{D}{=} \sim P \cup Q, \tag{D12}$$

$$\vdash P \underset{D}{=} P^1 \mid P^2, \tag{D13}$$

$$\bar{P} \underset{D}{=} \sim \vdash Q, \tag{D14}$$

$$P \vee Q \underset{D}{=} \vdash P \cup \vdash Q, \tag{D15}$$

$$P \wedge Q \underset{D}{=} \vdash P \cap \vdash Q, \tag{D16}$$

$$P \rightarrow Q \underset{D}{=} \vdash P \supset \vdash Q, \tag{D17}$$

$$P \leftrightarrow Q \underset{D}{=} \vdash P \supset\subset \vdash Q, \tag{D18}$$

$$P \equiv Q \underset{D}{=} (P \leftrightarrow Q) \cap (\sim P \leftrightarrow \sim Q), \tag{D19}$$

$$\urcorner P \underset{D}{=} \vdash \sim P, \tag{D20}$$

$$\urcorner P \underset{D}{=} \sim \urcorner P, \tag{D21}$$

$$\downarrow P \underset{D}{=} \overline{P} \frown \overline{\urcorner} P, \tag{D22}$$

$$\overline{\downarrow} P \underset{D}{=} \sim \downarrow P. \tag{D23}$$

Из этих определений и табл. I получаем табл. II и III, где указаны логические значения всех введенных до сих пор операций при всех возможных логических значениях их аргументов.

Сравнивая таблицы логических значений операций $\sim P$, $P \vee Q$, $P \,\&\, Q$, $P \succ\!\!\rightarrow Q$, $P \supset\subset Q$, $P \equiv Q$ с соответствующими таблицами, определяющими операции $\overline{P}$, $P \vee Q$, $P \,\&\, Q$; $P \rightarrow Q$, $P \equiv Q$, $P \cong Q$ в так называемой сильной трехзначной логике Клини [3, 4], замечаем, что они соответственно совпадают. Отсюда сле-

Таблица II

P	P^1	P^2	$\backsim P$	$\|P\|$	$\vdash P$	$\overline{P}$	$\urcorner P$	$\overline{>} P$	$\downarrow P$	$\overline{\downarrow} P$
F	U	T	T	T	F	T	T	F	F	T
U	T	F	U	U	F	T	F	T	T	F
T	F	U	F	T	T	F	F	T	F	T

Таблица III

P	Q	$P \vee Q$	$P \,\&\, Q$	$P \succ\!\!\rightarrow Q$	$P \supset\subset Q$	$P \mathbin{\overset{\downarrow}{\cup}} Q$	$P \smile Q$	$P \frown Q$
F	F	F	F	T	T	T	F	F
F	U	U	F	T	U	U	U	U
F	T	T	F	T	F	F	T	F
U	F	U	F	U	U	U	U	U
U	U	U	U	U	U	U	U	U
U	T	T	U	T	U	U	U	U
T	F	T	F	F	F	F	T	F
T	U	T	U	U	U	U	U	U
T	T	T	T	T	T	F	T	T

Таблица III (продолжение)

P	Q	$P \supset Q$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \equiv Q$
F	F	T	F	F	T	T	T
F	U	U	F	F	T	T	F
F	T	T	T	F	T	F	F
U	F	U	F	F	T	T	F
U	U	U	F	F	T	T	T
U	T	U	T	F	T	F	F
T	F	F	T	F	F	F	F
T	U	U	T	F	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T

дует, что операции, определяемые формулами (D3), (D4), (D5), (D6), (D7) и (D19), могут читаться следующим образом:

$$\sim P \text{ — «не — } P\text{»},$$
$$P \vee Q \text{ — «} P \text{ или } Q\text{»},$$
$$P \& Q \text{ — «} P \text{ и } Q\text{»},$$
$$P \rightarrowtail Q \text{ — «если } P\text{, то } Q\text{»},$$
$$P \supset\subset Q \text{ — «} P \text{ если и только если } Q\text{»},$$
$$P \equiv Q \text{ — «} P \text{ эквивалентно } Q\text{»},$$

где высказывания о высказываниях P и Q, стоящие справа от символов соответствующих операций, понимаются в так называемом *сильном смысле* [4].

Как видно из таблицы логических значений для операции $P \vee Q$, высказывание «P или Q» *в сильном смысле* означает, что: 1) оно верно, когда верно P (каково бы ни было Q) или когда верно Q (каково бы ни было P); 2) оно ложно, если ложно P и ложно Q; 3) оно определено только в указанных случаях (а потому не определено в остальных).

Из таблицы для операции $P \& Q$ видно, что высказывание «P и Q» *в сильном смысле* означает, что оно верно, когда P верно и Q верно, что оно ложно, когда ложно по крайней мере одно из них (каково бы ни было в это время значение другого из них), и что оно определено только в этих случаях (и не определено, стало быть, в остальных).

Из таблицы для операции $P \succ\!\!\rightarrow Q$ видно, что: 1) высказывание «если P, то Q» *в сильном смысле* верно, если Q верно (каково бы ни было P) или P ложно (каково бы ни было Q); 2) оно ложно, если P верно, а Q ложно; 3) оно определено только в этих случаях.

Из таблицы для операции $P \equiv Q$ видно, что высказывание «P эквивалентно Q» верно, когда высказывания P и Q имеют одинаковые логические значения, и что оно ложно, когда они имеют различные логические значения.

Следуя Клини, мы будем говорить о *слабом смысле* [4] некоторого высказывания о высказываниях P, Q, ..., если оно определено только для того случая, когда эти высказывания являются предложениями. Соответственно мы будем называть *слабыми операциями* над высказываниями такие операции, которые не определены (т. е. имеют логическое значение U), если не определен по крайней мере один из их аргументов. Как видно из таблиц для операций $\sim P, P \supset\subset Q, |P|, P \dotplus Q, P \cup Q, P \cap Q$, $P \supset Q$, все эти операции являются *слабыми операциями*.

Как видно из таблиц логических значений для операций, определяемых формулами (D8), (D9), (D10), (D11), (D12), символы $|P|$, $P \dotplus Q$, $P \cup Q$, $P \cap Q$, $P \supset Q$ могут читаться следующим образом:

$|P|$ — «P если и только если P»,
$P \dotplus Q$ — «ни P, ни Q»,
$P \cup Q$ — «P или Q»,
$P \cap Q$ — «P и Q»,
$P \supset Q$ — «если P, то Q»,

где все высказывания о высказываниях P и Q, находящиеся справа от символов соответствующих операций, понимаются в слабом смысле.

Сильный смысл высказываний «не-P» и «P если и только если Q» совпадает, очевидно, со слабым смыслом тех же высказываний.

Условимся в дальнейшем называть:
операцию $\sim P$ — отрицанием,
» $P \vee Q$ — сильной дизъюнкцией,
» $P \& Q$ — сильной конъюнкцией,

операцию $P \rightarrowtail Q$ — сильной импликацией,
» $P \equiv Q$ — сильной эквивалентностью,
» $P \cup Q$ — слабой дизъюнкцией,
» $P \cap Q$ — слабой конъюнкцией,
» $P \supset Q$ — слабой импликацией,
» $P \supset\subset Q$ — слабой эквивалентностью,
» $|P|$ — слабой тавтологией,
» $P \nmid Q$ — слабой функцией Шеффера.

Операция $|P|$ названа *слабой тавтологией* потому, что для предложения p она является действительно *тавтологией*, а для высказывания P, не являющегося предложением, она имеет значение U, т. е. является слабой операцией. Операция $P \nmid Q$ названа *слабой функцией Шеффера* потому, что для предложений p и q она действительно является *функцией Шеффера*, а если хотя бы одно из высказываний P и Q не является предложением, то высказывание $P \nmid Q$ не определено, т. е. имеет значение U. Пользуясь операцией $P \nmid Q$, можно построить все слабые операции трехзначного исчисления высказываний совершенно так же, как, пользуясь обычной функцией Шеффера, можно построить все операции классического двузначного исчисления предложений.

Если интерпретировать логическое значение U как «бессмыслицу», то все слабые операции трехзначной логики Клини будут соответствовать внутренним формам соответствующих операций трехзначного исчисления высказываний Бочвара. Именно по этой причине для обозначения слабых операций, соответствующих внутренним формам исчисления Бочвара, использованы символы, обозначающие эти формы исчисления Бочвара. Здесь добавлены лишь две слабые операции: $|P|$ и $P \nmid Q$, не имеющие в исчислении Бочвара соответствующих им внутренних форм. Однако введение таких форм в исчисление Бочвара не представляет труда.

Из табл. 11 видно, что операция $\vdash P$, определяемая формулой (D13), как и в исчислении Бочвара, имеет смысл высказывания «P верно». Эта операция названа Бочваром *внешним утверждением* высказывания P.

Теперь, после того как выяснен смысл операции $\vdash P$, становится ясным логический смысл операций, определяемых формулами (D14) — (D23). Они имеют следующий смысл:

$$\overline{P} \text{ — «}P\text{ неверно»,}$$
$$P \vee Q \text{ — «}P\text{ верно или }Q\text{ верно»,}$$
$$P \wedge Q \text{ — «}P\text{ верно и }Q\text{ верно»,}$$
$$P \rightarrow Q \text{ — «если }P\text{ верно, то }Q\text{ верно»,}$$
$$P \leftrightarrow Q \text{ — «}P\text{ верно, если и только если }Q\text{ верно», или, короче,}$$
$$\text{«}P\text{ равносильно }Q\text{»,}$$
$$P \equiv Q \text{ — «}P\text{ эквивалентно (равнозначно) }Q\text{»,}$$
$$\urcorner P \text{ — «}P\text{ ложно»,}$$
$$\overline{\urcorner} P \text{ — «}P\text{ неложно»,}$$
$$\downarrow P \text{ — «}P\text{ не определено»,}$$
$$\overline{\downarrow} P \text{ — «определено».}$$

За исключением операций $\overline{\urcorner} P$ и $\overline{\downarrow} P$, которые введены для большей симметрии формул, все эти операции содержатся в исчислении Бочвара. Они имеют там точно такой же смысл, что и здесь, за исключением операции $\downarrow P$, которая в исчислении Бочвара означает высказывание «P бессодержательно» или «P бессмысленно». Однако символ $\downarrow P$ можно считать также и обозначением высказывания «P не есть предложение». Тогда значение символа $\downarrow P$ будет одинаковым как в исчислении Бочвара, так и в излагаемом здесь исчислении. Символ $\overline{\downarrow} P$ будет обозначать тогда высказывание «P есть предложение».

Следуя Бочвару, мы будем называть *внешними формами* высказываний все формулы, получаемые из внутренних форм посредством замены в них всех элементарных высказываний или их отрицаний их внешними утверждениями. В частности, внешними формами будут и все операции, определяемые формулами (D13)—(D23). Используя в основном терминологию Бочвара, будем называть операции $\vdash P$, $\overline{P}$, $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $P \rightarrow Q$ и $P \leftrightarrow Q$ внешним утверждением, внешним отрицанием, внешней дизъюнкцией, внешней конъюнкцией, внешней импликацией и внешней равносильностью, соответственно. Эти операции получаются из соответствующих внутренних форм P, $\sim P$, $P \smile Q$, $P \frown Q$, $P \supset Q$ и $P \supset\subset Q$ посредством замены в них высказываний P и Q их внешними утверждениями $\vdash P$ и $\vdash Q$. Получаемые таким образом внешние формы будем называть *основными внешними формами*.

Операции, получаемые из внутренних форм посредством их внешнего утверждения, будем называть *внешне утвержденными формами* соответствующих операций, или, короче, *внешне утвержденными операциями*. Например, операции $\urcorner P$, $\vdash(P \cup Q)$, $\vdash(P \cap Q)$, $\vdash(P \supset Q)$ и $\vdash(P \supset\subset Q)$ являются, соответственно, внешне утвержденными операциями: отрицания, дизъюнкции, конъюнкции, импликации и равносильности. Внешне утвержденные операции не совпадают, вообще говоря, с основными внешними формами соответствующих операций. Так, например, из перечисленных выше пяти внешне утвержденных операций лишь одна операция внешне утвержденной конъюнкции является в то же время и внешней конъюнкцией, т. е. $\vdash(P \cap Q) \equiv \vdash P \cap \vdash Q$.

В трехзначной логике Клини не рассматривались операции, аналогичные внешним операциям исчисления Бочвара, но в ней они могут быть получены. Действительно, в логике Клини содержатся три операции: отрицание $\sim P$ (в его обозначениях $\bar{P}$), сильная дизъюнкция $P \vee Q$ и сильная эквивалентность $P \equiv Q$ (в его обозначениях $P \cong Q$).

Выше уже было показано, что все внутренние формы исчисления Бочвара являются слабыми операциями трехзначной логики Клини. Заметив, что операция внешнего утверждения $\vdash P$ может быть получена из операции $P \equiv Q$ посредством замены Q логическим значением T — «истина», т. е. убедившись в том, что справедлива эквивалентность $\vdash P \equiv (P \equiv T)$, мы приходим к выводу, что в трехзначной логике Клини могут быть получены и все внешние операции исчисления Бочвара. Отсюда следует, что *трехзначное исчисление высказываний, построенное Бочваром, полностью содержится в трехзначной логике Клини.*

Бочваровское исчисление высказываний не содержит трехзначной логики Клини, так как в нем не могут быть получены так называемые сильные операции Клини. Однако легко расширить исчисление Бочвара — даже при сохранении его содержательной логической интерпретации — так, чтобы оно формально совпадало с сильной трехзначной логикой Клини.

Для этого достаточно добавить к операциям исчисления Бочвара лишь операцию сильной дизъюнкции $P \vee Q$, определив ее такой же таблицей, какой она определяется в сильной трехзначной логике Клини, но интерпретируя логическое значение U как «бессмыслицу». Определение высказывания «P или Q» как высказывания, которое верно, когда верно по крайней мере одно из высказываний P или Q (т. е. даже в случае бессмысленности другого из этих высказываний), и которое ложно, когда оба эти высказывания ложны, и бессмысленно в остальных случаях, не противоречит ни содержательному смыслу связки «или», понимаемой в не исключающем смысле, ни смыслу понятия «бессодержательность» или «бессмысленность».

В рассмотренном здесь трехзначном исчислении высказываний содержится как сильная трехзначная логика Клини, так и изоморф трехзначного исчисления Бочвара. Поэтому данное исчисление высказываний может быть названо *трехзначным исчислением Клини — Бочвара.*

Благодаря введению в исчисление функции Вебба, определенной табл. 1, и благодаря определениям (D1) (D2), (D3), (D4) и (D13) это исчисление включено в функционально полную трехзначную логику Вебба. Таким образом, рассмотренное здесь трехзначное исчисление высказываний в итоге может быть охарактеризовано как *трехзначное исчисление Клини — Бочвара, расширенное до функционально полного исчисления высказываний.*

§ 2. Интерпретация трехзначного исчисления высказываний посредством действительных чисел

Условимся обозначать заглавными буквами X, Y и Z переменные, значениями которых могут быть любые действительные числа, а строчными буквами x, y и z — переменные, значениями которых могут быть лишь числа -1, 0 и $+1$.

Единичной функцией предложения p мы называем [7] функцию $1(p)$, определяемую условиями

(2.1) $$1(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \text{ верно} \\ 0, & \text{если } p \text{ ложно.} \end{cases}$$

Заменяя аргумент p этой функции предложениями «X положительно» и «X отрицательно», или, что то же, предложениями «$X>0$» и «$X<0$», получим единичные функции $1(X>0)$ и $1(X<0)$ этих предложений.

Вычитая из функции $1(X>0)$ функцию $1(X<0)$, получим известную функцию действительного переменного X:

$$\operatorname{sign} X = 1(X > 0) - 1(X < 0). \tag{2.2}$$

Заменяя аргумент p функции $1(p)$ предложениями $\vdash P = _D$«P верно» и $\neg P =_D$ «P ложно», получим единичные функции $1(\vdash P)$ и $1(\neg P)$ этих предложений. Вычитая из функции $1(\vdash P)$ функцию $1(\neg P)$, получим характеристическую функцию высказывания

$$\operatorname{sign} P = 1(\vdash P) - 1(\neg P), \tag{2.3}$$

которую мы назвали [8] *знаком высказывания* P. Как легко проверить, $\vdash P \equiv (P \equiv T)$, $\neg P \equiv (P \equiv F)$, а следовательно, формула (2.3) эквивалентна формуле

$$\operatorname{sign} P = 1(P \equiv T) - 1(P \equiv F). \tag{2.4}$$

Функция $\operatorname{sign} X$ — «знак числа X» осуществляет гомоморфное отображение множества действительных чисел на множество $\{1,0, -1\}$. Гомоморфные образы действительных переменных при этом отображении условимся обозначать соответствующими строчными буквами:

$$x = \operatorname{sign} X, \quad y = \operatorname{sign} Y, \quad z = \operatorname{sign} Z. \tag{2.5}$$

Аналогично, функция $\operatorname{sign} P$ — «знак высказывания P» осуществляет гомоморфное отображение множества всех высказываний на то же множество $\{1, 0, -1\}$. Гомоморфные образы переменных высказываний P, Q и R при этом отображении условимся обозначать, соответственно, строчными буквами x, y и z

$$x = \operatorname{sign} P, \ y = \operatorname{sign} Q, \ z = \operatorname{sign} R. \tag{2.6}$$

При установленном таким образом гомоморфном отображении множества высказываний на множество $\{1, 0, -1\}$ все соотношения между высказываниями P, Q и R будут отображаться некоторыми соотношениями между переменными x, y и z и все логические формулы, связывающие эти высказывания, будут отображаться некоторыми арифметическими формулами, связывающими переменные x, y, z.

Получение гомоморфных образов соотношений и формул трехзначного исчисления высказываний на множестве $\{1, 0, -1\}$ посредством формул (2.6) мы будем называть *непосредственной*, или *первичной*, *арифметической интерпретацией*.

Из формул (2.5) и (2.6) получается следующее соответствие между переменными высказываниями P, Q и R и действительными переменными X, Y и Z:

$$\text{(2.7)} \qquad \operatorname{sign} P = \operatorname{sign} X, \ \operatorname{sign} Q = \operatorname{sign} Y, \ \operatorname{sign} R = \operatorname{sign} Z.$$

Переход от соотношений и логических формул, связывающих переменные высказывания P, Q и R, к соотношениям и арифметическим формулам, связывающим действительные переменные X, Y и Z, осуществляемый посредством формул (2.5) и (2.6) или (2.7), мы будем называть *вторичной арифметической интерпретацией* рассматриваемого трехзначного исчисления высказываний. Обратный переход от арифметики действительных чисел и от арифметики на множестве $\{1, 0, -1\}$ к трехзначному исчислению высказываний, осуществляемый посредством формул (2.7) и (2.6), будем называть *трехзначной логической интерпретацией арифметики* действительных чисел и чисел множества $\{1, 0, -1\}$, соответственно.

Если в формуле (2.6) или в эквивалентной ей формуле (2.4) заменим переменное высказывание P последовательно логическими значениями F, U и T, то получим следующие равенства:

$$\text{(2.8)} \qquad \operatorname{sign} F = -1, \ \operatorname{sign} U = 0, \ \operatorname{sign} T = 1,$$

иными словами, когда аргумент функции $x = \operatorname{sign} P$ пробегает значения F, U и T, тогда функция $\operatorname{sign} P$ принимает последовательно значения $x = -1$, 0 и 1. Легко видеть, что и наоборот, если заменять переменное x последовательно значениями -1, 0 и 1, то переменное высказывание P, являющееся аргументом функции $x = \operatorname{sign} P$, будет принимать последовательно значения F, U и T.

Следовательно, функция $x = \operatorname{sign} P$ является взаимно-однозначной функцией, и, стало быть, между множеством $\{F, U, T\}$, множеством логических значений высказываний и множеством $\{-1, 0, 1\}$ эта функция устанавливает *изоморфное соответствие*, при котором числа -1, 0 и 1 являются изоморфными образами, соответственно, логических значений F, U и T высказываний в трехзначном исчислении высказываний.

Из взаимной однозначности функции $x = \operatorname{sign} P$ следует, что существует взаимно-однозначная обратная функция $\operatorname{sign}^{-1} x$, определяемая следующим образом:

$$(2.9) \qquad \operatorname{sign}^{-1} x = \begin{cases} T, \text{ если } x = 1 \\ U, \text{ если } x = 0 \\ F, \text{ если } x = -1 \end{cases}$$

Отсюда мы можем записать решения уравнений (2.6) относительно высказываний P, Q и R посредством следующих эквивалентностей:

$$(2.10) \qquad P \equiv \operatorname{sign}^{-1} x, \quad Q \equiv \operatorname{sign}^{-1} y, \quad R \equiv \operatorname{sign}^{-1} z.$$

Если $x = y$, то, как следует из этих эквивалентностей, имеет место эквивалентность $P \equiv Q$. Если же $P \equiv Q$, то, как следует из определения функций $\operatorname{sign} P$ и $\operatorname{sign} Q$ и равенств (2.6), имеет место равенство $x = y$. Следовательно. эквивалентность $P \equiv Q$ равносильна равенству $x = y$, а так как высказывания $P \equiv Q$ и $x = y$ являются предложениями, то эквивалентность $P \equiv Q$ эквивалентна равенству $x = y$. Таким образом,

$$(2.11) \qquad (P \equiv Q) \equiv (x = y),$$

если x и y удовлетворяют равенству (2.6). Отсюда, в частности, следуют эквивалентности:

$$(2.12) \quad (P \equiv T) \equiv (x = 1), \ (P \equiv U) \equiv (x = 0), \ (P \equiv F) \equiv (x = -1).$$

Так как $\vdash P \equiv (P \equiv T)$, $\downarrow P \equiv (P \equiv U)$ и $\urcorner P \equiv (P \equiv F)$, то имеют место эквивалентности:

$$(2.13) \qquad \vdash P \equiv (x = 1), \quad \downarrow P \equiv (x = 0), \quad \urcorner P \equiv (x = -1).$$

Эквивалентность (2.11) равносильна эквивалентности

$$(2.14) \qquad \sim (P \equiv Q) \equiv (x \neq y),$$

а эквивалентности (2.13) эквивалентны, соответственно, эквивалентностям:

$$(2.15) \qquad \overline{P} \equiv (x \neq 1), \quad \overline{\downarrow} P \equiv (x \neq 0), \quad \overline{7}\, P \equiv (x \neq -1).$$

Используя равенства (2.5), получим из эквивалентности (2.11) эквивалентность

$$(2.16) \qquad (P \equiv Q) \equiv (\operatorname{sign} X = \operatorname{sign} Y),$$

утверждающую, что при интерпретации произвольных высказываний произвольными действительными числами эквивалентность или равнозначность высказываний $P \equiv Q$ эквивалентна равнозначности действительных чисел X и Y, интерпретирующих эти высказывания.

Из определения функции $\operatorname{sign} X$ и равенства (2.5) следует, что

$$(2.17) \qquad (x = 1) \equiv (X > 0), \quad (x = 0) \equiv (X = 0), \quad (x = -1) \equiv (X < 0),$$

а из этих равенств и эквивалентностей (2.13) следуют эквивалентности

$$(2.18) \qquad \vdash P \equiv (X > 0), \quad \downarrow P \equiv (X = 0), \quad 7\, P \equiv (X < 0),$$

равносильные следующим эквивалентностям:

$$(2.19) \qquad \overline{P} \equiv (X \leqslant 0), \quad \overline{\downarrow} P \equiv (X \neq 0), \quad \overline{7}\, P \equiv (X \geqslant 0).$$

Перейдем к арифметическим интерпретациям слабых операций (по терминологии Клини), или внутренних форм (по терминологии Бочвара).

Так как $\vdash \sim P \equiv 7\, P$ и $7 \sim P \equiv \vdash \sim \sim P \equiv \vdash P$, то из формулы (2.3) следует, что

$$(2.20) \qquad \operatorname{sign}(\sim P) = -\operatorname{sign} P,$$

а отсюда, на основании первого из равенств (2.6), следует равенство (2.21) $\operatorname{sign}(\sim P) = -x$, утверждающее, что если высказывание P мы будем интерпретировать числом x, то внутреннее отрицание $\sim P$ этого высказывания мы должны интерпретировать числом $-x$.

Нетрудно показать, что и при вторичной арифметической интерпретации исчисления высказываний мы получим аналогичный результат. Действительно, пусть $\operatorname{sign} P = \operatorname{sign} X$. Тогда на основании равенства (2.20) пишем $\operatorname{sign}(\sim P) = -\operatorname{sign} X$.

Но, как известно, $-\operatorname{sign} X = \operatorname{sign}(-X)$, и, следовательно,

$$\operatorname{sign}(\sim P) = \operatorname{sign}(-X), \tag{2.22}$$

если справедливо первое из равенств (2.7).

Легко проверить, что справедливо равенство

$$\operatorname{sign}(P \supset\subset Q) = \operatorname{sign} P \cdot \operatorname{sign} Q, \tag{2.23}$$

эквивалентное, при условии выполнении равенства (2.6), равенству

$$\operatorname{sign}(P \supset\subset Q) = x \cdot y, \tag{2.24}$$

утверждающему, что операция внутренней (или слабой) равносильности высказываний P и Q отображается произведением $x \cdot y$ их образов x и y на множестве $\{-1, 0, 1\}$.

Используя равенство (2.7), получим из равенства (2.23) $\operatorname{sign}(P \supset\subset Q) = \operatorname{sing} X \cdot \operatorname{sing} Y$.

Но, как известно,

$$\operatorname{sign} X \cdot \operatorname{sign} Y = \operatorname{sign}(X \cdot Y). \tag{2.25}$$

Следовательно,

$$\operatorname{sign}(P \supset\subset Q) = \operatorname{sign}(X \cdot Y), \tag{2.26}$$

т. е. произведение $X \cdot Y$ произвольных действительных чисел X и Y является образом внутренней равносильности $P \supset\subset Q$ произвольных высказываний P и Q, если образами этих высказываний на множестве действительных чисел являются эти числа.

Из коммутативности и ассоциативности операции умножения $X \cdot Y$ следует, что и операция внутренней равносильности $P \supset\subset Q$ коммутативна и ассоциативна.

Из равенств $-(X\cdot Y) = (-X)\cdot Y = X\cdot(-Y)$, справедливых для любых действительных чисел X и Y, следуют эквивалентности $\sim(P\supset\subset Q)\equiv(\sim P\supset\subset Q)\equiv(P\supset\subset\sim Q)$, справедливые для любых высказываний P и Q.

Из того, что равенства $X\cdot 1 = X$, $X\cdot(-1) = -X$, $X\cdot 0 = 0$ справедливы для любого действительного числа X, следует, что эквивалентности $(P\supset\subset T)\equiv P$, $(P\supset\subset F)\equiv\sim P$, $(P\supset\subset U)\equiv U$ справедливы для любого высказывания P.

Из того, что уравнение $y\cdot x = 1$, где x, y $\in\{-1, 0, 1\}$, имеет решение $y = x^{-1} = x$ лишь при $x \neq 0$, следует, что эквивалентность $(Q\supset\subset P)\equiv T$ может быть решена относительно высказывания Q лишь при $\downarrow P$ (т. е. когда P является предложением p) и это решение имеет вид: $Q\equiv p$.

Попутно мы получаем, что всякое предложение p является «обратным» самому себе, т. е. удовлетворяет эквивалентности

$$(p\supset\subset p)\equiv T.$$

Уравнение относительно y более общего вида

$$y\cdot x = z$$

имеет однозначное решение $y = x\cdot z$ лишь при $x\neq 0$.

Отсюда мы можем заключить, что эквивалентность $(Q\supset\subset P)\equiv R$ имеет относительно Q единственное решение $Q\equiv(P\supset\subset R)$ лишь при $\downarrow P$, т. е. когда высказывание P является предложением p. Ввиду этого решение принимает вид $Q\equiv(p\supset\subset R)$.

Уравнение $x\cdot x = -1$ не имеет действительных решений — оно имеет лишь мнимые решения $x = i$ и $x = -i$. Точно так же и эквивалентность $(P\supset\subset P)\equiv F$ не имеет решений в трехзначном исчислении высказываний. Можно было бы, по аналогии с мнимыми числами, ввести мнимые высказывания, но мы здесь не будем этого делать, так как они привели бы к выходу за пределы трехзначного исчисления высказываний.
Так как $x\in\{-1, 0, 1\}$, то

$$x\cdot x = \begin{cases} 1, \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x = 0.\end{cases}$$

Следовательно,

$$(P\supset\subset P)\equiv\begin{cases} T, \text{ если } \sim(P\equiv U),\\ U, \text{ если } \quad P\equiv U.\end{cases}$$

Приведенный пример достаточно наглядно показывает, насколько полезна для изучения свойств операций исчисления высказываний трехзначная логическая интерпретация арифметики действительных чисел и, в частности, арифметики на множестве $\{-1,\ 0,\ 1\}$.

Мы пойдем по этому пути еще несколько дальше и найдем, что в исчислении высказываний соответствует модулю $|X|$ действительного числа X.

Модуль $|X|$ действительного числа X определяют как функцию этого числа, удовлетворяющую условиям

$$|X| = \begin{cases} X, & \text{если } X \geqslant 0, \\ -X, & \text{если } X < 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что аналогичными свойствами обладает высказывание $P \supset\subset P$ о произвольном высказывании P.

Действительно

$$(P \supset\subset P) \equiv P, \quad \text{если } \overline{\overline{\urcorner}}\, P,$$
$$(P \supset\subset P) \equiv \sim P, \text{ если } \urcorner\, P.$$

Желая еще более подчеркнуть, что операция $P \supset\subset P$ является аналогом функции $|X|$, мы приняли для обозначения этой операции символ $|P|$ (см. определение (D8)). Легко убедиться, что

(2.27) $$\operatorname{sign}|P| = |x|,$$

а отсюда

(2.28) $$\operatorname{sign}|P| = \operatorname{sign}|X|.$$

На основании установленной аналогии между операциями $|P|$ и $|X|$ мы можем заключить, что из распределительности модуля относительно умножения, т. е. из равенства

$$|X \cdot Y| = |X| \cdot |Y|,$$

следует распределительность операции $|P|$ относительно внутренней равносильности, т. е. эквивалентность $|P \supset\subset Q| \equiv |P| \supset\subset$ $\supset\subset |Q|$, или, без применения символа $|P|$,

$$((P \supset\subset Q) \supset\subset (P \supset\subset Q)) \equiv (P \supset\subset P) \supset\subset (Q \supset\subset Q).$$

Справедливость этой эквивалентности является, очевидно, следствием ассоциативности и коммутативности операции внутренней эквивалентности.

Далее, из равенств:

$$
\begin{aligned}
|x| \cdot |x| &= |x|,\\
||x|| &= |x|,\\
x \cdot |x| &= x
\end{aligned}
$$

следуют аналогичные эквивалентности:

$$
\begin{aligned}
(|P| \supset\subset |P|) &\equiv |P|,\\
||P|| &\equiv |P|,\\
(P \supset\subset |P|) &\equiv P.
\end{aligned}
$$

Из слабых операций исчисления высказываний мы до сих пор арифметически интерпретировали лишь следующие три: $\sim P$, $P \supset\subset Q$ и $|P|$. Остальные слабые операции определяются в нашей системе определений через слабую операцию $P \not| Q$, а эта операция, в свою очередь, определяется через указанные три слабые операции и операцию сильной дизъюнкции. Поэтому, прежде чем переходить к интерпретации остальных слабых операций, мы должны указать арифметическую операцию операции сильной дизъюнкции $P \vee Q$. Как легко видеть из таблицы логических значений сильной дизъюнкции,

(2.29) $$\operatorname{sign}(P \vee Q) = \max(x, y),$$

где x и y удовлетворяют равенствам (2.6). На основании равенства (2.5) отсюда следует, что

$$\operatorname{sign}(P \vee G) = \max(\operatorname{sign} X, \operatorname{sign} Y).$$

Но, как легко убедиться, $\max(\operatorname{sign} X, \operatorname{sign} Y) = \operatorname{sign}(\max(X, Y))$.

Следовательно,

(2.29′) $$\operatorname{sign}(P \vee Q) = \operatorname{sign} \max(X, Y).$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что сильная дизъюнкция $P \vee Q$ как на множестве $\{-1, 0, 1\}$, так и на множестве всех действительных чисел отображается операцией $\max(X, Y)$ где X и Y — образы высказываний P и Q, соответственно.

Из определения (D5) операции сильной конъюнкции $P \& Q$ следует, что $\operatorname{sign}(P \& Q) = -\max(-x, -y)$. Но, как легко убедиться, $-\max(-x, -y) = \min(x, y)$.
Следовательно,

$$\operatorname{sign}(P \& Q) = \min(x, y), \tag{2.30}$$

а отсюда, на основании равенств (2.5), следует, что

$$\operatorname{sign}(P \& Q) = \operatorname{sign}\min(X, Y). \tag{2.30'}$$

Из определения (D6) сильной импликации и равенства (2.29) вытекает равенство

$$\operatorname{sign}(P \rightarrow Q) = \max(-x, y), \tag{2.31}$$

Из определения (D9) слабой функции Шеффера $P \not\mid Q$ и полученных выше равенств вытекает, что

$$\operatorname{sign}(P \not\mid Q) = -|x \cdot y| \cdot \max(x, y). \tag{2.32}$$

Из определения (D10) слабой дизъюнкции $P \cup Q$ и этой формулы вытекает равенство

$$\operatorname{sign}(P \cup Q) = |x \cdot y| \cdot \max(x, y). \tag{2.33}$$

Отсюда и из определения (D11) слабой конъюнкции $P \cap Q$ следует, что

$$\operatorname{sign}(P \cap Q) = |x \cdot y| \cdot \min(x, y). \tag{2.34}$$

Из определения (D12) слабой импликации $P \supset Q$ и формулы (2.33) следует, что

$$\operatorname{sign}(P \supset Q) = |x \cdot y| \cdot \max(-x, y). \tag{2.35}$$

Из полученных равенств видно, что образы на множестве $\{-1, 0, 1\}$ слабых операций $P \not\mid Q$, $P \cup Q$, $P \cap Q$, $P \supset Q$ отличаются от образов на том же множестве соответствующих сильных операций $\sim(P \vee Q)$, $P \vee Q$, $P \& Q$, $P \rightarrow Q$ лишь наличием множителя $|x \cdot y|$. Отсюда следует, что каждая из этих слабых операций может быть получена из соответствующих сильных операций посредством формул:

$$P \not\mid Q \equiv |P \supset\subset Q| \supset\subset \sim(P \vee Q),$$
$$P \cup Q \equiv |P \supset\subset Q| \supset\subset (P \vee Q),$$
$$P \cap Q \equiv |P \supset\subset Q| \supset\subset (P \& Q),$$
$$P \supset Q \equiv |P \supset\subset Q| \supset\subset (P \rightarrow Q).$$

Как было выяснено выше, эти эквивалентности могут быть разрешены относительно сильных операций только в том случае, когда $\overline{\downarrow}|P\supset\subset Q|$, иными словами, когда $\overline{\downarrow}|P\supset\subset Q|\equiv T$, или $\downarrow|P\supset\subset Q|\equiv F$, а в этом случае, как видно из приведенных эквивалентностей, слабые и соответствующие сильные операции совпадают друг с другом. Таким образом, в общем случае эти эквивалентности не могут быть решены относительно сильных операций, и, стало быть, сильные операции нельзя выразить через соответствующие слабые операции посредством эквивалентностей, аналогичных этим.

Для того чтобы найти арифметические образы всех внешних операций исчисления Бочвара, достаточно теперь лишь найти арифметическую операцию, отображающую операцию утверждения $\vdash P$.

Из формулы (2.3) следует, что

$$\operatorname{sign}\vdash P = 1\,(\vdash\vdash P) - 1\,(\urcorner\vdash P).$$

Но, как легко проверить,

$$\vdash\vdash P \equiv \vdash P,\quad \urcorner\vdash P\equiv \overline{P}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{sign}\vdash P = 1\,(\vdash P) - 1\,(\overline{P}) = 1_{-1}(\vdash P), \tag{2.36}$$

где $1_{-1}(p)$ — характеристическая функция предложения p, равная 1, когда p верно, и равная —1, когда p неверно.

На основании первой из эквивалентностей (2.18) имеем равенство $1_{-1}(\vdash P) = 1_{-1}(X>0)$. Но $1_{-1}(X>0) = 1(X>0) - 1(X \not> 0) = 1(X>0) - \overline{1}(X>0)$, где $\overline{1}(p)$ — так называемая [7] *дополнительная единичная функция* предложения p, т. е. функция, являющаяся дополнением

$$\overline{1}\,(p) = 1 - 1\,(p) \tag{2.37}$$

к единичной функции $1(p)$.

Положим по определению

$$1\,(X) \underset{D}{=} 1\,(X>0). \tag{2.38}$$

Функция $1(X)$ действительного переменного X отличается от единичной функции Хевисайда лишь тем, что она при $X = 0$ имеет значение 0, в то время как функция Хевисайда не определена для $X = 0$. Мы будем поэтому называть функцию $1(X)$ *доопределенной функцией Хевисайда.*

Далее, положим по определению

$$1_{-1}(X) \underset{D}{=} 1(X) - \bar{1}(X). \tag{2.39}$$

Тогда равенство (2.36) мы можем записать в следующем виде:

$$\operatorname{sign} \vdash P = 1_{-1}(X). \tag{2.40}$$

Мы нашли, таким образом, что операция утверждения $\vdash P$ высказывания P отображается на множестве действительных чисел функцией $1_{-1}(X)$, определенной равенством (2.39). Как следует из определения,

$$1_{-1}(X) = \begin{cases} 1, & \text{если } X > 0, \\ -1, & \text{если } X \leqslant 0. \end{cases} \tag{2.41}$$

На множестве $\{-1, 0, 1\}$ эта функция принимает следующие значения:

$$1_{-1}(1) = 1, \ 1_{-1}(0) = 0, \ 1_{-1}(-1) = 0. \tag{2.42}$$

Как следует из определения операций $\neg P$, $\overline{\neg} P$ и равенства (2.40), имеют место следующие равенства:

$$\operatorname{sign} \bar{P} = -1_{-1}(X), \tag{2.43}$$
$$\operatorname{sign} \neg P = 1_{-1}(-X), \tag{2.44}$$
$$\operatorname{sign} \overline{\neg} P = -1_{-1}(-X). \tag{2.45}$$

Из определения (D22) операции $\downarrow P$ вытекает, что

$$\downarrow P \equiv \sim(\vdash P \cup \neg P),$$

или, так как $\vdash P$ и $\neg P$ суть предложения, то $\downarrow P \equiv \sim(\vdash P \vee \neg P)$.

Из этой эквивалентности следует, что

$$\operatorname{sign} \downarrow P = -\max(1_{-1}(X), \ 1_{-1}(-X)), \tag{2.46}$$

$$\operatorname{sign} \overline{\downarrow} P = \max(1_{-1}(X), \ 1_{-1}(-X)). \tag{2.47}$$

Из определений (D15)—(D19) и ранее полученных формул вытекают равенства:

$$\operatorname{sign}(P \vee Q) = \max(1_{-1}(X),\ 1_{-1}(Y)), \tag{2.48}$$
$$\operatorname{sign}(P \wedge Q) = \min(1_{-1}(X),\ 1_{-1}(Y)), \tag{2.49}$$
$$\operatorname{sign}(P \to Q) = \max(-1_{-1}(X),\ 1_{-1}(Y)), \tag{2.50}$$
$$\operatorname{sign}(P \leftrightarrow Q) = 1_{-1}(X)\cdot 1_{-1}(Y), \tag{2.51}$$
$$\operatorname{sign}(P \equiv Q) = \min(1_{-1}(X)\cdot 1_{-1}(Y),\ 1_{-1}(-X)\cdot 1_{-1}(-Y)). \tag{2.52}$$

Мы получили, таким образом, арифметические образы всех операций, обозначенных специальными символами в исчислении высказываний Клини — Бочвара.

Для того чтобы построить арифметический образ в множестве действительных чисел для любой операции $F(P,\ Q,\ldots)$ исчисления высказываний, заданной таблицей ее логических значений, мы можем использовать метод построения характеристикой функции любой операции n-значной логики, описанный ранее [7]. Мы не будем повторять описание этого метода специально для случая трехзначного исчисления высказываний, а ограничимся иллюстрацией применения его на примерах построения арифметических образов операций p^1, p^2 и $P|Q$ по таблицам их логических значений.

Из табл. 11 видно, что $\vdash P^1 \equiv \downarrow P$, $\urcorner P^1 \equiv \vdash P$.

Поэтому $\operatorname{sign} P^1 = 1(\vdash P^1) - 1(\urcorner P^1) = 1(\downarrow P) - 1(\vdash P)$.

Мы знаем, что $1(\vdash P) = 1(X)$, но мы еще не знаем, какой функции действительного переменного X равна при нашей интерпретации единичная функция $1(\downarrow P)$ предложения $\downarrow P$. Зная, как выражается операция $\downarrow P$ через операции $\vdash P$ и $\urcorner P$, мы найдем эту функцию следующим образом.

Из определения операции $\downarrow P$ вытекает, что

$$1(\downarrow P) = 1(\bar{P} \frown \overline{\urcorner} \bar{P}).$$

Но, как известно [7], $1(\bar{P} \frown \overline{\urcorner} P) = 1(\bar{P}) \cdot 1(\overline{\urcorner} P) = \bar{1}(\vdash P) \cdot \bar{1}(\urcorner P)$.

Нам известно также, что $1(\urcorner P) = 1(-X)$.

Следовательно,

$$1(\downarrow P) = \bar{1}(X) \cdot \bar{1}(-X). \tag{2.53}$$

Но, согласно определению функции $\bar{1}(X)$,

$$(2.54) \qquad \bar{1}(X) = \begin{cases} 0, & \text{если } X > 0 \\ 1, & \text{если } X \leqslant 0 \end{cases}$$

$$(2.55) \qquad \bar{1}(-X) = \begin{cases} 0, & \text{если } X < 0 \\ 1, & \text{если } X \geqslant 0 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\bar{1}(X) \cdot \bar{1}(-X) = \begin{cases} 1, & \text{если } X = 0 \\ 0, & \text{если } X \neq 0, \end{cases}$$

т. е. эта функция аналогична известному символу Кронекера. Поэтому мы и обозначим ее аналогично, а именно, положим по определению

$$(2.56) \qquad \delta_0(X) =_D \bar{1}(X) \cdot \bar{1}(-X).$$

Мы будем называть ее *функцией Кронекера*. Формула (2.56) дает выражение функции Кронекера через дополнительные доопределенные функции Хевисайда. Используя введенную таким образом $\delta_0(X)$, мы можем записать формулу (2.53) более кратко:

$$(2.57) \qquad 1(\downarrow P) = \delta_0(X).$$

Итак,

$$(2.58) \qquad \operatorname{sing} P^1 = \delta_0(X) - 1(X),$$

т. е. арифметическим образом на множестве действительных чисел операции P^1 является функция Кронекера, из которой вычитается доопределенная единичная функция Хевисайда.

Из табл. II видим, что

$$\vdash P^2 \equiv \urcorner P \quad \text{и} \quad \urcorner P^2 \equiv \downarrow P.$$

Поэтому $\operatorname{sing} P^2 = 1(\urcorner P) - 1(\downarrow P)$, и, стало быть,

$$(2.59) \qquad \operatorname{sign} P^2 = 1(-X) - \delta_0(X).$$

Из табл. I, определяющей функцию Вебба $P \mid Q$, получаем:

$$\vdash (P \mid Q) \equiv (\urcorner P \cap \downarrow Q) \cup (\downarrow P \cap \urcorner Q) \cup (\downarrow P \cap \downarrow Q) \equiv$$
$$\equiv (\bar{P} \cap \downarrow Q) \cup (\downarrow P \cap \bar{Q}),$$
$$\urcorner (P \mid Q) \equiv \vdash P \cup \vdash Q.$$

Поэтому

$$\operatorname{sign}(P \mid Q) = 1\,(\vdash (P \mid Q)) - 1\,(\urcorner (P \mid Q)) =$$
$$= 1\,((\bar{P} \cap \downarrow Q) \cup (\downarrow P \cap \bar{Q})) - 1\,(\vdash P \cup \vdash Q).$$

Но, как известно [7], $1\,(p \cup q) = 1\,(p) \dotplus 1\,(q)$, где операция $\dotplus$ определяется следующим образом:

$$x \dotplus y = x + y - x \cdot y.$$

Следовательно,

$$(2.60)\quad \operatorname{sign}(P \mid Q) = 1\,(\vdash P) \cdot 1\,(\downarrow Q) \dotplus 1\,(\downarrow P) \cdot \bar{1}\,(\vdash Q) - (1(\vdash P) \dotplus$$
$$\dotplus (1\,(\vdash Q)).$$

Заменяя здесь единичные функции предложений соответствующими им функциями действительных переменных X и Y, получаем формулу

$$(2.61)\quad \operatorname{sign}(P \mid Q) = \bar{1}\,(X) \cdot \delta_0(Y) \dotplus \delta_0(X) \cdot \bar{1}\,(Y) - (1\,(X) \dotplus 1\,(Y))$$

Так как согласно определению (D1) $P^1 \equiv P \mid P$, то равенство (2.58) можно получить из равенства (2.61). Действительно, полагая в этом равенстве $Q \equiv P$, мы должны положить $Y = X$, а тогда равенство (2.61) превращается в равенство

$$\operatorname{sign} P = \bar{1}\,(X) \cdot \delta_0(X) \dotplus \delta_0(X) \cdot \bar{1}\,(X) - (1\,(X) \dotplus 1\,(X)).$$

Но

$$x \dotplus x = x.$$

Следовательно, $\operatorname{sign} P^1 = \delta_0(X) \cdot \bar{1}\,(X) - 1\,(X) = \delta_0(X) - 1\,(X)$.

§ 3. Использование двойной арифметической интерпретации трехзначного исчисления высказываний при моделировании операций этого исчисления посредством трехпозиционных релейно-контактных схем

Рассмотрим теперь вопрос о том, какой физический смысл преобретает описанная выше двойная арифметическая интерпретация исчисления высказываний в случае, когда операции этого исчисления моделируются посредством схем, построенных из трехпозиционных коммутаторов и трехпозиционных реле, или, короче, посредством трехпозиционных релейно-коммутаторных схем.

Первичная арифметическая интерпретация трехзначного исчисления высказываний уже применялась в опубликованной ранее работе автора [8] при моделировании операций исчисления Бочвара посредством трехпозиционных коммутаторов, хотя самый термин там и не использовался. Вторичная арифметическая интерпретация того же исчисления не применялась потому, что там рассматривались чисто коммутаторные схемы, без управляющих коммутаторами трехпозиционных реле.

Здесь мы будем применять обе арифметические интерпретации: и первичную, и вторичную. При этом будут использованы понятия, обозначения и результаты, полученные ранее [7], [8], [9], в той мере, в какой это окажется необходимым для выяснения физического смысла обеих интерпретаций.

Прежде всего мы должны установить физический смысл переменных, обозначаемых нами строчными буквами x, y и z и заглавными буквами X, Y и Z. Как было показано [8], между характеризующим состояние трехпозиционного коммутатора параметром $k = \frac{E_2}{E_1}$, где E_1 и E_2 — напряжения на входе и выходе коммутатора, и силой тока I, протекающего в обмотке трехпозиционного реле, управляющего этим коммутатором, существует следующая связь: $k = \operatorname{sign} I$, т. е. точно такая же связь, какая существует между переменными x, y и z и переменными X, Y и Z. Отсюда следует, что переменные X, Y и Z можно считать обозначениями сил токов, протекающих в обмотках трехпозиционных реле, управляющих, соответственно, трехпозиционными коммутаторами K_{I}, K_{II} и K_{III}, а переменные x, y и z можно считать обозначениями параметров k_{I}, k_{II} и k_{III} этих коммутаторов, соответственно.

Коммутаторы мы будем обозначать, как и ранее [8], их параметрами x, y и z, и, вместо того, чтобы говорить о коммутаторах с параметрами x, y и z, будем говорить просто о коммутаторах x, y и z.

Как и раньше [8, 9], мы обозначаем символами $[p]$, $[p]'$ контакты, замыкаемые и размыкаемые, соответственно, тогда, и только тогда, когда p верно. На рис. 1 изображена схема коммутатора x, в прямых и диагональных проводах которого находятся контакты $[X>0]$ и $[X<0]$, соответственно.

Если справедливы эквивалентности $(X<0) \equiv \vdash P$, $(X<0) \equiv \urcorner P$, где P — некоторое высказывание, то, заменяя предложения «$X>0$» и «$X<0$» эквивалентными им предложениями $\vdash P$ и $\urcorner P$, мы получим из коммутатора $x = \operatorname{sign} X$ коммутатор $x = \operatorname{sign} P$, моделирующий высказывание P (см. рис. 2).

Коммутатор $x = \operatorname{sign} P$ физически тождествен коммутатору $x = \operatorname{sign} X$, т. е., попросту, коммутатор $x = \operatorname{sign} P$ есть то же самое, что и коммутатор $x = \operatorname{sign} X$. Если нас интересует

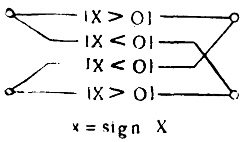


Рис. 1

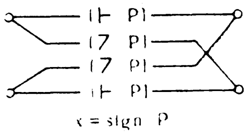


Рис. 2

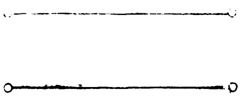
зависимость состояния коммутатора от тока X, протекающего в обмотке реле, которое управляет этим коммутатором, то мы обозначаем этот коммутатор посредством равенства $x = \operatorname{sign} X$. Если же мы тот же самый коммутатор будем рассматривать как сигнальное устройство, дающее нам по значению параметра x информацию о логическом значении высказывания P, сопоставленного току X посредством приведенных выше двух эквивалентностей, то мы обозначаем этот коммутатор посредством равенства $x = \operatorname{sign} P$ и говорим, что данный коммутатор «моделирует высказывание P».

Арифметические значения параметра x будут в этом случае *непосредственной*, или *первичной*, *арифметической интерпретацией* логических значений высказывания P. Значения же силы тока X, управляющего этим коммутатором, будут *вторичной арифметической интерпретацией* логических значений того же высказывания.

На рис. 3, 4 и 5 изображены три возможные состояния коммутатора $x = \operatorname{sign} P$, соответствующие случаям, когда $\vdash P$ (рис. 3), $\urcorner P$ (рис. 4) и $\downarrow P$ (рис. 5). Высказываниям $\vdash P, \urcorner P$ и $\downarrow P$ соответствуют равенства $x=1$, $x=-1$, $x=0$ при первичной и отношения $X>0$, $X<0$, $X=0$ при вторичной арифметической интерпретации этих высказываний. Коммутатор $X = \operatorname{sign} X$ превращается в схемы, описываемые равенствами

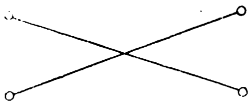
$x = 1$ (рис. 3), $x = -1$ (рис. 4) и $x = 0$ (рис. 5) в случаях, когда верны соответственно предложения $X > 0$, $X < 0$ и $X = 0$.

При моделировании посредством трехпозиционных коммутаторов операций над высказываниями P, Q и R используется первичным арифметическая интерпретация этих операций, когда параметрами, моделирующими эти операции, являются, соответственно, параметры x, y и z этих коммутаторов, и используется вторичная арифметическая интерпретация тех же операций, когда моделирующими параметрами являются силы токов X, Y и Z, которые протекают по обмоткам трехпозиционных реле, управляющих этими коммутаторами.



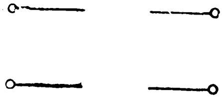
$x = 1 = \operatorname{sign} \Gamma$

Рис. 3



$x = -1 = \operatorname{sign} F$

Рис. 4



$x = 0 = \operatorname{sign} U$

Рис. 5

Рассмотрим сперва несколько примеров использования первичной арифметической интерпретации при моделировании операций трехзначного исчисления высказываний посредством трехпозиционных коммутаторов.

Как видно из равенства (2.24), операция слабой равносильности $P \supset\subset Q$ арифметически интерпретируется произведением $x \cdot y$.

Так как при каскадном соединении коммутаторов их параметры x и y перемножаются, то отсюда следует, что каскадное соединение коммутаторов $x = \operatorname{sign} P$ и $y = \operatorname{sign} Q$ моделирует операцию слабой эквивалентности $P \supset\subset Q$ высказываний P и Q (см. рис. 6).

Такой способ моделирования операции $P \supset\subset Q$ приводит к более простой схеме рис. 6, содержащей всего 8 контактов, чем моделирование той же операции непосредственно по таблице логических значений операции $P \supset\subset Q$, приводящий к схеме (см. рис. 29 в работе [8]), содержащей 16 контактов.

Если, в частности, высказывание Q ложно, то коммутатор $y \cdot x$, моделирующий операцию $Q \supset\subset P$, превращается в коммутатор $-x$, моделирующий внутреннее отрицание $\sim P$ высказывания P (см. рис. 7). Как видно из рис. 7, коммутатор $-x$ получается из коммутатора x путем перекрещивания проводов, идущих к его выходу или входу.

Операция $|P|$ интерпретируется, как установлено выше, модулем $|x|$ числа x, моделирующего высказывание P. Так как $|x| = x \cdot x$, где $x \in \{1,0,1\}$, то схему коммутатора $|x| = \operatorname{sign}|P|$ можно осуществить посредством каскадного соединения $x \cdot x$ двух одинаковых коммутаторов $x = \operatorname{sign} P$, т. е. схема

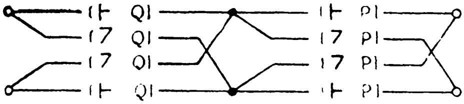


Рис. 6

коммутатора $|x| = \operatorname{sign}|P|$ получается из схемы коммутатора $y \cdot x = \operatorname{sign}(P \supset\subset Q)$ как ее частный случай, когда $Q \equiv P$. Но, как легко видеть из рис. 6, в этом случае схема может быть

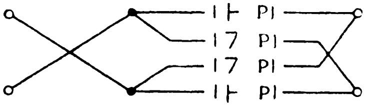


Рис. 7

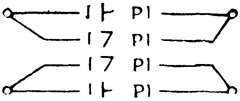


Рис. 8

упрощена и приведена к виду, изображенному на рис. 8. Согласно рис. 8, схема коммутатора $|x|$ может быть осуществлена при использовании лишь четырех замыкающих контактов. Если трехпозиционное реле, управляющее коммутатором $|x|$, обладает размыкающими контактами, то число контактов в схеме коммутатора $|x|$ можно сократить до двух размыкающих контактов $[\downarrow P]'$ (см. рис. 9).

Операция сильной дизъюнкции $P \vee Q$ арифметически интерпретируется операцией max (x, y). Отсюда следует, что схема коммутатора max (x, y) может быть получена из схемы коммутатора x посредством замены в ней контактов $[\vdash P]$ и $[\urcorner P]$, соответственно, контактами $[\vdash (P \vee Q)]$ и $[\urcorner (P \underline{\vee} Q)]$.

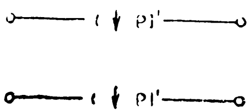
Но, как следует из табл. III,

$$\vdash (P \vee Q) \equiv \vdash P \cup \vdash Q, \quad \urcorner (P \vee Q) \equiv \urcorner P \cap \urcorner Q,$$

и, следовательно,

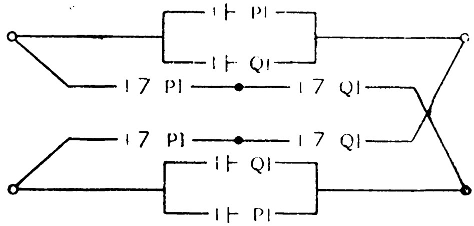
$$[\vdash (P \vee Q)] = [\vdash P] + [\vdash Q], \; [\urcorner (P > Q)] = [\urcorner P] \cdot [\urcorner Q],$$

где знаки + и · означают, соответственно, параллельное и последовательное соединение контактов, между символами которых они находятся [7, 8, 9].



$|x| = \mathrm{sign}\ |P|$

Рис. 9



max (x, y) = sign (P ∨ Q)

Рис. 10

Подставляя в схему коммутатора sign P (рис. 2) вместо контактов $[\vdash P]$ и $[\urcorner P]$ контактные схемы $[\vdash P] + [\vdash Q]$ и $[\urcorner P] \cdot$ $\cdot [\urcorner Q]$, соответственно, получим схему коммутатора $\max (x, y) =$ $= \mathrm{sign}\ (P \vee Q)$, изображенную на рис. 10.

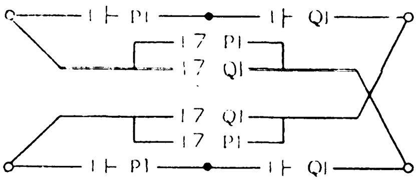
Так как $\min (x, y) = -\max(-x, -y)$, то для получения схемы коммутатора $\min (x, y)$ достаточно в схеме коммутатора $\max (x, y)$ обменять взаимно контакты $[\vdash P]$ и $[\urcorner P]$, проделать такую же операцию с контактами $[\vdash O]$ и $[\urcorner Q]$ и перекрестить входные или выходные провода. Полученная таким образом схема коммутатора $\min (x, y)$ изображена на рис. 11, и нетрудно проверить по табл. III, что схема рис. 11 действительно моделирует операцию сильной конъюнкции $P \& Q$.

Коммутатор $\max (-x, y) = \mathrm{sign}\ (P \succ\!\!\to Q)$ получается из схемы коммутатора $\max (x, y)$ посредством лишь взаимного обмена контактов $[\vdash P]$ и $[\urcorner P]$.

Коммутаторы, моделирующие слабые операции: дизъюнкции $P \cup Q$, конъюнкции $P \cap Q$ и импликации $P \supset Q$,— могут быть получены, согласно формулам (2. 33), (2.34) и (2.35), посредством каскадных соединений коммутаторов x и y с коммутаторами max (x, y), min (x, y) и max $(-x, y)$, соответственно, т. е. посредством следующих схем:

$$|x|\cdot|y|\cdot\max(x, y) = \operatorname{sign}(P \cup Q),$$
$$|x|\cdot|y|\cdot\min(x, y) = \operatorname{sign}(P \cap Q),$$
$$|x|\cdot|y|\cdot\max(-x, y) = \operatorname{sign}(P \supset Q).$$

В этих равенствах знак умножения служит также и символом каскадного соединения коммутаторов, между символами которых он находится. Общее число контактов в каждой из



min (x, y) = sign (P & Q)

Рис. 11

схем, описываемых выражениями в левых частях равенств, равно 16, если коммутаторы $|x|$ и $|y|$ осуществляются по схеме рис. 8, и равно 12, если эти коммутаторы осуществляются по схеме рис. 9.

Мы ограничимся приведенными примерами использования первичной арифметической интерпретации и перейдем теперь к рассмотрению примеров использования вторичной арифметической интерпретации трехзначного исчисления высказываний при моделировании операций этого исчисления посредством трехпозиционных коммутаторов.

Вторичная арифметическая интерпретация операций исчисления высказываний основана на использовании равенств (2.7).

Рассмотрим первое из этих равенств:

$$\operatorname{sign} P = \operatorname{sign} X.$$

Устанавливаемая этим равенством связь между переменным высказыванием P и действительным переменным X является, разумеется, неоднозначной. Единственным ограничением, налагаемым этой связью на переменное высказывание P и действительное переменное X, является требование, чтобы знаки P и X совпадали.

Действительное переменное x, удовлетворяющее этому равенству, будем называть *равнозначным переменному* высказыванию P. Если действительное переменное X является аргументом функции $\operatorname{sign} X$ тогда и только тогда, когда переменное высказывание P является аргументом функции $\operatorname{sign} P$, то действительное переменное X будет равнозначно данному переменному высказыванию P.

Арифметическую операцию над действительными переменными X и Y, равнозначными высказываниям P и Q, будем называть *равнозначной* некоторой операции над теми же высказываниями P и Q, если результат этой арифметической операции для всех значений X и Y оказывается равнозначен результату данной операции над высказываниями P и Q.

Пусть действительные переменные X и Y связаны с переменными высказываниями P и Q равенствами (2.7), тогда арифметическая операция $\varphi(X, Y)$ равнозначна операции $F(P, Q)$ исчисления высказываний, если удовлетворяется уравнение:

$$\operatorname{sign} F(P, Q) = \operatorname{sign} \varphi(X, Y).$$

Нетрудно показать, что арифметической операцией, равнозначной операции внутреннего утверждения высказывания P, является операция sing X.

Действительно, если $\operatorname{sign} P = \operatorname{sign} X$, то в силу $\operatorname{sing}(\operatorname{sign} X) = (\operatorname{sign} X)$ имеем равенство $\operatorname{sign} P = \operatorname{sign}(\operatorname{sign} X)$.

Следовательно, операция $\operatorname{sign} X$ равнозначна операции над высказыванием P, не изменяющей этого высказывания, т. е. операции внутреннего утверждения высказывания P.

Арифметической операцией над X, равнозначной операции внешнего утверждения P высказывания P, является операция $1_{-1}(X)$, определяемая формулой (2.39).

Действительно, как легко проверить, $\operatorname{sign} 1_{-1}(X) = 1_{-1}(X)$. Отсюда, на основании равенства (2.40), получаем требуемое равенство

$$\operatorname{sign} P = \operatorname{sign} 1_{-1}(X).$$

Аналогично можно показать, что арифметические операции в равенствах (2.43) — (2.52) равнозначны соответствующим внешним операциям над высказываниями.

Как было показано ранее [9], моделирование внешних операций исчисления высказываний сводится к моделированию

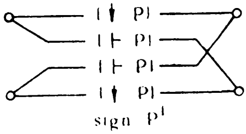


Рис. 12

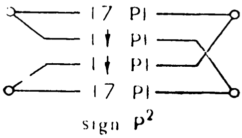


Рис. 13

операций исчисления предложений посредством двухпозиционных коммутаторов, что было рассмотрено в ранее опубликованной работе [7]. Мы поэтому не будем приводить здесь схем

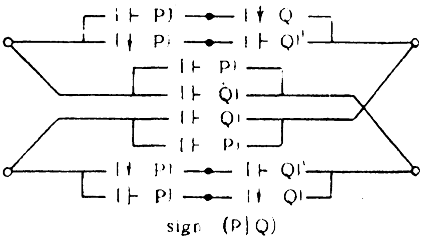


Рис. 14

коммутаторов, моделирующих внешние операции Бочвара, а приведем здесь лишь схемы тех коммутаторов, которые моделируют не рассмотренные там операции исчисления высказываний, а именно операции P^1, P^2 и $P|Q$.

Из табл. II получаем:

$$\operatorname{sign} P^1 = 1\,(\downarrow P) - 1\,(\vdash P),$$
$$\operatorname{sign} P^2 = 1\,(\urcorner P) - 1\,(\downarrow P).$$

Из этих равенств видно, что коммутаторы sign P^1, sign P^2 арелизуются схемами, изображенными на рис. 12 и 13.

Из равенства (2.60) следует, что коммутатор sign $(P|Q)$ может быть реализован схемой, изображенной на рис. 14.

Из формул (2.58) и (2.59) следует, что арифметическими функциями действительного переменного X, равнозначными операциями P^1, P^2 над высказыванием P, являются, соответственно, функции $\delta_0(X) - 1(X)$ и $1(-X) - \delta_0(X)$.

Из формулы (2.61) следует, что арифметической функцией действительных переменных X и Y, равнозначной функции Вебба $P \mid Q$, является следующая функция:

$$\bar{\bar{1}}(X) \cdot \delta_0(X) + \delta_0(X) \cdot \bar{\bar{1}}(Y) - (1(X) + 1(Y)).$$

Проведенное рассмотрение вторичной арифметической интерпретации операций трехзначного исчисления высказываний показывает, что значительная часть из арифметических функций равнозначных операциям над высказываниями, выражается через единичную (доопределенную) функцию Хевисайда. В частности, основная из этих функций — функция «знак числа» — выражается как разность двух функций Хевисайда. Это указывает на основную роль, которую играет единичная функция Хевисайда при вторичной арифметической интерпретации операций исчисления высказываний.

Литература

[1.] Д. А. Бочвар. Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширения функционального исчисления. «Матем. сб.», нов. серия, т. 4 (46), № 2, (1938), стр. 287—308.

[2.] Д. А. Бочвар. К вопросу о непротиворечивости одного трехзначного исчисления. «Матем. сб.», т. 12 (54), № 3, (1943), стр. 353—369.

[3.] S. C. Kleene. On notation for ordinal numbers. J. Symbolic Logic, vol. 3 (1938), 150—155.

[4.] С. К. Клини. Введение в метаматематику. ИЛ, 1957.

[5.] D. L. Webb. The algebra of n-valued logic. C. R. Soc. d. Sc. d. Let. de Varsovie, cl. III, vol. 29 (Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydzial III, Rok 29, 1936), 153—168.

[6.] H. M. Sheffer. A set of five independent postulates for Boolean algebras with application to logical constants, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 14, 1913, 481—488.

[7.] В. И. Шестаков. Представление характеристических функций предложений посредством выражений, реализуемых релейно-контактными схемами. Изв. АН СССР, сер. матем., I, 10 (1946), стр. 529—554.

[8.] В. И. Шестаков. Моделирование операций исчисления высказываний посредством релейно-контактных схем. «Логические исследования», М., сб. 2, Изд-во АН СССР, 1959.
[9.] В. И. Шестаков. Моделирование операций исчисления предложений посредством простейших четырехполюсных схем. «Вычислительная математика и вычислительная техника», сб. 1, Изд-во АН СССР, 1953, стр. 56—89.

М. Л. Цетлин, Л. М. Шехтман

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ УСТРОЙСТВ, ВЫПОЛНЯЮЩИХ ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В современной технике все большее распространение получают устройства, выполняющие различные функции логического характера, благодаря чему машины, содержащие такие устройства, способны отвечать сложными, дифференцированными реакциями на разносторонние воздействия окружающей среды. Часто устройства, выполняющие логические функции, строятся в форме логических сетей, т. е. систем соединенных определенным образом элементов, выполняющих каждый лишь немногие основные, простейшие логические функции.

При синтезе устройств, выполняющих логические функции, возникает ряд специфических задач, как логико-математических, так и физико-технических. Последние приобретают особо важное значение при работе логических устройств «в натуральном времени», т. е. в тех случаях, когда эти устройства непосредственно управляют какими-либо производственными или другими процессами переменной длительности.

В настоящей работе рассматриваются некоторые особенности физической реализации логических сетей, связанные с учетом конечного времени запаздывания сигналов. Такое рассмотрение позволяет получить ряд необходимых соотношений, а также уточнить некоторые понятия и термины, часто применяющиеся при синтезе логических сетей, и требования, предъявляемые к конкретным элементам и устройствам (схемам).

Рассмотрим некоторое устройство (схему) $P_{n,1}$, имеющую n входных шин $X^1, \ldots, X^n$ и одну выходную шину F (рис. 1). Предположим, что любая из n входных шин может находиться в одном из двух[1] состояний. Эти состояния могут отличаться, например, тем или иным уровнем напряжения, наличием или отсутствием импульса, той или иной величиной проводимости по отношению к некоторой общей точке и т. п., причем реализация этих состояний для разных входных шин может быть различной. Предположим далее, что состояние выходной шины также может принимать одно из двух значений.

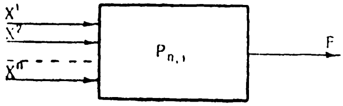


Рис. 1

Мы будем обозначать состояния входных шин $X^1, \ldots, X^n$ и выходной шины F в момент времени t, соответственно, буквами $x_t^1, \ldots, x_t^n$ и f_t.

Мы назовем схему $P_{n,1}$ примитивной, если состояние ее выходной шины в момент времени t однозначно определяется состояниями ее входных шин в некоторые предшествующие моменты, фиксированные для каждой входной шины; иными словами, если состояние выходной шины описывается уравнением

$$F_t = F(x_{t-\tau_1}^1, \ldots, x_{t-\tau_n}^n), \tag{1}$$

где F — произвольная функция алгебры логики, существенно зависящая от всех своих аргументов, а τ_j ($j = 1, \ldots, n$) — время запаздывания (задержки) по входу X^j. Мы будем для простоты предполагать, что времена задержки не зависят от времени и что форма сигналов не искажается.

Предполагая сначала, что все сигналы подаются одновременно, выясним минимальную длительность их, обеспечивающую появление правильного выходного сигнала.

Обозначим буквами $\tau_{вх}^1, \ldots, \tau_{вх}^n$ длительности входных сигналов, подаваемых, соответственно, на входы $X^1, \ldots, X^n$. Заметим,

[1] Результаты этой работы легко переносятся и на тот случай, когда состояния входных и выходных шин принимают любое конечное число значений.

что для работы схемы необходимо, чтобы длительность сигналов, подаваемых на ее входы, превышала некоторое пороговое значение $\tau^i_{пор}$ $(i = 1, \ldots, n)$, т. е. чтобы удовлетворялась система неравенств

$$\tau^i_{вх} \geqslant \tau^i_{пор}. \tag{2}$$

Положим далее $\tau_{\max} = \max\limits_i (\tau_i)$, $\tau_{\min} = \min\limits_i (\tau_i)$, $\Delta = \tau_{\max} - \tau_{\min}$; величину Δ мы назовем максимальным разбросом задержек.

Тогда для появления правильного выходного сигнала необходимо выполнение следующей системы неравенств:

$$\tau^i_{вх} \geqslant \tau_{\max} - \tau_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Одновременное удовлетворение неравенств (2) и (3) обусловливает появление правильного сигнала на выходе схемы. Предположим теперь, что длительность правильного выходного сигнала должна превосходить величину σ, определяемую параметрами устройства, на вход которого должен подаваться выходной сигнал системы $P_{n,1}$. Для выполнения этого требования необходимо, чтобы длительности выходных сигналов схемы $P_{n,1}$ удовлетворяли системе неравенств

$$\tau^i_{вх} \geqslant \tau_{\max} - \tau_i + \sigma \; (i = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Предположим, что в начальный момент $(t=0)$ на входы схемы поданы сигналы $x^1_0, \ldots x^n_0$ длительностей соответственно $\tau^1_{вх}, \ldots, \tau^n_{вх}$, причем одновременно удовлетворены системы неравенств (2) и (4).

Введем далее обозначения:

$$\left.\begin{array}{c} \varepsilon^1 = \tau^1_{вх} - \sigma - \tau_{\max} + \tau_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon^n = \tau^n_{вх} - \sigma - \tau_{\max} + \tau_n \\ \varepsilon_{\min} = \min\limits_i (\varepsilon^i) \\ \varepsilon_{\max} = \max\limits_i (\varepsilon^i) \\ \delta = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min} \end{array}\right\}. \tag{5}$$

Тогда для интервала $0 \leqslant t \leqslant \tau_{\min}$ состояние выходной шины схемы не зависит от состояний ее входных шин. При $\tau_{\min} \leqslant t \leqslant \tau_{\max}$

состояние выходной шины связано с состояниями входных шин, однако эта зависимость не соответствует, вообще говоря, уравнению (1). Назовем этот интервал **первым интервалом неправильной зависимости**; длительность его совпадает с максимальным разбросом задержек Δ.

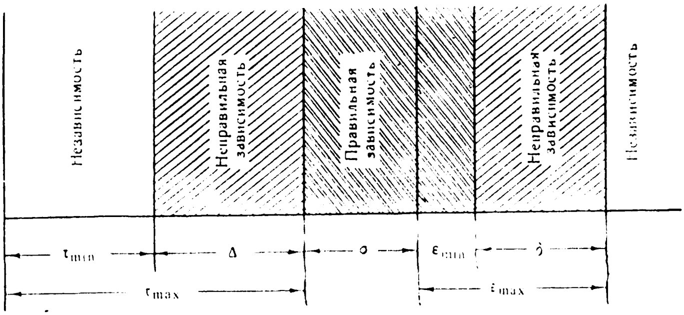


Рис. 2

В интервале $\tau_{max} \leqslant t \leqslant \tau_{max} + \sigma + \varepsilon_{min}$ зависимость состояния выходной шины от состояний входных шин соответствует уравнению (1). Этот интервал мы назовем **интервалом правильной зависимости**, его длительность равна, очевидно, $\sigma + \varepsilon_{min}$. Далее, в интервале $\tau_{max} + \sigma + \varepsilon_{min} \leqslant t \leqslant \tau_{max} + \sigma + \varepsilon_{max}$ снова будет иметь место неправильная зависимость. Длительность этого второго интервала неправильной зависимости равна δ; $\delta = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}$ (рис. 2). Интервал $0 \leqslant t \leqslant \tau_{max} + \sigma + \varepsilon_{max}$ назовем микротактом для схемы $P_{n,1}$. В течение микротакта состояние тех или иных ее элементов связано с сигналами, поданными в момент $t = 0$ на входные шины.

Заметим, что если все входные сигналы имеют одинаковую длительность, то $\Delta = \delta$ и длительности интервалов неправильной зависимости совпадают.

Предположение об одновременной подаче сигналов на все входные шины схемы $P_{n,1}$ не ограничивает общности рассмотрения, так как разброс во времени подачи сигналов на различные входы может быть учтен соответствующим изменением времен задержки. Так, например, подача сигналов равной длительности на шины $X^1, \ldots, X^n$ в моменты, соответственно, $\tau_{max} - \tau_1, \ldots$ $\ldots, \tau_{max} - \tau_n$ позволяет свести к нулю длительности как первого, так и второго интервалов неправильной зависимости. Этот случай будет, очевидно, иметь место при рассмотрении схемы, для которой $\Delta = 0$ и на вход которой подаются импульсы равной длительности. Примитивные схемы, как правило, предназначены для неоднократной переработки дискретной информации. Назовем минимальным периодом $T_{\min}$ подачи информации наименьший интервал времени, разделяющий моменты подачи сигналов на входные шины, при котором обеспечивается необходимая длительность правильного выходного сигнала. Для схемы $P_{n,1}$ с задержками $\tau_1, \ldots, \tau_n$ при фиксированных длительностях входных сигналов $\tau_{\text{вх}}^1, \ldots, \tau_{\text{вх}}^n$ минимальный период подачи информации

$$T_{\min} = \max_i (\tau_{\text{вх}}). \tag{6}$$

При этом, как уже указывалось, $\tau_{\text{вх}}^i$ должны удовлетворять неравенствам (2) и (4). Величину $\eta_{\max} = \frac{1}{T_{\min}}$ назовем максимальным быстродействием схемы. Максимальное быстродействие схемы $\eta_{\max}$ может быть увеличено за счет уменьшения длительности входных сигналов (разумеется, в тех случаях, когда источники входных сигналов это позволяют).

В этом случае наименьшее значение

$$T_{\min} = \Delta + \sigma \tag{7}$$

достигается путем выбора длительностей входных сигналов в соответствии с системой неравенств

$$\tau_{\max} - \tau_i + \sigma \leqslant \tau_{\text{вх}}^i \leqslant \Delta + \sigma. \tag{8}$$

Легко убедиться в том, что в этом случае длительность второго интервала неправильной зависимости $\delta \leqslant \Delta$, причем равенство имеет место при одновременной подаче равных по длительности сигналов.

Дальнейшее увеличение быстродействия схемы может быть достигнуто либо за счет уменьшения величины Δ путем уменьшения разброса задержки самой схемы, либо, как указывалось выше, разновременной подачей сигналов на входные шины.

При использовании выходного сигнала схемы $P_{n,1}$ в качестве входного сигнала других (последующих) схем достаточная длительность выходного сигнала схемы $P_{n,1}$ обеспечивается при удовлетворении неравенства (4).

Однако для правильной работы последующих схем необходимо также, чтобы выходной сигнал в интервалах неправильной зависимости не вызывал их срабатывания, т. е. чтобы соблюдалось условие

$$\max(\Delta, \delta) \leqslant \vartheta, \tag{9}$$

где ϑ — максимальная длительность сигнала, при которой срабатывание последующих схем не может произойти[2].

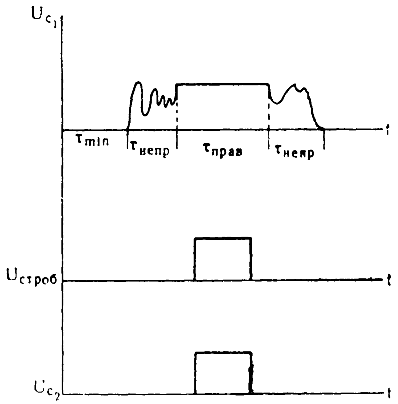


Рис. 3

Назовем размытостью временного порога срабатывания параметр $\beta = \frac{\sigma - \vartheta}{\sigma}$; его величина определяется рядом физических свойств схем, при проектировании последних следует добиваться уменьшения его величины.

В ряде случаев условие (9) автоматически не выполняется. Тогда необходимо выделение части выходного сигнала с тем, чтобы длительность интервала неправильной зависимости не превышала ϑ. Такое выделение принято называть стробированием, а соответствующие технические устройства — стробиру-

---

[2] Точнее, такая длительность сигнала, при которой вероятностью срабатывания можно пренебречь.

ющими. На рис. 3 показано выделение части сигнала стробирующим импульсом. На этом рисунке через U_{c_1} обозначено напряжение сигнала до стробирования, через U_{c_2} обозначено напряжение сигнала после стробирования, а через $U_{строб}$ — напряжение стробирующего импульса.

Заметим теперь, что длительность правильного выходного сигнала имеет меньшую величину, чем максимальная длительность входного сигнала. Поэтому иногда возникает необходимость в увеличении длительности выходного сигнала, поступающего на входы последующих схем, путем использования специальных устройств формирования по длительности; эти устройства восстанавливают также и форму сигнала, искажающуюся

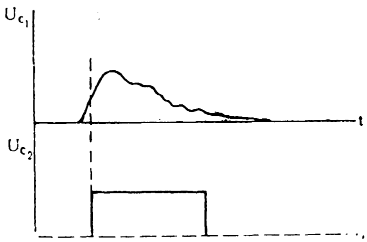


Рис. 4

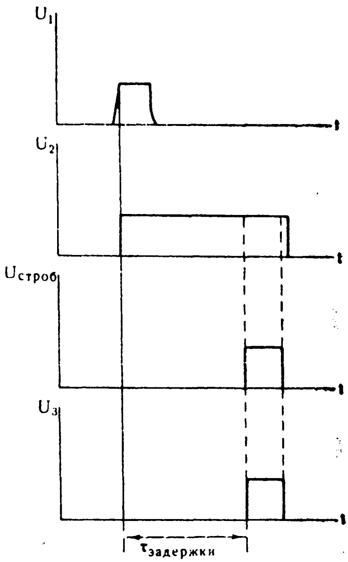


Рис. 5

вследствие ограниченной полосы пропускания устройства и других причин.

На рис. 4 показано формирование импульса по форме и длительности; U_{c_1} — форма сигнала до формирующего устройства, U_{c_2} — после него. Заметим, что последовательное осуществление формирования и стробирования может применяться для задержки импульса. Это показано на рис. 5, где U_1 — напряжение сигнала до формирования, U_2 — после формирования, U_3 — после формирования и стробирования, $U_{строб}$ — напряжение стробирующего импульса. На этом рисунке легко заметить задержку импульса U_3 по сравнению с импульсом U_1.

Рассмотрим теперь схему $P_{n,q}$, имеющую n входных шин $X^1, \ldots, X^n$ и q выходных шин $F^1, \ldots, F^q$ (рис. 6), каждая из которых в момент t может находиться в одном из двух состояний, обозначаемых, соответственно, буквами $x_t^1, \ldots, x_t^n$ и $f_t^1, \ldots, f_t^q$. Мы назовем схему $P_{n,q}$ примитивной, если состояние каждой выходной ее шины в момент t полностью определяется состояниями ее входных шин в некоторые предшествую-

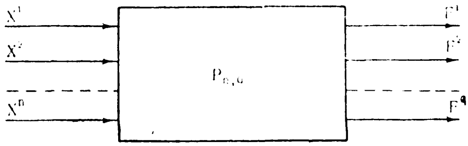


Рис. 6

щие моменты времени, фиксированные для каждой входной шины иными словами, если состояния ее выходных шин связаны с состояниями входных шин уравнениями

$$f_t^j = f^j(x_{t-\tau_{1j}}^1, \ldots, x_{t-\tau_{nj}}^n) \quad (j = 1, \ldots, q), \tag{10}$$

в которых буквами τ_{ij} ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, q$) обозначены времена запаздывания (задержки) сигнала на выходе F^j относительно входа X^i. Обозначим буквами $\tau_{\text{вх}}^1, \ldots, \tau_{\text{вх}}^n$ длительности входных сигналов, подаваемых, соответственно, на шины $X^1, \ldots, X^n$, и отметим (как и в случае схемы $P_{n,1}$), что для работы схемы необходимо, чтобы эти величины превосходили некоторые пороговые значения, т. е. чтобы удовлетворялись неравенства (2).

Схему $P_{n,q}$ можно считать совокупностью q схем $P_{n,1}$.

Тогда, если σ_j — максимальная длительность правильного сигнала на шине F^j, определяемая параметрами устройств, на вход которых может быть подан этот выходной сигнал, то необходимые длительности правильных выходных сигналов будут достигнуты при удовлетгорении системы неравенств, следующей из (4):

$$\tau_{\text{вх}}^i \geqslant \tau_{\max}^j - \tau_{ij} + \sigma_j \quad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, q), \tag{11}$$

где $\tau_{\max}^j = \max\limits_i \tau_{ij}$.

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon^{ij} = \tau^{i}_{\text{вх}} - \sigma_j - \tau^{j}_{\max} + \tau_{ij}, \\ &\varepsilon^{j}_{\min} = \min_i \varepsilon^{ij} \\ &\varepsilon^{j}_{\max} = \max_i \varepsilon^{ij} \\ &\tau^{j}_{\min} = \min_i \tau_{ij}, \quad \Delta^j = \tau^{j}_{\max} - \tau^{j}_{\min}; \quad \delta^j = \varepsilon^{j}_{\max} - \varepsilon^{j}_{\min} \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Так же как и для схемы $P_{n,1}$ (см. выше, стр. 380), можно показать, что интервалы

$$\tau^{j}_{\min} \leqslant t \leqslant \tau^{j}_{\max} \quad \text{и} \quad \tau^{j}_{\max} + \sigma^{j}_{j} + \varepsilon^{j}_{\min} \leqslant t \leqslant \tau^{j}_{\max} + \sigma_j + \varepsilon^{j}_{\max}$$

являются, соответственно, первым и вторым интервалами неправильной зависимости, а интервал $\tau^{j}_{\max} \leqslant t \leqslant \tau^{j}_{\min} + \sigma_j + \varepsilon^{j}_{\min}$ — интервалом правильной зависимости для выхода F^j. При этом длительности интервалов неправильной зависимости равны, соответственно, величинам Δ^j и δ^j, а длительность интервала правильной зависимости по выходу F^j равна $\sigma^{j}_{j} + \varepsilon^{j}_{\min}$. Однако часто такое рассмотрение оказывается недостаточным.

В ряде приложений, быть может наиболее важных, бывает необходимым получение правильных выходных сигналов минимальной длительности σ_0 одновременно на всех выходных шинах $F^1, \ldots, F^q$ схемы $P_{n,q}$. Рассмотрим этот случай более подробно. Назовем интервалом правильной зависимости для схемы $P_{n,q}$ по совокупности ее выходов такой максимальный интервал, в котором зависимость состояний всех выходов от состояний входов описывается уравнением (10), а интервалами неправильной зависимости для схемы $P_{n,q}$ по совокупности выходов — такие интервалы, в которых состояние хотя бы одной из выходных шин $F^1, \ldots, F^q$ зависит от состояния входов, но зависимость состояний всех выходов $F^1, \ldots, F^q$ от состояния входов не отвечает уравнениям (10).

Назовем микротактом для схемы $P_{n,q}$ интервал $0 \leqslant t \leqslant \max\limits_{ij} (\tau^{i}_{\text{вх}} + \tau_{ij})$; в течение микротакта состояние тех или иных элементов схемы связано с сигналами, поданными в момент $t = 0$ на ее входные шины. Длительность τ_{μ} микротакта, очевидно, может быть определена соотношением

$$\tau_\mu = \max_{i,\, j} (\tau^i_{\text{вх}} + \tau_{ij}). \tag{13}$$

Для обеспечения необходимой длительности σ_0 интервала правильной зависимости схемы $P_{n,\, q}$ по совокупности выходов необходимо выполнение неравенств

$$\tau^i_{\text{вх}} \geqslant \tau_{\max} + \sigma_0 - \min_j \tau_{ij}; \quad \tau_{\max} = \max_{i,\, j} \tau_{ij}; \quad \tau^i_{\text{вх}} > \tau^i_{\text{пор}}, \tag{14}$$

где $\tau^i_{\text{пор}}$ — минимальная длительность входного сигнала, подаваемого на вход X^i и вызывающего надежное срабатывание схемы. Введем далее обозначения

$$\left.\begin{gathered} \xi^i = \tau^i_{\text{вх}} - \tau_{\max} - \sigma_0 - \min_j \tau_{ij} \\ \xi_{\min} = \min_i \xi^i; \ \xi_{\max} = \max_i \xi^i; \ \tau_{\min} = \min_{i,\, j} \tau_{ij}; \ \delta_0 = \xi_{\max} - \xi_{\min} \\ (i = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, q) \end{gathered}\right\}. \tag{15}$$

При этом интервал $\tau_{\min} \leqslant t \leqslant \tau_{\max}$ является первым интервалом неправильной зависимости, интервал $\tau_{\max} \leqslant t \leqslant \tau_{\max} + \sigma_0 + \xi_{\min}$ является интервалом правильной зависимости и, наконец, интервал $\tau_{\max} + \sigma_0 + \xi_{\min} \leqslant t \leqslant \tau_{\max} + \sigma_0 + \xi_{\max}$ является вторым интервалом неправильной зависимости для схемы $P_{n,\, q}$ по совокупности выходов. Длительности этих интервалов равны, соответственно, Δ_0, $\sigma_0 + \xi_{\min}$, δ_0. Определим минимальный период $T_{\min}$ подачи информации для схемы $P_{n,\, q}$ по совокупности выходов как наименьший интервал времени, разделяющий моменты подачи сигналов информации на входные шины, при котором обеспечивается необходимая длительность σ_0 интервала правильной зависимости для схемы $P_{n,\, q}$ по совокупности выходов. Величину $\eta_{\max} = \frac{1}{T_{\min}}$ назовем максимальным быстродействием схемы.

Для схемы $P_{n,\, q}$ с задержками τ_{ij} при фиксированных длительностях входных сигналов $\tau^1_{\text{вх}}, \ldots, \tau^n_{\text{вх}}$, удовлетворяющих неравенствам (14), имеет место формула

$$T_{\min} = \max_i (\tau^i_{\text{вх}}). \tag{16}$$

В тех случаях, когда длительности входных сигналов не являются фиксированными, минимальный период подачи информации для схемы $P_{n,q}$ может быть уменьшен до величины

$$T_{\min} = \Delta_0 + \sigma_0, \tag{17}$$

причем длительности входных сигналов должны лежать в пределах

$$\tau_{\max} + \sigma_0 - \min_j \tau_{ij} \leqslant \tau_{\text{вх}}^i \leqslant \Delta_0 + \sigma_0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Так же как и для схемы $P_{n,1}$, длительность второго интервала неправильной зависимости $\delta_0 \leqslant \Delta_0$, причем равенство имеет место в случае входных сигналов равной длительности.

В случаях, когда выходные сигналы схемы $P_{n,q}$ используются в качестве входных сигналов для других (последующих) схем необходимо также выполнение условия, аналогичного (9)

$$\max(\Delta_0, \delta_0) \leqslant \vartheta, \tag{19}$$

где ϑ, как и ранее,— максимальная длительность сигнала, при которой срабатывание управляемых схем еще не может произойти. Если неравенство (19) не удовлетворяется, то при наличии интервала правильной зависимости для схемы $P_{n,q}$ по совокупности выходов легко может быть произведено выделение входных сигналов лишь в этом интервале — стробирование; при использовании стробирования период подачи информации должен выбираться кратным периоду стробирования. Формирование по длительности имеет тот же смысл, что и для схемы $P_{n,1}$.

Несколько выше было дано определение минимального периода подачи информации $T_{\min}$. В большинстве случаев сигналы на входные шины подаются через равные интервалы T времени, т. е. периодически. Из изложенного ясно, что правильная работа схемы может быть обеспечена лишь при $T \geqslant T_{\min}$. Величина T определяется рядом факторов, часть из которых не связана с параметрами схемы, как, например, скоростью ввода и вывода информации, быстродействием других схем и т. д. Кроме этого, известные ограничения вносит наличие обратных связей (см. ниже). Величину $\eta = 1/T$ назовем быстродействием схемы, величину $\eta_{\max} = \frac{1}{T_{\min}}$ — максимальным быстродействием, а величину

$$\alpha = \frac{T}{T_{\min}} = \frac{\eta_{\max}}{\eta}$$

— скважностью переработки информации. Длительность входных сигналов, определяемая неравенствами, может выбираться меньшей чем T.

Назовем импульсными такие шины схемы, длительность сигнала на которых меньше периода подачи информации T. Шины, длительность сигналов на которых равна периоду подачи информации T, мы назовем потенциальными. Случаю, когда все шины схемы являются импульсными, соответствует импульсный режим работы. Аналогично определяются потенциальный и смешанный режим работы.

В дальнейшем мы будем предполагать, что сигналы (информация) подаются на входы схемы периодически, через равные промежутки T времени.

При описании логики работы таких схем принято обозначать время указанием на номер периода $t = 0, 1, \ldots, n, \ldots$, отождествляя моменты времени, принадлежащие одному периоду, и пренебрегая запаздыванием внутри периода. Так, например, если входные сигналы подаются на схему $P_{n,q}$ в период с номером t_0, а выходной сигнал возникает на шине F^j $(j = 1, \ldots, q)$ в период с номером $t_0 + l_j$, то уравнения (10) принимают вид

$$f^j_{t_0+l_j} = f^j(x^1_{t_0}, \ldots, x^n_{t_0}), \quad j = 1, \ldots, q. \tag{20}$$

В случае наличия интервала правильной зависимости по совокупности выходов числа l_j равны между собой $(l_1 = l_2 = \ldots = l_q = l_0)$ и уравнения (20) принимают форму

$$f^j_{t_0+l_0} = f^j(x^1_{t_0}, \ldots, x^n_{t_0}), \quad j = 1, \ldots, q. \tag{21}$$

Если выходные сигналы возникают в том же периоде подачи информации, в котором информация поступает на входные шины схемы, то $l_0 = 0$ и уравнения (20) принимают вид

$$f^j_{t_0} = f^j(x^1_{t_0}, \ldots, x^n_{t_0}). \tag{22}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями однотактных релейных схем [1], или совершенно неавтономных систем [2], или истинностных операторов [3].

Мы, однако, будем считать истинностными схемами такие лишь, в которых запаздывание внутри периода значительно меньше периода $(\tau_\mu \ll T)$.

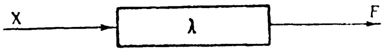


Рис. 7

Назовем линией задержки примитивную схему Λ, имеющую вход X и выход F (рис. 7) и описываемую уравнением

$$f_t = x_{t-\tau_d}; \tag{23}$$

величина τ_d называется временем задержки. Будем предполагать, что величина τ_d не зависит от времени.

Рассмотрим примитивную схему $P_{n+s,\,q+s}$, имеющую $n+s$ входных шин $X^1, \ldots, X^{n+s}$ и $q+s$ выходных шин $F^1, \ldots, F^2$, $\Phi^1, \ldots, \Phi^s$. В соответствии с определением примитивной схемы, состояния ее выходных шин связаны с состояниями входных уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \varphi_t^j &= \varphi^j\left(x^1_{t-\tau_{1j}}, \ldots, x^n_{t-\tau_{nj}}, x^{n+1}_{t-\tau_{n+1j}}, \ldots, x^{n+s}_{t-\tau_{n+s,j}}\right) \\ f_t^i &= f^i\left(x^1_{t-\tau^1_{1i}}, \ldots, x^n_{t-\tau^1_{ni}}, x^{n+1}_{t-\tau_{n+1i}}, \ldots, x^{n+s}_{t-\tau_{n+s,i}}\right) \\ & i = 1, \ldots, q;\; j = 1, \ldots, s \end{aligned}\right\}. \tag{24}$$

Соединим шины $\Phi^1, \ldots, \Phi^s$ с входами линий задержки $\Lambda^1, \ldots, \Lambda^s$, а шины $X^{n+1}, \ldots, X^{n+s}$ — соответственно с их выходами (рис. 8). Полученную таким образом схему $Q_{n,\,q,\,s}$ назовем непримитивной. Если линии задержки имеют времена задержки $\tau_{d_1}, \ldots, \tau_{d_s}$, то непримитивной схеме будет соответствовать система уравнений

$$\left.\begin{aligned} \varphi_t^j &= \varphi^j\left(x^1_{t-\tau_{1j}}, \ldots, x^n_{t-\tau_{nj}};\; \varphi^1_{t-\sigma_{1j}}, \ldots, \varphi^s_{t-\sigma_{sj}}\right), \; j=1, \ldots, s \\ f_t^i &= f^i\left(x^1_{t-\tau^1_{1i}}, \ldots, x^n_{t-\tau^1_{ni}}, \varphi^1_{t-\sigma^1_{1i}}, \ldots, \varphi^s_{t-\sigma^1_{si}}\right), \; i=1, \ldots, q \end{aligned}\right\}, \tag{25}$$

где

$$\sigma_{kj} = \tau_{d_k} + \tau_{n+k,\, j},$$

$$\sigma'_{kj} = \tau_{d_k} + \tau'_{n+k,\, j},$$

$$k = 1, \ldots, s.$$

В непримитивных схемах происходит непрерывная циркуляция информации, вследствие чего возникает необходимость в восстановлении длительности и энергии входных сигналов. В связи с этим реализация непримитивных схем предусматривает обязательное использование активных (потребляющих энергию) элементов и соответствующих источников питания. В

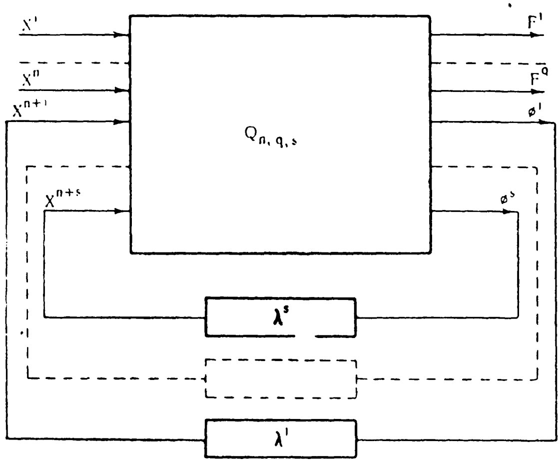


Рис. 8

непримитивных схемах, использующих импульсные режимы работы обратных связей, восстановление длительности и энергии выходных сигналов (формирование) совмещается со стробированием, обеспечивающим выделение сигналов в интервале правильной зависимости и подачу их на шины $X^{n+1}, \ldots, X^{n+s}$ одновременно с подачей сигналов на шины $X^1, \ldots, X^n$. Период стробирования при этом необходимо выбирать равным периоду подачи информации. Для реализации стробирования необходимо наличие интервала правильной зависимости примитивной схемы $P_{n+s,q+s}$ по совокупности выходов $F^1, \ldots, F^q, \Phi^1, \ldots$ $\ldots \Phi^s$[3].

Введем величины: $\tau^i_{вх}$ — длительность импульса, подаваемого на шину X^i $(i = 1, \ldots, n)$; $\sigma^k_{вх}$ — длительность сформированного импульса, подаваемого на шину X^{n+k} $(k = 1, \ldots, s)$; σ_0 — минимальная длительность сигнала, обеспечивающая срабатывание схемы формирования по длительности и энергии; $t^l_{пор}$ — минимальная длительность сигнала, подаваемого на вход X^l $(l = 1, \ldots, n + s)$ и вызывающего надежное срабатывание схемы. Обозначим далее

$$\left.\begin{aligned} \tau_{\max} &= \max_{i,\,j,\,k,\,p} (\tau_{ij}, \sigma_{kj}, \tau'_{ip}, \sigma'_{kp}) \\ \tau_{\min} &= \min_{i,\,j,\,k,\,p} (\tau_{ij}, \sigma_{kj}, \tau'_{ip}, \sigma'_{kp}) \\ \Delta_0 &= \tau_{\max} - \tau_{\min} \\ i = 1, \ldots, n;\ & j = 1, \ldots, s;\ p = 1, \ldots, q;\ k = 1, \ldots, s. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

В этих обозначениях для обозначения правильной работы схемы необходимо удовлетворение неравенств

$$\left.\begin{aligned} \tau^i_{вх} &\geqslant \tau_{\max} + \sigma_0 - \min_{j,\,p} (\tau_{ij}, \tau^1_{i,p}), \quad \tau^i_{вх} \geqslant t^i_{пор} \\ \sigma^k_{вх} &\geqslant \tau_{\max} + \sigma_0 - \min_{j,\,p} (\sigma_{kj}, \sigma^1_{kp}), \quad \sigma^k_{вх} \geqslant t^{i+k}_{пор} \end{aligned}\right\}, \qquad (27)$$

аналогичных полученным ранее неравенствам (14).

Необходимо также, чтобы во время интервалов неправильной зависимости не происходило срабатывание формирующего устройства, т. е. чтобы удовлетворялось неравенство $\Delta_0 < \vartheta$, где ϑ — максимальная длительность сигнала, при которой не может произойти срабатывание формирующего устройства.

Ранее было показано, что минимальный период $T_{\min}$ подачи информации, обеспечивающей получение необходимой длительности интервалов правильной зависимости по совокупности выходов $F^1, \ldots, F^q, \Phi^1, \ldots, \Phi^s$, определяется выражением

$$T_{\min} = \sigma_0 + \Delta_0.$$

---

[3] Вообще говоря, выделение интервала правильной зависимости по выходам $F^1, \ldots, F^g$ не является обязательным, но мы для краткости ограничимся рассмотрением этого случая.

При таком выборе периода подачи информации задержки в цепи обратной связи будут превышать период подачи информации. В самом деле, если сигналы были поданы на входные шины в момент $t = kT$, то интервал правильной зависимости начнется в момент $t = kt + \tau_{\max}$, а длительность его должна превышать величину σ_0. Поэтому правильные сигналы обратной связи могут быть поданы на входы $X^{n+1}, \ldots, X^{n+s}$ не ранее момента $kT + \tau_{\max} + \sigma_0 \geqslant$ и $T + \sigma_0 + \Delta_0$.

Как правило, период T подачи информации выбирается бо́льшим, чем $T_{\min}$. Необходимая для одновременной подачи информации на все входы $X', \ldots, X^{n+s}$ задержка осуществляется за счет формирования.

При описании логики работы непримитивных схем принято, как и в случае примитивных схем, обозначать время указанием на номер периода. При этом уравнения (25) принимают вид

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_k^j = \varphi^j(x_{k-m}^1, \ldots, x_{k-m}^n, \varphi_{k-l}^1, \ldots, \varphi_{k-l}^s), \; j = 1, \ldots, s \\ f_k^i = f^i(x_{k-m}^1, \ldots, x_{k-m}^n, \varphi_{k-l}^1, \ldots, \varphi_{k-l}^s), \;\; i = 1, \ldots, q \\ \qquad\qquad l \geqslant m \geqslant 0; \; l \geqslant 1 \end{array}\right\}, \tag{28}$$

Особенно часто применяются схемы, у которых задержка в цепях обратной связи в точности равна одному периоду подачи информации; работа таких схем описывается уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_k^j = \varphi^j(x_{k-m}^1, \ldots, x_{k-m}^n, \varphi_{k-1}^1, \ldots, \varphi_{k-1}^s), \; j = 1, \ldots, s \\ f_k^i = f^i(x_{k-m}^1, \ldots, x_{k-m}^n, \varphi_{k-1}^1, \ldots, \varphi_{k-1}^s), \; i = 1, \ldots, q \\ \qquad\qquad m = 0, 1 \end{array}\right\}. \tag{29}$$

В схемах такого рода $T_{\min} = \tau_{\max} + \sigma_0$. Следует отметить, что уравнения типа (29) описывают и такие схемы, в которых задержка в цепях обратной связи превышает один период, так как задержка на несколько периодов может быть представлена последовательностью из нескольких единичных задержек.

В заключение рассмотрим кратко такие непримитивные схемы, обратные связи которых работают в потенциальном режиме. При этом сформированный сигнал продолжается до подачи новой информации на входы схемы. Для правильной работы схемы необходимо, чтобы длительности правильных сигналов на шинах $\Phi^1, \ldots, \Phi^s$ были достаточны для формирования, а также чтобы длительности интервалов неправильной зависимости не превосходили величины ϑ. Кроме того, необходимо обеспечить поступление новой информации на шины $X^1, \ldots, X^n$ не ранее начала интервала правильной зависимости на шинах $X^{n+1}, \ldots, X^{n+s}$. Неравенства, аналогичные приводившимся, могут быть получены без труда.

Литература

1. М. А. Гаврилов. Теория релейно-контактных схем. Изд-во АН СССР, 1950.
2. В. И. Шестаков. Докл. АН СССР, 1954, т. 99, № 6.

Т. Д. Майстрова

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ В ТЕОРИИ РЕЛЕЙНЫХ СХЕМ

Математическая логика находит все большее применение в технических вопросах. За последнее время появляются различные исследования технических применений многозначных логик [1, 2]. В настоящей статье многозначная логика используется для рассмотрения эквивалентности «по проводимости» и равносильности по действию релейных схем определенного класса.

Релейные схемы, в отличие от контактных, содержат не только контакты, но и обмотки реле. Для упрощения и преобразования структурных формул контактных схем успешно используется исчисление высказываний. Однако преобразования структурных формул релейных схем не укладываются в законы двузначной логики. Это легко видеть на примере инверсирования релейных схем: если формула схемы имеет вид $a + X$ (где a обозначает контакт, а X — обмотку), то формула инверсной схемы имеет вид $\bar{a} + X$. Но $a + X \neq \bar{a} + X$ в двузначной логике. В формулах aX, $a + X$ переменная X, соответствующая обмотке реле, является переменной иной природы, чем обычные контактные переменные.

В. Н. Рогинский предложил понятие «порядка проводимости», при помощи которого ему удалось выделить определенный класс релейных схем, допускающих формальное описание, и определить операции над элементами релейного действия в пределах этого класса [4, 8]. В настоящей статье будет построено логическое исчисление, для которого порядки проводимости обмотки реле с определенными для них операциями являются моделью.

Анализ схем, содержащих реле только одного порядка проводимости, естественно проводить с помощью трехзначной логики. Вопрос о равносильности по действию таких схем рассмотрен нами с помощью трехзначной логики [3].

Если рассматривать схемы, содержащие обмотки реле различных порядков проводимости, то удобнее пользоваться многозначной логикой.

§ 1. Тождественные преобразования формул релейных схем

Рассмотрим исчисление, описанное в книге Россера и Тюркетта [4], которое мы будем называть R-логикой.

Пусть α, β,... — переменные, принимающие значения из множества $\mathfrak{C}_m = \{0, \quad n_1, \ \ldots, \ n_m, 1\}$, $0 < n_1 < \ldots < n_m < 1$. Для нас будет важно различать переменные и их матричные значения.

Над переменными определены операции: 1) «$\cdot$» — логическое умножение; 2) «$+$» — логическое сложение; 3) «—» — логическое отрицание.

Операции умножения ($\cdot$) и сложения ($+$) определяются следующим образом:

$$\alpha \cdot \beta = \min(p, q),$$
$$\alpha + \beta = \max(p, q),$$

где p — значение переменной α, а q — значение переменной β.

Следующая таблица определяет операцию отрицания (—):

α	0	n_1	...	n_m	1
$\bar{\alpha}$	1	n_m	...	n_1	0

В R-логике справедливы правило де Моргана $\alpha \cdot \bar{\beta} = \alpha + \bar{\beta}$ и следующие тождества:

I) коммутативность

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha, \qquad \alpha + \beta = \beta + \alpha;$$

II) ассоциативность

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma), \qquad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$$

III) дистрибутивность

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma, \qquad \alpha \cdot \beta + \gamma = (\alpha + \gamma) \cdot (\beta + \gamma);$$

IV) идемпотентность

$$\alpha \cdot \alpha = \alpha, \qquad \alpha + \alpha = \alpha;$$

V) законы поглощения

$$\alpha + \alpha \cdot \beta = \alpha, \qquad \alpha(\alpha + \beta) = \alpha;$$

VI) закон снятия двойного отрицания (инволюция)

$$\alpha = \bar{\bar{\alpha}}.$$

Для построения теории релейных схем с различными порядками проводимостей обмоток нам понадобится некоторая другая многозначная логика, которую назовем M-логикой.

Будем называть M-логикой такое исчисление, в котором:

I) Переменные разделяются на два вида:

а) контактные переменные a, b, ..., принимающие значения 0 и 1;

б) переменные-обмотки X, Y, ..., принимающие значения n_1, n_2, ..., n_m $(0 < n_1 < \ldots < n < 1)$.

II) Формулы образуются из букв с помощью знаков операций $\cdot$, $+$, $-$, определения которых совпадают с определениями аналогичных операций в R-логике.

Любой формуле S соответствует функция $\dot{S}$, которая определена на множестве $\{0, n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ и значения которой принадлежат тому же множеству (напомним, что контактные переменные могут принимать только значения 0,1). Операции $+$, $\cdot$ и $-$ определены так, что если S содержит только контактные переменные, то $\dot{S}$ принимает значения 0 и 1. Поэтому для контактных переменных можно использовать эквивалентности двузначной логики.

Определение 1. Формулы $S = S(a,\ b,\ \ldots,\ kX,\ \ldots,\ W)$ и $S' = S\ (a,\ b,\ \ldots, X,\ \ldots, W)$ называются *тождественно равными в М-логике*, если для любых наборов значений переменных $a,\ b,\ \ldots,\ k, X,\ \ldots, W$, допустимых в M-логике, функции $\dot{S}$ и $\dot{S}'$ принимают одинаковые значения.

Определение 2. Назовем *тождественным преобразованием* формулы S замену части A' формулы S на B', где A' и B' являются членами одной из следующих пар:

1) $P+Q,\ Q+P$;
2) $PQ,\ QP$;
3) $(P+Q)+R,\ P+(Q+R)$;
4) $(PQ)\,R,\ P\,(QR)$;
5) $(P+Q)\,R,\ PR+QR$;
6) $PQ+R,\ (P+R)(Q+R)$;
7) $PP,\ P$;
8) $P+P,\ P$;
9) $\overline{\overline{P}},\ P$;
10) $\overline{P+Q},\ \overline{P}\cdot\overline{Q}$;
11) $\overline{PQ},\ \overline{P}+\overline{Q}$;
12) $P+QP,\ P$;
13) $P\,(Q+P),\ P$.

Определение 3. Формулы S и S' назовем *эквивалентными*, если формула S' получена из S с помощью цепочки тождественных преобразований 1—13.

Можно доказать, что эквивалентным формулам S и S' соответствуют функции $\dot{S}$ и $\dot{S}'$, равные для любых наборов значений переменных, допустимых в R-логике. Но наборы значений переменных в M-логике составляют часть наборов значений переменных в R-логике, поэтому эквивалентные формулы являются тождественно равными.

При помощи тождественных преобразования 9, 10 и 11 каждую формулу M-логики можно привести к такому виду, чтобы отрицание стояло только над буквами (но не над формулой).

Формулу, содержащую отрицания только над буквами, будем рассматривать как структурную формулу схемы, поставив в соответствие контактным переменным контакты, а переменным-обмоткам — обмотки реле. Операции · поставим в соответствие последовательное соединение элементов схемы, а операции + поставим в соответствие параллельное соединение.

Значения 0 и 1, принимаемые контактными переменными, будем интерпретировать как проводимости контактов в разомкнутом и, соответственно, замкнутом состояниях. Значения n_1, n_2, ..., n_m переменных-обмоток будем интерпретировать как порядки проводимости обмоток реле. При этом будем считать, что порядок проводимости каждой обмотки реле фиксирован. Тогда значение функции $\dot{S}$, соответствующее формуле S, будем называть порядком проводимости схемы, для которой S является структурной формулой.

Мы скажем, что схемы имеют равные порядки проводимости, если их структурные формулы тождественно равны.

Будем говорить, что обмотки, соответствующие X и $\overline{X}$, так же как схема и инверсная ей схема со структурными формулами S и $\overline{S}$, имеют противоположные порядки проводимости (когда мы рассматриваем $\overline{S}$ как структурную формулу схемы, то предполагается, что в S произведены преобразования 9, 10 и 11).

Можно указать схемы, которые удовлетворяют всем условиям нашей интерпретации [4,8]. M-логика может быть применена к схемам параллельно-последовательного соединения с обмотками различных порядков проводимости без противодействующих обмоток. Кроме того, должны выполняться следующие условия: проводимость цепи последовательного соединения элементов равна наименьшему из порядков проводимости элементов цепи, проводимость цепи параллельного соединения элементов равна наибольшему из порядков проводимости элементов цепи.

Применяя к формулам M-логики тождественные преобразования 1 — 13, получим формулы, эквивалентные преобразуемым, а следовательно, и тождественно равные.

Применяя преобразования 1—13, можно привести любую формулу к некоторой дизъюнктивной или конъюнктивной нормальной форме.

С помощью преобразований 1—11 и используя эквивалентности $a + \bar a = 1$ и $a \cdot \bar a = 0$, можно привести формулу к совершенной конъюнктивной или дизъюнктивной нормальной форме относительно контактных переменных, получив при этом формулу, тождественно равную преобразуемой.

Пример. Схемы со структурными формулами:

$$(\overline{ab} + \bar d\bar b)\,X + [d\,(\bar a + \bar b) + dab]\,Y + bZ \tag{1}$$

и

$$abd\,(Y + Z) + \bar abd\,(Y + Z) + a\bar bdY + abd\bar Z + \bar a\bar bd\,(X + Y) + a\bar b\bar dX + \bar ab\bar dZ + \bar a\bar b\bar dX \tag{2}$$

имеют равные порядки проводимости, так как формула (2) является результатом приведения формулы (1) к совершенной нормальной форме относительно контактных переменных.

Рассмотренный здесь способ применения многозначной логики к теории релейных схем позволяет использовать аппарат многозначной логики для рассмотрения вопросов об эквивалентности формул релейных схем, вопросов преобразования, упрощения структурных формул, получения формул инверсных схем и других вопросов теории некоторого класса релейных схем.

§ 2. Равносильность релейных схем по действию

Далее будут установлены равносильности схем относительно действия исполнительного элемента при тождественных преобразованиях структурных формул для схемы с обмотками реле различного порядка проводимости.

Для схем, содержащих обмотки реле, определяется понятие *равносильности схем по их действию*. Релейно-контактные схемы называются *равносильными по действию*, если одинаковое воздействие на воспринимающие элементы (срабатывание или несрабатывание воспринимающих элементов) вызывает одно и то же действие исполнительных элементов [6].

Для строгого определения равносильности схем по действию введем функцию «действия», которая будет характеризовать срабатывание и несрабатывание данного исполнительного элемента X в схеме, в зависимости от структуры схемы, состояния контактов и порядков проводимости обмоток, входящих в схему.

Обозначим функцию действия через $d_S^x(a, b, \ldots, k, X, Y, \ldots, \ldots, W)$, где S — структурная формула схемы, x — исполнительный элемент, действие которого рассматривается, a, b, ..., k — контактные переменные, $X, Y, \ldots, W$ — переменные обмотки, входящие в формулу S.

Прежде всего предполагаем, что буква X встречается в формуле только один раз. В тех случаях, когда X встречается в формуле несколько раз, нужно указать, для какого именно X будет определяться функция, и все остальные вхождения буквы X отличить при помощи индекса шли штриха.

Расставим в структурной формуле схемы дополнительные скобки так, чтобы область действия каждого из операторов $+$ и $\cdot$ была однозначно определена. В теории релейно-контактных схем принято считать, что знак $\cdot$ сильнее связывает, чем знак $+$. Чтобы восстановить скобки, опущенные при записи структурной формулы, нужно выбрать последовательно сначала знаки $+$, приписав им наибольшую область действия, совместную с уже расставленными скобками и требованием, чтобы все выражение было формулой. Потом поступить аналогичным образом со знаками $\cdot$. Таким образом, область действия каждого из операторов действительно будет однозначно определенной.

В любой формуле скобки можно разбить на пары так, что каждой левой скобке ставится в соответствие правая скобка, расположенная правее ее, и такие две пары скобок не разделяют друг друга. Можно доказать, что имеется по крайней мере одна самая внутренняя пара, то есть пара скобок, между которыми нет никаких других скобок [7].

Все эти предварительные уточнения позволяют нам использовать для вычисления функции «действия» данного элемента X алгоритм [7]. Двигаясь слева, находим первую самую внутреннюю пару скобок в формуле S. Внутри этих скобок находится формула, которая или содержит X, или нет. Если формула, находящаяся внутри скобок, не содержит X, то обозначим ее через P_1 и вместо внутренних скобок подставим P_1 в формулу S_1. Снова двигаясь слева, находим первую, самую внутреннюю пару скобок. Если скобка опять не содержит X, обозначим стоящую внутри нее формулу через P_2. Если P_1 содержится внутри P_2, то при введении обозначения P_2 буква P_1

исчезает. Таким образом фиксируем каждый шаг. Двигаясь слева, находим каждый раз первую самую внутреннюю пару скобок до тех пор, пока не дойдем до скобки, содержащей X (при этом в формуле остаются только такие P_i, которые не содержат друг друга).

Допустим, что мы дошли до X на $k+1$ шаге.

Теперь над X надлежит произвести одну из следующих операций:

$$XP_{k+1},\ P_{k+1}X,\ X+P_{k+1},\ P_{k+1}+X,$$

где через P_{k+1} обозначена формула, на которую умножается X или которая прибавляется к X.

Обозначим через S_1 формулу, в которой произведена первая операция над X, т. е. имеющую один из видов: XP_{k+1}, $P_{k+1}X$, $X+P_{k+1}$, $P_{k+1}+X$. Формула S_1 может исчерпать всю формулу S.

Если S_1 не совпадает с S, то, продолжая рассматривать самую внутреннюю левую пару скобок, обнаруживаем, наконец, что или к S_1 прибавляется какое-то выражение P_{k+2}, или S_1 умножается на какое-то выражение P_{k+2}. Знаки P_{k+1}, P_{k+2} могут относиться к уже рассмотренным ранее P_i; тогда $P_i = P_{k+j}$. На 2-м шаге образуется формула S_2: имеем $S_2 = S_1P_{k+2}$, или $S_2 = P_{k+2}S_1$, или $S_2 = S_1 + P_{k+2}$, или $S_2 = P_{k+2} + S_1$.

Продолжаем действовать таким образом шаг за шагом, пока не получим $S_n \overset{\circ}{=} S$[1].

Каждому $P_{k+1}, P_{k+2}, \ldots, P_{k+n}$ поставим в соответствие значения $\dot{P}_{k+1}, \dot{P}_{k+2}, \ldots, \dot{P}_{k+n}$. Набор формул S_i зависит от того, какое X мы выбрали.

Здесь нам придется временно прервать изложение способа вычисления функций действия схемы, так как нам понадобится некоторая трехзначная L-логика. В этой трехзначной логике переменные принимают значения из множества 0_1, $^1/_2$, 1_1, а операции $\cdot_1$ и $+_1$ определены следующим образом:

$$\alpha \cdot_1 \beta = \min(p, q),\ \alpha +_1 \beta = \max(p, q),$$

где p и q — значения, которые принимают переменные.

[1] Знак графического равенства $\overset{\circ}{=}$ означает, что разные символы S_n и S служат для обозначения одной и той же формулы.

Отрицание $\sim$ определяется таблицей:

α	0_1	$^1/_2$	1_1
$\tilde{\alpha}$	1_1	$^1/_2$	0_1

Для записи эквивалентности в трехзначной логике будем употреблять знак $\equiv$.

Рассмотрим функцию «сравнения», с помощью которой осуществляется сравнение значений $P(a, b, \ldots, k, X, Y, \ldots, W)$ на данном наборе $(a^0, b^0, \ldots, k^0, X^0, Y^0, \ldots, W^0)$ со значением переменной-обмотки X. Функция сравнения является вспомогательной при определении функции «действия».

Обозначим функцию сравнения через $C_{X,P}(a, b, \ldots, k, X, Y, \ldots, W)$, где P — формула, содержащая переменные $a, b, \ldots, k, X, Y, \ldots, W$, а X — одна из ее переменных-обмоток (X может не входить в формулу P). Значения формулы $C_{X,P}(a, k, X, \ldots, W)$ принадлежат множеству $0_1, {}^1/_2, 1_1$ и определяются следующим образом:

Определение 4.

При наборе значений переменных $a^0, b^0, \ldots, k^0, X^0, Y^0, \ldots, W^0$

$$C_{X,P}(a^0, b^0, \ldots, k^0, X^0, Y^0, \ldots, W^0) \equiv$$
$$\equiv \begin{cases} 1_1, \text{ если } \dot{P}^0 \overset{\circ}{=} \dot{P}(a^0, b^0, \ldots, X^0, \ldots, W^0) > \dot{X} \\ {}^1/_2, \text{ если } \dot{P}^0 \overset{\circ}{=} \dot{P}(a^0, b^0, \ldots, X^0, \ldots, W^0) = \dot{X}. \\ 0_1, \text{ если } \dot{P}^0 \overset{\circ}{=} \dot{P}(a^0, b^0, \ldots, X^0, \ldots, W^0) < X^2 \end{cases}$$

Для краткости будем писать далее $C_X\dot{P}$ вместо $C_{X,P}(a, b, \ldots, k, X, \ldots, W)$.

Легко проверить, что функция $C_X \cdot \dot{P}$ обладает следующими свойствами:

1) $C_X(\dot{P} + \dot{Q}) \equiv C_X\dot{P} +_1 C_X\dot{Q}$,
$C_X(\dot{P}\dot{Q}) \equiv C_X\dot{P} \cdot_1 C_X\dot{Q}$;

[2] Знаком $\overset{\circ}{=}$ мы здесь выражаем, что P^0 есть сокращенная запись для выражения, стоящего справа.

2) $C_X\dot{P} \equiv \widetilde{C}_{\overline{X}}\dot{\overline{P}}$ (действительно, если $C_X\dot{P} \equiv 1_1$, то $C_{\overline{X}}\dot{\overline{P}} \equiv 0_1$, и, наоборот, если $C_X\dot{P} \equiv 0_1$, то $C_{\overline{X}}\dot{\overline{P}} \equiv 1_1$);

3) $C_X(\dot{X}_1, \ldots, \dot{X}_n) \equiv C_X\dot{X}_i$, где $\dot{X}_i = \min(\dot{X}_1, \ldots, \dot{X}_n)$;

4) $\widetilde{C}_x(\dot{P}\dot{Q}) \equiv \widetilde{C}_X\dot{P} +_1 \widetilde{C}_X\dot{Q}$,

$\widetilde{C}_X(\dot{P} + \dot{Q}) \equiv \widetilde{C}_X\dot{P} \cdot_1 \widetilde{C}_X\dot{Q}$.

(Соотношение $\widetilde{C}_X\dot{P} \equiv C_X\dot{\overline{P}}$ не выполняется.)

Теперь мы можем вернуться к функции действия относительно данного исполнительного элемента. Значение этой формулы определяется по структурной формуле схемы. Далее будет использован алгоритм построения формулы S из ее частей $X, P_1, \ldots, P_n$, соответственно которому строится ряд формул $S_1, S_2, \ldots, S_n \overset{\circ}{=} S$.

Для схемы со структурной формулой $S(a, b, \ldots, X, Y, \ldots)$ схемы *функция действия* d_S^X относительно некоторого фиксированного вхождения переменной-обмотки X определяется рекурсивно по конструкции формулы следующим образом:

$$\sigma_1 \equiv C_X\dot{X}C_X\dot{P}_1, \quad \text{если} \quad S_1 = X \cdot P_1 \quad \text{или} \quad S_1 = P_1X;$$

$$\sigma_1 \equiv C_X\dot{X}\widetilde{C}_X\dot{P}_1, \quad \text{если} \quad S_1 = X + P_1 \quad \text{или} \quad S_1 = P_1 + X;$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\sigma_k \equiv \sigma_{k-1}C_X\dot{P}_k, \quad \text{если} \quad S_k = S_{k-1}P_k \quad \text{или} \quad S_k = P_kS_{k-1};$$

$$\sigma_k \equiv \sigma_{k-1}\widetilde{C}_X\dot{P}_k, \quad \text{если} \quad S_k = S_{k-1} + P_k \quad \text{или} \quad S_k = P_k + S_{k-1}.$$

Если $S_n \overset{\circ}{=} S$, то положим $d_S^X = \sigma_n$. Тогда $d_S^X \equiv C_X\dot{X}C_X^{\tau_1}\dot{P}_1 \ldots \ldots C_X^{\tau_n}\dot{P}_n$, где $\tau_1, \ldots, \tau_n$ равны 0 или 1 в зависимости от того, берется ли отрицание $C_X\dot{P}_i$ или $C_X\dot{P}_i$ входит в функцию без отрицания.

Функция действия вычисляется относительно каждого из вхождений переменной-обмотки в формулу.

Из определения d_S^X следует, что функция принимает только два значения: 0_1 и $^1/_2$. Физический смысл этой функции состоит в том, что d_S^X принимает значение 0_1, когда реле X не срабатывает, и значение $^1/_2$, когда X срабатывает.

Чтобы выяснить зависимость между значениями функции $\dot{S}$ и функции действия d_S^X, сформулируем две теоремы.

Теорема 1. Если $S(a, b, \ldots, k, X, \ldots, W)$ — структурная формула и относительно X построен ряд формул $S_1, S_2, \ldots, S_n$, то $d_S^X = {}^1/_2$ для тех наборов значений переменных, для которых $\dot{S}_1 = \dot{S}_2 = \cdots = \dot{S}_n = \dot{X}$.

Доказательство проводится по индукции.

Пусть $S_1 = X + P_1$. Если $\dot{S}_1 = \dot{X}$, то $\dot{P}_1 \leqslant \dot{X}$. Тогда $\sigma_1 \equiv C_X \dot{X} \widetilde{C}_X \dot{P}_1 \equiv {}^1/_2$, так как $C_X \dot{P}_1$ может быть равно только 0_1 или ${}^1/_2$.

Пусть $S_1 = XP_1$. Если $\dot{S}_1 = \dot{X}$, то $\dot{P}_1 \geqslant \dot{X}$. Тогда $\sigma_1 = \widetilde{C}_X \dot{X} \widetilde{C}_X \dot{P}_1 \equiv {}^1/_2$. Предположим, что для $\dot{S}_i = \dot{X}$, $\sigma_i \equiv {}^1/_2$. Докажем, что если $\dot{S}_{i+1} = \dot{X}$, то $\sigma_{i+1} = {}^1/_2$.

Допустим, что $S_{i+1} = S_i + P_{i+1}$. Из равенства $\dot{S}_{i+1} = \dot{X}$ следует, что $\dot{P}_{i+1} \leqslant \dot{X}$. Значит, $\sigma_{i+1} \equiv \sigma_i \widetilde{C}_X \dot{P}_{i+1}$, $\widetilde{C}_X \dot{P}_{i+1} \equiv 1_1$ и $\sigma_{i+1} \equiv \sigma_i 1_1 \equiv {}^1/_2$. Если $S_{i+1} = S_i P_{i+1}$, то $\dot{X} \geqslant \dot{P}_{i+1}$.

Теорема 2. Для тех наборов значений переменных, для которых функции действия $d_S^X = {}^1/_2$, значение функции $\dot{S}$ совпадает со значением $\dot{X}$.

Так как $d_S^X \equiv {}^1/_2$, то все σ_i также равны ${}^1/_2$. Докажем, что все формулы $S_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, соответствующие X, принимают значение $\dot{X}$.

Действительно, так как $\sigma_1 \equiv {}^1/_2$, то из $S_1 = X + P_1$ вытекает $\dot{P}_1 \leqslant \dot{X}$, а из $S_1 = X \cdot P_1$ вытекает $\dot{P}_1 \geqslant \dot{X}$; и в том и другом случае $\dot{S}_1 = \dot{X}$.

Предположим, что $\dot{S}_i = \dot{X}$. Докажем, что тогда $\dot{S}_{i+1} = \dot{X}$. Из равенства $\sigma_{i+1} \equiv {}^1/_2$ вытекает, что $\dot{P}_{i+1} \leqslant \dot{X}$, когда $S_{i+1} = S_i + P_{i+1}$, и $\dot{P}_{i+1} \geqslant \dot{X}$, когда $S_{i+1} = S_i P_{i+1}$. И в том и другом случае $\dot{S}_{i+1} = \dot{X}$. Так как $S \overset{\circ}{=} S_n$, то и $\dot{S} = \dot{X}$. Теорема доказана.

Королларий [3]. Для тех значений переменных, для которых $\sigma_k \equiv {}^1/_2$, $\dot{S}_k = X$.

Определение 5. Две схемы со структурными формулами S_1 и S_2, содержащие один и тот же элемент X, называются *равносильными по действию относительно элемента* X, если $d_{S_1}^X \equiv d_{S_2}^X$. Две схемы называются *равносильными по действию*, если они составлены из одних и тех же элементов и равносильны по действию относительно каждой из обмоток.

---

[3] Королларием мы называем следствие, получающееся из доказательства теоремы.

Легко показать, что применение законов коммутативности и ассоциативности не изменяет функции действия относительно одного и того же элемента.

Теорема 3. Если формула S' получена из S в результате тождественных преобразований 1—4, то схемы со структурными формулами S и S' равносильны по действию.

Преобразования, произведенные внутри P_i, не изменяют функции действия, поэтому рассмотрим те случаи, когда преобразования производятся над частью формулы, содержащей рассматриваемое X.

Из определения d_S^X видно, что функция действия не изменяется, когда $S_k + P_{k+1}$ заменяется на $P_{k+1} + S_k$ или когда $S_k P_{k+1}$ заменяется на $P_{k+1} S_k$. Это означает законность применения коммутативных преобразований в формуле.

Далее, докажем законность ассоциативных преобразований.

Пусть из S получено S' в результате замены $(S_k + P_{k+1}) + P_{k+2}$ на $S_k + (P_{k+1} + P_{k+2})$. Тогда $\sigma_{k+2} \equiv \sigma_k \widetilde{C}_X \dot{P}_{k+1} \widetilde{C}_X \dot{P}_{k+2}$, $\sigma'_{k+1} \equiv$ $\equiv \sigma_k \widetilde{C}_X (\dot{P}_{k+1} + \dot{P}_{k+2}) \equiv \sigma_k \widetilde{C}_X \dot{P}_{k+1} \widetilde{C}_X \dot{P}_{k+2}$. Если S' получено из S заменой $(S_k P_{k+1}) P_{k+2}$ на $S_k (P_{k+1} P_{k+2})$, то $\sigma_{k+2} \equiv$ $\equiv \sigma_k C_X \dot{P}_{k+1} C_X \dot{P}_{k+2}$ и $\sigma'_{k+1} \equiv \sigma_k C_X (\dot{P}_{k+1} \dot{P}_{k+2}) \equiv \sigma_k C_X \dot{P}_{k+1} C_X \dot{P}_{k+2}$.

Итак, и в том и в другом случае $\sigma_{k+2} \equiv \sigma'_{k+1}$, откуда следует, что функция действия d_S^X не изменяется, если в формуле S произведены преобразования 3, 4. Из того, что преобразования 3,4 не изменяют функции действия, следует однозначность построения функции действия по структурной формуле схемы.

Легко показать, что формула действия не изменяется, если в формуле S произвести преобразования 7 и 8.

Определение 6. Схемы, выраженные формулами S и $\overline{S}$, назовем *одновременно действующими* относительно элемента X_i из S и $\overline{X}_i$ из $\overline{S}$, если $d_S^X \equiv d_{\overline{S}}^{\overline{X}}$.

Теорема 4. Схема и инверсная ей, со структурными формулами S и $\overline{S}$, соответственно, являются одновременно действующими относительно каждой из переменных X_i из S и $\overline{X}_i$ из $\overline{S}$.

Для доказательства приведем индукцию по шагам образования формул S и $\overline{S}$.

Если $S_1 = XP_1$, то $\overline{S}_1 = \overline{X} + \overline{P}_1$ и, следовательно, $\sigma_1 \equiv C_X\dot{X}C_X\dot{P}_1$, $\bar{\sigma}_1 \equiv C_{\overline{X}}\dot{\overline{X}}\widetilde{C}_{\overline{X}}\dot{\overline{P}}_1$.

Если $S_1 = X + P_1$, то $\overline{S}_1 = \overline{X}\overline{P}_1$ и $\sigma_1 \equiv C_X\dot{X}\widetilde{C}_X\dot{P}_1$, $\bar{\sigma}_1 \equiv C_{\overline{X}}\dot{\overline{X}}C_{\overline{X}}\dot{\overline{P}}_1$.

Так как на основании свойства 2 функции сравнения имеем $\widetilde{C}_X\dot{P}_1 \equiv C_{\overline{X}}\dot{\overline{P}}$, а по определению $C_X\dot{X} \equiv C_{\overline{X}}\overline{X} \equiv {}^1/_2$, то $\sigma_1 \equiv \bar{\sigma}_1$.

Докажем, что $\sigma_{k+1} \equiv \bar{\sigma}_{k+1}$, если $\sigma_k \equiv \bar{\sigma}_k$. Рассмотрим два случая:

1) Если $S_{k+1} = S_k + P_{k+1}$, то $\overline{S}_{k+1} = \overline{S}_k\overline{P}_{k+1}$. В этом случае $\sigma_{k+1} \equiv \sigma_k\widetilde{C}_X\dot{P}_{k+1}$, $\bar{\sigma}_{k+1} \equiv \bar{\sigma}_k C_{\overline{X}}\dot{\overline{P}}_{k+1}$; следовательно, $\sigma_{k+1} \equiv \bar{\sigma}_{k+1}$.

2) Если $S_{k+1} = S_kP_{k+1}$, то $\overline{S}_{k+1} = \overline{S}_k + \overline{P}_{k+1}$. Тогда $\sigma_{k+1} \equiv \bar{\sigma}_k C_X\dot{P}_{k+1}$ и $\bar{\sigma}_{k+1} \equiv \sigma_k\widetilde{C}_{\overline{X}}\dot{\overline{P}}_{k+1}$ следовательно, $\sigma_{k+1} \equiv \bar{\sigma}_{k+1}$ Итак, $\sigma_k \equiv \bar{\sigma}_k$ для любого k, откуда вытекает равенство функций d_S^X и $d_{\overline{S}}^{\overline{X}}$.

Совершенно очевидно доказательство следующей теоремы.

Теорема 5. Двойное инверсирование структурной формулы не изменяет функций действия схемы.

Когда рассматриваются схемы с реле одного порядка проводимости, то функция действия d_S^X не изменяется, если произвести в формуле S частичное инверсирование, которое состоит в том, что при инверсировании всей формулы остается без изменения часть S_i или в формуле инверсируется только часть S_i (здесь S_i — формула из ряда, составленного для X) [3, 4, 8, 9].

Когда схемы содержат реле различных порядков проводимости, то частичное инверсирование формулы изменяет значение функции действия. Например, пусть в формуле $S = aX + bY$ произведены частичные инверсирования. Инверсируя $S_1 = aX$, получим $S' = \bar{a} + \overline{X} + bY$.

Оставляя без изменения S_1 при инверсировании всей формулы, получим $S'' = aX(\bar{b} + \overline{Y})$. Тогда функции действия $d_S^{X''}$, $d_{S'}^{\overline{X}}$, $d_{S''}^{X}$ равны:

$$d_S^X \equiv C_X\dot{X}C_X\dot{a}\widetilde{C}_X(\dot{b}\dot{Y}),$$

$$d_{S'}^{\overline{X}} \equiv C_{\overline{X}}\dot{\overline{X}}C_{\overline{X}}\dot{a}\widetilde{C}_{\overline{X}}(\dot{b}\dot{Y}),$$

$$d_{S''}^{X} \equiv C_X\dot{X}C_X\dot{a}C_X(\dot{\bar{b}} + \dot{\overline{Y}}).$$

Для значений $\dot{a} = 1$, $\dot{b} = 1$, $\dot{X} = n_1$, $Y = n_2$ получим:

$$d_S^X \equiv {}^1/_2 \cdot {}_1 1_1 \cdot {}_1 \widetilde{1} \equiv 0_1,$$

$$d_{S'}^{\overline{X}} \equiv {}^1/_2 \cdot {}_1 1_1 \cdot {}_1 \widetilde{0}_1 \equiv {}^1/_2,$$

$$d_{S''}^X \equiv {}^1/_2 \cdot {}_1 1_1 \cdot {}_1 1_1 \equiv {}^1/_2.$$

Итак, $d_S^X \not\equiv d_{S'}^{\overline{X}}$, $d_{S''}^X \not\equiv d_S^X$.

Определение функции действия дает возможность определить понятие равносильности схем по действию и обосновать возможность применения ассоциативных и коммутативных преобразований в формуле без нарушения равносильности схем, а также рассмотреть схемы относительно действия исполнительного элемента при их инверсировании.

§ 3. Равносильность релейных схем по действию и дистрибутивные преобразования

Остается рассмотреть, что происходит с функциями действия, когда в формуле раскрываются скобки, т. е. применяются законы дистрибутивности.

В преобразованиях 5 и 6 будем различать два случая: 5а, 6а — R не содержит переменных-обмоток, 5в, 6в — R содержит переменные-обмотки.

Прежде всего рассмотрим замену типа 5а, т. е. $(P + Q) R$, на $PR + QR$, где R не содержит переменных-обмоток.

Теорема 6. Если формула S' получена из S в результате многократного применения преобразования типа 5а, то схемы, соответствующие формулам S и S', равносильны по действию.

Пусть все раскрытия скобок произведены в части формулы, которую рассмотрим как S_{k+1} для X_i, т. е. $S_{k+1} = (S_{k-1} + P_k) P_{k+1}$. Применив преобразование 5а, получим

$$S'_{k+1} = S_{k-1}P_{k+1} + P_k P_{k+1}.$$

Вычислим σ_{k+1} и σ'_{k+1}, соответствующие S_{k+1} и S'_{k+1}:

$$\sigma_{k+1} \equiv \sigma_{k-1}\widetilde{C}_X \dot{P}_k C_X \dot{P}_{k+1},$$

$$\sigma'_{k+1} \equiv \sigma_{k-1} C_X \dot{P}_{k+1} \widetilde{C}_X (\dot{P}_k \dot{P}_{k+1}) \equiv \sigma_{k-1} C_X \dot{P}_{k+1} (\widetilde{C}_X \dot{P}_{k-1} + \widetilde{C}_X \dot{P}_k) \equiv$$

$$\equiv \sigma_{k-1}\widetilde{C}_X \dot{P}_{k+1} C_X \dot{P}_{k+1} + \sigma_{k-1}\widetilde{C}_X \dot{P}_k C_X \dot{P}_{k+1} \equiv \sigma_{k-1}\widetilde{C}_X \dot{P}_k C_{\dot{X}} \dot{P}_{k+1}.$$

Из равенства $\sigma_{k+1} \equiv \sigma'_{k+1}$, получаем, что $d_S^X \equiv d_{S'}^X$.

Если производить дальнейшие преобразования в $S_{k-1}P_{k+1}$, то они не влияют на значение функций действия относительно переменных-обмоток, содержащихся в $P_{k+1}P_k$ и, наоборот, преобразования в $P_{k+1}P_k$ не влияют на значение функций действия относительно переменных-обмоток, находящихся в $S_{k-1}\ P_{k+1}$.

Пусть $S_{k-1}P_{k+1}$ может быть рассмотрено как выражение вида $(P+Q)R$ (R не содержит переменных-обмоток). Раскрыв скобки, получим из S'_{k+1} выражение S''_{k+1}, из S''_{k+1} получим S'''_{k+1} и т. д., пока не получим S^i_{k+1}, в которой раскрыты все скобки.

Равенство $\sigma_{k+1} \equiv \sigma^i_{k+1}$ может быть доказано с помощью индукции по числу раз раскрытия скобок. Откуда следует, что $d^X_S = d^{X_i}_S$.

Из этой теоремы вытекают два следствия:

1) Если формула S содержит одно вхождение одной переменной-обмотки, то эта формула может быть приведена к виду $S' = fX + \varphi$, причем схемы, соответствующие формулам S и S', являются равносильными по действию.

2) Если формула S содержит i обмоток и может быть приведена к виду $S' = \sum\limits_{j=1}^{i} f_j X_j + \varphi$ (где φ не содержит переменных-обмоток) с помощью преобразований вида 5а, то схемы, соответствующие формулам S и S', равносильны по действию.

Чтобы рассмотреть общий случай преобразования формул, которые происходят в результате замены $(P+Q)R$ на $PR+ +QR$, где P, Q и R могут содержать переменные-обмотки, необходимо доказать ряд лемм и теорем.

Лемма 1. Если построен ряд $S_1, \ldots, S_n$ для X из S, то при любом k имеет место равенство $\sigma_k \widetilde{C}_X \dot{S}_k \equiv \sigma_k$,

Доказательство. Действительно, для тех наборов переменных формулы S, для которых $\sigma_k \equiv 0_1$, $\sigma_k \widetilde{C}_X S_k \equiv 0_1$. Для тех наборов переменных, для которых $\sigma_k \not\equiv 0_1$, т. е. $\sigma_k \equiv {}^1/_2$, по следствию из теоремы 2 $\dot{S}_k = \dot{X}$ и $C_X \dot{S}_k \equiv {}^1/_2$; следовательно, $\sigma_k \widetilde{C}_X \dot{S}_k \equiv {}^1/_2$.

Если $\sigma_k \widetilde{C}_X S_k \equiv 0_1$, то легко показать, что σ_k не может быть отличным от 0_1, а если $\sigma_k \widetilde{C}_X \dot{S}_k = {}^1/_2$, то также $\sigma_k = {}^1/_2$.

Итак, $\sigma_k\widetilde{C}_X\dot{S}_k \equiv 0_1$ для тех и только тех наборов переменных, для которых $\sigma_k \equiv 0_1$; $\sigma_k\widetilde{C}_X\dot{S}_k \equiv {}^1/_2$ и $\sigma_k \equiv {}^1/_2$ для одних и тех же наборов переменных. Следовательно, $\sigma_k\widetilde{C}_X\dot{S}_k \equiv \sigma_k$.

Теорема 7. Если $S = (P + Q) R$ и $S' = PR + QR$, то для X, содержащегося в R, $d_S^X = d_{S'}^{X'} + {}_1d_{S''}^{X''}$. ($X'$ и X'' — вхождения X в формулы PR и QR, соответственно.)

Если X содержится в R, то существует такое k, что $R \equiv S_k$, т. е. $(P + Q) R = S_{k+1} = S_k (P + Q)$.

Тогда $S'_{k+1} = S_kP + S_kQ$.

Вычислим σ_{k+1} и $\sigma_{k+2}^{X'}$, $\sigma_{k+2}^{X''}$:

$$\sigma_{k+1} \equiv \sigma_kC_X(\dot{P} + \dot{Q}),$$
$$\sigma_{k+2}^{X'} \equiv \sigma_kC_X\dot{P}\,\widetilde{C}_X\,(\dot{S}_k\dot{Q}) = \sigma_kC_X\dot{P}\,(\widetilde{C}_X\dot{S} + {}_1\widetilde{C}_X\dot{Q}).$$

По лемме 1 и закону поглощения получим:

$$\sigma_{k+2} \equiv \sigma_kC_X\dot{P},$$
$$\sigma_{k+2}^{X''} \equiv \sigma_kC_X\dot{Q}\widetilde{C}_X\,(\dot{S}_k\dot{P}) \equiv \sigma_kC_X\dot{Q}\,(\widetilde{C}_X\dot{S}_k + {}_1\widetilde{C}_kP).$$

По лемме 1 и закону поглощения получим $\sigma_{k+2}^{X''} \equiv \sigma_kC_X\dot{Q}$. Следовательно, $d_S^X \equiv d_{S'}^{X'} + {}_1d_{S'}^{X''}$.

Применяя теоремы 5 и 6 к случаю приведения формулы с одной переменной обмоткой к дизъюнктивной нормальной формуле, легко доказать, что если формула S содержит одну переменную-обмотку, а в соответствующей ей дизъюнктивной нормальной форме S' имеется i переменных-обмоток, то $d_S^X = \sum_j d_{S'}^{X_j}$.

Теорема 8. Если в формуле S происходит замена $(P + Q) R$ на $PR + QR$, причем R содержит переменные-обмотки, то для переменной-обмотки X, входящей в $P + Q$, функция действия остается без изменения, если R не содержит переменной-обмотки, равной по проводимости $\dot{X}$.

Пусть X содержится в P. Тогда существует такое k, что $P = S_{k-1}$, $Q = P_k$ и $R = P_{k+1}$, т. е. $S_{k+1} = (S_{k-1} + P_k) P_{k+1}$.

Применив преобразование 5, получим $S'_{k+1} = S_{k-1}P_{k+1} + P_kP_{k+1}$.

Вычислим соответствующие σ_{k+1} и σ'_{k+1};

$$\sigma_{k+1} \equiv \sigma_{k-1}\widetilde{C}_X\dot{P}C_X\dot{P}_{k+1},$$

$$\sigma'_{k+1} \equiv \sigma_{k-1}C_X\,\dot{P}_{k+1}\widetilde{C}_X\,(\dot{P}_k\dot{P}_{k+1}) \equiv \sigma_{k-1}C_X\dot{P}_{k+1}\,(\widetilde{C}_X\dot{P}_{k+1}\,\widetilde{C}_X\dot{P}_{k+1} \equiv$$
$$\equiv \sigma_{k-1}C_X\dot{P}_{k+1}\widetilde{C}_X\dot{P}_k +_1 \sigma_{k-1}C_X\dot{P}_{k+1}\widetilde{C}_X\dot{P}_{k+1}.$$

Так как R не содержит переменной-обмотки, равной по проводимости X, то $\dot{P}_{k+1} \neq \dot{X}$, $C_X\dot{P}_{k+1}\widetilde{C}_X\dot{P}_{k+1} \equiv 0_1$ и $\sigma'_{k+1} \equiv \equiv \sigma_{k-1}C_X\dot{P}_{k+1}\widetilde{C}_X\dot{P}_k \equiv \sigma_{k+1}$. Отсюда следует, что $d_S^X \equiv d_{S'}^X$.

Пусть формула приведена к дизъюнктивной нормальной форме. Представим ее в виде $\Sigma f_iY_i + \varphi$ (φ не содержит переменных-обмоток) и будем считать, что значение $\dot{Y}_i$ меньше всех значений переменных-обмоток, входящих в f_i.

Рассмотрим леммы, которые потребуются для доказательства последующей теоремы.

Лемма 2. Если $R = \Sigma f_iY_i + fZ + \varphi$ и $\dot{Y}_i \neq \dot{Z}$, то $C_Z\dot{R}\,\widetilde{C}_Z\dot{R} \equiv \equiv C_Z\dot{f}\dot{Z}\widetilde{C}_Z\,(\Sigma\dot{f}_i\dot{Y}_i + \dot{\varphi})$.

Доказательство. $C_Z\,(\Sigma\dot{f}_i\dot{Y}_i + \dot{f}\dot{Z} + \dot{\varphi})\,\widetilde{C}_Z\,(\Sigma\dot{f}_i\dot{Y}_i + \dot{f}\dot{Z} + + \dot{\varphi}) \equiv [C_Z\,(\Sigma\dot{f}_i\dot{Y}_i) +_1 C_Z\dot{f}\dot{Z} +_1 C_Z\dot{\varphi}]\,\widetilde{C}_Z\,(\Sigma\dot{f}_i\dot{Y}_i)\,\widetilde{C}_Z\dot{f}\dot{Z}\widetilde{C}_Z\dot{\varphi}$. Но $C_Z \times \times (\Sigma\dot{f}_i\dot{Y}_i)\,\widetilde{C}_Z\,(\Sigma\dot{f}_i\dot{Y}_i) \equiv 0_1$, $C_Z\dot{f}\widetilde{C}_Z\dot{\varphi} \equiv 0_1$, поэтому $C_Z\dot{R}\cdot\widetilde{C}_Z\dot{R} \equiv \equiv C_Z\dot{f}\dot{Z}\widetilde{C}_Z\,(\Sigma\dot{f}_i\dot{Y}_i)\,(\widetilde{C}_Z\dot{f} +_1 \widetilde{C}_Z\dot{Z})\,\widetilde{C}_Z\dot{\varphi}$. Так как $C_Z\dot{f}\dot{Z}\widetilde{C}_Z\dot{f} \equiv 0_1$ и $C_{\dot{Z}}\,\dot{f}\dot{Z}\widetilde{C}_Z Z \equiv C_Z\dot{f}\dot{Z}$ (по свойству 5 функции сравнения), то $C_Z\dot{R}\widetilde{C}_Z\dot{R} \equiv C_Z\dot{f}\dot{Z}\widetilde{C}_Z\ \ (\Sigma\dot{f}_i\dot{Y}_i + \dot{\varphi})$.

Лемма 3. Если $R = \Sigma f_iY_i + fZ + \varphi$ и $\dot{Y}_i \neq \dot{Z}$, то $C_Z\,(\dot{f}\dot{Z}) \times \times \widetilde{C}_Z\,(\Sigma\dot{f}_i\dot{Y}_i + \dot{\varphi})\,\widetilde{C}_Z R \equiv C_Z\dot{f}\dot{Z}\,(\Sigma\dot{f}_i\dot{Y}_i + \dot{\varphi})$.

Доказательство. $C_Z\dot{f}\dot{Z}\widetilde{C}_Z\,(\Sigma\dot{f}_i\dot{Y}_i + \dot{\varphi})\,\widetilde{C}_Z R \equiv C_Z\dot{f}\dot{Z}\widetilde{C}_Z \times \times (\Sigma f_iY_i)\,\widetilde{C}_Z\dot{\varphi}\widetilde{C}_Z\,(\Sigma\dot{f}_i\dot{Y}_i)\,\widetilde{C}_Z\dot{f}\dot{Z}\widetilde{C}_Z\dot{\varphi} \equiv C_Z\,(\Sigma\dot{f}_i\dot{Y}_i)\,C_Z\dot{f}\dot{Z}\,(\widetilde{C}_Z\dot{f} + \widetilde{C}_Z Z) \times \times \widetilde{C}_Z\varphi \equiv C_Z f Z\widetilde{C}_Z\,(\Sigma f_iY_i + \varphi)$.

Лемма 4. Если для некоторой переменной-обмотки Z из формулы S составлен ряд $S_1, \ldots, S_n$, то для любого $K\sigma_{k+1} \times \times C_Z S_k \equiv C_Z S_k$.

Доказательство. Когда $\sigma_k \equiv {}^1/_2$, то $C_Z\dot{S}_k = {}^1/_2$ (по теореме 2). Когда $\sigma_k \equiv 0_1$, то $C_Z\dot{S}_k$ может принимать значения 0_1, 1_1, ${}^1/_2$.

Следовательно, $\sigma_k^{\neg} +_1 C_Z\dot{S}_k \equiv C_Z\dot{S}_k$.

Теорема 9. Если из формулы S получается формула S', когда в S происходит раскрытие скобок в результате замены $(P+Q)R$ на $PR+QR$, причем $R=\Sigma f_i Y_i+\varphi$ (φ не содержит переменных-обмоток) и в скобках содержится переменная-обмотка X, для которой

$$\dot{X}=\dot{Y}_l,\ \text{то}\ d_S^X +_1 d_S^{Y_l} = d_{S'}^X +{}_1 d_{S'}^{Y_l'} +{}_1 d_{S'}^{Y_l''}.$$

Доказательство. Запишем R в виде $\sum\limits_{i\neq l} f_i Y_i + f_l Y_l + \varphi$, где $\dot{Y}_l=\dot{X}$. Тогда $S_{k+1}=(S_{k-1}+P_k)(\sum\limits_{i\neq l} f_i Y_i + f_l Y_l + \varphi)$ и $S'_{k+1}= = S_{k-1}\left(\sum\limits_{i\neq l} f_i Y_i + f_l Y_l' + \varphi\right) + P_k\left(\sum\limits_{i\neq l} f_i Y_i + f_l Y_l'' + \varphi\right)$. Относительно переменной-обмотки X вычислим σ_{k+1}^X соответственно S_{k+1} и σ'^X_{k+1} соответственно S'_{k+1}:

$$\sigma_{k+1}^X \equiv \sigma_{k-1}\widetilde{C}_X \dot{P}_k C_X\left(\sum_{i\neq l} \dot{f}_i \dot{Y}_i + \dot{f}\dot{Z} + \dot{\varphi}\right),$$

$$\sigma'^X_{k+1} \equiv \sigma_{k-1} C_X\left(\sum_{i\neq l} \dot{f}_i\dot{Y}_i + \dot{f}_l\dot{Y}_l + \dot{\varphi}\right)\widetilde{C}_Z \dot{P}_k\left(\sum_{i\neq l} \dot{f}_i\dot{Y}_i + \dot{f}_l\dot{Y}_l + \varphi\right) \equiv$$

$$\equiv \sigma_{k-1} C_X\left(\sum_{i\neq l} \dot{f}_i\dot{Y}_i + \dot{f}_l\dot{Y}_l + \dot{\varphi}\right)\widetilde{C}_X \dot{P}_{k+1}$$

$$+_1 \sigma_{k-1} C_X\left(\sum_{i\neq l} \dot{f}_i\dot{Z}_i + \dot{f}_l\dot{Y}_l + \dot{\varphi}\right)\widetilde{C}_X\left(\sum_{i\neq l} \dot{f}_i\dot{Y}_i + \dot{f}_l\dot{Y}_l + \dot{\varphi}\right).$$

Сделав преобразования по лемме 2, получим

$$\sigma'^X_{k+1} \equiv \sigma_{k-1} C_X\left(\sum_{i\neq l} \dot{f}_i\dot{Y}_i + \dot{f}_l\dot{Y}_l + \dot{\varphi}\right)\widetilde{C}_X \dot{P}_{k+1}$$

$$+_1 \sigma_{k-1} C_X \dot{f}_l\dot{Y}_l \widetilde{C}_X\left(\sum_{i\neq l} \dot{f}_i\dot{Y}_i + \dot{\varphi}\right).$$

Относительно переменной-обмотки Y_l вычислим σ^{Y_l} по S_{k+1} и $\sigma^{Y_l'}$, $\sigma^{Y_l'}$ по S'_{k+1}:

$$\sigma_4^{Y_l} \equiv C_{Y_l} \dot{f}_l \dot{Y}_l \widetilde{C}_{Y_l}\left(\sum_{i\neq l} \dot{f}_i\dot{Y}_i + \dot{\varphi}\right) C_{Y_l}\ (\dot{S}_{k-1} + \dot{P}_k),$$

$$\sigma_5^{Y_l'} \equiv C_{Y_l} \dot{f}_i \dot{Y}_i \widetilde{C}_{Y_l}\left(\sum_{i\neq l} \dot{f}_i\dot{Y}_i + \dot{\varphi}\right) C_{Y_l} S_{k-1} \widetilde{C}_{Y_l} \dot{P}_k\left(\sum_{i\neq l} f_i Y_i + f_l Y_l + \varphi\right) \equiv$$

$$\equiv C_{Y_l}\dot{f}_l\dot{Y}_l\widetilde{C}_{Y_l}\Big(\sum_{i\neq l}\dot{f}_i\dot{Y}_i+\dot{\varphi}\Big)C_{Y_l}\dot{S}_{k-1}\widetilde{C}_{Y_l}\dot{P}_{k}+_1$$

$$+_1 C_{Y_l}\dot{f}_l\dot{Y}_l\widetilde{C}_{Y_l}(\Sigma\dot{f}_i\dot{Y}_i+\dot{\varphi})C_{Y_l}\dot{S}_{k-1}\widetilde{C}_{Y_l}\Big(\sum_{i\neq l}\dot{f}_i\dot{Y}_i+\dot{f}_l\dot{Y}_i+\dot{\varphi}\Big).$$

Сделав упрощения по лемме 3, получим:

$$\sigma_5^{Y_l'}\equiv C_{Y_l}\dot{f}_l\dot{Y}_l\widetilde{C}_{Y_l}\Big(\sum_{i\neq l}\dot{f}_i\dot{Y}_i+\dot{\varphi}\Big)C_{Y_l}\dot{S}_{k-1}\widetilde{C}_{Y_l}\dot{P}_{k}+_1$$

$$+_1 C_{Y_l}\dot{f}_l\dot{Y}_l\widetilde{C}_{Y_l}\Big(\sum_{i\neq l}\dot{f}_i\dot{Y}_i+\dot{\varphi}\Big)C_{Y_l}\dot{S}_{k-1}\equiv$$

$$\equiv C_{Y_l}\dot{f}_l\dot{Y}_l\widetilde{C}_{Y_l}\Big(\sum_{i\neq l}\dot{f}_i\dot{Y}_i+\dot{\varphi}\Big)C_{Y_l}\dot{S}_{k-1};$$

$$\sigma_5^{Y_l''}\equiv C_{Y_l}\dot{f}_l\dot{Y}_l\widetilde{C}_{Y_l}\Big(\sum_{i\neq l}\dot{f}_i\dot{Y}_i+\dot{\varphi}\Big)C_{Y_l}\dot{P}_k\widetilde{C}_{Y_l}\dot{S}_{k-1}\Big(\sum_{i\neq l}\dot{f}_i\dot{Y}_i+\dot{f}_l\dot{Y}_l+\dot{\varphi}\Big)\equiv$$

$$\equiv C_{Y_l}\dot{f}_l\dot{Y}_l C_{Y_l}\dot{P}_k\widetilde{C}_{Y_l}\Big(\sum_{i\neq l}\dot{f}_i\dot{Y}_i+\dot{\varphi}\Big)\equiv$$

$$\equiv C_{Y_l}\dot{f}_l\dot{Y}_l\widetilde{C}_{Y_l}\Big(\sum_{i\neq l}\dot{f}_i\dot{Y}_i+\dot{\varphi}\Big)\cdot C_{Y_l}\dot{P}_k.$$

Рассмотрим сумму $\sigma'^{X}_{k+1}+\sigma_5^{Y_l'}+\sigma_5^{Y_l''}$:

$$\sigma'^{X}_{k+1}+{}_1\sigma_5^{Y_l'}+{}_1\sigma_5^{Y_l''}\equiv\sigma_{k-1}C_X\Big(\sum_{i\neq l}\dot{f}_i\dot{Y}_i+\dot{f}_l\dot{Y}_l+\dot{\varphi}\Big)\widetilde{C}_X\dot{P}_{k}+_1$$

$$+_1\sigma_{k-1}C_X\dot{f}_l\dot{Y}_l\widetilde{C}_X\Big(\sum_{i\neq l}\dot{f}_i\dot{Y}_i+\dot{\varphi}\Big)+_1 C_{Y_l}\dot{f}_l\dot{Y}_l\widetilde{C}_{Y_l}\times$$

$$\times\Big(\sum_{i\neq l}\dot{f}_i\dot{Y}_i+\dot{\varphi}\Big)C_{Y_l}\dot{S}_{k-1}+_1 C_{Y_l}\dot{f}_l\dot{Y}_l\widetilde{C}_{Y_l}\Big(\sum_{i\neq l}\dot{f}_i Y_i+\dot{\varphi}\Big)C_{Y_l}\dot{P}_k.$$

Так как $\dot{X}=\dot{Y}_l=\dot{Y}_l'=\dot{Y}_l''$, то можно сделать упрощения по лемме 4. Тогда $\sigma'^{X}_{k+1}+_1\sigma^{Y_l'}+_1\sigma^{Y_l''}\equiv\sigma_{k-1}C_X(\Sigma\dot{f}_i\dot{Y}_i+\dot{f}_l\dot{Y}_l+\dot{\varphi})\times$ $\times\widetilde{C}_X\dot{P}_k+_1 C_{Y_l}\dot{f}_l\dot{Y}_l\widetilde{C}_{Y_l}\Big(\sum_{i\neq l}\dot{f}_i\dot{Y}_i+\dot{\varphi}\Big)[C_{Y_l}\dot{S}_{k-1}+_1 C_{Y_l}\dot{P}_k]$ и

$$\sigma'^{X}_{k+1}+_1\sigma_5^{Y_l'}+_1\sigma_5^{Y_l''}\equiv\sigma^{X}_{k+1}+_1\sigma_4^{Y_l}.$$

Откуда следует, что $d_S^X+_1 d_S^{Y_i}\equiv d_{S'}^X+d_{S'}^{Y_l'}+d_{S'}^{Y_l''}$.

На основании теорем 5—8 легко доказать следующую теорему.

Теорема 10. Если формула S приведена к дизъюнктивной нормальной форме S', то сумма функций действия, взятых относительно переменных-обмоток, содержащихся в S, равна сумме функций действия, взятых относительно переменных-обмоток, содержащихся в S'.

Введем порядок раскрытия скобок. Будем считать, что каждый раз раскрывается такая самая левая внутренняя скобка, которая умножается или на произведение, или тоже на внутреннюю скобку. В соответствии с теоремами 5—8, каждое такое раскрытие скобок заменяет сумму функций действия относительно переменных-обмоток, содержащихся в скобках до преобразования, на сумму функций действия относительно переменных-обмоток, получаемых после преобразования.

Индукцией по числу раскрытия скобок легко доказать утверждение теоремы.

В случае приведения формулы к конъюнктивной нормальной форме получаются совершенно аналогичные результаты, как и в случаях приведения к дизъюнктивной нормальной форме.

Аналогия следует из того, что функции действия для формул S и $\overline{S}$ относительного элементов X и $\overline{X}$ равны, Кроме того, каждому преобразованию типа 5 в S соответствует преобразование типа 6 в $\overline{S}$ и полученные в результате преобразований формулы S' и $\overline{S}'$ также получаются одна из другой в результате инверсирования формулы.

Итак, рассматривая возможность раскрытия скобок, необходимо подчеркнуть, что применение дистрибутивности законов в общем случае не сохраняет равносильности релейных схем относительно действия каждой из переменных-обмоток. Когда в формуле применяются законы дистрибутивности, то остается без изменения сумма функций действия каждой из переменных-обмоток, содержащихся в формуле.

Литература

1. В. И. Шестаков. Представление характеристических функций предложений посредством выражений, реализуемых релейно-контактными схемами. Изв. АН СССР, серия матем., 1946, т. 10, № 6.

2. Гр. К. Моисил. Применение трехзначных логик к теории автоматических механизмов. Статьи в «Comunicările Acad. R. P. R.», 1956—1959 (на румынском языке).
3. Т. Л. Майстрова. Равносильность релейных схем по действию. Проблемы передачи информации, вып. 4, 1959.
4. В. Н. Рогинский. Равносильные преобразования релейных схем класса П. Докл. АН СССР, 1957, т. 113, № 2.
5. J. B. Rosser, A. R. Turquette. Many-Valued Logics. Amsterdam, 1952.
6. Терминология по структурному анализу релейно-контактных схем. КТТ АН СССР, Изд-во АН СССР, 1953.
7. С. К. Клини. Введение в метаматематику. М., ИЛ, 1957.
8. В. Н. Рогинский. Равносильные преобразования релейных схем. Сб. научных работ по проводной связи. Изд-во АН СССР, 1957, вып. 6.
9. А. Н. Юрасов. Некоторые аналитические методы составления и преобразования релейно-контактных схем. Автореферат канд. диссертации. ВЗПИ, 1956.

Г. Н. Поваров

СОБЫТИЙНЫЙ И СУЖДЕНЧЕСКИЙ АСПЕКТЫ ЛОГИКИ В СВЯЗИ С ЛОГИЧЕСКИМИ ЗАДАЧАМИ ТЕХНИКИ

1. Современная логика находит широкие и многообразные применения в математике, естествознании, технике, гуманитарных науках и других областях. Эти применения демонстрируют связь логики с практикой, способность логики служить делу научно-технического прогресса, ее полезность для духовного и материального производства. В свою очередь, практическое использование логики углубляет наше понимание ее результатов, ставит новые логические проблемы и способствует прогрессу логики как науки. Поэтому учет и анализ опыта, накопленного при различных применениях логики, имеют большое практическое и теоретическое значение.

В настоящей статье обсуждаются некоторые моменты, связанные с наличием двух параллельных методов применения логики — событийного и сужденческого. Поводом для такого обсуждения послужило рассмотрение особенностей применения логики в технических науках, в частности в теории релейных схем; однако эти моменты допускают рассмотрение и в более широком плане.

2. Всякое суждение, всякое высказывание выражает некоторый факт, или, иначе говоря, некоторое событие. С логической точки зрения событие, или факт, можно определить как любое явление, о котором имеет смысл утверждать, что оно

происходит (наступает, имеет место) или не происходит (не наступает, не имеет места) — в настоящем, прошедшем или будущем (см. [1], гл. I, § 1). Событие — это то, что делает суждение истинным или ложным: истинное суждение соответствует событию (факту), которое имеет место, а ложное суждение — событию (факту), которое не имеет места.

Например, суждение «$1 + 1 = 2$» выражает событие (факт) в арифметике, суждение «$1 + 1 = 1$» — событие в булевой алгебре, суждение «Булева алгебра названа по имени Джорджа Буля» — терминологическое событие, суждение «Буль издал свой труд по алгебре логики в 1854 г.» — историческое событие; все эти суждения истинны, ибо они соответствуют событиям, которые действительно имеют место (происходят или произошли).

События, имеющие место в реальном мире, мы называем *базисными событиями*. В противоположность этому события, состоящие в том, что те или иные суждения истинны или ложны, мы называем *метасобытиями*. Суждение о базисном событии будет называться *базисным суждением*, суждение о метасобытии — *метасуждением*. Например, суждение «$0 + 0 = 0$» есть базисное суждение, а суждение «Утверждение, что $0 + 0 = 0$, истинно» или «Мы доказали, что $0 + 0 = 0$» есть метасуждение.

Нетрудно видеть, что каждому базисному событию x соответствует свое метасобытие — истинность суждения о наступлении x. Ясно также, что каждое базисное суждение p равносильно метасуждению об истинности этого суждения p.

3. Суждение называется *простым*, если в нем нет частей, являющихся суждениями, и называется *сложным*, если оно содержит части, являющиеся суждениями. Аналогично событие называется *простым*, если оно не содержит частей, являющихся событиями, и называется *сложным*, если оно содержит части, являющиеся событиями. Например, суждение «$0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$» есть сложное суждение, частями которого служат суждения «$0 + 0 = 0$» и «$0 + 1 = 1$»; оно выражает сложное событие, состоящее, соответственно, из двух простых событий.

Исчисление высказываний позволяет записывать и преобразовывать сложные высказывания (сложные суждения) как функции простых высказываний (простых суждений). Изменив интерпретацию этого исчисления (и не меняя его процедуры), мы можем записывать и преобразовывать сложные события как функции простых событий. Тем самым исчисление высказываний переходит в изоморфное ему исчисление событий. Как существует булевы и небулевы алгебры высказываний, так возможны булевы и небулевы алгебры событий. Вместо предикатов мы можем ввести событийные (или фактные) функции.

Таким образом, весь аппарат математической логики легко переводится с сужденческого языка на равноструктурный этому последнему событийный язык.

4. Сужденческий метод применения логики состоит в том, что мы используем законы и предложен я логики для отыскания связи между суждениями, например для доказательства или опровержения какого-либо суждения с помощью тех или иных посылок. Законы и предложения логики, например законы исчисления высказываний, действуют при этом в качестве сложных метасуждений. Так, применяют логику в математике и юриспруденции, где проблема доказательства является центральной. Этот метод весьма привычен для нас, особенно по отношению к дедуктивной (и традуктивной) логике, но он не является единственным. Кроме него, существует еще второй, событийный метод.

Событийный метод применения логики состоит в том, что законы и предложения логики используются для отыскания (установления) связи непосредственно между событиями, фигурируя в качестве базисных суждений о сложных событиях. Разумеется, и в случае сужденческого метода дело сводится в конечном счете к отысканию связи между событиями[1], но последнее достигается там лишь в опосредствованном виде. Событийный метод менее привычен, чем сужденческий, но отнюдь не является новшеством. В индуктивной логике

[1] «Согласно материалистическому пониманию, законы логики — это не априорные принципы, не зависящие от материального мира, не нормы, устанавливаемые людьми по соглашению, а отражение в голове человека определенных отношений между предметами и явлениями материального мира» ([2], стр. 16).

событийная точка зрения всегда господствовала. Именно с событийной точки зрения обычно пишутся главы о методах индукции (методах установления причинной связи) в учебниках логики (см., например, [2]).

Различие между событийным и сужденческим методом, по существу известное давно, но обычно оставляемое в тени, заслуживает большего внимания, поскольку понимание особенностей каждого из них облегчает ориентировку в логических задачах практики и тем самым способствует их быстрейшему и простейшему решению.

5. Событийный метод применения логики весьма удобен в технике, и в частности в теории релейных схем. Релейную схему (см. [3]) можно представлять себе как устройство, преобразующее различные комбинации «входных» событий (состояний управляющих реле) в определенные комбинации «выходных» событий (состояний управляемых реле). Иными словами, каждое выходное событие релейной схемы равносильно определенному сложному событию, состоящему из входных событий. Пользуясь, скажем, булевой алгеброй, мы можем представить выходные события в виде булевых функций входных событий. Эти функции и будут логическими условиями работы релейной схемы. С помощью законов булевой алгебры мы можем преобразовывать эти функции, чтобы выразить логические связи между входными и выходными событиями в форме, наиболее удобной для анализа или для синтеза схемы.

Пусть, например, требуется построить контактный двухполюсник, замыкающийся при срабатывании любых двух из трех заданных реле X, Y и Z. Каковы логические условия работы схемы и как их получить простейшим способом? Рассуждаем так: «Пусть событие f есть замыкание синтезируемого двухполюсника, событие x — срабатывание реле X, событие y — срабатывание реле Y, событие z — срабатывание реле Z; тогда $f = f(x, y, z) = xy + xz + yz$, что и выражает искомые условия работы».

Такой подход к логическому описанию работы релейных схем представляется наиболее простым и естественным. Правда, событийный метод всегда можно заменить сужденческим, ибо вместо события всегда можно рассматривать соответствующее ему метасобытие; но такая замена нередко приводит к ненужному отяжелению рассуждений, к загромождению поля зрения лишними конструкциями. В частности, в моей статье [3] логика релейных схем рассматривалась с сужденческой точки зрения. В настоящее время я, в соответствии со сказанным выше, предпочел бы в этом случае событийную трактовку.

В литературе по теории релейных схем событийным методом пользовался Б. И. Доманский [4]. Однако большинство других авторов фактически также близки к событийной трактовке логики релейных схем, так как они предпочитают говорить не о суждениях, а о состояниях. Недостаток такой «состоянческой» трактовки в том, что здесь несколько затушевывается логическая сторона дела; чисто событийный подход яснее и проще. В этом отношении событийный подход особенно удобен для преподавания теории релейных схем и объяснения ее методов.

Сужденческая трактовка логических исчислений способствовала иногда затемнению логической природы задач о релейных схемах. Хотя большинство авторов, писавших по вопросам технических применений логики, видело логическую природу этих задач, некоторые авторы, ограничивавшие себя исключительно сужденческим подходом, склоняются к мнению, что здесь используется лишь математический аппарат логики (см., например, [5]). Событийная точка зрения дает простейшее объяснение логического существа этой проблематики и тем способствует мобилизации ресурсов логики для нужд теории релейных схем (и технических нужд вообще).

Заметим, что переход от сужденческой точки зрени к событийной не меняет данной в статье [3] характеристики логики релейных схем как традукции над конечными областями; меняется лишь интерпретация, истолкование этого положения.

6. К различию между событийным и сужденческим методом можно подойти еще и так. В каждой науке можно различить б а з и с н у ю т е о р и ю, состоящую из базисных суждений этой науки, и м е т а т е о р и ю, состоящую из метасуждений этой науки. Сужденческий метод есть метод применения логики к метатеориям, а событийный — к базисным теориям. В связи с этим нелишне напомнить, что теория математических

доказательств, опирающаяся на сужденческую точку зрения, иначе называется метаматематикой.

В целом можно думать, что сужденческий метод более удобен в математике и гуманитарных науках, а событийный — в технике и естествознании. Но, разумеется, из этого правила наверняка найдутся исключения.

Из сказанного вытекает целесообразность двоякой формулировки логики — в событийном и в сужденческом плане — и необходимость развернутой событийной интерпретации логических исчислений.

7. Заметим еще, что двоякая формулировка — событийная и сужденческая — используется также в теории вероятностей — дисциплине, которая с давних пор считалась состоящей в некотором родстве с логикой. Сужденческая точка зрения выражена здесь в работе С. Н. Бернштейна [6], событийная же является господствующей и представлена во всех современных учебниках (см., например, [1, 7]). Из аналогии с теорией вероятностей и исходил Б. И. Доманский [4].

Литература

1. В. И. Гливенко. Курс теории вероятностей. М.—Л., ГОНТИ, 1939.
2. Логика. Под ред. Д. П. Горского и П.В. Таванца. Изд-во АН СССР, 1956.
3. Г. Н. Поваров. Логика и автоматизация. В сб. «Логические исследования», Изд-во АН СССР, 1959, стр. 300—314.
4. Б. И. Доманский. Введение в автоматику и телемеханику. М.—Л., Госэнергоиздат, 1950, стр. 163—165.
5. R. McNaughton. Logical and Combinatorial Problems in Computer Design. Computers & Automation, 1957, vol. 6, № 1, p. 30—31.
6. С. Н. Бернштейн. Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей. «Сообщ. Харьк. матем. об-ва», 1917, сер. 2, т. 15, № 5/6, стр. 209—274.
7. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., Гостехиздат, 1954.

Б. М. Кедров

«ФАЗОВЫЙ СПОСОБ» В ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ

(К вопросу о пересмотре традиционной теории суждения)

СИСТЕМА ПРОСТЕЙШИХ СУЖДЕНИЙ

Введение

1. Существующий способ. Обычно принятый способ изложения и трактовки основных вопросов формальной логики учитывает последовательность логических операций, приводящих в итоге к определенному отношению логических форм и их частей (признаков, понятий, суждений). Например, говоря о соотношении двух понятий «мужчина» и «ученый», сначала берут оба эти понятия отдельно, изображая каждое из них в виде круга, а затем на одно из них, обозначенное через А, налагают другое, обозначенное через В. В итоге получают два перекрестные понятия. Можно поступить иначе и налагать понятие А на понятие В, — итог будет тем же. Другим примером может служить любая фигура силлогизма: сначала дается одна посылка, затем — вторая, после чего делается вывод. Примером того же рода является и обращение суждений, например частноутвердительного «некоторые мужчины суть ученые», дающего суждение «некоторые ученые суть мужчины». Такой логический способ, указывающий на происхождение того или иного логического отношения или логической формы, мы будем называть *генетическим*.

Названный способ очень стар: он возник вместе с формальной логикой. При всей его кажущейся простоте и наглядности он оказывается на деле далеко не таким элементарным, каким он должен был бы быть, если бы он полностью соответствовал задачам формальной логики. Исторически он как бы впитал в себя в виде последовательных наслоений различные приемы, которыми пользовалась в своем развитии формальная, в частности силлогистическая логика, начиная с Аристотеля. Многие весьма простые вещи и отношения он излишне усложняет, создавая видимость каких-то сложных проблем и задач там, где таковых нет в действительности; если же они имеются, то изложение их на деле может быть сведено к некоторым более элементарным выражениям.

Примером такого искусственного усложнения и, можно сказать, раздувания простых вещей в некое «учение» может служить традиционная трактовка силлогизма с его фигурами и модусами. Не менее искусственным и устарелым следует признать так называемое учение о понятии, основанное на объемном способе изображения отношений между понятиями в виде налагающихся друг на друга геометрических кругов. Дело по существу не меняется, если наложение кругов заменить условными символами, которые служат лишь иным обозначением для тех же налагающихся друг на друга кругов.

Все это не давало до сих пор возможности развить теорию формальной логики в том виде, который соответствовал бы характеру и уровню развития самой этой дисциплины, трактующей об элементарных правилах логического мышления, основанных на четырех так называемых законах мышления (тождества, противоречия, исключенного третьего и достаточного основания). В настоящее время настоятельно возникает задача найти иной способ изложения и трактовки формально-логических вопросов, адекватный подлинному характеру данной дисциплины. При этом следует учесть, что генетический подход вообще не является свойственным и тем более типичным для формальной логики; последняя по самой своей сущности изучает не происхождение форм мышления и самого знания, а лишь структуру, строение готовых логических форм, рассматривая отношение их внутренних элементов как чисто внешнее. Способ же, которым она пользуется, претендует не столько на анализ структуры готовой логической формы, сколько на ее происхождение, возникновение из каких-то исходных форм. Это обстоятельство и обусловливает отмеченное выше несоответствие между задачами формальной логики и способом их решения и изложения.

Между тем по самому своему существу формальная логика есть дисциплина строго аналитическая: изучая структуру форм мышления, она расчленяет их на их составные части и исследует способы соединения этих частей между собой. В соответствии с этим наиболее элементарным образованием, с точки зрения формальной логики, служит *признак*. Соединение признаков дает *понятие*; соединение понятий образует *суждение*; соединение суждений составляет *умозаключение*. Отсюда и вытекает общая структура формальной логики с ее последовательным членением на три раздела: 1) понятие, 2) суждение и 3) умозаключение. Этому подразделению мы и следуем в нашем исследовании.

2. Фазовый способ. Способ, который разработан нами, основан на полном исключении из пределов формальной логики момента генезиса изучаемых ею отношений и форм в соответствии с собственным ее характером. При этом способе готовое соотношение рассматривается с точки зрения входящих в него элементов, играющих роль как бы логического «состава» соответствующих понятий, суждений или умозаключений. При этом мы полностью отвлекаемся от того, каким путем возникло данное соотношение; мы берем его как данное, законченное, что и соответствует тому, каким образом должна поступать формальная логика. Например, упомянутое выше отношение двух понятий «мужчина» (понятие A) и «ученый» (понятие B) трактуется не как возникшее путем наложения одного из них на другое (A на B или B на A), но как уже готовое соотношение, причем не просто двух названных понятий, а трех их составных частей (или *фаз*): 1) области понятия A, где нет наложения с B, 2) области понятия B, где нет наложения с A, и 3) области взаимного наложения A и B. Эти три области, очевидно, составляют собой в данном случае три разных понятия: 1) мужчины-не ученые, 2) ученые-не мужчины (т. е. ученые-женщины) и 3) ученые-мужчины. Обозначая отличительный признак понятия A

через a и понятия В через b, можно выразить состав рассмотренного соотношения следующей формулой: $a + b + ab$. Эта формула указывает, что та область, которая образована одним понятием, например чистым понятием А (мужчины-не ученые), характеризуется лишь одним признаком (a), тогда как область перекрещивания А и В характеризуется присутствием одновременно обоих признаков a и b. Каждую такую область, состав которой характеризуется определенным, свойственным лишь ей одной, сочетанием признаков, мы называем «фазой». Соответственно, весь наш способ именуется «фазовым».

В отличие от предыдущего, генетического, наш способ можно назвать *аналитическим*, поскольку он учитывает только состав логических форм. В этом состоит его особенность. Можно провести следующую аналогию: до XIX в. различные вещества разделялись на классы в соответствии с тем, из какого царства природы они были извлечены: полученные из минерального царства (т. е. из неживой природы) именовались минеральными, или неорганическими; полученные из растительного и животного царства — органическими. Это примитивное деление порождало многочисленные недоразумения, так как генезис такого рода не давал возможности правильно с химической точки зрения классифицировать вещества. В XIX в. был установлен в соответствии с данными химического анализа другой подход, основанный на учете состава веществ, независимо от их происхождения в природе: вещества, содержащие углерод, были отнесены к органическим, не содержащие его — к неорганическим. Это позволило не только упростить всю задачу в соответствии с характером самого объекта, но и устранить неизбежную путаницу, возникавшую при наивном генетическом подходе ранних химиков к данному вопросу. Лишь впоследствии, уже на основе разработки аналитического подхода, химики смогли правильно развить взгляды на генетические отношения веществ. Нечто подобное имеет место и в сфере логики: первоначально сложившийся генетический способ требуется заменить или во всяком случае дополнить аналитическим способом для того, чтобы дать возможность правильно переходить от формальной логики к логике диалектической, основной и важнейшей задачей которой как раз и является изучение форм мышления в их генезисе, в их «движении» и развитии, в их единстве с их содержанием.

3. Задача исследования. Исходя из сказанного выше, постараемся определить цель данного исследования. Для этого прежде всего приведем краткую историческую справку. «Фазовый способ» имеет некоторую историю. Одним из первых начал его разрабатывать *П. С. Порецкий* (гор. Городня, Черниговской губ.) в 1901 г. Он поставил задачу «показать, что система двух посылок: «*a* содержится в *b*» и «*b* содержится в *c*» допускает не одно только заключение «*a* содержится в *c*» [1]. Следовательно, разработка данного способа Порецким была вызвана стремлением пересмотреть традиционное учение о силлогизме.

В 1944—1945 гг. автор данной статьи разработал фазовый способ и применил его к решению задачи о числе отношений множеств (соответственно, понятий). Результат был доложен на семинаре по математической логике на математическом факультете Московского университета в 1945 г. и опубликован в кратком виде *Э. Кольманом* (Прага, Чехословакия) в 1948 г. [2, стр. 147]. В настоящее время этот доклад помещен полностью в сборнике статей по логике, который выпущен в свет в 1959 г. Институтом философии АН СССР [9, стр. 69].

В 1949 г. такой же в основном способ был разработан *Жаном Пиаже* (Женева — Париж) применительно к задаче исчисления положений [3, стр. 224].

Таким образом, до сих пор разработка указанного способа была связана с решением ряда частных вопросов формальной и математической логики. Настоящей статьей мы делаем попытку рассмотреть с помощью фазового способа некоторые вопросы формальной логики, касающиеся суждения, с тем, чтобы начать пересмотр общей теории суждения. В связи с этим мы рассмотрим ряд положений из важнейших разделов формальной логики, касающихся понятия и главным образом суждения; в дальнейшем это позволит нам подойти к пересмотру общей теории умозаключения. Мы не ставим перед собой задачу исчерпать все связанные с этим вопросы и дать какую-либо законченную систему для данной дисциплины; это и невозможно было бы сделать в одной статье. Мы хотим лишь показать, что имеются иные пути для постановки и решения вопросов формальной логики, кроме тех, которые применяются обычно в качестве незыблемой традиции, несмотря на их устарелость.

I. Отношение понятий как основа суждения

4. Отношения между двумя понятиями. Для всего дальнейшего нашего рассмотрения случай отношения между двумя понятиями составляет как бы некоторую исходную точку или основу. Поэтому мы начинаем наше изложение именно с него. Вместе с тем мы более подробно на этом примере можем показать различие обоих способов, допустимых в формальной логике,— генетического и аналитического. Из элементарного курса логики хорошо известно, что между двумя понятиями A и B в общем случае может существовать пять и не больше различных отношений; перечислим их в следующем порядке, который станет понятным из дальнейшего изложения: 1) полное включение B в A; 2) тождество, или равнозначность, A и B; 3) перекрещивание A и B; 4) второй случай полного включения — A в B; 5) независимость, или несовместимость, A и B. Выразим эти пять отношений с помощью обоих способов и сопоставим для сравнений их друг с другом. Генетический способ изобразит их в виде налагающихся друг на друга кругов (геометрический вариант) или же условных знаков, обозначающих это наложение (символический вариант), аналитический же способ выразит их в виде формул состава присутствующих в каждом случае фаз (см. ниже табл. 1).

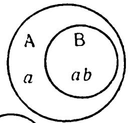
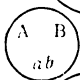
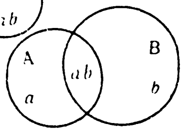
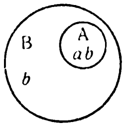
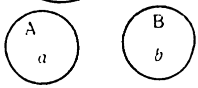
Здесь знаки $\subset$ и $\supset$ означают полное включение, AB — область пересечения (перекрещивания) между A и B, а равенство A = B — тождество обоих понятий. Таким образом, символический вариант ничем (кроме символики) не отличается от геометрического.

В дальнейшем изложении, а также во всех таблицах и схемах виды отношений между двумя понятиями A и B мы будем обозначать кратко их порядковым номером согласно их расположению в табл. 1 (в скобках или без них).

Очевидно, что при наличии трех фаз состава a, b и ab,

Таблица 1

Виды отношений между двумя понятиями

№	Виды отношений	Генетический способ		Аналитический способ
		геометрический вариант	символический вариант	
1	Отношение полного включения (1-й случай)		A ⊃ B	$ab + a$
2	Отношение тождества, или равнозначности		A = B	ab
3	Отношение перекрещивания		AB≠0	$ab + a + b$
4	Отношение полного включения (2-й случай)		A ⊂ B	$ab + b$
5	Отношение независимости, или несовместимости		AB=0	$a + b$

возможны пять, и только пять, различных сочетаний, в которых присутствовали бы оба признака a и b. Эти пять сочетаний и представлены в табл. 1. На основании простейших правил комбинаторики легко показать, что при наличии двух признаков (a и b), отвечающих двум понятиям А и В, возможны только три фазы, указанные выше, и из них можно образовать только пять отношений (систем), отвечающих всем возможным отношениям между двумя понятиями.

Поскольку в дальнейшем нас особо будут интересовать понятия общие и частные, отметим их признаки в их фазовом выражении: соотношение двух понятий в том случае будет соотношением понятия общего (А) и частного, или отдельного, (В), если его формула имеет следующий вид: $ab + a$ (№ 1 в табл. 1; см., соответственно, № 4, когда общим понятием является В, а частным — А).

Для трех понятий (A, B, C) общее число различных отношений будет равно 109, для четырех (A, B, C, D) — свыше 32000; далее это число возрастает очень быстро с увеличением числа понятий, соотносящихся между собой. Анализ отношений между понятиями дает возможность обосновать логические операции с понятиями, а также охарактеризовать так называемые основные законы формальной логики.

5. Логические операции с понятиями. Ряд логических операций с понятиями получает с помощью фазового способа общее выражение и весьма простое объяснение. Например, определение понятия через ближайший род и видовое отличие предполагает оперирование с системой полного включения (№ 1 в табл. 1), т. е. с отношением двух понятий, выраженным формулой $ab + a$, где a — признак родового понятия, b — признак видового понятия. Задача операции сводится к тому, чтобы в этой формуле раскрыть первый член (состав двойной фазы ab), показав, каким образом признак a (родовой) дополняется признаком b (видовым). Следовательно, в основе данной логической операции лежит исходное отношение понятий, обозначенное в табл. 1 как № 1.

Операции ограничения и обобщения для случая многих понятий («древо Порфирия») получают также свои аналитические выражения, основанные в конечном счете на том же исходном отношении двух понятий. Например, возьмем следующие понятия: тело (A), живой организм (B), животное (C), человек (D), мужчина (E), Иван (F). Отношения между этими шестью понятиями выразятся одной общей формулой: $abcdef + abcde + abcd + abc + ab + a$. Эта формула показывает, что понятие F включено целиком в понятие E, E — в D, D — в C и т. д. Двигаясь справа налево согласно этой формуле, т. е. добавляя к исходному признаку a один за другим признаки b, c, d и т. д., мы последовательно переходим от a (наиболее общее понятие A) ко все более частным понятиям, выраженным последовательно первыми членами формул: $ab + a$; $abc + ab + a$; $abcd + abc + ab + a$ и т. д. Тем самым мы совершаем операцию *ограничения*. Двигаясь же в противоположном направлении (слева направо), мы последовательно отбрасываем один за другим признаки f, e, d и т. д. в исходной формуле

$abcdef + abcde + abcd + abc + ab + a$, т. е. последовательно переходим от наиболее частного понятия, выраженного первым членом этой формулы, ко все более общим, вплоть до a. Тем самым мы совершаем операцию *обобщения*. Схематически соотношение обеих противоположных операций можно выразить следующим образом:

$$ab + a \underset{\text{ограничение}}{\overset{\text{обобщение}}{\rightleftarrows}} a.$$

Другая известная логическая операция *деления* основана на том исходном отношении двух понятий, которое в табл. 1 значится под № 2, и вместе с тем на том, которое значится в ней под № 5. В самом деле: правила деления предполагают, во-первых, что сумма членов деления должна равняться объему делимого понятия, а это значит, что по своему объему делимое понятие должно быть равнозначным сумме членов его деления, т. е. должно соответствовать отношению № 2 для двух понятий; во-вторых, члены деления должны исключать друг друга, а это значит,что между собой они должны находиться в отношении независимости, которое выражено № 5 в табл. 1. Например, деление понятия «человек» (А) по половому признаку на мужчин (В) и женщин (С) в фазовом выражении будет представлено так: $ab + ac$. Это и будет формула деления понятий. Для трех членов деления имеем $ab + ac + ad$, где a — признак делимого понятия А.

Составив формулу для некоторого заданного случая, мы можем на основании ее рассмотрения решить, можно ли в данных условиях осуществить операцию деления или же нет, равно как и другие логические операции (например, определение через ближайший род и видовое отличие). Иначе говоря, задача сводится к тому, чтобы на основании заданных условий составить фазовую формулу и подвергнуть ее затем анализу в соответствии с интересующей нас операцией. Если, например, мы получили, исходя из заданных или известных нам условий, формулу $ab + ac + a$, то эта формула позволяет нам произвести операцию определения через род и вид понятий В и С, но не дает возможности произвести операцию деления, поскольку остались неизвестными остальные виды, входящие в данный род (А). Операцию деления понятия при данных условиях можно произвести лишь в том случае, если третьим членом деления (D) будет такой, признаком которого (d) служит отрицательный признак: d = не-b и d = не-c. Если понятие D будет, например, пересекаться с каким-либо из трех других понятий (А, В или С), то операция деления будет невозможной.

6. Законы формальной логики в связи с отношением понятий. Рассмотрим теперь, как выступят в фазовом выражении известные законы формальной логики, учет которых служит общей необходимой предпосылкой при проведении любых логических операций, в том числе при анализе суждений. Как известно, формальная логика принимает четыре свои закона за основные:

1) *закон абстрактного тождества* гласит, что всякая мысль (А) о предмете равна самой себе (А = А), т. е. остается постоянной в течение всего данного рассуждения. В применении к анализу логических форм и операций, осуществляемому с помощью фазового способа, этот закон может быть охарактеризован с различных сторон, в его различном познавательном значении. Во-первых, этот закон выступает как признание неизменности признаков a, b, c и т. д., их сохраняемости в ходе данного рассуждения. Положение $a = a$ означает, что признак a остается одним и тем же, следовательно, равным самому себе в начале и в конце рассуждения. Во-вторых, в какой бы связи и в каком бы соединении с другими признаками ни встречался данный признак, он всюду один и тот же; признак a равен самому себе и в свободном состоянии (в виде фазы a) и в соединении с признаком b (или любыми иными признаками); например, в формулах № 1, 3 и 4 (см. табл. 1) признак a одинаков в фазе a и в фазе ab. В-третьих, закон тождества предполагает тождественность разных понятий (А и В), совпадающих между собой вследствие того, что оба они относятся к одному и тому же предмету. Например, если А обозначает понятие «человек», а В — «разумное существо», то положение А есть А (человек есть человек) имеет также и тот смысл, что человек есть разумное существо. Формула № 2 в табл. 2 (ab) отражает эту сторону рассматриваемого закона. В-четвертых, этот закон

выступает как признание, что целое равно (тождественно) сумме своих частей. Если А обозначает понятие «человек», а В — «мужчина», то, очевидно, что $A = a + ab$, где фаза ab означает половину людей, которую составляют мужчины, а фаза a — другую их половину (см. формулу № 1 в табл. 1). Поскольку рассмотренный закон учитывает (в абстрактном виде) лишь момент тождества и неизменности каждого признака (его постоянное равенство самому себе) и отвлекается от его переменности, от включенного в него момента различия, постольку этот закон именуется нами законом абстрактного тождества.

2) *Закон непротиворечивости* является как бы обратной стороной закона абстрактного тождества; он утверждает, что поскольку мысль (А) о предмете остается равной самой себе, то она не может быть в одно и то же время в одном и том же отношении не быть равной самой себе, т. е. быть равной своему отрицанию (не-А). Возьмем какое-нибудь понятие А (например, «мужчина»), с признаком a. Если мы ограничимся ближайшим более широким (родовым) понятием «человек», то весь круг предметов, охватываемых этим понятием, можно разделить на две области: фазу a (где $a \neq 0$) и остальную область понятия «человек», остающуюся неопределенной, т. е. нераскрытой и не охарактеризованной с точки зрения каких-либо присутствующих признаков, в отношении которой известно лишь то, что здесь признак a отсутствует (т. е. где $a = 0$). Обе фазы будут находиться в отношении противоречия как А ($a \neq 0$) и не-А ($a = 0$). Мы можем раскрыть область не-А, установив, что все не-А (не-мужчины) являются женщинами (пусть В обозначает понятие «женщина»); следовательно, в данном случае В будет равно не-А. Тогда оба понятия — А и В — окажутся противоположными. Как и в случае закона абстрактного тождества, закон непротиворечивости может быть охарактеризован с различных сторон, в его связи с анализом отношений между понятиями при помощи фазового способа. Во-первых, он означает признание того, что признак a не может быть одновременно в одном и том же месте и присутствовать ($a \neq 0$) и отсутствовать, т. е. быть не-a ($a = 0$). То же относится к любому другому признаку (например, b) или соединению признаков (например,

ab). Присутствие признака ($b \neq 0$) или наличие определенного соединения признаков ($ab \neq 0$) не может одновременно, в одной и той же связи совмещаться с отсутствием этого же самого признака ($b = 0$) или соединения признаков ($ab = 0$). Это означает, что закон непротиворечивости требует резких границ как между признаками, так и их соединениями, т. е. фазами. Одна фаза совершенно четко обособляется от всех остальных, отличных от нее по своему логическому составу. Во-вторых, закон непротиворечивости означает, что А (признак a) не может быть одновременно не-А (А не есть не-А). Например, в случае понятия «мужчина» (А) и «не-мужчина» (не-А), т. е. «женщина» (В), мы получаем отношение независимости $a + b$ (см. формулу № 5 в табл. 1), когда b означает не-a. Это отношение и есть отношение противоречивости двух понятий, при условии, что b охватывает всю область не-a. Таким образом, если в законе абстрактного тождества подчеркиваются те моменты отношения понятий, которые отражены главным образом в формулах № 1—4, то в законе непротиворечивости отражен тот момент (независимость), который представлен формулой № 5 (см. табл. 1). В-третьих, разбираемый закон можно представить так: целое разделено на две противоречивые части, одна из которых характеризуется присутствием признака b ($b \neq 0$), вторая — его отсутствием ($b = 0$). Закон утверждает, что предмет (или понятие) А не может одновременно обладать и не обладать данным признаком, т. е. не может одновременно находиться и в области, где $b \neq 0$, и в противоречащей ей области, где $b = 0$ (А не может быть одновременно и В и не-В).

3) *Закон исключенного третьего* гласит, что А может быть либо В, либо не-В (третьего не дано). В фазовом выражении это означает, что признак a может либо присутствовать ($a \neq 0$), либо отсутствовать ($a = 0$) и что между этими двумя положениями нет и не может быть ничего среднего, промежуточного. То же касается других признаков (может быть либо $b \neq 0$, либо $b = 0$), равно как и их соединений (может быть либо $ab \neq 0$, либо $ab = 0$).

4) *Закон достаточного основания* применительно к поставленной в данном исследовании задаче можно сформулировать так: анализ логического состава (понятий) и их отношений,

выраженный в соответствующих фазовых формулах (см. табл. 1), служит достаточным основанием для построения суждений, т. е. более сложных с точки зрения формальной логики форм мышления, представляющих собой соединение понятий. Например, формула № 1 ($ab + a$) служит достаточным основанием для того, чтобы заключить, что признак a частично соединен с признаком b ($ab \neq 0$), частично же находится в свободном состоянии ($a \neq 0$), тогда как признак b присутствует только в соединенном виде с a и отсутствует в свободном состоянии ($b = 0$). Эти соображения, вытекающие из данной фазовой формулы, дают возможность определить возможные суждения, которые образуются на основании отношения между понятиями, представленного формулой № 1 (см. табл. 1), выяснить характер их обращения и их взаимоотношения с другими суждениями.

Мы охарактеризовали четыре основные закона формальной логики в том ограничительном разрезе, который диктуется целью нашей работы — показать необходимость пересмотра традиционной теории суждения, подходя к этому вопросу с позиций фазового способа. Поэтому названные законы мы рассматриваем здесь также лишь в их фазовом выражении.

Сказанное в разделе I служит предпосылкой для рассмотрения более сложных вопросов теории суждения, чему посвящены дальнейшие разделы этой статьи.

II. Простейшие суждения в их обычной трактовке

7. С т р у к т у р а с у ж д е н и я. Рассмотрим некоторые суждения, которыми занимается формальная логика (атрибутивная и объемная). В простейшем случае она ограничивается классификацией суждений по качеству (утвердительные и отрицательные) и по количеству (общие и частные). Других сторон суждений мы пока затрагивать не будем. Как известно, формальная логика аналитически расчленяет готовое суждение на отдельные его структурные части (субъект S, предикат P и связку); эти структурные, или составные, части суждения она рассматривает как внешние друг к другу, комбинируя их различным образом. Возьмем одно из таких суждений: «Иван есть человек», выражаемое формулой S есть P. В фазовом способе это

суждение выразится уже известной нам формулой $ab + a$, где a есть признак понятия «человек» (А), b — признак понятия «Иван» (В). Смысл высказанного суждения состоит в том, что понятие В включается в класс А. В фазовом выражении эта мысль представлена первым членом формулы, т. е. ab. Этот член как раз и подчеркивает, что Иван (В) есть человек (А), т. е. что В полностью входит в класс А и что кроме ab нет в формуле других членов, содержащих признак b.

Возникает вопрос: чем же отличается формула $ab + a$, которая служит для обозначения двух понятий А и В, находящихся в отношении полного включения В и А, от той же формулы, когда она служит для обозначения суждения? Тем, что в первом случае в ней не подчеркнута та или другая сторона отношения, которая нас интересует в данной связи, ибо здесь рассматривается все отношение в целом, без выделения какихлибо его сторон; напротив, во втором случае из всех сторон данного отношения выделяется одна определенная сторона, причем само суждение и есть, собственно говоря, такое ее выделение. Ведь судят всегда не обо всем сразу, а о чем-либо вполне определенном. Еще Аристотель указывал, что суждение есть утверждение или отрицание чего-либо о чем-либо. Вследствие этого отношение двух понятий, которое до сих пор было одинаковым по всем направлениям (как бы «изотропным»), становится при образовании суждения ориентированным в одном определенном направлении (т. е. как бы «анизотропным»): одна его составная часть превращается теперь в то, о чем судят (субъект), другая — в то, что́ о нем судят (предикат), а само отношение понятий — в соединительную нить между субъектом и предикатом (связку). Таким образом, суждение возникает тогда, когда в отношении двух понятий обоюдосторонность отношений сменяется односторонней направленностью от одного определенного понятия к другому, следовательно, когда «изотропность» отношения сменяется его «анизотропностью».

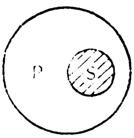
Так, в приведенном выше суждении «Иван есть человек» из всех сторон отношения между двумя понятиями «Иван» (В) и «человек» (А) выделена лишь та сторона, которая подчеркивает, что В входит в А. В фазовой формуле это обстоятельство может быть выражено таким образом, что в общей формуле

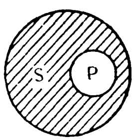
$ab + a$ будет подчеркнуто то, что составляет данное суждение. Что же его составляет в данном случае? Очевидно то, что часть предиката Р (т. е. понятия А) образована субъектом S (т. е. понятием В). Это и выражено формулой: S есть Р. В фазовом выражении эта же мысль будет представлена так, что в фазе ab, куда входит весь субъект (В), будет подчеркнут признак этого субъекта b, т. е. получится $a\underline{b}$, а вся формула примет вид $a\underline{b} + a$. Ту часть признака, которая подчеркивается в составе данной фазы (в нашем случае часть признака b в фазе $a\underline{b}$), мы будем называть *ударной*, остальные же признаки или части признака — неударными[1].

Для того чтобы показать значение только что отмеченного обстоятельства, сопоставим приведенное выше суждение «Иван есть человек» с другим суждением: «Некоторые люди суть Иваны». Очевидно, что это суждение будет иметь в своей основе то же самое отношение двух понятий «Иваны» (В) и «люди» (А), а потому общая фазовая формула будет здесь той же $ab + a$. Но в отличие от предыдущего случая здесь внимание обращено на то, что часть людей (т. е. часть А) суть Иваны (т. е. В); это значит, что ударение здесь сделано не на признаке b, как раньше, но на признаке a в составе той же фазы ab. Поэтому формула этого суждения будет следующей: $\underline{a}b + a$. Наконец, основываясь на том же исходном отношении двух понятий А и В, мы можем высказать суждение «Некоторые люди не суть Иваны». Тем самым мы переносим наше внимание на второй член в рассматриваемой фазовой формуле и подчеркиваем ту мысль, что среди А имеется часть, не связанная с В. В таком случае формулой данного суждения будет $ab + \underline{a}$.

Ударная часть фазовой формулы (например, признак b) и есть то, что в формальной логике именуется субъектом суждения и обозначается символом S; соответственно этому неудар

[1] В обычно принятой (геометрической) символике ударная часть признаков в суждении отмечается штриховкой. Например, $a\underline{b} + a$ обозначается

как 

, $ab + \underline{b}$ как 

.

ный признак (например, a) именуется предикатом суждения и обозначается символом Р.

Заметим, что если ударная часть фазовой формулы приходится на бинарную (двойную) фазу ab, то суждение будет утвердительным; например, в случае $\underline{a}b$ оно будет гласить «a есть b», а в случае $a\underline{b}$ — «b есть a». Напротив, если ударная ее часть придется на ординарную (простую) фазу a или b, то суждение будет отрицательным; например, в случае $\underline{a}$ оно будет гласить «a не есть b», а в случае $\underline{b}$ — «b не есть a».

В отношении неударных признаков нужно сделать еще следующее разъяснение.

До сих пор мы рассматривали суждения с определенными членами, полное присутствие или полное отсутствие которых предусматривалось высказанным суждением. Но формальная логика, как правило, оперирует такими суждениями, в которых известная часть членов остается неопределенной и может либо присутствовать, либо отсутствовать. Например, в суждении «Некоторые мужчины суть ученые» остается открытым вопрос о том, имеются ли ученые не-мужчины, т. е. женщины. Это суждение было справедливо и тогда, когда только мужчины могли быть и бывали учеными, но оно с точки зрения формальной логики остается справедливым и сейчас, когда среди ученых есть и женщины. В формуле суждения «Некоторые мужчины суть ученые» имеются, таким образом, ударные и неударные признаки и, кроме того, определенные и неопределенные члены. К последним относится член a (если понятие «ученый» мы обозначим через А). Такие неопределенные члены мы будет заключать в скобки. Тогда фазовая формула для рассматриваемого суждения выразится так: $a\underline{b} + b + (a)$.

Очевидно, что основой для этого последнего суждения служит отношение двух перекрещивающихся понятий, которое в табл. 1 представлено под № 3.

8. Простейшие виды суждения в их обычной (традиционной) трактовке. Простыми видами суждения мы будем называть те, в которых соединены только два понятия — S и Р и, соответственно, только два признака — a и b. Их мы рассмотрим в первую очередь. В дальнейшем мы особо рассмотрим более сложные виды суж-

дения, соединяющие в себе три или четыре понятия. Среди простых суждений особое место в формальной логике занимают, как известно, следующие четыре суждения, образованные попарным сочетанием общего или частного характера суждения, с одной стороны, утвердительного или отрицательного его характера — с другой[2]: 1) общеутвердительное (Все S суть P), обозначается буквой *A*; 2) частноутвердительное (Некоторые S суть P) обозначается буквой *I*; 3) частноотрицательное (Некоторые S не суть P), обозначается буквой *O*; 4) общеотрицательное (Ни одно S не есть P), обозначается буквой *E*. Их мы будем относить к числу простейших.

Приведенные формулы не охватывают и не выражают однозначно всех возможных случаев суждений; каждая из них, кроме третьей, представляет собой известную неопределенность и, следовательно, предполагает наличие неопределенных членов.

1) *Общеутвердительное* суждение предполагает, как известно, два разных случая, которые оба подходят под общую формулу «Все S суть P»: первый случай — полное включение S в P; соответственно B в A по формуле $a\underline{b} + a$, например, «Все мужчины суть люди»; второй случай — тождество, или равнозначность, S и P; соответственно A и B по формуле $a\underline{b}$, например, «Все мужчины суть те, у которых растут усы и борода». Это значит, что под формулу «Все S суть P» подходят два отношения двух понятий, которые в табл. 1 значатся под № 1 и 2.

2) Для частноутвердительного суждения мы имеем также по меньшей мере удвоенную основу: во-первых, отношение перекрещивания по формуле $a\underline{b} + b + (a)$, например, «Некоторые мужчины суть ученые»; во-вторых, отношение полного включения (2-й случай) *A* в *B* по формуле $a\underline{b} + b$, например, «Некоторые мужчины суть Иваны». Здесь, как видим, формула «Некоторые S суть P» охватывает собой два отношения двух понятий, которые в табл. 1 представлены под № 3 и 4.

Но возможна и более расширительная трактовка частноутвердительного суждения, когда остается открытым вопрос,

---

[2] Во избежание путаницы в символике мы будем обозначать суждения курсивными заглавными латинскими буквами (*A*, *E* и т. д.) в отличие от понятий, которые обозначаются прямыми буквами (A, B, C и т. д.).

все или только некоторые, но не все, S суть P. Обнаружив, что все наблюденные нами до сих пор S являлись P, но не зная, исчерпывают ли они все S вообще, мы поступаем более осторожно и высказываем частноутвердительное суждение. Оно звучит в этих условиях как констатация того, что *во всяком случае* некоторые S суть P. Вопрос же — все или не все S суть P — остается тогда открытым. Например, до открытия Австралии могло быть высказано суждение «все лебеди белые» (Все S суть P), так как все известные в то время лебеди были действительно белыми. Однако после открытия Австралии были обнаружены черные лебеди, а потому наше прежнее знание о цвете лебедей нужно было бы выражать в более осторожной форме как частноутвердительное (*I*), но не общеутвердительное (*A*) суждение, а именно: «Некоторые лебеди белы» (Некоторые S суть P). Если бы до открытия Австралии оно было выражено так, то при всех условиях (независимо от того, будут ли или не будут со временем найдены лебеди другого цвета) оно осталось бы в силе; будучи сформулировано в виде частноутвердительного суждения, оно предусматривало бы и тот случай, когда белые лебеди остались бы единственными представителями этого рода птиц. При такой расширительной трактовке частноутвердительного суждения его основой будут служить не только указанные выше два отношения двух понятий (№ 3 и 4), но и те два, которые служат основой для общеутвердительного суждения (т. е. № 1 и 2), следовательно, всего четыре отношения (№ 1, 2, 3 и 4). Этот случай мы будем считать наиболее общим и, соответственно, наименее определенным толкованием частноутвердительного суждения[3].

3) *Частноотрицательное* суждение имеет, как и первые два, по меньшей мере удвоенную основу: во-первых, ему соответствует случай перекрещивающихся понятий по формуле $ab + \underline{b} + (a)$, например, «Некоторые мужчины не суть ученые»; во-вторых, 2-й случай полного включения A в B по формуле

---

[3] П. В. Таванец [4, стр. 60] называет такое суждение «неопределенным частным суждением» или просто «частным суждением», в отличие от суждения, соответствующего № 4 в табл. 1, которое он называет «определенным частным суждением». В статье 2 об этом подробнее будет сказано.

$ab + \bar{b}$, например, «Некоторые мужчины не суть Иваны». Следовательно, формуле «Некоторые S не суть P» отвечают те же отношения двух понятий в табл. 1, стоящие там под № 3 и 4, как и в случае частноутвердительного суждения.

Аналогично предыдущему случаю и здесь возможна более расширительная трактовка данного вида суждения, когда остается открытым вопрос, все или только некоторые, но не все, S не суть P. Найдя, что до сих пор ни одно из наблюденных нами S не являлось P, но не зная, исчерпывают ли они собой все S вообще, мы поступаем более осторожно, когда высказываем частноотрицательное суждение. В этих условиях оно звучит как констатация того, что *во всяком случае* некоторые S не суть P. Вопрос же — все или не все S не суть P — остается тогда открытым. Например, до открытия той же Австралии могло быть высказано суждение «Ни одно млекопитающее не есть обладающее клювом» (Ни одно S не есть P), так как все известные в то время млекопитающие действительно не имели клюва. Но после открытия Австралии был найден утконос — млекопитающее с плоским, утиным клювом; в соответствии с этим наше прежнее знание о различительных признаках птиц и млекопитающих следовало бы выражать в более осторожной форме как частноотрицательное (O), но не общеотрицательное суждение (E), а именно: «Некоторые млекопитающие не суть обладающие клювом» (Некоторые S не суть P). Если бы до открытия Австралии оно было бы выражено именно так, то при всех условиях (независимо от того, будут ли или не будут со временем найдены утконосы) оно осталось бы в силе; будучи сформулировано в виде частноотрицательного суждения, оно предусматривало бы и тот случай, когда бесклювые млекопитающие остались бы единственными представителями этого класса. При такой расширительной трактовке частноотрицательного суждения его основой будут служить не только указанные выше два отношения двух понятий (№ 3 и 4), но и то, которое служит основой для общеотрицательного суждения (№ 5; см. ниже), следовательно, всего три отношения (№ 3, 4 и 5). Этот случай мы будем считать наиболее общим и, соответственно, наименее определенным толкованием частноотрицательного суждения.

4) Наконец, *общеотрицательное* суждение является един-

ственным имеющим одну, но не две основы, а потому оно однозначно выражает данную мысль, без всякой неопределенности, по формуле $a + \underline{b}$; например, «Все мужчины не суть женщины» или «Ни один мужчина не есть женщина». Формуле «Ни одно S не есть P» отвечает, таким образом, только один определенный случай в табл. 1, значащийся под № 5.

Основу рассмотренных выше четырех простейших суждений составляют все пять отношений между двумя понятиями, которые были рассмотрены нами в качестве исходных (см. табл. 1). Различные суждения образуются из этих пяти отношений путем различного подчеркивания в них ударного признака $\underline{b}$, соответствующего понятию B («мужчины»). Для формул, в которых признак $\underline{b}$ присутствует лишь в одном каком-нибудь члене (фазе), возможно лишь одно единственное ударение на этот признак (см. № 1, 2 и 5 в табл. 1); для остальных же двух формул (№ 3 и 4) имеются по две возможности различного ударения $\underline{b}$ — один раз в члене $a\underline{b}$, другой раз — в члене $\underline{b}$; следовательно, всего получается не пять, а семь различных случаев.

Таким образом составляется элементарная задача на комбинаторику, решение которой приводит к семи (и только семи) различным возможностям образования суждений (через различное ударений на интересующий нас признак $\underline{b}$) из пяти исходных отношений между двумя понятиями A и B. Рассмотренные только что виды суждения (A, I, O, E) мы будем в дальнейшем называть простейшими видами суждения в их обычной (традиционной) трактовке, или, короче, обычными суждениями [4].

9. Наиболее общие различительные признаки простейших суждений в их

[4] До сих пор мы следовали за общепринятыми положениями школьных курсов логики, заменяя лишь геометрические обозначения фазовыми. Так, у Г. И. Челпанова [5, стр. 45—47], у В. Ф. Асмуса [6, стр. 95—101] и у других авторов прямо говорится, что 1) суждение A объединяет собой два разных вида суждений (соответствующих № 1 и 2 в нашей табл. 1), 2) суждение I — тоже два разных вида (соответствующих № 3 и 4 в табл. 1), 3) суждение O — два вида (соответствующих тем же № 3 и 4, но с иной штриховкой) и 4) суждение E — одному виду (соответствующему № 5 в табл. 1); итого получаются те же семь разных видов, которые охарактеризованы нами выше при помощи фазового способа.

обычной трактовке. Анализ фазовых формул для четырех простейших суждений в их обычной, т. е. наиболее расширительной, трактовке позволяет определить отличительный признак каждого из них; для этого необходимо в табл. 1 сопоставить формулы, служащие основанием для данного суждения, со всеми остальными формулами. Например, для общеутвердительного суждения A мы имеем две формулы: $a\bar{b} + a$ (№ 1) и $a\bar{b}$ (№ 2); общим у них является наличие члена $a\bar{b}$; однако член $a\bar{b}$ не может считаться их отличительным признаком, так как он присутствует также и в двух других формулах (№ 3 и 4), которые не являются основой для общеутвердительного суждения. Поэтому его присутствие не может считаться отличительным признаком суждения вида A. Очевидно, таким признаком является отсутствие члена b, наблюдающееся у формул № 1 и 2 и не наблюдающееся у всех трех остальных формул в табл. 1.

Рассуждая аналогичным образом, мы находим, что отличительным признаком частноутвердительного суждения I будет наличие члена ab, частноотрицательного суждения O — наличие члена b и общеотрицательного суждения — отсутствие члена ab. Обозначая присутствие данного члена неравенством нулю, а его отсутствие — равенством нулю, получаем следующие данные, характеризующие различительные признаки простейших суждений.

признаком	A	является	$b = 0$	(во всяком случае нет b);
»	I	»	$ab \neq 0$	(во всяком случае есть ab);
»	O	»	$b \neq 0$	(во всяком случае есть b);
»	E	»	$ab = 0$	(нет ab).

Для того чтобы пояснить только что использованный прием определений различительных признаков суждений по их логическому составу, приведем пример из области химии, где о характере системы судят по ее химическому составу. Допустим, что дана система двух химических элементов — кислорода (O) и водорода (H); элементы могут находиться в виде их химического соединения — паров воды (H_2O), или в свободном состоянии в виде газов (O_2 и H_2), или же в виде различных физических смесей. Всего при таких условиях может получиться пять различных систем: 1) пары воды в смеси с избытком свободного кислорода ($H_2O + O_2$); 2) чистые пары воды (H_2O); 3) пары воды в смеси с избытком обоих элементов в свободном виде ($H_2O + O_2 + H_2$); 4) пары воды в смеси с избытком водорода ($H_2O + H_2$); 5) смесь газообразных кислорода и водорода при отсутствии их соединения ($O_2 + H_2$). Очевидно, эти пять химических систем полностью соответствуют пяти логическим системам, представленным в табл. 1: понятию А с его признаком a соответствует элемент О с его химическими и физическими признаками, понятию В с его признаком b — элемент Н с его химическими и физическими признаками, фазе ab — соединение H_2O, фазе a — свободный O_2, фазе b — свободный H_2.

Химический анализ позволяет определить различительные признаки у приведенных выше пяти систем по присутствию или отсутствию в их химическом составе тех или иных компонентов:

1) для первых двух систем отличительным признаком служит отсутствие свободного водорода (H_2); следовательно, здесь весь Н существует лишь в виде составной части воды;

2) для первых четырех систем — наличие паров воды (H_2O);

3) для последних трех систем — наличие свободного водорода (H_2);

4) для самой последней системы — отсутствие паров воды (H_2O).

В итоге мы получаем полную аналогию с определением путем логического анализа различительных признаков у простейших суждений по их логическому составу.

10. **Отношения между суждениями в их обычной трактовке. Логический квадрат.** Сравнительный разбор выявленных выше различительных признаков простейших суждений в их обычной трактовке позволяет составить следующие соотношения между самими суждениями, как это и делает обычно формальная логика с помощью иного рода приемов:

а) суждения A и O суть противоречащие (контрадикторные), так как отличительным признаком одного из них служит отрицание признака другого: $b = 0$ и $b \neq 0$; такими же противоречащими являются суждения I и E с их признаками $ab \neq 0$ и $ab = 0$;

b) суждения A и E формальная логика трактует как противные (контрарные), а суждения I и O — как подпротивные;

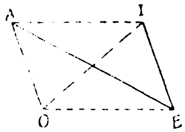
c) суждения A и I, равно как E и O, она трактует как подчиняющие и подчиненные.

На этом основании составляется известный логический квадрат, где в противоположных углах (по диагонали) располагаются противоречащие суждения, а в смежных углах (по горизонтали) — противные (вверху) и подпротивные (внизу), или (по вертикали) — подчиняющие (вверху) и подчиненные (внизу).

В фазовом выражении отношения между четырьмя простейшими суждениями A, I, O и E можно представить следующим образом:

$$A\left\{\begin{array}{l}1\\2\end{array}\right.\qquad I\left\{\begin{array}{l}1\\2\\3\\4\end{array}\right.\qquad O\left\{\begin{array}{l}3\\4\\5\end{array}\right.\qquad 5\}\,E$$

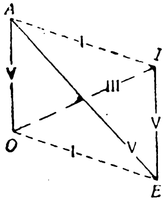
откуда прямо получается логический квадрат с небольшим его видоизменением («логический ромб»):



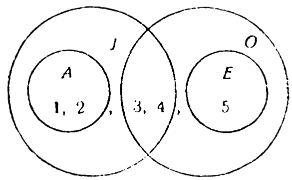
Фигурными скобками охватываются те отношения двух понятий (см. табл. 1), которые составляют основу данного суждения; жирными линиями соединены противоречащие суждения, светлой сплошной — противные, крупнопрерывистой — подпротивные, мелкопрерывистыми — подчиняющие и подчиненные. Анализ этой схемы показывает, что отношения между каждой парой суждений могут быть сведены (в объемном выражении) к тому или иному отношению между двумя понятиями[5]. Например, суждение I находится в отношении независимости (V) с суждением E, перекрещивания (III) с суждением O и полного включения с суждением A (I). Аналогичным образом выясняются отношения между остальными суждениями. В соответствии с этим логический квадрат («ромб») можно представить

[5] Для того чтобы отличить отношения между суждениями и отношения между понятиями, мы будем первые нумеровать римскими цифрами, вторые — арабскими.

с дополнительным включением в него характеристики вида объемного отношения между каждой парой суждений:



чему соответствует обычный график объемного отношения:



Противоречивость суждений предполагает их независимость (V) при условии разделения всей области отношений на a и не-a, например, A и не-A (равное O) или O и не-O (равное A) и, соответственно, I и не-I (равное E) или E и не-E (равное I). Противоположность суждений предполагает различные объемные отношения между ними: либо независимость (V), когда суждения представляют собой крайние пункты (полюсы) без переходной области (противные суждения A и E), либо пересечение (III), когда те же полюсы соединены общей промежуточной областью (подпротивные суждения I и O); подчинение означает полное включение (I), когда суждения относятся как часть и целое (подчиняющее суждение A и подчиненное I и, соответственно, E и O).

11. Обращение суждений в их обычной трактовке[6]. Логическая операция обращения простейших суждений целиком основана на тех же исходных пяти отношениях двух понятий (см. табл. 1), на которых основаны и сами суждения. По своему характеру обращение есть обнаружение отношений между суждениями. Суть операции обращения сводится к выявлению той доли определенного знания относительно второго признака (a), которое содержится в скрытом виде в данном суждении. Для этого необходимо проанализировать фазовые формулы, охватываемые данным сужде-

---

[6] Мы ограничиваемся здесь рассмотрением одной только операции обращения, как наиболее простой, и оставляем пока в стороне операции превращения и противопоставления суждений, так как они требуют введения третьего признака (c = не-a). Однако обе они так же легко проводятся с помощью фазового способа, как и операция обращения, что мы и покажем в дальнейшем.

нием, и его отличительный признак. Например, суждение A основывается на двух формулах: $(ab + a)$ и (ab); его отличительный признак состоит в отсутствии b ($b = 0$). Поскольку свободное b отсутствует, b может быть представлено только в соединении с a; это означает, что относительно a можно сказать, что во всяком случае некоторые a соединены с b (некоторые Р суть S), что соответствует обращению общеутвердительного суждения (A) в частноутвердительное (I): $A \rightsquigarrow I$, где волнистая стрелка означает знак обращения. В самом деле, поскольку при обращении суждения A устанавливается наличие при всех условиях фазы ab, то тем самым устанавливается отличительный признак I для обращенного суждения.

Рассуждая аналогичным образом, находим, что частноутвердительное суждение (I) с его отличительным признаком $ab \neq 0$ обращается в суждение того же вида (I): $I \rightsquigarrow I$. В самом деле, единственно определенное знание о признаке a сводится к знанию того, что a соединено с b.

В случае частноотрицательного суждения (O) с его отличительным признаком $b \neq 0$ отсутствует какое-либо определенное знание о признаке a, так как a может быть при этих условиях и связано с b (№ 3 и 4) и не связано с b (№ 5), оно может присутствовать в свободном виде, как фаза a (№ 3 и 5), и не присутствовать (№ 4). Поэтому обращение суждения O в его расширительной трактовке оказывается невозможным, что можно выразить так: $O \rightsquigarrow ?$

Наконец, для общеотрицательного суждения (E) с его отличительным признаком $ab = 0$ находим, что оно обращается в суждение того же вида (E): $E \rightsquigarrow E$. Действительно, здесь налицо определенное и вместе с тем полное исчерпывающее знание относительно признака a: поскольку отсутствует фаза ab, a может существовать лишь в свободном, независимом от b, виде.

Сводя воедино все сказанное выше относительно простейших суждений в их обычном, т. е. самом расширительном, толковании, можно составить следующую таблицу (см. табл. 2).

Табл. 2 является, по сути дела, развитием табл. 1 при условии применения ее данных к соотношению простейших суждений. Если табл. 1 отражает различные отношения между двумя понятиями А и В, то в табл. 2 представлены различные

Таблица 2

Суждения в их обычной трактовке и их обращение

Виды суждений	Их отличительные признаки	№	Фазовые формулы суждений	Формула обращенного суждения	№	Его отличительный признак	Схема обращения
Общеутвердительное A	$b = 0$	(1)	$ab + a$	$ab + a$	(4)	$ab \neq 0$	$A \rightsquigarrow I$
		(2)	$a\bar{b}$	$\bar{a}b$	(2)		
Частноутвердительное I	$ab \neq 0$	(1)	$ab + a$	$ab + a$	(4)	$ab \neq 0$	$I \rightsquigarrow I$
		(2)	$a\bar{b}$	$\bar{a}b$	(2)		
		(3)	$a\bar{b} + a + b$	$\bar{a}b + a + b$	(3)		
		(4)	$a\bar{b} + b$	$\bar{a}b + b$	(1)		
Частноотрицательное O	$b \neq 0$	(3)	$ab + a + \bar{b}$	$ab + \bar{a} + b$	(3)	?	$O \rightsquigarrow ?$
				$ab + \bar{a} + b$	(3)		
		(4)	$ab + \bar{b}$	$\bar{a}b + b$	(1)		
		(5)	$a + \bar{b}$	$\bar{a} + b$	(5)		
Общеотрицательное E	$ab = 0$	(5)	$a + \bar{b}$	$\bar{a} + b$	(5)	$ab = 0$	$E \rightsquigarrow E$

отношения между двумя простейшими суждениями, каждое из которых образовано двумя понятиями А и В. Число отличительных признаков у каждого суждения является в данном случае минимальным (равным единице) из числа возможных (из числа трех, как об этом будет сказано ниже).

Только что рассмотренный случай четырех суждений в их обычной трактовке был наиболее расширительным, а потому наименее определенным не только для частных, но (как увидим ниже) и для общих суждений. Его специфика состоит в том, что он рассчитан на предельно ограниченное знание об изучаемом предмете (субъекте). В соответствии с неполнотой нашего знания мы говорим: «По крайней мере некоторые S суть (или не суть) P», подразумевая, что этими «некоторыми» могут оказаться и все S. На этой основе строилась и строится до сих пор вся традиционная формальная логика.

Однако некоторые логики не могли удовлетвориться создавшимся положением; они начали вносить такие поправки и дополнения к обычной трактовке суждений, которые налагали те или иные ограничения на первоначальную, предельно широкую, трактовку суждений A, I, O и E, давая этим возможность выражать более точное и полное знание о предмете. В основном такого рода поправки и дополнения шли по двум направлениям: 1) были введены *исключающие* суждения, благодаря которым разграничивались одни от других общие и частные суждения, и 2) были введены *выделяющие* суждения, при помощи которых проводилось разграничение внутри самих общих и частных суждений. Покажем, далее, что необходимость тех и других поправок логически вытекает из фазового способа.

III. Исключающие суждения. Начало пересмотра традиционной теории суждения

12. Разграничение общих и частных суждений. Исключающие суждения. Первое ограничение, связанное с более полным и определенным знанием о предмете, находит свое выражение в появлении так называемых *исключающих* суждений[7]. Мы начинаем анализ пересмотра традиционной теории суждения именно с них не потому, что так начинался ее пересмотр исторически, а потому, что это соответствует логической стороне дела. Указанный пересмотр состоит в исключении общих суждений из числа частных суждений. Достигается это введением ограничительной оговорки «все, кроме некоторых»: все S, кроме некоторых, суть (или не суть) P, например: «Все мужчины, кроме некоторых, суть (или не суть) взрослые». Здесь под «некоторыми», подлежащими исключению, в случае утвердительного суждения подразумеваются дети (мальчики), а в случае отрицательного суждения — взрослые мужчины. Следовательно, в этом случае термин «некоторые» употребляется в смысле «не все»: некоторые, но не все, S суть (или не суть) P. Высказывая исключающее суждение утвердительное (некоторые, но не все, S суть P) или отрицательное (некоторые, но не все, S не суть P), мы предполагаем знание того, что остальные S в случае *I* — не суть P, а в случае *O* — суть P. Тем самым уточняются отличительные признаки обоих частных суждений.

[7] К. С. Бакрадзе [7, стр. 208] именует их общеисключающими, поскольку в их словесной формулировке встречается слово «все». О том, насколько это правомерно, мы скажем в статье 2.

Заметим, что мы рассматриваем исключающее суждение лишь постольку, поскольку его можно представить как простое, образованное двумя признаками (a и b). Только в этом случае оно может быть сведено к суждению: все S, кроме некоторых, суть (или не суть) P, или, соответственно, некоторые, но не все, S суть (или не суть) P. Однако такая трактовка исключающих суждений является слишком расширительной; принимая ее, мы лишаем эти суждения присущей им определенности и превращаем их в суждения более неопределенные, чем они были. Так, исключающее суждение «Все мужчины, кроме мальчиков, суть взрослые» может быть преобразовано в суждение «Только мальчики суть не взрослые мужчины», тогда как исключающее суждение «Все мужчины, кроме некоторых, суть взрослые» или «Некоторые мужчины суть взрослые» неспособно к такому преобразованию.

Для полного показа характера исключающих суждений с позиций фазового способа необходимо ввести третий признак (c = не-a), как и в случае операции превращения суждений (см. выше). В связи с тем, что в данной статье мы ограничиваемся простыми суждениями, образованными лишь двумя признаками, всестороннее рассмотрение исключающих суждений мы оставляем для дальнейшего исследования более сложных суждений. Точно так же оставляем пока в стороне и те исключающие суждения, в которых фигурируют признаки единичных предметов (например, «Все дети, кроме Вани, здоровы»).

Условимся обозначать исключающие суждения в принятом нами расширительном смысле следующим образом: утвердительное — через I с черточкой сверху ($\bar{I}$), отрицательное — через O с такой же черточкой ($\bar{O}$).

13. Исключающее утвердительное суждение. Для утвердительного суждения $\bar{I}$, кроме прежнего признака I ($ab \neq 0$), появляется дополнительный признак ($b \neq 0$); благодаря этому из числа частноутвердительных суждений I исключается общеутвердительное суждение A с его отличительным признаком ($b = 0$). Такое уточнение совершается тогда, когда возросшее знание установило, что, кроме ab, существует еще свободное b, не соединенное с a, например, что, кроме белых лебедей, существуют еще черные лебеди. Суждение

«Некоторые S суть P» (Некоторые лебеди белы) имеет различный смысл и различное познавательное значение в зависимости от того, как оно было высказано — *до* или *после* открытия Австралии. В первом случае оно означало констатацию того, что мы узнали о существовании *по крайней мере* белых лебедей, но еще не знали, существуют ли лебеди другого цвета. Следовательно, частноутвердительная форма суждения скрывала собой тогда наше первоначальное незнание или недостаточное (частичное) знание того, какого цвета могут быть лебеди.

Во втором случае (после открытия Австралии) та же самая форма частноутвердительного суждения «Некоторые S суть P» (Некоторые лебеди белы) содержала в себе, кроме первоначальной констатации белого цвета лебедей, уже более полное знание того, что существуют лебеди другого, а именно черного цвета. Следовательно, в первом, расширительном смысле мы знали только $a\underline{b}$, а во втором — узнали, что, кроме $a\underline{b}$, существуют еще b.

Рассмотренный пример показывает, что во всех случаях, когда нет уверенности, что индукция была действительно полной, вместо суждения A следует применять суждение I, заменяя категорическое «все S» более осторожным «некоторые S». Когда же мы твердо убеждены, что индукция является действительно полной, то это убеждение дает нам возможность строго разграничивать два выражения: «все S» и «некоторые, но не все, S».

Но к такому выводу мы можем прийти и не только путем отличения полной индукции, исключающей суждения A из I, от неполной, требующей пользоваться суждением I. К этому мы приходим также путем анализа существа самого предмета с целью выяснения его внутренней природы. Никакая индукция не может быть полной, когда речь идет, например, о таком суждении A: «Все люди смертны». Между тем на этом основании было нелепо прибегнуть (из осторожности) к частноутвердительному суждению в его обычной расширительной трактовке (I) и утверждать: «Некоторые люди смертны». Между суждением «Все лебеди белы», высказанному до нахождения черных лебедей в Австралии, и суждением «Все люди смертны», высказанному при жизни людей, имеется существенное различие. Первое было неправильным и явилось следствием того, что неполная индукция была сочтена за полную. Второе является правильным, ибо оно выведено из анализа внутренней закономерности развития всего живого, показывающего, что жизнь каждого живого существа необходимо должна кончаться и рано или поздно кончается смертью. В силу этого, по мере роста нашего знания о внутренней природе предмета, из частноутвердительных суждений в их обычной расширительной трактовке (I) исключаются общеутвердительные суждения (A), истинность которых доказана не путем полной индукции, а путем анализа присущей предмету закономерности. В итоге происходит разделение обще- и частноутвердительных суждений (с их разграничением) на суждения A и $\bar{I}$.

14. Исключающее отрицательное суждение. Аналогично обстоит дело и с частноотрицательным суждением (O): оно также может испытать уточнение, когда возросшее знание о предмете позволяет установить, что, кроме свободного b, существует соединение b с a. В таком случае для суждения $\bar{O}$ кроме прежнего отличительного признака O ($b \neq 0$) появляется дополнительный признак ($ab \neq 0$); благодаря этому из числа частноотрицательных суждений исключается общеотрицательное суждение E с его отличительным признаком ($ab = 0$). Так произошло, например, при нахождении утконоса, о чем говорилось выше. Соответственно этому, *до* и *после* открытия Австралии частноотрицательное суждение «Ни одно S не есть P» (Ни одно млекопитающее не есть обладающее клювом), сохраняя свою форму, изменило свое содержание и свое познавательное значение совершенно так же, как это имело место в предыдущем случае с черными лебедями (для частноутвердительного суждения): сначала (до открытия утконоса) оно выражало наше неполное (частичное) знание различительных признаков у птиц и млекопитающих; впоследствии же (после открытия утконоса) — более полное знание того, что, кроме $\underline{b}$, существует еще и ab.

Подобно тому, как в случае разграничения общего и частного утвердительных суждений, так и в случае разграничения общего и частного отрицательных суждений речь идет не только о подмене полной индукции неполной, но и об анализе самой природы предмета. Никакая индукция не может быть полной, когда высказывается, например, суждение E «Ничто не вечно под луной», т. е. «Ни одна вещь не есть вечная». Но было бы странно, несмотря на явную неполноту индукции, прибегнуть в данном случае к частноотрицательному суждению в его расширительном понимании (O) и заявить: «Некоторые вещи не суть вечные». Между суждением «Ни одно млекопитающее не есть обладающее клювом», высказанным до обнаружения утконоса в Австралии, и суждением «Ни одна вещь не есть вечная», высказанная при наличии вокруг нас сохраняющихся вещей, большая разница. Первое было ошибочным; оно возникло в результате того, что неполная индукция была принята за полную. Второе является верным, так как оно вытекает из анализа внутренней закономерности развития всех вещей в мире, показывающего правильность положения Гераклита — «все течет, все изменяется», т. е. ничто не является вечным, неизменным. В силу этого, по мере углубления и расширения наших знаний природы предмета, от частноотрицательных суждений в их расширительном понимании (O) отпочковываются общеотрицательные суждения (E), истинность которых доказана не путем полной индукции, а путем исследования закономерности, присущей самому предмету. В итоге происходит разделение обще- и частноотрицательных суждений (с их разграничением) на суждения E и $\bar{O}$.

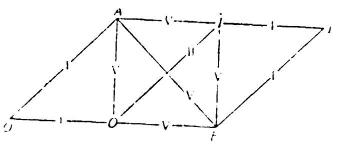
15. Отношения между обычными и исключающими суждениями в связи с их отличительными признаками. Как было показано выше, отношения между простейшими суждениями, в том числе и так называемый логический квадрат, определяются соотношением различительных признаков соответствующих суждений. Это касается также отношений между исключающими и обычными суждениями, равно как между самими исключающими суждениями.

Различительные признаки простейших суждений в их обычной трактовке, приведенные в табл. 2, предполагают предельно общее знание о предмете (мы знаем о предмете минимум для того, чтобы составить о нем какое-то суждение). Соответственно этому для каждого суждения устанавливается только *один* отличительный признак (т. е. минимальное их число).

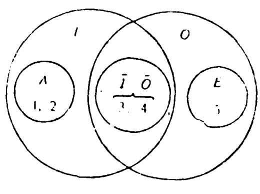
Когда же речь идет о более полном знании, то число отличительных признаков у полного исключающего суждения увеличивается до *двух*. Происходит уточнение логической характеристики самих суждений соответственно тому, как уточняется наше знание о предмете. Принимая ограничительное условие, по которому из частных суждений исключаются общие суждения, мы получаем более узкие, более ограниченные исключающие суждения ($\bar{I}$ и $\bar{O}$). При этом исключающее утвердительное суждение ($\bar{I}$) гласит «Некоторые, но не все, S суть P» (Некоторые, но не все, лебеди белы), а его отличительным признаком служит присутствие ab и b ($ab \neq 0$; $\bar{b} \neq 0$). Точно так же исключающее отрицательное суждение ($\bar{O}$) гласит «Некоторые, но не все, S не суть P» (Некоторые, но не все, млекопитающие не имеют клюва), а его отличительным признаком служит присутствие b и ab ($b \neq 0$; $\bar{a}b \neq 0$). Иными словами, по своему фазовому составу отличительные признаки у обоих исключающих суждений одинаковы; различаются же они лишь по ударному члену.

Продолжая анализировать отношения между суждениями, рассмотрим, как они меняются, когда частные суждения выступают уже не в обычной расширительной, а в их более узкой трактовке как исключающие суждения ($\bar{I}$ и $\bar{O}$). Аналогично предыдущему, отношения между шестью простейшими суждениями A, I, $\bar{I}$, O, $\bar{O}$, и E можно представить в фазовом выражении следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} A\left\{\begin{array}{l}1\\2\end{array}\right. \\ \bar{O}\left\{\begin{array}{l}\bar{O}\left\{\begin{array}{l}3\\4\end{array}\right\}\bar{I}\\ \quad 5\}\,E\end{array}\right.\end{array}\right\} I$$



Отсюда получается более дифференцированный логический квадрат (ромб)[8]:



Этому соответствует обычный график объемного отношения.

[8] В дальнейшем, чтобы не осложнять общий вид логического квадрата, мы не будем изображать больше различными линиями отношения между различными парами суждений. Здесь и ниже все стороны и диаго-

Из этих схем следует, что уточнение (сужение) частных суждений привело к тому, что резче разграничились виды суждений; их разграничение выразилось в том, что возросло число отношений независимости между суждениями (V) и появилось отношение тождества (II); кроме того, между A, $\bar{I}$, $\bar{O}$ и E исчезли отношения полного включения (I) и пересечения (III). Отношения полного включения (I) сохраняются между I и A и между O и E и появляются между I и $\bar{I}$, равно как между O и $\bar{O}$.

16. Обращение исключающих суждений. Рассмотрим, как обращаются суждения после введения исключающих суждений, т. е. частных суждений в их узкой трактовке ($\bar{I}$ и $\bar{O}$). Очевидно, что для общих суждений (A и E) остается в силе все, что приведено в табл. 2. Лишь для симметрии мы добавим к их отличительным признакам второй признак, который, по сути дела, не является новым, дополнительным к первому, но целиком подразумевается им. Например, для A, кроме $b = 0$, введем еще второй признак ($ab \neq 0$), который целиком вытекает из первого условия: если $b = 0$, то b может присутствовать только в соединении с a, т. е. в виде ab. Точно так же для E, кроме $ab = 0$, введем еще второй признак ($b \neq 0$), целиком обусловленный первым.

Обращение суждения A дает по-прежнему суждение I в его расширительной трактовке ($A \rightsquigarrow I$), так как остается неопределенным, существует или нет в формуле исходного A свободный член a. Обращение суждения E даст, очевидно, как и раньше, то же E ($E \rightsquigarrow E$). Что же касается обращения исключающих суждений, т. е. частных суждений в их узкой трактовке, то здесь дело меняется только для $\bar{O}$. Для $\bar{I}$ оно также остается без изменения: обращение $\bar{I}$ в узкой трактовке дает по-прежнему I в расширительной трактовке ($\bar{I} \rightsquigarrow I$). В самом деле, возьмем исключающее утвердительное суждение ($\bar{I}$): «Некоторые, но не все, S суть P». Его фазовые формулы: $a\underline{b} + a + b$ (№ 3) и $a\underline{b} + b$ (№ 4). Первой формуле соответствует, например, суждение «Некоторые, но не все лебеди белы», второй — суждение «Некоторые, но не все деревья суть березы». В общем случае

нали в квадрате (ромбе) изображаются поэтому одинаково (сплошными светлыми линиями).

при двойном отличительном признаке ($ab \neq 0$, $b \neq 0$) все же в отношении свободного члена a вопрос — присутствует он или нет — остается открытым. Поэтому при обращении суждения I можно лишь с определенностью установить, что во всяком случае a соединено с b, т. е. что присутствует ab ($ab \neq 0$), но все ли или только некоторые a соединены с b — этого установить нельзя. Поэтому в данном случае обращенное суждение звучит так: «Во всяком случае некоторые P суть S», что соответствует суждению I с его единственным отличительным признаком ($ab \neq 0$).

Напротив, исключающее отрицательное суждение ($\bar{O}$) приобретает теперь известную определенность, которая отсутствовала у обычной, расширительной трактовки частноотрицательного суждения (т. е. у O). Для O мы имели три фазовые формулы: $ab + a + \underline{b}$ (№ 3); $ab + \underline{b}$ (№ 4) и $a + \underline{b}$ (№ 5). Это создавало полную неопределенность в отношении признака a, а потому обращение суждения O было невозможно. Уточнение (сужение) частных суждений привело к исключению из O общеотрицательного суждения с формулой $a + \underline{b}$ (№ 5). Благодаря этому признак a в суждениях $\bar{O}$ приобрел известную определенность, а именно ту, которая свойственна признаку a в суждениях $\bar{I}$: имея $\bar{O}$, мы можем утверждать, что во всяком случае a соединено с b, хотя мы и не знаем, существует или нет свободное a. Но наличие $ab \neq 0$ есть отличительный признак частноутвердительного суждения в его обычной, расширительной трактовке (I). Следовательно, исключающее отрицательное суждение ($\bar{O}$) способно обращаться и дает частноутвердительное суждение в обычном, расширенном его понимании ($\bar{O} \rightsquigarrow I$). В самом деле, утверждая «Некоторые, но не все, S не суть P», мы получаем суждение «Некоторые P суть S». Например, суждение «Некоторые, но не все, млекопитающие не суть имеющие клюв» обращается в суждение «Некоторые существа, имеющие клюв, суть млекопитающие».

Резюмируя сказанное выше относительно исключающих суждений, получаем следующую таблицу (см. табл. 3).

Табл. 3 показывает, что при трактовке частных суждений в узком смысле, т. е. при замене их исключающими суждениями, все суждения, кроме одного общеотрицательного (E), обращаются

Таблица 3

Обычные и исключающие суждения и их обращение

Виды суждений	Их отличительные признаки	№	Фазовые формулы суждений	Формула обращенного суждения	№	Его отличительный признак	Схема обращения
Общеутвердительное A	$b=0;\ ab\neq 0$	(1) (2)	$ab+a$ $a\underline{\bar{b}}$	$ab+a$ $\underline{ab}$	(4) (2)	$ab\neq 0$	$A \rightsquigarrow I$
Исключающее утвердительное $\bar{I}$	$ab\neq 0;\ b\neq 0$	(3) (4)	$ab+a+b$ $a\underline{b}+b$	$\underline{a}b+a+b$ $\underline{a}b+b$	(3) (1)	$ab\neq 0$	$\bar{I} \rightsquigarrow I$
Исключающее отрицательное $\bar{O}$	$b\neq 0;\ ab\neq 0$	(3) (4)	$ab+a+b$ $ab+\underline{b}$	$\underline{a}b+a+b$ $\underline{a}b+b$	(3) (1)	$ab\neq 0$	$\bar{O} \rightsquigarrow I$
Общеотрицательное E	$ab=0;\ b\neq 0$	(5)	$a+\underline{b}$	$\underline{a}+b$	(5)	$ab\neq 0$	$E \rightsquigarrow E$

в частноутвердительное суждение в его обычной расширительной трактовке (I).

IV. Выделяющие суждения. Продолжение пересмотра традиционной теории суждения

17. В ы д е л я ю щ е е о б щ е у т в е р д и т е л ь н о е с у ж д е н и е и е г о о б р а щ е н и е. До сих пор, говоря об уточнении суждений в связи с ростом наших знаний о предмете (субъекте), мы имели в виду разграничение общих и частных суждений. Но в формальной логике известен и другой путь для уточнения суждения, а именно выделение — (из утвердительных, а затем и из отрицательных суждений) — так называемых *выделяющих* суждений. Рассмотрим этот вопрос с позиций фазового способа, как это мы делали до сих пор. Вернемся к исходной комбинации четырех простейших суждений в их обычной расширительной трактовке (A, I, O и E). Начнем с общеутвердительного суждения A. Возьмем два суждения, в равной мере охватываемые формулой «Все S суть P»: первое — «Все люди смертны», второе — «Все люди суть разумные существа». При их обращении согласно табл. 2 оба они должны дать частноутвердительное суждение (I): «Некоторые P суть S». Но такому обращению удовлетворяет только первое суждение, ибо верно,

что некоторые смертные существа суть люди. Второе же суждение приводит к явной несуразности, ибо нельзя сказать: «Некоторые разумные существа суть люди», поскольку кроме людей на Земле вообще нет разумных существ. Поэтому правильным, т. е. соответствующим действительности, будет такое обращение второго суждения, которое дает суждение A: «Все разумные существа суть люди». Для того, чтобы достичь возможности осуществлять обращение по схеме $A \leadsto A$, и вводится выделяющее общеутвердительное суждение. Как известно, оно образуется из общеутвердительного путем добавления ограничительного термина «только» к характеристике «все S»; соответственно этому выделяющее общеутвердительное суждение гласит: «Только все S суть P» (Все люди, и только они, суть разумные существа). В случае такого ограничения обращение дает требуемое суждение «Все P суть S» (Все разумные существа суть люди).

Основу выделяющего общеутвердительного суждения составляет отношение тождества между двумя понятиями A и B, имеющее формулу ab (№ 2). Если исходное суждение было $a\underline{b}$, то обращенное будет $\underline{a}b$. Учитывая, что выделяющее общеутвердительное суждение представляет собой то общеутвердительное суждение, которое основывается на отношении № 2 между двумя понятиями, обозначим его через A с индексом 2 (A_2). В таком случае схема его обращения будет сводиться к обращению A_2 (только все S суть P) в A (все P суть S), точнее в A_2 (только все P суть S): $A_2 \leadsto A_2$.

Возможность отграничения выделяющего общеутвердительного суждения (A_2) от общеутвердительного (A) обусловлена тем, что суждение A (все S суть P) имеет двойную основу, выраженную двумя различными фазовыми формулами: $a\underline{b}+a$ (№ 1) и $a\underline{b}$ (№ 2). Именно благодаря этому обстоятельству добавление ограничительного термина «только» позволяет отделить суждение A_2 от суждения A. Очевидно, что добавочный термин «только» равносилен добавлению к отличительному признаку A ($b = 0$) второго отличительного признака ($a = 0$). Говоря, что *только* все S суть P, мы этим подчеркиваем, что среди P нет элементов, которые не были бы S; в фазовом выражении это и означает, что нет свободного члена a ($a = 0$).

Итак, наше возросшее знание о предмете, выражающееся в том, что мы констатируем отсутствие среди Р иных элементов, кроме S, отражается в отпочковании суждения A_2 от A. Соответственно этому мы можем охарактеризовать различительные признаки A и A_2 следующим образом при помощи фазового способа: признаком A является $b = 0$ (во всяком случае нет b); признаком A_2 является $b = 0$; $a = 0$ (следовательно, есть только ab, иначе говоря $ab \neq 0$).

Очевидно, что A_2 находится с A в отношении полного включения (I).

18. Выделяющее частноутвердительное суждение и его обращение. Аналогично только что рассмотренному случаю дело обстоит и в случае частноутвердительного суждения, взятого в его обычной, т. е. расширительной, трактовке (I). И здесь возросшее знание о предмете позволяет выделить из I суждения, имеющие более точные границы и позволяющие более полно делать их обращение. Рассмотрим два частноутвердительных суждения (I), охватываемые общей формулой «Некоторые S суть Р», например, первое — «Некоторые мужчины суть ученые» и второе — «Некоторые деревья суть березы». Несмотря на общность формулы (Некоторые S суть Р) между обоими суждениями имеется существенная разница: первое при обращении правильно дает суждение I (Некоторые ученые суть мужчины); второе же при обращении не должно было бы давать суждения I (Некоторые березы суть деревья), так как имеющееся у нас знание свидетельствует о том, что все, а не некоторые, березы суть деревья (т. е. что все Р суть S).

Подобно тому, как в случае A_2, был введен ограничительный термин «только», так формальная логика вынуждена была поступить и в случае частноутвердительного суждения в его обычном, т. е. расширительном, смысле (I): она выделила из него выделяющее частноутвердительное суждение, гласящее: «Только некоторые S суть Р», или, короче, «Только S суть Р» (например, «Только некоторые деревья суть березы», или, короче, «Только деревья суть березы»). При обращении оно дает требуемое суждение A (Все Р суть S — например: «Все березы суть деревья»).

Основу выделяющего частноутвердительного суждения составляют два отношения между двумя понятиями А и В (см. табл. 2): во-первых, отношение тождества $a\underline{b}$ (№ 2) и, во-вторых, 2-й случай полного включения, имеющий фазовую формулу $\underline{a}b + b$ (№ 4). Если исходное суждение было $a\underline{b} + b$, то обращенное суждение, очевидно, будет $\underline{a}b + b$. Учитывая, что выделяющее частноутвердительное суждение представляет собой долю частноутвердительных суждений, обозначим его через I с двумя штрихами (I''). В таком случае схема его обращения будет сводиться к обращению I'' (Только некоторые S суть P) в A (Все P суть S): $I'' \rightsquigarrow A$.

Возможность отграничения выделяющего суждения (I'') от частноутвердительного (I) обусловлена в данном случае (как и в случае A и A_2) тем, что суждение I (Некоторые S суть P) имеет по меньшей мере удвоенную основу, выраженную двумя различными парами фазовых формул: во-первых, $a\underline{b} + a$ (№ 1) и $\underline{a}b + a + b$ (№ 3), содержащих свободный член a ($a \neq 0$); во-вторых, $a\underline{b}$ (№ 2) и $a\underline{b} + b$(№ 4), не содержащих его ($a = 0$). Именно благодаря этому, как и в случае A и A_2, добавление ограничительного термина «только» позволяет отделить суждение I'' от суждения I, ибо это равносильно добавлению к отличительному признаку I ($ab \neq 0$) второго отличительного признака ($a = 0$). Утверждая, что только S суть P, мы тем самым подчеркиваем, что среди P нет элементов, которые не были бы S.

Итак, и здесь рост нашего знания о предмете, проявляющийся в том, что мы устанавливаем отсутствие среди P иных элементов, кроме S, выражается в отпочковании суждения I'' от I. Соответственно этому можно в фазовом выражении представить различительные признаки I и I'': признаком I является $ab \neq 0$ (во всяком случае есть ab); признаком I'' является $ab \neq 0$; $a = 0$ (следовательно, во всяком случае есть ab и нет a). Очевидно, что I'' находится с I в отношении полного включения (I).

19. Выделяющее частноотрицательное суждение. Если в отношении обоих утвердительных суждений (A и I) ограничительным термином для образования выделяющих обще- и частноутвердительных суждений (A_2 и I'') служило слово «только», то в случае частноотрицательного суждения в его обычной, расширительной трактовке (O)

таким ограничительным термином служит оговорка «но только S суть P». В соответствии с этим образуется выделяющее частноотрицательное суждение, которое мы обозначим через O с двумя штрихами (O''); оно гласит: «Некоторые S не суть P, но только S суть P». На первый взгляд здесь имеются два соединенных между собой суждения, но по сути дела суждение O'' относится так точно к суждению O, как I'' к I. Возьмем, для примера, два суждения: 1) «Некоторые мужчины не ученые» и 2) «Некоторые деревья не березы». Хотя они охватываются одной и той же общей формулой (Некоторые S не суть P), тем не менее между ними имеется существенное различие: первое суждение не способно обращаться; второе же при обращении должно дать суждение A: «Все P суть S» (Все березы суть деревья). Возможность такого обращения достигается упомянутой выше оговоркой («но только S суть P»). Поэтому схема обращения выделяющего частноотрицательного суждения (O'') будет такова: $O'' \rightsquigarrow A$.

Очевидно, что фазовой формулой O'' служит $ab + \underline{b}$ (№ 4), а его отличительным признаком будет $b \neq 0$; $a = 0$. По существу оно является таким же выделяющим частным суждением (но только отрицательным), как и I''.

Возможность отграничения выделяющего частноотрицательного суждения (O'') от частноотрицательного (O) обусловлена (как и в предыдущих случаях) тем, что суждение O (Некоторые S не суть P) имеет по меньшей мере удвоенную основу, выраженную двумя различными группами фазовых формул: во-первых, $ab + a + \underline{b}$ (№ 3) и $a + \underline{b}$ (№ 5), содержащих свободный член $a (a \neq 0)$; во-вторых, $ab + \underline{b}$ (№ 4), не содержащую его ($a = 0$). Как раз в силу этого (что имело место и для A и A_2) введение ограничительного дополнения («но только S суть P») позволяет отделить суждение O'' от суждения O'', ибо это равнозначно добавлению к отличительному признаку O ($b \neq 0$) второго отличительного признака ($a = 0$). Оговаривая, что *только* S суть P, мы тем самым подчеркиваем, что среди P нет элементов, которые не были бы S.

Итак, рост нашего знания о предмете и на этот раз приводит к тому, что мы констатируем отсутствие среди P иных элементов, кроме S; это и проявляется в отпочковании суждения O''

от O. Соответственно этому можно представить в фазовом выражении отличительные признаки O и O'': признаком O является $b \neq 0$ (во всяком случае есть b); признаком O'' является $b \neq 0$; $a = 0$ (следовательно, во всяком случае есть b и нет a). Очевидно, что O'' находится с O в отношении полного включения (I).

20. Суждение экситенциальности. Сопоставим отличительные признаки всех трех выделяющих суждений с соответствующими им суждениями в их обычной, расширительной трактовке:

Признаком	A	служит	$b = 0$;
»	A_2	»	$b = 0$; $a = 0$;
»	I	»	$ab \neq 0$;
»	I''	»	$ab \neq 0$; $a = 0$;
»	O	»	$b \neq 0$;
»	O''	»	$b \neq 0$; $a = 0$.

Такое сравнение позволяет легко обнаружить, что во всех трех случаях (A, I и O) образование выделяющего суждения связано с наложением одного и того же общего ограничительного условия ($a = 0$) на соответствующее обычное расширительное суждение. Остается лишь четвертый случай — общеотрицательное суждение (E). Возникает вопрос: нельзя ли и на него распространить то же общее ограничительное условие ($a = 0$), при наложении которого из A, I и O образуются, соответственно, выделяющие суждения A_2, I'' и O''? Очевидно, что при наложении условия $a = 0$ на суждение E $(a + \bar{b})$ последнее обращается в суждение с фазовой формулой $\bar{b}$. В таком случае исчезает предикат (Р) и остается один субъект (S), причем связка «есть» превращается из связующего звена между двумя понятиями А и В в констатацию существования одного лишь понятия В, играющего роль субъекта суждения. Очевидно, что в данном случае образуется суждение *эксистенциальности* (существования), которое в дальнейшем мы будем обозначать символом E с индексом 0 (E_0). Оно стоит в таком же точно отношении к E, в каком выделяющие суждения A_2, I'' и O'' стоят, соответственно, к A, I и O. Исходя из этого, предыдущий ряд отличительных признаков выделяющих суждений можно пополнить признаками E и E_0: признаком E служит $ab = 0$; признаком E_0 является $ab = 0$; $a = 0$ (т. е. существует только одно b).

По аналогии с предыдущими случаями (A_2 и A, I'' и I, O'' и O) можно заключить, что суждение E_0 находится с E в отношении полного включения (I). Точно так же по аналогии с отношением между I'' и A_2 можно обнаружить, что суждение E_0 с его фазовой формулой $(\underline{b})$ охватывается суждением O'', отличительным признаком которого служит $\bar{b} = 0$; $a = 0$. Отсюда вытекает, что суждение эксистенциальности (E_0) является по сути дела выделяющим общеотрицательным, а его логическая формулировка составляется следующим образом: как было показано выше, логической формулой для O'' служит «Некоторые S не суть P, но только S суть P», а для E — «Ни одно S не есть P» (т. е. все S не суть P). Очевидно, что выделяющее общеотрицательное суждение должно было бы гласить: «Ни одно S не есть P, но только S суть P» (здесь слово «суть» употреблено в смысле «могли бы быть»). Так как P может быть представлено только как часть S и так как среди S нет элементов P, то, следовательно, P отсутствует вовсе, а существует только S. Это и есть, только иная, формулировка суждения эксистенциальности (E_0). Здесь она приведена исключительно по формальным соображениям.

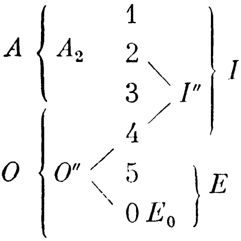
Очевидно, что в суждении эксистенциальности E_0 отсутствует отношение между двумя понятиями (A и B), поскольку в нем представлено только одно из них (B). Поэтому среди фазовых формул, приведенных в табл. 1, нет такой, которая служит основой для суждения E_0. Но условно можно было добавить к пяти формулам, перечисленным в табл. 1 (№ 1—5), шестую (нулевую), которая предполагает лишь одну фазу свободного b. В таком случае можно было бы сказать, что суждение эксистенциальности (E_0) имеет в качестве своей основы случай, обозначаемый нулевым номером (№ 0).

Поскольку суждение E_0 состоит лишь из одного, а не из двух понятий, его обращение по сути дела невозможно; но так как при «обращении» оно дает самого себя, то формально можно сказать, что схема его «обращения» такова: $E_0 \rightsquigarrow E_0$.

Изложенное выше показывает, что суждение эксистенциальности (E_0) не стоит особняком от других простейших суждений, но занимает среди них свое вполне определенное место, являясь по сути дела самым простейшим из всех возможных. Особый смысл этого суждения и его познавательное значение будет показано в статье 2 в связи с логическим анализом вопросительной формы мысли, применяемой при составлении суждения.

Включая суждения O'' и E_0 в число выделяющих, мы можем резюмировать сказанное выше следующим образом: в фазовом выражении общим отличительным признаком всех выделяющих суждений служит $a = 0$.

21 Отношения между выделяющими и обычными суждениями. Первый двойной логический квадрат. В итоге образования четырех выделяющих суждений (A_2, I'', O'', E_0) возникают определенные отношения у них как между собой, так и с четырьмя суждениями в их обычной, расширительной трактовке (A I, O, E). В фазовом выражении отношения между перечисленными восемью суждениями можно представить следующим образом (здесь, как и прежде, в вертикальном столбце под № 1—5 воспроизведены пять отношений между двумя понятиями, которые содержатся в табл. 1 и составляют основу каждого из восьми суждений; цифрой 0 отмечена основа суждения экзистенциальности):



откуда прямо получается своеобразный удвоенный логический квадрат (здесь стрелками указано, что A_2 выделилось из A, I'' — из I и т. д.):

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rrr, dash] \arrow[dr] \arrow[ddd, dash] & & & I \arrow[dl] \arrow[ddd, dash] \\
& A_2 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & I'' \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] & \\
& O'' \arrow[r, dash] & E_0 & \\
O \arrow[rrr, dash] \arrow[ur] & & & E \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Внутренний логический квадрат образуется из внешнего (обычного) при наложении общего условия $a = 0$. Отношения между суждениями, составляющими внутренний логический квадрат, в точности воспроизводят, только в более ограниченных рамках, отношения тех суждений, которые составляют внешний квадрат, а именно:

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[rr, dash, "\mathrm{I}"] \arrow[dd, dash, "\mathrm{V}"'] \arrow[ddrr, dash, "\mathrm{V}"] & & I'' \arrow[dd, dash, "\mathrm{V}"] \arrow[ddll, dash, "\mathrm{III}"'] \\
& & \\
O'' \arrow[rr, dash, "\mathrm{I}"'] & & E_0
\end{tikzcd}$$

чему соответствует схема: $I''\left\{\begin{array}{ll} A_2 & 2 \\ & 4 \\ & 0E_0 \end{array}\right.$ $\left.\begin{array}{l} 4 \\ 0E_0 \end{array}\right\} O''$

Заметим, что так как при обычной трактовке E не учитывается включающее в него суждение эксистенциальности (E_0), то фазовой формулой для E служит лишь одна формула ($a + \underline{b}$), а не две ($a + \underline{b}$) и ($\underline{b}$), как это получается, если учесть суждение E_0.

Резюмируя все сказанное относительно выделяющих суждений A и I'' (с присоединением к ним сходных с ними по своему типу суждений O'' и E_0), получаем следующую таблицу (табл. 4), которая полностью соответствует табл. 2:

Таблица 4

Выделяющие суждения и их обращение

Виды выделяющих суждений	Их отличительные признаки	№	Фазовые формулы суждений	Формула обращенного суждения	№	Его отличительный признак	Схема обращения
Общеутвердительное A_2	$b=0;\ a=0$	(2)	$a\underline{b}$	$\underline{a}b$	(2)	$a=0; b—0$	$A_2 \rightsquigarrow A_2$
Частноутвердительное I''	$ab\neq 0;\ a=0$	(2) (4)	$a\underline{b}$ $a\underline{b}+b$	$\underline{a}b$ $\underline{a}b+b$	(2) (1)	$b=0$	$I'' \rightsquigarrow A$
Частноотрицательное O''	$b\neq 0;\ a=0$	(4) (0)	$ab+\underline{b}$ $\underline{b}$	$\underline{a}b+b$ $\underline{b}$	(1))	?	$O'' \rightsquigarrow ?$
Общеотрицательное, или эксистенциальности E_0	$ab=0;\ a=0$	(0)	$\underline{b}$	$\underline{b}$	(0)	$ab=0, a=0$	$E_0 \rightsquigarrow E_0$

Если же не принимать во внимание суждения E_0, то суждению O'' будет соответствовать всего одна фазовая формула ($ab + \underline{b}$); тогда при обращении O'' образуется суждение A с его формулой ($\underline{a}b + b$), как это уже отмечалось выше.

V. Невыделяющие суждения. Дальнейшее развитие начатого пересмотра традиционной теории суждения

22. Невыделяющие суждения как отрицание, или антипод, выделяющих. Мы видели, что выделяющие суждения (A_2, I'', O'' и E_0) образуются из

обычных суждений в их расширительном толковании путем наложения на эти последние (A, I, O, E) общего ограничительного условия ($a = 0$). В словесном выражении это ограничение выступает как добавление слова «только» или пояснительного предложения «но только S суть P». По выделении из A, I, O и E выделяющих суждений (A_2, I'', O'', E_0) остается некоторая часть суждений, которые мы назовем *невыделяющими* (чтобы не вводить нового термина)[9]. Очевидно, что они могут быть образованы из A, I, O и E путем наложения на эти последние общего ограничительного условия, противоположного тому, какое накладывается при образовании выделяющих суждений (A_2, I'', O и E_0). Так как для выделяющих суждений таким условием является $a = 0$, то для невыделяющих таким же общим ограничительным условием будет $a \neq 0$. Очевидно, что смысл этого ограничения состоит в том, что не все a соединены с b, но что имеется свободный член a. Условие $a \neq 0$ подчеркивает, что *не только* все (или *не только* некоторые) S суть P. Поэтому словесное выражение для невыделяющих суждений образуется из словесного выражения для выделяющих суждений с добавлением к слову «только» отрицательной частицы «не»; это как раз и будет равносильно замене условия $a = 0$ условием $a \neq 0$. При наложении условия $a \neq 0$ на суждения A, I, O и E образуются следующие четыре невыделяющие суждения:

1) *Невыделяющее общеутвердительное* с фазовой формулой $a\underline{b} + a$ (№ 1) и отличительным признаком $b = 0$; $a \neq 0$. Соответственно этому мы обозначим его символом A с индексом 1 (A_1). Оно образуется из соответствующего выделяющего путем

---

[9] П. В. Таванец [4, стр. 90—91] называет такого рода суждения «включающими» в отличие от выделяющих суждений; мы считаем этот термин неудачным, так как он может создать у читателя представление, будто «включающим» суждениям противопостоят исключающие суждения. К тому же в общем случае здесь нет отношения исключения между субъектом и предикатом (кроме случая A_1), о чем будет сказано в статье 2. Деление суждений на выделяющие и невыделяющие П. В. Таванец принимает лишь для условных суждений [4, стр. 123 и далее], равно как и самый термин «невыделяющие» он применяет лишь к этим суждениям. Другие авторы (например, К. С. Бакрадзе [7], А. В. Дроздов [8], В. Ф. Асмус [6]) обходят этот вопрос вовсе.

добавления частицы «не» к слову «только»: не только все S суть P, например: «Не только все березы суть деревья». Это означает, что все S суть P (Все березы суть деревья), но вместе с тем имеются деревья, которые не являются березами (т. е. некоторые P не суть S).

2) *Невыделяющее частноутвердительное* суждение с фазовыми формулами $a\underline{b} + a$ (№ 1) и $a\underline{b} + a + b$ (№ 3) и отличительным признаком $ab \neq 0; a \neq 0$. По аналогии с соответствующим ему выделяющим частноутвердительным суждением (I'') мы обозначим его через ту же букву I с одним штрихом (I'). Оно образуется из I'' путем добавления частицы «не» к слову «только»: не только некоторые S суть P, например: «Не только некоторые мужчины суть ученые», или, короче: «Не только мужчины суть ученые». Это означает, что учеными могут быть и не-мужчины (т. е. женщины).

3) *Невыделяющее частноотрицательное* суждение с фазовыми формулами $ab + a + \underline{b}$ (№ 3) и $a + \underline{b}$ (№ 5) и отличительным признаком $b \neq 0$; $a \neq 0$. По аналогии с соответствующим ему выделяющим частноотрицательным суждением (O'') мы обозначим его через букву O с одним штрихом (O'). Оно образуется из O'' путем все той же операции — добавления частицы «не» к слову «только»: некоторые S не суть P, но не только S суть P, например: «Некоторые мужчины не суть ученые, но не только мужчины суть ученые (или бывают учеными)». Это означает, что учеными могут быть и женщины.

4) *Невыделяющее общеотрицательное* суждение с фазовой формулой $a + \underline{b}$ (№ 5) и отличительным признаком $ab = 0$; $a \neq 0$. В соответствии с этим мы обозначим его символом E с индексом 5 (E_5). Это — суждение, обычно принимаемое за общеотрицательное (E) с его отличительным признаком $ab = 0$ (см. табл. 2). Однако суждение E охватывает собой не только E_5, но и E_0, которое также подходит под условие $ab = 0$, служащее признаком E. Суждение E_5 образуется, как и три предыдущих, из отвечающего ему выделяющего суждения (E_0) путем прибавления к слову «только» частицы «не»: ни одно S не есть P, но не только S есть (в смысле — могло бы быть) P. Такая формулировка выглядит довольно запутанной и искусственной; мы ее привели, исходя только из формальных

соображений. Смысл ее сводится к тому, что при отсутствии ab имеются в наличности a и b.

23. Обращение невыделяющих суждений. Обращение невыделяющих суждений существенно отличается от обращения выделяющих суждений. Вследствие того, что в суждениях A_1, I' и O' присутствует свободный член a (так как $a \neq 0$), признак a, который при обращении становится на место субъекта (S), дает не одну, а две возможности для ударения на него: первую — ту, какая имеется у выделяющих суждений (A_2, I'', O''), т. е. на член $\underline{a}b$, вторую — на свободный член $\underline{a}$, отсутствующий у выделяющих суждений. Поэтому обращение суждений A_1, I' и O' дает не однозначное, а двузначное решение, причем одно из них является общим для первых трех невыделяющих суждений (A_1, I', O') и является частноотрицательным: некоторые P не суть S (поскольку присутствует свободный член a, становящийся при обращении на место субъекта). Для четвертого же суждения (E_5) решение остается однозначным, поскольку признак a представлен здесь лишь в единственном числе (в виде свободного члена a).

Таким образом, при обращении невыделяющих суждений получаем:

1) Для общеутвердительного суждения (A_1) с формулой $a\underline{b} + a$ (№ 1) два решения: первое — «Только P суть S», с формулой $\underline{a}b + a$ (№ 4), второе — «Некоторые P не суть S, но только P суть S», с формулой $ab + \underline{a}$ (№ 4). В первом случае получаем выделяющее частноутвердительное суждение (I''), во втором — выделяющее частноотрицательное (O''). Следовательно, схема обращения A_1 будет такова:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & I'' \\ A_1 \arrow[ur, dashed] \arrow[dr, dashed] & \\ & O'' \end{tikzcd}$$

2) Для частноутвердительного суждения (I') с двумя формулами $a\underline{b} + \underline{a}$ (№ 1) и $a\underline{b} + a + b$ (№ 3) получаем по два решения на каждую формулу: на первую — «Только P суть S», с формулой $\underline{a}b + a$ (№ 4), и «Некоторые P не суть S, но только P суть S», с формулой $ab + \underline{a}$ (№ 4), т. е. те же два решения (I'' и O''), что и в случае A_1; на вторую — «Не только P суть S»,

с формулой $\underline{a}b + a + b$ (№ 3), и «Некоторые P не суть S, но не только P суть S», с формулой $ab + \underline{a} + b$ (№ 3). Очевидно, что здесь получаются два невыделяющие частные суждения — утвердительное (I') и отрицательное (O'). Поэтому в целом при своем обращении суждение I' дает: во-первых, частноутвердительное суждение (I), которое образуется, когда ударение делается на a в члене $\underline{a}b$; оно складывается из выделяющего (I'') и невыделяющего (I') частноутвердительных суждений ($I = I' + I''$); во-вторых, частноотрицательное суждение (O), которое складывается, соответственно, из выделяющего (O'') и невыделяющего (O') частноотрицательных суждений ($O = O' + O''$). Следовательно, схема обращения I' будет такова:

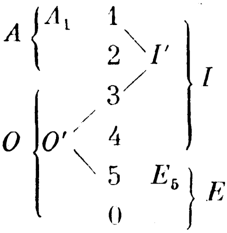
$$
\begin{tikzcd}
 & I'' + I' = I \\
I' \arrow[ur, dashed] \arrow[dr, dashed] & \\
 & O'' + O' = O
\end{tikzcd}
\quad \text{или, окончательно:} \quad
\begin{tikzcd}
 & I \\
I' \arrow[ur, dashed] \arrow[dr, dashed] & \\
 & O
\end{tikzcd}
$$

3) Для частноотрицательного суждения (O'), с двумя формулами $ab + a + \underline{b}$ (№ 3) и $a + \underline{b}$ (№ 5), получаем на каждую формулу: на первую — аналогично предыдущему суждению (I') — два решения, т. е. те же два невыделяющие частные суждения — утвердительное (I'), с формулой $ab + a + b$ (№ 3), и отрицательное (O'), с формулой $ab + \underline{a} + b$ (№ 3); на вторую — одно решение — невыделяющее общеотрицательное (E_5), с формулой $\underline{a} + b$ (№ 5) и с ограничительным признаком $ab = 0$. Так как суждение E_5 охватывается суждением O', то в итоге схема обращения O' будет следующей:

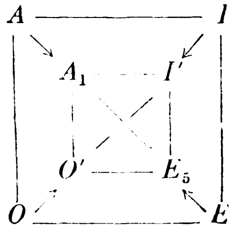
$$
\begin{tikzcd}
 & I' \\
O' \arrow[ur, dashed] \arrow[dr, dashed] & \\
 & O'
\end{tikzcd}
$$

4) Наконец, для общеотрицательного суждения (E_5), с формулой $a + \underline{b}$ (№ 5), получаем при обращении одно-единственное решение — невыделяющее общеотрицательное суждение «Ни одно P не есть S», с формулой $\underline{a} + b$ (№ 5). Следовательно, схема его обращения будет такова: $E_5 \rightsquigarrow E_5$.

24. **Отношения между невыделяющими и обычными суждениями. Второй двойной логический квадрат.** В результате образования четырех невыделяющих суждений (A_1, I', O', E_5) возникают у них определенные отношения как между собой, так и с четырьмя суждениями в их обычной, расширительной трактовке (A, I, O, E). В фазовом выражении отношения между названными восемью суждениями можно представить следующим образом:



откуда прямо получается второй удвоенный логический квадрат (стрелки указывают, что A_1 выделилось из A, I' из I и т. д.):



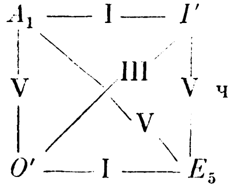
Здесь, как и в случае выделяющих суждений (см. выше), внутренний логический квадрат образуется из внешнего (обычного) при наложении общего условия $a \neq 0$. Отношения

Таблица 5

Невыделяющие суждения и их обращение

Виды невыделяющих суждений	Их отличительные признаки	№	Фазовые формулы суждений	Формулы обращенных суждений	№	Их отличительные признаки	Схема обращения
Общеутвердительное A_1	$b = 0;\ a \neq 0$	(1)	$a\underline{b} + a$	$ab+a$ $\bar{a}b+\underline{a}$	(4) (4)	$ab \neq 0;\ b = 0$ $a \neq 0;\ b = 0$	$A_1 \to I''$, $A_1 \to O''$
Частноутвердительное I'	$ab \neq 0;\ a \neq 0$	(1) (3)	$a\underline{b} + a$ $a\underline{b}+a+b$	$ab+a$ $\bar{a}\bar{b}+\underline{a}$ $ab+a+b$ $\bar{a}b+\underline{a}+b$	(4) (4) (3) (3)	$ab \neq 0;\ b = 0$ $a \neq 0;\ b = 0$ $ab \neq 0;\ b \neq 0$ $a \neq 0;\ b \neq 0$	$I' \to I$, $I' \to O$
Частноотрицательное O'	$b \neq 0;\ a \neq 0$	(3) (5)	$ab+a+b$ $a+\underline{b}$	$ab+\bar{a}+b$ $\bar{a}b+\underline{a}+b$ $\underline{a}+\bar{b}$	(3) (3) (5)	$ab \neq 0;\ b \neq 0$ $a \neq 0;\ b \neq 0$ $ab = 0;\ b \neq 0$	$O' \to I'$, $O' \to O'$
Общеотрицательное E_5	$ab = 0;\ a \neq 0$	(5)	$a+\underline{b}$	$\underline{a}+b$	(5)	$ab = 0;\ b \neq 0$	$E_5 \to E_5$

между суждениями, составляющими внутренний квадрат, полностью повторяют (но лишь в более узких пределах) отношения тех суждений, которые составляют внешний квадрат, а именно:



чему соответствует схема: $$I'\left\{\begin{array}{l} A_1\ 1 \\ \quad\ 3 \\ 5\ E_5 \end{array}\right\} O'.$$

Сводя воедино сказанное относительно невыделяющих суждений (A_1, I', O', E_5), получаем таблицу, представляющую собой полную аналогию с табл. 4, а значит, и с табл. 2 (см. табл. 5).

VI. Совмещение исключающих и выделяющих суждений. Доведение пересмотра традиционной теории суждения до логического предела

25. Общий ход пересмотра традиционной теории суждения. До сих пор пересмотр традиционной теории суждения шел как бы раздвоенным путем: формальная логика пришла к необходимости образовать, с одной стороны, исключающие суждения ($\overline{I}$ и $\overline{O}$), отделив тем самым общие суждения от частных, а с другой стороны — выделяющие суждения (A_2 и I''), а также суждение экзистенциальности (E_0), которое, как мы показали, является также суждением выделяющим. Продолжая развивать это второе направление, логика показала, что к выделяющим суждениям относится и частноотрицательное суждение (O'') и что остаток от выделяющих суждений образуют своеобразные невыделяющие суждения ($A_1 = A - A_2$; $I' = I - I''$; $O' = O - O''$; $E_5 = E - E_0$). В итоге оба направления пересмотра традиционной теории суждения, взятые обособленно одно от другого, были доведены до своего возможного исчерпания. Этот итог можно изобразить в виде следующей схемы, в которой стрелками отмечены оба направления в пересмотре традиционной теории суждения, а под символами суждений указаны их отличительные признаки (у A, I, O и E — основные, у остальных — дополнительные к этим основным):

Обычные суждения			
A	I	O	E
$b = 0$	$ab \neq 0$	$b \neq 0$	$ab = 0$

1-е направление *и ее пересмотр* 2-е направление

Исключающие суждения	
$\bar{I}$	$\bar{O}$
$b \neq 0$	$ab \neq 0$

Выделяющие				и невыделяющие			
A_2	I''	O''	E_0	A_1	I'	O'	E_5
$a = 0$				$a \neq 0$			

Это — все, что могла дать разработка каждого из обоих направлений при обособлении друг от друга. Введение «неисключающих суждений» (по аналогии с невыделяющими суждениями) не дает, очевидно, ничего нового, так как $I - \bar{I} = A$, а $O - \bar{O} = E$.

Дальнейшее развитие пересмотра традиционной теории суждения должно было бы состоять в попытке объединить оба направления, иначе говоря, в попытке найти способ взаимно совместить принцип образования исключающих суждений с принципом образования выделяющих суждений. Как мы покажем ниже, в этом *совмещении* и заключается конструктивный характер доведения до логического конца начатой в формальной логике реформы одного из важнейших ее разделов.

Операция совмещения обоих принципов состоит в том, что на выделяющие и невыделяющие суждения распространяются условия, приводящие к образованию исключающих суждений (или, наоборот, на исключающие суждения — условия, приводящие к образованию выделяющих и невыделяющих суждений). Например, образование исключающего суждения $\bar{I}$ предполагает введение дополнительного условия $b \neq 0$ к исходному признаку I ($ab \neq 0$). Совмещение с выделяющими суждениями означает наложение второго дополнительного условия, который требуется для образования I'' ($a = 0$), а совмещение с невыделяющими суждениями — условия, которое требуется для образования I' ($a \neq 0$). В первом случае эта операция предполагает выделение общего суждения A_2 из частного (I''), во втором случае — общего суждения A_1 из частного (I'). В обоих случаях после выделения общего суждения из частного образуется остаток, который в первом случае (когда имеет место $I'' - A_2$) назовем пока, чтобы не вводить новых терминов, утвердительным выделяюще-исключающим, а во втором случае ($I' - A_1$) — утвердительным невыделяюще-исключающим.

Аналогичным образом наложение дополнительных условий ($a = 0$ или $a \neq 0$) приводит к выделению суждения экзистенциальности (E_0) из O'' и общего суждения E_5 из частного O'. И здесь в обоих случаях после выделения каждого из указанных суждений образуется остаток, который в первом случае (когда имеет место $O'' - E_0$) назовем пока, по тем же соображениям, что и раньше, отрицательным выделяюще-исключающим, а во втором случае ($O' - E_5$) — отрицательным невыделяюще-исключающим.

26. Л о г и ч е с к о е з а в е р ш е н и е п е р е с м о т р а т р а д и ц и о н н о й т е о р и и с у ж д е н и я. Рассмотрим, как распределяются между вновь образованными суждениями различные фазовые формулы. Из табл. 4 и 5 следует, что каждому из суждений A_1, A_2, E_5 и E_0 соответствовало по одной фазовой формуле, а именно: суждению A_1 — формула $a\underline{b} + a$ (№ 1); A_2 — $a\underline{b}$ (№ 2); E_5 — $a + \underline{b}$ (№ 5); E_0 — $\underline{b}$ (№ 0). Другими словами, первым трем суждениям отвечают три различных отношения между двумя понятиями (из пяти отношений, представленных в табл. 1). Остальные два отношения между двумя понятиями (№ 3 и 4) служили основой для обоих исключающих суждений (см. табл. 3), причем в зависимости от того, на какую фазу, содержащую признак b, делалось ударение (на $a\underline{b}$ или на свободный член $\underline{b}$), образовывалось суждение утвердительное ($\bar{I}$), с *двумя* формулами ($a\underline{b} + a + b$) и ($a\underline{b} + b$), или отрицательное ($\bar{O}$), тоже с *двумя* формулами ($ab + a + \underline{b}$) и ($ab + \underline{b}$).

Для выделяющих (I'' и O'') и невыделяющих (I' и O') суждений основой служили в каждом случае также по *два* отношения между двумя понятиями: для I'' — ab (№ 2) и $a\underline{b} + b$ (№ 4) и для O'' — $ab + \underline{b}$ (№ 4) и $\underline{b}$ (№ 0) (см. табл. 4), а для I' — $a\underline{b} + a$ (№ 1) и $a\underline{b} + a + b$ (№ 3) и для O' — $ab + a + \underline{b}$ (№ 3) и $a + \underline{b}$ (№ 5) (см. табл. 5). С фазовой точки зрения доведение пересмотра традиционной теории суждения до логического конца путем совмещения принципов образования исключающих и выделяющих суждений состоит в том, что нужно добиться однозначного соответствия между определенным видом суждения и строго определенным, только ему отвечающим видом отношения между двумя понятиями с определенным ударением на данный признак b (в фазе $a\underline{b}$ или в свободной фазе $\underline{b}$).

В табл. 1 содержится пять различных отношений между понятиями А и В, каждому из которых отвечает определенная фазовая формула (№ 1—5); в двух из этих формул (№ 3 и 4) признак b представлен в двух различных фазах (ab и b), а потому каждая формула дает возможность для двух различных ударений на признак b — в фазе $a\underline{b}$ (тогда получается частноутвердительное суждение) и в фазе $\underline{b}$ (тогда получается частноотрицательное суждение); таким образом получаются еще два дополнительных отношения к исходным пяти. Кроме того, добавляется суждение экзистенциальности (№ 0) с формулой $\underline{b}$. Итого получается восемь различных отношений между двумя понятиями с различным ударением на признак b, причем в их число включается и то, в котором отсутствует второе понятие и представлена только одна фаза b (№ 0).

Анализ общего хода пересмотра традиционной теории суждения показывает, что суть этого пересмотра сводилась к последовательному сужению первоначально расширенных суждений (в их обычном толковании) путем постепенного сокращения числа фазовых формул, которые служили основой для каждой из них. Назовем этот прием *уменьшением значности основы суждений*. Так, у исходных (обычных) суждений основа была либо двузначной (у общих суждений A и E), либо даже четырехзначной (у частных суждений I и O) (см. табл. 2). Пересмотр традиционной теории суждений, шедший по первому направлению, свелся к тому, что у частных исключающих суждений ($\bar{I}$ и $\bar{O}$) основа из четырехзначной была уменьшена до двузначной за счет исключения суждения A из I и суждения E из O (см. табл. 3). Тот же пересмотр, шедший по второму направлению, свелся к тому, что у общих суждений (A_2 и E_0; соответственно, A_1 и E_5) основа поочередно уменьшалась до однозначной, у выделяющих суждений — за счет выделения суждения A_2 из A и суждения E_0 из E, у невыделяющих — за счет выделения суждения A_1 из A и суждения E_5 из E. Очевидно, что пределом сужения основы служит ее однозначность, когда каждому виду отношения между двумя понятиями с различным ударением на признак b отвечает одно, и только одно, определенное суждение, а потому такому суждению отвечает один, и только один, определенный вид отношений между понятиями, с учетом возможности различия в ударении на признак b. Доведение до этого предела (т. е. до однозначной основы) всех суждений и является доведением до логического конца начатого в формальной логике пересмотра традиционной теории простейших суждений. Это и достигается отмеченным выше совмещением обоих принципов такого рода пересмотра, приводящих к образованию исключающих и выделяющих (соответственно, невыделяющих) суждений. В итоге можно сделать следующее сопоставление для восьми различных суждений, каждое из которых имеет однозначную основу:

1) невыделяющее общеутвердительное суждение (A_1) с одной фазовой формулой $a\underline{b} + a$ (1) и с отличительными признаками $b = 0$; $a \neq 0$;

2) выделяющее общеутвердительное суждение (A_2) с одной фазовой формулой $a\underline{b}$ (2) и с отличительными признаками $b = 0$; $a = 0$;

3) исключающе-невыделяющее частноутвердительное суждение с одной фазовой формулой $a\underline{b} + a + b$ (3), которое мы обозначим поэтому через символ I с индексом 3 (I_3); его отличительным признаком будет служить совмещение признаков I' ($ab \neq 0$; $a \neq 0$) и $\bar{I}$ ($ab \neq 0$; $b \neq 0$), т. е. $ab \neq 0$; $b \neq 0$; $a \neq 0$;

4) исключающе-выделяющее частноутвердительное суждение с одной фазовой формулой $a\underline{b} + b$ (4), которое мы, соответственно, обозначим через I с индексом 4 (I_4); его отличительным признаком служит совмещение признаков I'' ($ab \neq 0$; $a = 0$) и $\bar{I}$ ($ab \neq 0$; $b \neq 0$), т. е. $ab \neq 0$; $b \neq 0$; $a = 0$;

5) исключающе-невыделяющее частноотрицательное суждение с одной фазовой формулой $ab + a + \underline{b}$ (3), которое мы, соответственно, будем обозначать через O с индексом 3 (O_3);

его отличительным признаком является совмещение призна ков O' ($b \neq 0$; $a \neq 0$) и $\overline{O}$ ($b \neq 0$; $ab \neq 0$), т. е. $b \neq 0$; $ab \neq 0$; $a \neq 0$;

6) исключающе-выделяющее частноотрицательное суждение с одной фазовой формулой $ab + \underline{b}$ (4), которое на том же основании мы будем обозначать через O с индексом 4 (O_4); его отличительный признак представляет совмещение признаков O'' ($b \neq 0$; $a = 0$) и $\overline{O}$, т. е. $b \neq 0$; $ab \neq 0$; $a = 0$;

7) невыделяющее общеотрицательное суждение (E_5) с одной фазовой формулой $a + \underline{b}$ (5) и с отличительными признаками $ab = 0$; $a \neq 0$;

8) выделяющее общеотрицательное суждение, или суждение экзистенциальности, (E_0) с одной фазовой формулой $\underline{b}$ (0) и с отличительными признаками $ab = 0$; $a = 0$.

По существу весь ход пересмотра традиционной теории суждения выразился в постепенном приближении к образованию этих восьми суждений как своему естественному, логическому пределу. Назовем исключающе-выделяющие (соответственно, невыделяющие) суждения *совмещающими*, поскольку в них совмещены оба принципа пересмотра традиционной теории суждения. Тогда доведение до логического конца (до предела) начатый пересмотр традиционной теории суждения можно представить в виде следующей схемы:

Традиционная теория суждения

Обычные суждения

$A \quad I \quad O \quad E$

1-е направление | *начало ее пересмотра* | 2-е направление

Исключающие суждения

$A \quad \overline{I} \quad \overline{O} \quad E$

Выделяющие и невыделяющие

$A_2 \quad I'' \quad O'' \quad E_0 \quad \} \quad A_1 \quad I' \quad O' \quad E_5$

и доведение его до конца

Совмещающие суждения

$A_1 \quad A_2 \quad \overbrace{I_3 \quad I_4 \quad O_3 \quad O_4} \quad E_5 \quad E_0$

В дальнейшем мы увидим, что к подобного рода завершению пересмотра традиционной теории суждения и доведению его до логического предела приближались еще Гамильтон и Джевонс на основании чисто формальных соображений, а также и многие другие логики, как об этом будет сказано в статье 2.

27. **Уменьшение значности основы суждения в ходе пересмотра традиционной теории суждения.** Рассмотрим, как в ходе отмеченного пересмотра сокращалась значность основания для каждого вида суждений, т. е. число отношений между понятиями, составляющих фазовую основу соответствующего вида суждений. Для удобства сгруппируем вместе сначала общие суждения (A и E), а затем частные (I и O). Суждение эксистенциальности (E_0) с фазовой основой № 0 ($\underline{b}$) будем считать, как и раньше, видоизменением общеотрицательного суждения (E).

Суждения:

обычные	A	I	O	E
	(1) (2)	(1) (2) (3) (4)	(3) (4) (5) (0)	(5) (0)
исключающие	A	$\bar{I}$	$\bar{O}$	E
	(1) (2)	(3) (4)	(3) (4)	(5) (0)
выделяющие	A_2	I''	O''	E_0
	(2)	(2) (4)	(4) (0)	(0)
невыделяющие	A_1	I'	O'	E_5
	(1)	(1) (3)	(3) (5)	(5)
совмещающие	A_1 A_2	I_3 I_4	O_3 O_4	E, E_0
	(1) (2)	(3) (4)	(3) (4)	(5) (0)

(Здесь, как и раньше, в круглых скобках стоят номера отношений между двумя понятиями из табл. 1, которые служат фазовой основой соответствующего суждения.) Из этих данных составляется следующая таблица (см. табл. 6), где кавычки указывают, что при переходе к более уточненным суждениям значность основы некоторых из них (общих или частных) остается без изменения. Табл. 6 показывает, что суть пересмотра традиционной теории суждения состояла именно в постепенном уменьшении значности основы обычных суждений — от двухзначной (у общих) и от четырехзначной

Таблица 6

Уменьшение значности основы суждений

Суждения	Характер основы суждений	
	общих	частных
Обычные	двухзначная	четырехзначная
Исключающие	»	двухзначная
Выделяющие и невыделяющие	однозначная	»
Совмещающие	»	однозначная

(у частных) до однозначной у совмещающих суждений. Образование исключающих и выделяющих (соответственно, невыделяющих) суждений в этой схеме представляет собой как бы промежуточные ступени между исходными, обычными суждениями и совмещающими суждениями. В соответствии с тем, что однозначная основа является предельной для любого суждения, назовем все суждения с однозначной основой *предельными*.

28. Обращение совмещающих и вообще всех предельных суждений. Обращение совмещающих суждений вследствие однозначности их основы становится вполне определенным. Те совмещающие суждения, в которых признак a встречается только в одной фазе, т. е. I_4 и O_4, при обращении дают однозначное решение, а именно обращаются в суждение A_1 с фазовой формулой $\underline{a}b + b$; отсюда схемы их обращения будут следующими: $I_4 \rightsquigarrow A_1$ и $O_4 \rightsquigarrow A_1$. Те же совмещающие суждения, в которых признак a встречается в двух фазах, т. е. I_3 и O_3, при обращении дают двузначное решение в зависимости от того, делается ли ударение на признак a в фазе $\underline{a}b$ или в фазе $\underline{a}$, где a находится в свободном виде. В первом случае получается суждение I_3, во втором — суждение O_3. Соответствующие схемы обращения будут таковы:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & I_3 & & & I_3 \\ I_3 \arrow[ur, squiggly] \arrow[dr, squiggly] & & \text{и} & O_3 \arrow[ur, squiggly] \arrow[dr, squiggly] & \\ & O_3 & & & O_3. \end{tikzcd}$$

Если свести воедино все схемы обращения предельных суждений, т. е. суждений с однозначной основой, то получим следующую сводную схему:

$$A_1 \rightsquigarrow \begin{cases} I_4 \\ O_4 \end{cases}$$

$$A_2 \rightsquigarrow A_2$$

$$I_3 \rightsquigarrow \begin{cases} I_3 \\ O_3 \end{cases}$$

$$I_4 \rightsquigarrow A_1$$

$$O_3 \rightsquigarrow \begin{cases} I_3 \\ O_3 \end{cases}$$

$$O_4 \rightsquigarrow A_1$$

$$E_5 \rightsquigarrow E_5$$

$$E_0 \rightsquigarrow E_0$$

при упрощении это превращается в следующую схему (здесь знак $\asymp$ означает, что каждое из суждений I_3 и O_3 дает при обращении оба эти же суждения I_3 и O_3; а знак $\sim\sim$ означает, что обращение суждений взаимно):

$$A_1 \rightsquigarrow \begin{cases} I_4 \\ O_4 \end{cases}$$

$$A_2 \sim\sim A_2$$

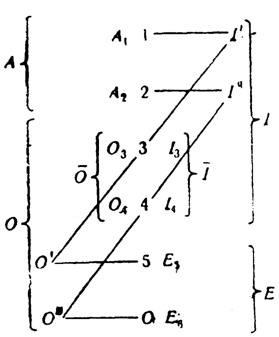
$$\begin{matrix} I_3 & \asymp & I_3 \\ O_3 & & O_3 \end{matrix}$$

$$E_5 \sim\sim E_5$$

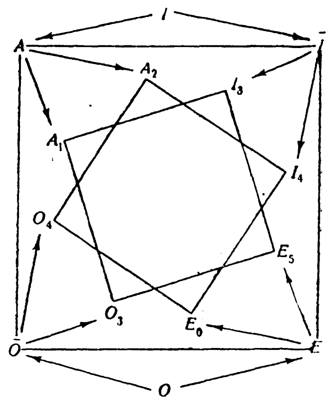
$$E_0 \sim\sim E_0$$

Таким образом, из восьми предельных суждений три невыделяющих суждения (A_1, I_3 и O_3) дают при обращении двузначное решение, а остальные пять суждений — однозначное решение.

29. Отношения между предельными и прочими суждениями. Совмещение двух двойных логических квадратов. В результате образования предельных суждений, в том числе совмещающих (I_3, I_4, O_3, O_4), возникают определенные отклонения как между самими предельными суждениями, так между ними и прочими суждениями, в том числе обычными (A, I, O, E). В фазовом выражении отношения между названными суждениями можно представить следующим образом:

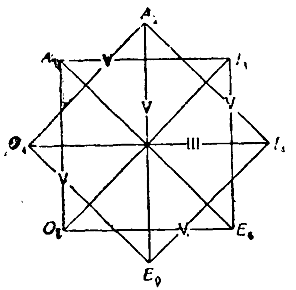


откуда получается следующая фигура (здесь стрелками, как и прежде, указано, что из I выделились A и $\bar{I}$, из O — E и $\bar{O}$; в свою очередь из A выделились A_1 и A_2 и т. д.):

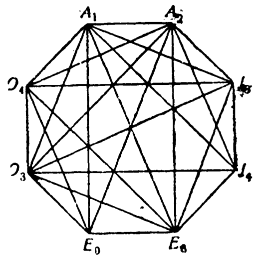


Совмещение обоих принципов пересмотра традиционной теории суждения (т. е. принципов образования исключающих и выделяющих суждений) находит свое отражение в своеобразном наложении (совмещении) двух внутренних логических квадратов, которые возникают у четырех выделяющих и, соответственно, у четырех невыделяющих суждений. Оба внутренние квадрата образуются из внешнего, составленного суждениями A, $\bar{I}$, $\bar{O}$ и E, путем попеременного наложения условия $a=0$ (образуется квадрат $A_2—I_4 — E_0—O_4$) и условия $a \neq 0$ (образуется квадрат $A_1 — I_3 — E_5 — O_3$).

Отношения между восемью предельными суждениями, из которых образуются оба наложенных (совмещенных) квадрата, таковы:



Если соединить подряд все углы обоих квадратов в порядке A_1, A_2, I_3, I_4, E_5 и т. д., то получится восьмиугольник, стороны которого будут выражать одно и то же отношение независимости (V). То же отношение (V) получится, если соединить точку A_1 с I_4 и E_0, точку A_2 — с E_5 и O_3 и т. д.:



Резюмируя сказанное относительно предельных, в том числе совмещающих суждений (I_3, I_4, O_3, O_4), получаем следующую таблицу (см. табл. 7).

Табл. 7 является сведением воедино данных, содержавшихся во всех шести предыдущих таблицах. Она выражает логический предел, до которого может быть и должен быть доведен пересмотр трационной теории простейших суждений.

VII. Логическая система простейших суждений в их фазовом выражении

30. А н а л и т и ч е с к и й п о д х о д к п р о с т е й ш и м с у ж д е н и я м и и х о т л и ч и т е л ь н ы м п р и з н а к а м. До сих пор, говоря о пересмотре традиционной теории суждения, мы по существу самого дела придерживались генетического подхода. Мы начали с обычной, расширительной трактовки суждений (A, I, O, E); затем рассмотрели предпринятые уточнения суждений в современной формальной логике ($\bar{I}$ и $\bar{O}$, с одной стороны; I', I'' и т. д., с другой); в заключение речь шла о доведении до логического предела указанных уточнений. Таким образом, мы в общем следовали историческому развитию логической мысли в ее связи с теорией простейших суждений. Отсюда, в частности, произошло то излишнее нагромождение терминов и формулировок, которые

Таблица 7

Предельные суждения и их обращение

Виды предельных суждений	Их отличительный признак	№	Фазовая формула суждений	Формулы обращенных суждений	№	Их отличительные признаки	Схема обращения
Невыделяющее общеутвердительное A_1	$b = 0; a \neq 0$	(1)	$a\underline{b} + a$	$\begin{cases} ab + a \\ \bar{a}b + \underline{a} \end{cases}$	(4) (4)	$\left.\begin{matrix} ab \neq 0; b = 0 \\ a \neq 0; b = 0 \end{matrix}\right\}$	$A_1 \rightsquigarrow \begin{matrix} I_4 \\ O_4 \end{matrix}$
Выделяющее общеутвердительное A_2	$b = 0; a = 0$	(2)	$a\underline{b}$	$\underline{a}b$	(2)	$a = 0; b = 0$	$A_2 \rightsquigarrow A_2$
Исключающе-невыделяющее частноутвердительное I_3	$\begin{cases} ab \neq 0; b \neq 0 \\ a = 0 \end{cases}$	(3)	$a\underline{b} + a + b$	$\begin{cases} ab+a+b \\ \bar{a}b+\underline{a}+b \end{cases}$	(3) (3)	$\left.\begin{matrix} ab\neq0;\ b\neq0;\ a\neq0 \\ b\neq0;\ ab\neq0;\ a\neq0 \end{matrix}\right\}$	$I_3 \rightsquigarrow \begin{matrix} I_3 \\ O_3 \end{matrix}$
Исключающе-выделяющее частноутвердительное I_4	$\begin{cases} ab \neq 0;\ b \neq 0; \\ a = 0 \end{cases}$	(4)	$a\underline{b} + b$	$\underline{a}b + b$	(1)	$a = 0;\ b \neq 0$	$I_4 \rightsquigarrow A_1$
Исключающе-невыделяющее частноотрицательное O_3	$\begin{cases} b \neq 0;\ ab \neq 0; \\ a = 0 \end{cases}$	(3)	$ab + a + \underline{b}$	$\begin{cases} ab+a+b \\ \bar{a}b+\underline{a}+b \end{cases}$	(3) (3)	$\left.\begin{matrix} ab\neq0;\ b\neq0;\ a\neq0 \\ b\neq0;\ ab\neq0;\ a\neq0 \end{matrix}\right\}$	$O_3 \rightsquigarrow \begin{matrix} I_3 \\ O_2 \end{matrix}$
Исключающе-выделяющее частноотрицательное O_4	$\begin{cases} b \neq 0;\ ab \neq 0; \\ a = 0 \end{cases}$	(4)	$ab + \underline{b}$	$\underline{a}b + b$	(1)	$a = 0; b \neq 0$	$O_4 \rightsquigarrow A_1$
Невыделяющее общеотрицательное E_5	$ab = 0;\ a \neq 0$	(5)	$a + \underline{b}$	$\underline{a} + b$	(5)	$ab = 0; b \neq 0$	$E_5 \rightsquigarrow E_5$
Выделяющее общеотрицательное, или суждение экзистенциальности, E_0	$ab = 0;\ a = 0$	(0)	$\underline{b}$	$\underline{b}$	(0)	$ab=0;\ a=0$	$E_0 \rightsquigarrow E_0$

отразили собой исторический ход пересмотра традиционной теории суждения. Рациональная терминология, как и везде в формальной логике, должна здесь основываться на аналитическом подходе к изучаемым формам мышления, т. е. *на анализе логического состава суждений.*

Важнейший вывод, полученный нами при анализе простейших суждений и подтвержденный во всех без исключения случаях, состоит в том, *что имеется прямая связь между характером суждения и видом отношения между двумя понятиями и что эта связь отражена в фазовой формуле суждения.*

Мы видим, что по мере уточнения суждений увеличивалось число отличительных признаков у каждого из них. У обычных суждений имелось всего по *одному* отличительному признаку $b = 0$ (A); $ab \neq 0$ (I); $b \neq 0 (O)$; $ab = 0$ (E). У исключающих суждений число их возросло до *двух*: $ab \neq 0$; $b \neq 0$ $(\bar{I})$; $b \neq 0$; $ab \neq 0\,(\bar{O})$. У невыделяющих и выделяющих суждений оно также возросло до *двух*: $b = 0$; $a \neq 0$ (A_1); $b = 0$; $a = 0$ (A_2); $ab \neq 0$; $a \neq 0$ (I'); $ab \neq 0$; $a = 0$ (I''); $b \neq 0$; $a \neq 0$ (O'); $b \neq 0$; $a = 0$ (O''); $ab = 0$; $a \neq 0$ (E_5); $ab = 0$; $a = 0$ (E_0). У совмещающих суждений оно достигло *трех*, и это, как увидим ниже, является предельным в данных условиях значением: $ab = 0$; $b \neq 0$; $a \neq 0$ (I_3); $ab \neq 0$; $b \neq 0$; $a = 0$ (I_4); $b \neq 0$; $ab \neq 0$; $a \neq 0 (O_3)$; $b \neq 0$; $ab \neq 0$; $a = 0$ (O_4).

Ход пересмотра традиционной теории суждений можно с этой стороны представить как постепенное возрастание числа отличительных признаков у суждений. Число таких признаков у каждого из суждений было:

$$\begin{array}{ll}
\text{по одному — у} & \quad A \quad I \quad O \quad E; \\
\text{по два — у} & \begin{cases} \quad\;\; \bar{I} \quad \bar{O} \\ A_1 \quad I' \quad O' \quad E_5 \\ A_2 \quad I'' \quad O'' \quad E_0 \end{cases} \\
\text{по три — у} & \quad\;\; I_3 I_4 \; O_3 O_4
\end{array}$$

Число три в применении к определяющим признакам простейших суждений не является случайным. Оно вполне закономерно определяется как предельное на основании самой структуры фазовой формулы. Как уже говорилось выше, при наличии двух понятий (А и В) с соответствующими признаками a и b (а мы до сих пор ограничивались рассмотрением лишь простейших из таких суждений) возможны три, и только три, различные фазы состава ab, a и b. Различными их сочетаниями с учетом различного ударения на признак b получалось восемь различных суждений (включая суждение экзистенциальности). Определенность каждого суждения состояла, очевидно, в указании на его отношение к каждой из трех перечисленных фаз — ее присутствие (т. е. неравенство нулю) или отсутствие (т. е. равенство нулю), а также на ударность признака b, заключенного в ней. Тем самым особенность каждого суждения по необходимости должна была выразиться в наборе именно трех отличительных признаков, или условий, каждое из которых определяло собой присутствие ($\neq 0$) или отсутствие ($= 0$) каждой отдельной фазы. В тех случаях, когда исключение одной фазы (например, ab) предполагает автоматически наличие другой (в данном случае b), число отличительных признаков могло уменьшиться до двух (у A_1, A_2, E_5 и E_0), но в пределе их число определялось тремя (по числу членов фазовой формулы). Это можно записать так: отличительные признаки предельных суждений с соответствующими фазовыми формулами таковы:

A_1 (с формулой	$a\underline{b} + a$)	— $b = 0$;	$a \neq 0$;	$(ab \neq 0)$.
A_2 (»	$a\bar{b}$)	— $b = 0$;	$a = 0$;	$(ab \neq 0)$.
I_3 (»	$a\bar{b} + a + b$)	— $ab \neq 0$;	$b \neq 0$;	$a \neq 0$.
I_4 (»	$a\bar{b} + b$)	— $ab \neq 0$;	$b \neq 0$;	$a = 0$.
O_3 (»	$a\bar{b} + a + \underline{b}$)	— $b \neq 0$;	$ab \neq 0$;	$a \neq 0$.
O_4 (»	$ab + b$)	— $b \neq 0$;	$ab \neq 0$;	$a = 0$.
E_5 (»	$a + \bar{b}$)	— $ab = 0$;	$a \neq 0$;	$(b \neq 0)$.
E_0 (»	$\underline{\bar{b}}$)	— $ab = 0$;	$a = 0$;	$(b \neq 0)$.

В скобках указаны условия, которые определены предшествующими двумя условиями. Это — те фазы, которые содержат в себе ударный признак b, служащий субъектом суждения. Очевидно, что без субъекта (его функцию и выполняет ударная часть признака b) нет и не может быть суждения о каком-либо предмете (т. е. субъекте). Но если признак b исключен из одной фазы (из $b = 0$ в случае A_1 и A_2 или из $ab = 0$ в случае

E_5 и E_0), то, естественно, он должен уже обязательно присутствовать во второй фазе, содержащей этот признак (в $ab \neq 0$ в случае A_1 и A_2 или в $b \neq 0$ в случае E_5 и E_0).

31. Общие признаки простейших суждений и их систематизация. Каждый вид суждений имеет общие признаки, свойственные сходным с ним другим видам суждений. Например, для всех выделяющих суждений характерен общий признак — отсутствие фазы a ($a = 0$) (см. табл. 4), а для всех невыделяющих суждений — тоже общий признак — ее присутствие ($a \neq 0$) (см. табл. 5). Попробуем систематизировать все такого рода общие признаки, характерные для различных групп суждений.

1) *Утвердительные и отрицательные суждения.* (*Ударная часть признака* b). Когда дана ударная часть признака b в качестве субъекта суждения, прежде всего, естественно, надлежит выяснить, в каком отношении ударная часть признака b находится с другим признаком (a); иначе говоря, на какое b приходится в данном случае ударение: на b, соединенное с a, т. е. находящееся в фазе ab, или не соединенное с a, т. е. находящееся в свободной фазе $\overline{b}$. В первом случае получаются все утвердительные суждения, так как единственное, чтó можно сказать о b в этом случае, это то, что b *соединен* с a (т. е. $ab \neq 0$); во втором случае получаются все отрицательные суждения, так как единственное, чтó можно сказать в соответствующем случае о b, это то, что имеется b, *не соединенное* с a (т. е. $b \neq 0$). Таким образом получаются общие признаки для утвердительных ($ab \neq 0$) и отрицательных ($b \neq 0$) суждений. В словесной форме соответствующие суждения могут быть сформулированы следующим образом: для утвердительных суждений имеется b, соединенное с a, т. е. имеется фаза ab ($ab \neq 0$), или: «Во всяком случае некоторые S суть P»; для отрицательных суждений имеется b, не соединенное с a, т. е. имеется фаза b ($b \neq 0$), или: «Во всяком случае некоторые S не суть P». Хотя слово «некоторые» создает видимость того, что это суждение частное, но добавление «во всяком случае» подчеркивает, что речь идет не только о частных суждениях, но что такой формулой охватываются и общие суждения; короче говоря, добавление «во всяком случае» указывает, что вопрос

о том, является ли данное суждение общим или частным, пока остается еще открытым.

2) *Общие и частные суждения.* (*Неударная часть признака* b). После того как выяснено, в какой фазе (ab или b) находится ударная часть признака b (т. е. субъект суждения), логично выяснить, имеется ли, кроме того, неударная часть этого же признака (b). Очевидно, что для утвердительных суждений (когда $ab \neq 0$) речь идет о том, имеется ли свободная фаза b, а для отрицательных суждений (когда $b \neq 0$) — имеется ли фаза ab, так как иным способом неударная часть признака b не может быть представлена при данных обстоятельствах. В первом случае (когда $ab \neq 0$) возможно, таким образом, двоякое решение: $b = 0$ (для общего, т. е. общеутвердительного, суждения) и $b \neq 0$ (для частного, т. е. частноутвердительного, суждения). Во втором случае (когда $b \neq 0$) возможно также двоякое решение: $ab = 0$ (для общего, т. е. в данном случае общеотрицательного, суждения) и $ab \neq 0$ (для частного, т. е. частноотрицательного, суждения). Следовательно, общим признаком всех *общих* суждений служит то, что признак b встречается лишь в *одной* какой-либо фазе (ab или b), так что вторая фаза, содержащая неударную часть этого же признака, отсутствует ($b = 0$ или, соответственно, $ab = 0$). Общим же признаком всех действительно *частных* суждений является то, что признак b встречается обязательно в двух фазах (ab и b), так что, кроме ударной его части (ab или b), здесь представлена еще и неударная его часть ($b \neq 0$ или, соответственно, $ab \neq 0$). Поскольку суждения, обычно именуемые частными (I и O), оказываются вовсе не частными, а утвердительными или отрицательными и только, мы будем их в дальнейшем так и называть и обозначать соединенными символами соответствующих суждений: утвердительные — через символы $[AI]$ или $[+]$, взятые в квадратные скобки; отрицательные — через $[OE]$ или $[-]$, также взятые в квадратные скобки. В таком случае общие суждения, как и прежде, будут обозначаться через A и E, а частные, которые по нынешней терминологии именуются исключающими, мы будем обозначать через $\bar{I}$ и $\bar{O}$, но именовать просто частными (без добавления слова «исключающие»).

3) *Невыделяющие и выделяющие суждения.* (*Свободная часть признака a*). Теперь, когда выяснены все возможности относительно взаимоотношения ударной и неударной частей признака b с признаком a, логично выяснить, имеется ли в данном случае или нет свободная (не связанная с b) часть признака a. Соответственно предыдущему получаем в каждом случае по два решения: $a \neq 0$ (все невыделяющие суждения) и $a = 0$ (все выделяющие суждения). Так как невыделяющие суждения ($a \neq 0$) суть те, индексы у которых обладают нечетным характером (A_1, I_3, O_3, E_5, I', O'), мы для краткости будем называть их *нечетными* суждениями (вместо невыделяющие); точно так же выделяющие суждения ($a = 0$), индексы у которых четные (A_2, I_4, O_0, E_0, I'', O''), мы назовем *четными* суждениями (вместо выделяющие). Эта новая терминология носит ясно выраженный фазовый характер и прямо отражает связь простейших суждений с отношениями между двумя понятиями (см. табл. 1).

Если суждения предварительно разделены не только на утвердительные [AI] и отрицательные [OE], но и на общие (A и E) и частные (I и O), то последующее их деление на четные ($a = 0$) и нечетные ($a \neq 0$) дает сразу предельные суждения (A_1, A_2, I_3, I_4, O_3, O_4, E_5, E_0). Но если мы попытаемся разделить суждения на четные и нечетные непосредственно после деления их на утвердительные и отрицательные, то получим нечетно- и четноутвердительные, которые обозначим через символ [AI] с одним и двумя штрихами [AI]$'$ и [AI]$''$ или [+]$'$ и [+]$''$, и, соответственно, нечетно- и четноотрицательные, которые обозначим через символ [OE] с одним и двумя штрихами [OE]$'$ и [OE]$''$ или [—]$'$ и [—]$''$. Очевидно, что в данном случае получаются как раз те суждения, которые мы до сих пор именовали невыделяющими и выделяющими частноутвердительными (I' и I'') и частноотрицательными (O' и O'') суждениями. В действительности же вопрос о том, являются ли они частными или общими, здесь остается открытым. Установлено лишь то, что одни из них — утвердительные [AI], другие — отрицательные [OE]. Поэтому впредь мы будем именовать их короче — нечетно- и четноутвердительными и, соответственно, нечетно- и четноотрицательными. Деление их на общие и частные даст те же восемь предельных суждений, что и раньше.

32. Табличное выражение системы простейших суждений Все только что сказанное может быть сведено в две таблицы, различающиеся тем, что в одном случае вторым делением является деление на общие и частные суждения (табл. 8), а в другом — деление на нечетные и четные (табл. 9).

Таблица 8

Первый вариант логической системы простейших суждений

Принцип деления	Ход деления							
Дан субъект (ударная часть признака b) . . .	имеется суждение							
Первое деление (на утвердительные и отрицательные)	утвердительное [AI]				отрицательное [OE]			
Где заключена ударная часть признака b — в соединении b с a (в ab) или в свободной фазе ($\bar{b}$)?	в ab ($ab \neq 0$)				в $\bar{b}$ ($\bar{b} \neq 0$)			
Второе деление (на общие и частные)	общее A		частное $\bar{I}$		частное $\bar{O}$		общее E	
Имеется или нет неударная часть признака b в свободной фазе ($\bar{b}$) или в соединении с a (т. е. в ab)?	нет ($b = 0$)		да ($b \neq 0$)		да ($ab \neq 0$)		нет ($ab = 0$)	
Третье деление (на нечетные и четные)	нечетное A_1	четное A_2	нечетное I_3	четное I_4	нечетное O_3	четное O_4	нечетное E_5	четное E_6
Имеется или нет свободный член a?	да ($a \neq 0$)	нет ($a = 0$)	да ($a \neq 0$)	нет ($a = 0$)	да ($a \neq 0$)	нет ($a = 0$)	да ($a \neq 0$)	нет ($a = 0$)

Если же вторым делением будет деление на нечетные и четные суждения, а третьим—деление на общие и частные суждения, то получится несколько иной вариант той же логической системы простейших суждений.

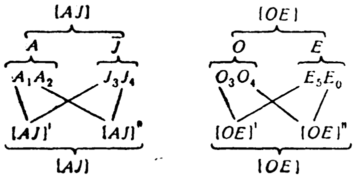
Таблица 9

Второй вариант логической системы простейших суждений

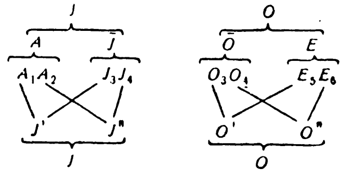
Принцип деления	Ход деления							
Дан субъект . .	имеется суждение							
Первое деление Где заключена ударная часть признака b — в ab или $\underline{b}$?	утвердительное $[AI]$ в ab $(a\underline{b} \neq 0)$				отрицательное $[OE]$ в $\underline{b}$ $(b \neq 0)$			
Второе деление Имеется или нет свободный член a?	нечетное $[AI]'$ да $(a \neq 0)$		четное $[AI]''$ нет $(a = 0)$		нечетное $[OE]'$ да $(a \neq 0)$		четное $[OE]''$ нет $(a = 0)$	
Третье деление Имеется или нет неударная часть признака b (в b или ab)?	общее A_1 нет $b = 0$	частное I_3 да $b \neq 0$	общее A_2 нет $b = 0$	частное I_4 да $b \neq 0$	частное O_3 да $ab \neq 0$	общее E_5 нет $ab = 0$	частное O_4 да $ab \neq 0$	общее E_0 нет $ab = 0$

Анализируя табл. 8 и 9, мы обнаруживаем, что обе они построены дихотомически: деление осуществляется каждый раз на два взаимоисключающие класса (или группы); так, сначала все суждения делятся на две группы: утвердительные и отрицательные. Затем каждая группа делится в свою очередь на две подгруппы: либо общие и частные суждения (табл. 8), либо нечетные и четные (табл. 9). Наконец, каждая подгруппа делится вновь на две части: нечетные и четные суждения (табл. 8) или, соответственно, общие и частные суждения (табл. 9). Таким образом, общим признаком тех или иных суждений служит отдельная фаза или определенная комбинация фаз, повторяющаяся во всех случаях, охватываемых данным видом суждений: она либо везде присутствует, либо везде отсутствует.

Соединяя вместе обе таблицы (табл. 8 и 9), получим следующую схему взаимоотношений всех простейших суждений:



чему соответствует по ранее принятой символике следующая схема:



Эта схема является выражением логической системы простейших суждений в обоих ее вариантах (см. табл. 8 и 9) и обоих, в итоге сливающихся воедино, направлений пересмотра традиционной теории суждения.

Изложенное выше может быть обобщено в сводной таблице (табл. 10), где номера по-прежнему выражают собой отноше-

Таблица 10

Сводный вариант логической системы простейших суждений

Суждения	Первое деление: утвердительные [AI] $a\underline{b} \neq 0$			отрицательные [OE] $\underline{b} \neq 0$			Суждения
Второе (или третье) деление	Третье (или второе) деление						
	№	нечетные [AI]' $a \neq 0$	четные [AI]'' $a = 0$	нечетные [OE]' $a \neq 0$	четные [OE]" $a = 0$	№	
Общие (A)	1	(A_1)		(E_5)		5	Общие (E)
$b = 0$	2		(A_2)		(E_0)	0	$a\underline{b} \neq 0$
Частные ($\bar{I}$)	3	(I_3)		(O_3)		3	Частные ($\bar{O}$)
$b \neq 0$	4		(I_4)		(O_4)	4	$ab \neq 0$

ния между двумя понятиями (см. табл. 1), которые служат фазовой основой каждого из суждений, а в скобках указаны символы соответствующих суждений.

Следуя после первого деления к делению на общие и частные суждения, а затем — нечетные и четные $\left(\text{по схеме } \frac{[AI]}{[OE]} \rightarrow \frac{A \mid \bar{I}}{\bar{O} \mid E}\right)$, получаем первый вариант логической системы простейших суждений; следуя же после первого деления к делению на нечетные и четные суждения, а затем уже на общие и частные (по схеме $\frac{[AI]}{[OE]} \rightarrow \frac{[AI]' \mid [AI]''}{[OE]' \mid [OE]''}$), получаем ее второй вариант. Таким образом, табл. 10 соединяет в себе обе предыдущие.

Схематически основу логической системы, заключенной в сводной табл. 10, можно представить следующим образом:

$$\begin{array}{llcll}
 & ab \neq 0 & & b \neq 0 & \\
\bar{b} = 0 & \left\{\begin{array}{l}1\\2\end{array}\right. & & \left.\begin{array}{r} \\ \\ 3\\4\end{array}\right\} & ab \neq 0 \\
b \neq 0 & \left\{\begin{array}{l}3\\4\\ \\ \\ \end{array}\right. & & \left.\begin{array}{r}5\\0\end{array}\right\} & ab = 0
\end{array}$$

33. **Соотношения между простейшими суждениями различных видов.** Из анализа трех последовательных делений по дихотомической схеме всех суждений на утвердительные и отрицательные и т. д. получаются весьма простые отношения между различными видами простейших суждений; при этом каждое более широкое (подвергавшееся делению) суждение выступает как сумма двух более узких суждений (образующихся при делении более широкого). Если обозначить все суждения S — P знаком $[AIOE]$, то получим следующие соотношения (в круглых скобках указываются те же соотношения в ранее принятой символике):

$$[AIOE] = [AI] + [OE] \qquad (S - P = I + O);$$
$$[AI] = A + \bar{I} \quad (I = A + \bar{I}); \; [OE] = \bar{O} + E \quad (O = \bar{O} + E);$$
$$[AI] = [AI]' + [AI]'' \, (I = I' + I'');$$
$$[OE] = [OE]' + [OE]'' \quad (O = O' + O'');$$

$$A = A_1 + A_2;\ \bar{I} = I_3 + I_4;\ \bar{O} = O_3 + O_4;\ E = E_5 + E_0;$$
$$[AI]' = A_1 + I_3;\ [AI]'' = A_2 + I_4;$$
$$[OE]' = O_3 + E_5;\ [OE]'' = O_4 + E_0.$$

Все эти соотношения можно представить более конкретно, если после каждого символа суждений записать фазовые формулы, которые охватываются данным суждением. Тогда яснее выступит самая суть процесса деления более широкого суждения на два более узких (в круглых скобках, как и прежде, здесь указаны номера отношений между двумя суждениями согласно табл. 1):

$$\{[AIOE]\colon\ a\underline{b} + a;\ a\underline{b};\ a\underline{b} + a + b;\ a\underline{b} + b;\ ab + a + \underline{b};\ ab + \underline{b};$$
$$a + \underline{b};\ \underline{b}\,(1, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 0)\} = \{[AI]\colon a\underline{b} + a;\ a\underline{b};\ a\underline{b} + a + b;$$
$$\underline{a}b + b\,(1, 2, 3, 4)\} + \{[OE]\colon ab + a + \underline{b};\ ab + \underline{b};\ a + \underline{b};\ \underline{b}\,(3, 4, 5, 0)\};$$
$$\{[AI]\colon a\underline{b} + a;\ a\underline{b};\ a\underline{b} + a + b;\ a\underline{b} + b\ (1, 2, 3, 4)\} =$$
$$= \{A\colon\ a\underline{b} + a;\ a\underline{b}\,(1,2)\} + \{I\colon a\underline{b} + a + b;\ a\underline{b} + b\ (3,4)\};$$
$$\{[OE]\colon ab + a + \underline{b};\ ab + \underline{b};\ a + \underline{b};\ \underline{b}\ (3, 4, 5, 0)\} =$$
$$= \{\bar{O}\colon\ ab + a + \underline{b};\ ab + \underline{b};\ (3, 4)\} + \{E\colon\ a + \underline{b};\ \underline{b}\ (5, 0)\};$$
$$\{[AI]\colon\ a\underline{b} + a;\ a\underline{b};\ a\underline{b} + a + b;\ a\underline{b} + b\ (1, 2, 3, 4)\} = \{[AI]';$$
$$\underline{a}b + a;\ ab + a + b\ (1, 3)\} + \{[AI]''\colon\ a\underline{b};\ a\underline{b} + b\ (2, 4)\};$$
$$\{[OE]\colon\ ab + a + \underline{b};\ ab + \underline{b};\ a + \underline{b};\ \underline{b}\,(3, 4, 5, 0)\} =$$
$$= \{[OE]'\colon\ ab + a + \underline{b};\ a + \underline{b}\ (3, 5)\} + \{[OE]''\colon\ ab + \underline{b};\ \underline{b}\ (4,\ 0)\};$$
$$\{A\colon\ a\underline{b} + a;\ a\underline{b}\,(1, 2)\} = \{A_1\colon\ a\underline{b} + a\ (1)\} + \{A_2\colon\ a\underline{b}\ (2)\};$$
$$\{I\colon\ a\underline{b}+a+b;\ a\underline{b}+b\,(3,\ 4)\}=\{I_3\colon a\underline{b}+a+b\ (3)\}+\{I_4\colon a\underline{b}+b\ (4)\};$$
$$\{\bar{O}\colon\ ab+a+\underline{b};\ ab+\underline{b}\ (3, 4)\}=\{O_3\colon\ ab+a+\underline{b}\ (3)\}+\{O_4\colon ab+\underline{b}\,(4)\};$$
$$\{E\colon\ a + \underline{b};\ \underline{b}\ (5, 0)\} = \{E_5\colon\ a + \underline{b}\ (5)\} + \{E_0\colon\ \underline{b}\ (0)\};$$
$$\{[AI]'\colon\ a\underline{b} + a;\ a\underline{b} + a + b\,(1, 3)\} = \{A_1\colon\ a\underline{b} + a\,(1)\} +$$
$$+ \{I_3\colon\ a\underline{b} + a + b\ (3)\};$$
$$\{[AI]''\colon\ a\underline{b};\ a\underline{b} + b\ (2,4)\} =$$
$$= \{A_2\colon\ a\underline{b}\ (2)\} + \{I_4\colon\ a\underline{b} + b\ (4)\};$$
$$\{[OE]'\colon\ ab + a + \underline{b};\ a + \underline{b}\ (3, 5)\} =$$
$$= \{O_3\colon\ ab + a + \underline{b}\ (3)\} + \{E_5\colon\ a + \underline{b}\ (5)\};$$
$$\{[OE]''\colon\ ab + \underline{b};\ \underline{b}\ (4, 0)\} = \{O_4\colon\ ab + \underline{b}\ (4)\} + \{E_0\colon\ \underline{b}\ (0)\}.$$

Таким образом, анализ фазовых формул и сокращения их числа при делении более широких суждений на более узкие по дихотомической схеме позволяет глубже и конкретнее проникнуть в самую суть (в самый «логизм») этой операции, лежащей в основе всей классификации простейших суждений.

VIII. Логическая система простейших суждений

34. Анализ формулировок простейших суждений в их словесном выражении. Рассмотрим словесное выражение отдельных видов простейших суждений, следуя первому варианту их логической системы (см. табл. 8).

Первое деление находит словесное выражение в характеристике *связки* между S и P; утвердительное суждение гласит «S *есть* P», отрицательное — «S *не есть* P». Следовательно, общий признак $a\bar{b} \neq 0$ (для первого суждения) означает, что ударная часть b *связана с* a (b *есть* a), тогда как общий признак $b \neq 0$ (для второго суждения) означает, что эта ударная часть b *не связана с* a (b *не есть* a).

Второе деление находит словесное выражение в характеристике субъекта S: общее суждение гласит «*Все* S суть (или, соответственно, не суть) P», частное — «*Некоторые*, но не все, S суть (или, соответственно, не суть) P». Следовательно, общий признак $\bar{b} = 0$ (для общеутвердительного суждения) и, соответственно, $a\bar{b} = 0$ (для общеотрицательного суждения) означает, что неударная часть $\bar{b}$ в данном случае отсутствует, а потому *все* элементы b связаны (или, соответственно, не связаны) с a. Другими словами, общее суждение со словесной характеристикой его субъекта («все S») означает, что признак b сосредоточен только в *одной фазе* и что поэтому все его элементы оказываются *ударными*.

Аналогично этому общий признак $\bar{b} \neq 0$ (для частноутвердительного суждения) и, соответственно, $a\bar{b} \neq 0$ (для частноотрицательного) означает, что, кроме ударной части признака b, присутствует еще и неударная его часть, а потому не все, а только *некоторые* элементы b связаны (или, соответственно, не связаны) с a. Иначе говоря, частное суждение со словесной характеристикой его субъекта («некоторые S») означает, что признак b распределен в двух фазах, а потому *не все* его элементы оказываются ударными. В связи с этим термин «некоторые S» употребляется здесь не в расширительном смысле («по крайней мере некоторые S»), а в узком и определенном смысле («некоторые, значит, не все S»).

Третье деление находит словесное выражение в характеристике предиката P: нечетное общеутвердительное суждение гласит «Не только все S суть P», четное — «Только все S суть P». Аналогично этому нечетное частноутвердительное гласит: «*Не только* некоторые S суть P», четное — «*Только* некоторые S суть P». Следовательно, общий признак $a \neq 0$ (для нечетных утвердительных суждений) означает, что *часть* элементов предиката (с признаком a) не соединена с b — отсюда подчеркивание: «*Не только* все (или, соответственно, некоторые) S суть P»; тогда как общий признак $a = 0$ (для четных утвердительных суждений) означает, что предикат P (представленный признаком a) *целиком* соединен с b — отсюда ограничение: «*Только* все (или, соответственно, некоторые) S суть P». Другими словами, в первом случае признак a присутствует в *двух* различных фазах (ab и a), во втором случае — в *одной*-единственной фазе (ab).

Точно так же обстоит дело с отрицательными суждениями, с той лишь разницей, что словесные оговорки «только» и «не только» относятся еще более явно к предикату: нечетное частноотрицательное суждение гласит: «Некоторые S не суть P, но не только S суть P», четное — «Некоторые S не суть P, но только S суть P». Аналогично этому нечетное общеотрицательное суждение гласит: «Все S не суть P {но не только S было бы P}, четное — {Все S не суть P, но только S было бы или есть P}. Следовательно, в данном случае общий признак $a \neq 0$ означает, что предикат (представленный признаком a) имеется — частично или полностью — в несоединенном с b виде — отсюда подчеркивание: «Все или, соответственно, некоторые S не суть P, но *не только* S есть или бывает P»); тогда как общий же признак $a = 0$ в данном случае означает, что предикат либо целиком соединен с субъектом, либо отсутствует вовсе (в суждении экзистенциальности) — отсюда ограничение: «Все или, соответственно, некоторые S не суть P, но *только* S бывает P». Иначе говоря, признак a в случае нечетноотрицательных суждений присутствует в одной или даже двух фазах, а в случае четноотрицательных — только в одной фазе или даже отсутствует вовсе.

Если же *вторым* делением будет служить деление на нечетные и четные суждения (см. второй вариант логической системы простейших суждений в табл. 9), то дополнительно получаются следующие словесные выражения для соответствующих суждений, относящиеся к характеристике предиката: нечетно- и четноутвердительные и нечетно- и четноотрицательные, когда, прежде чем характеризовать субъект, мы по сути дела характеризуем предикат; в таком случае утвердительные суждения гласят «*Не только* (или, соответственно, *только*) S есть P», а отрицательные — «S не есть P, но *не только* (или, соответственно, *только*) S бывает P».

Заметим, что в отношении обоих общеотрицательных суждений (нечетного и четного) словесная формулировка, приведенная выше, носит формальный, чисто условный характер; она лишь подчеркивает отсутствие фазы ab, а в случае суждения эксистенциальности — также и фазы a. В действительности же было бы нелепо говорить, например «все мужчины не женщины, но не только мужчины были бы женщинами» ($a + \underline{b}$), вместо того чтобы сказать просто «все мужчины не женщины», или же говорить «все мужчины не женщины, но только мужчины были бы женщинами», вместо того чтобы сказать просто «мужчины существуют». Поэтому ту часть словесной формулировки общеотрицательных суждений, которая имеет чисто условный, формальный характер, мы поставили выше в фигурные скобки, подчеркивая этим, что ее следует опустить и оставить лишь ту часть, которая имеет смысловой характер. Поэтому словесная формулировка нечетного общеотрицательного суждения гласит «Все S не суть P», а четного (т. е. суждения эксистенциальности) — «есть P».

35. Соответствие между словесными и фазовыми формулировками простейших суждений. С изложенной выше точки зрения глубже и полнее раскрывается общепринятая характеристика

суждений со стороны связки, субъекта и предиката. Когда дано какое-либо суждение, то это означает, что дан его субъект S и предикат P. Характеристика суждения состоит в последовательном раскрытии его формы, т. е. его структуры, и особенностей трех его структурных элементов: связки, субъекта и предиката. При этом возможны два различных решения:

Первое предполагает такую последовательность:

1) *связка* — 2) *субъект* — 3) *предикат*, что соответствует первому варианту логической системы простейших суждений (см. выше).

Второе решение предполагает несколько иную последовательность:

1) *связка* — 2) *предикат* — 3) *субъект*, что отвечает второму варианту указанной системы.

То и другое решения основываются на общей предпосылке о трехчленной структуре суждения, откуда логически вытекает необходимость трех последовательных делений самих суждений на разные классы (виды) в соответствии с выяснением характера их связки, их субъекта и предиката (или предиката и субъекта). В фазовом способе это обстоятельство находит свое адекватное выражение в том, что для характеристики любого суждения надо установить его фазовую формулу (т. е. формулу его фазового состава), а это означает необходимость выяснить наличие или отсутствие в его составе каждой из трех возможных фаз при заданных условиях: 1) ab, 2) b и 3) a, при одновременном учете ударной и неударной части признака b.

Таким образом, трехстепенность последовательного деления простейших суждений на различные классы или виды неслучайна; она имеет глубокое логическое оправдание в наличии структурной трехчленности простейших суждений, чему соответствует фазовая трехчленность состава этих суждений (наличие определенных фаз из *трех* возможных).

При всех условиях, когда даны S и P, *прежде всего нужно установить наличие определенной связи между ними*. Пока этого не сделано, нет еще самого суждения, а имеются налицо пока еще два (из трех необходимых) его структурных элемента. В фазовом способе это обстоятельство выражается в том, что когда даны два признака (*a* и *b*), то нужно выяснить их точные взаимные соотношения в данном суждении и прежде всего соотношение между ударной частью признака *b* и признаком *a*.

Отсюда следует, что всякая характеристика суждений *начинается с установления характера связки* между S и P, чему соответствует выяснение того, представлена ли ударная часть признака *b* в фазе $a\underline{b}$ или в фазе $\underline{b}$.

В результате получаем первое деление суждений (*по связке*) на утвердительные (с признаком $a\underline{b}$) и отрицательные (с признаком $\bar{b}$).

В дальнейшем открываются две возможности: характеризовать сначала субъект, а затем предикат или же сначала предикат, а затем субъект. В том и другом случае характеристика в конечном счете сводится к выяснению того, весь ли субъект или только часть его входит (соответственно, не входит) в предикат и, в свою очередь, весь ли предикат или только его часть входит (соответственно, не входит) в субъект.

В отношении субъекта в словесном выражении это обстоятельство формулируется как установление того, имеются ли «все S» или «некоторые S». В фазовом способе этому соответствует выяснение того, имеется ли в фазовом составе суждения, кроме ударной части признака *b*, его неударная часть, т. е. присутствует ли вторая фаза, содержащая признак *b*, кроме уже установленной: фаза *b*, когда установлено наличие $a\underline{b}$ (в случае утвердительных суждений),и фаза *ab*, когда установлено наличие $\underline{b}$ (в случае отрицательных суждений). В результате получается второе (при первом варианте) или третье (при втором варианте) деление суждений (*по субъекту*) на общие (когда неударная часть признака *b* отсутствует) и частные (когда она присутствует).

Наконец, в отношении предиката в словесном выражении указанное выше обстоятельство (его отношение к субъекту) формулируется как ограничение (соответственно, неограничение) субъекта словами «только» (соответственно, «не только»). В действительности же эти ограничительные (соответственно, неограничительные) термины относятся целиком к предикату, хотя с первого взгляда, если судить только по словесной форме суждения, они представляют собой уточненную характеристику субъекта (например, «Только все S суть P»). В фазовом способе этому как раз и соответствует выяснение того, присутствует ли в фазовом составе суждения свободный член a (тогда предикат входит в субъект только частью или не входит вовсе) или не присутствует (тогда предикат входит в субъект целиком или же отсутствует вовсе). В результате получаем третье (при первом варианте) или второе (при втором) деление суждений (*по предикату*) на невыделяющие, или нечетные (с признаком $a \neq 0$), и выделяющие, или четные (с признаком $a = 0$).

Обобщая соотношения между фазовыми и словесными выражениями простейших суждений, приходим к следующему сопоставлению:

выражение:	*означает, что признак:*	*содержится:*
«есть»	$\underline{b}$	в фазе $a\underline{b}$;
«не есть»	»	» » $\underline{b}$;
«все»	b	только в одной какой-либо фазе ($a\underline{b}$ или $\underline{b}$);
«некоторые»	»	в обеих фазах (ab и b);
«не только»	a	в фазе a и, может быть, в фазе ab;
«только»	»	либо только в фазе ab, либо отсутствует вовсе.

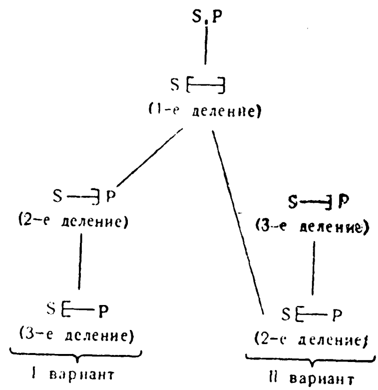
36. Систематизация словесных выражений простейших суждений. Сказанное выше можно представить схематически так, что при первом делении выясняется *общее соотношение между* S и P, которое мы изобразим тупой двусторонней стрелкой: S [—] P. При двух последующих делениях выясняется *отношение* S *к* P, которое мы изобразим тупой стрелкой: S—]P, и *отношение* P *к* S, которое мы изобразим обратно направленной тупой стрелкой: S[—P. В соответствии с этим составится следующая схема деления простейших суждений:

дано суждение:

характеризуется связка:

» субъект

» предикат



Все сказанное выше можно свести в следующую таблицу (см. табл. 11).

* * *

Этим мы заканчиваем статью 1, посвященную пересмотру традиционной теории суждения, который мы предприняли путем применения фазового способа к формальной логике. В статье 1 мы показали, что две существенные поправки введенные в свое время логиками к традиционной теории суждения в виде исключающих и выделяющих суждений, вытекают из некоторых общих положений, касающихся состава суждений. Обе названные поправки являются внутренне связанными одна с другой и представляют собой с точки зрения фазового способа лишь различные моменты или ступени процесса реформы традиционного учения о суждении, осуществляемой посредством последовательного устранения элементов неопределенности из простейших суждений. Продолжая тот путь реформы теории суждения, который начат с разных сторон введением исключающих и выделяющих суждений, и доводя этот путь до своего логического завершения в итоге статьи 1 мы пришли к выработке определенной логической системы простейших суждений, представленных как в их фазовом, так и обычном (словесном) выражении.

В статье 2 мы рассмотрим некоторые вопросы логики в их связи с указанной системой простейших суждений. В частности,

Варианты	Символ	Фазовые формулы	Фазовый признак	Словесное выражение	Символ	Фазовые формулы	Дополнительный фазовый признак
		1. Характеристика *связки* S [—] P				2. Характеристи-	
I	$[AI]$	$a\underline{b} + a$ $a\underline{b}$ $a\underline{b} + a + b$ $a\underline{b} + b$	$ab \neq 0$	S *есть* P	A	$a\underline{b} + a$ $a\underline{b}$	$b = 0$
					$\overline{I}$	$a\underline{b} + a + b$ $a\underline{b} + b$	$b \neq 0$
	$[OE]$	$ab + a + \underline{b}$ $ab + \underline{b}$ $a + \underline{b}$ $\underline{b}$	$b \neq 0$	S *не есть* P	$\overline{O}$	$a\underline{b} + a + b$ $ab + \underline{b}$	$ab \neq 0$
					E	$a + \underline{b}$ $\underline{b}$	$ab = 0$
		1. Характеристика *связки* S [—] P				2. Характери-	
II	$[AI]$	$a\underline{b} + a$ $a\underline{b} + a + b$ $a\underline{b}$ $a\underline{b} + b$	$a\underline{b} \neq 0$	S *есть* P	$[A\dot{J}]'$	$a\underline{b} + a$ $a\underline{b} + a + b$	$a \neq 0$
					$A\ \dot{j}]''$	$a\underline{b}$ $ab + b$	$a = 0$

ровок простейших суждений

Словесное выражение	Символ	Фазовая формула	Дополнительный фазовый признак	Словесное выражение
стика *субъекта* S —] P				3. Характеристика *предиката* S [— P
Все S суть P	A_1	$a\underline{b}+a$	$a\neq 0$	*Не только* все S суть P
	A_2	$a\underline{b}$	$a=0$	*Только* все S суть P
Некоторые S суть P	I_3	$a\underline{b}+a+b$	$a\neq 0$	*Не только* некоторые S суть P
	I_4	$a\underline{b}+b$	$a=0$	*Только* некоторые S суть P
Некоторые S не суть P	O_3	$ab+a+\underline{b}$	$a\neq 0$	Некоторые S не суть P, но *не только* S суть P
	O_4	$ab+\underline{b}$	$a=0$	Некоторые S не суть P, но *только* S есть P
Все S не суть P	E_5	$a+\underline{b}$	$a\neq 0$	Все S не суть P {но *не только* S было бы P }
	E_0	$\underline{b}$	$a=0$	{Все S не суть P, но *только* S было бы или} есть P
стика *предиката* S [— P				3. Характеристика *субъекта* субъекта S —] P
Не только S есть P	A_1	$a\underline{b}+a$	$b=0$	Не только все S суть P
	I_3	$a\underline{b}+a+b$	$b\neq 0$	Не только *некоторые* S суть P
Только S есть P	A_2	$a\underline{b}$	$b=0$	Только *все* S суть P
	I_4	$a\underline{b}+b$	$b\neq 0$	Только *некоторые* S суть P

Варианты	Символ	Фазовые формулы	Фазовый признак	Словесное выражение	Символ	Фазовые формулы	Дополнительный фазовый признак
II	$[OE]$	$ab+a+\underline{b}$	$\underline{b} \neq 0$	S *не есть* P	$[OE]'$	$ab+a+\underline{b}$	$a \neq 0$
		$a+\underline{b}$				$a+\underline{b}$	
		$ab+\underline{b}$			$[OE]''$	$ab+\underline{b}$	$a=0$
		$\underline{b}$				$\underline{b}$	

мы покажем значение этой системы для решения логических задач с точки зрения кибернетики, а также разберем случай о так называемых вопросительных суждениях.

Как следует из сказанного, предметом статей 1 и 2 служат исключительно простейшие суждения, основу которых составляет отношение только между двумя понятиями A и B (соответственно, двумя признаками a и b) и для которых принимается только один единственный тип связки, выражаемый словами «есть» («суть») и «не есть» («не суть»).

В статье 3 будут рассмотрены более сложные суждения с целью анализа различных типов связки, входящей в эти суждения, а также с целью выяснения отношений между тремя и большим числом понятий. В том же разрезе будут рассмотрены и другие вопросы. Анализ различных типов связки позволит, в частности, по новому осветить взаимоотношение между атрибутивной и объемной логикой, с одной стороны, и

Таблица 11 (продолжение)

Словесное выражение	Символ	Фазовая формула	Дополнительный фазовый признак	Словесное выражение
S не есть P, но *не только* S бывает P	O_3	$ab+a+\underline{b}$	$ab \neq 0$	*Некоторые* S не суть P, но не только S есть P
	E_5	$a+\underline{b}$	$ab=0$	*Все* S не суть P {но не только S было бы P}
S не есть P но *только* S бывает P	O_4	$ab+\underline{b}$	$ab \neq 0$	*Некоторые* S не суть P, но только S есть P
	E_0	$\underline{b}$	$ab \neq 0$	{*Все* S не суть P, но только S было бы или} есть P

логикой отношений, с другой, а также дать более развернутую трактовку суждению экзистенциальности. В итоге мы придем к выработке общей системы суждений, охватывающей не только одни простейшие из них, но и более сложные суждения.

Литература

1. П. Порецкий. Из области математической логики. «Физико-математический ежегодник», № 2, М. 1902.
2. Arnost Kolman. Kriticky vyklad symbolické metody moderné logiky. Orbis. Praha, 1948.
3. Jean Piaget Traité de Logique. Librairie Armand Colin. Paris, 1949.
4. П. В. Таванец. Вопросы теории суждения. М., 1955.
5. Г. И. Челпанов, Учебник логики. М., 1946.
6. В. Ф. Асмус. Логика. М., 1947.
7. К. С. Бакрадзе. Логика. Тбилиси, 1951.
8. А. В. Дроздов Вопросы классификации суждений. Л., 1956.
9. «Логические исследования». Сб. под ред. Кольмана и др. М., 1959.

Б. В. Бирюков

ТЕОРИЯ СМЫСЛА ГОТЛОБА ФРЕГЕ

Понятие *смысла* играет существенную роль в современной логике. С ним связано построение так называемых интенциональных логических исчислений, т. е. исчислений, в которых не действует *принцип объемности*. Такого рода исчисления преследуют цель выявить с помощью формальных средств *смысл* выражений некоторого вида обычного содержательного языка (например, исчисления строгой импликации имеют задачей выявить смысл таких выражений, как «*Б* следует из *А*», «из *А* логически вытекает *Б*»).

В то же время к понятию смысла прибегают и при изложении систем классической двузначной математической логики. Так поступают, например, Г. Гермес и Г. Шольц [23] и А. Чёрч [22]. В этом случае понятие *смысла языкового выражения* используется для того, чтобы сделать естественным переход от обычных языков, с которых, по обыкновению, начинают авторы во введениях, к формализованным. При этом оказывается, что понятие смысла, естественно возникающее при изучении обычных языков, является излишним в исчислениях, подобных тем, которые рассматриваются указанными авторами, в силу чего эти исчисления приобретают объемный характер (экстенциональная логика).

Известно, что понятие *смысла* впервые было подвергнуто тщательному анализу в работах выдающегося немецкого логика и математика Готлоба Фреге (1848—1925)[1]. Представляет интерес выяснить, что побудило Фреге ввести в свою логическую теорию это понятие и какую роль оно играет в его логике[2].

* * *

Одним из важнейших логических понятий является понятие *имени*. Это понятие давно употребляется не только в обычном языке,—из которого оно и заимствовано наукой,— не только в языкознании, но и в логике. Фреге так уточнил понятие имени, что последнее, сохранив свою близость к употреблению слова «имя» в обычной речи, стало одним из основных понятий математической логики. Это понятие—наряду с такими понятиями, как «предмет», «функция», «понятие» и некоторые другие—стояло в центре логических интересов выдающегося немецкого математика.

Фреге отказался от традиционного разделения имен на единичные и общие, но ввел различие имен предметов и имен функций. Это было связано с фрегевским пониманием *предмета*, согласно которому предмет —это то, что не есть функция. При этом Фреге рассматривал понятия как частный случай функций: понятие, с его точки зрения, есть такая функция, которая каждому аргументу ставит в соответствие либо истинность, либо ложность[3]. Поэтому выражения, обозначающие понятия (свойства), а также отношения, являются, по Фреге, частным случаем имен функций. Имена, обозначающие предметы, Фреге называет *собственными именами*, имена, обозначающие функции,—*функциональными именами*, имена, обозначающие понятия (свойства) — *понятийными именами*.

---

[1] Предшественниками Фреге в рассмотрении понятия *смысла* были еще стоики, которые, по-видимому, впервые в истории логической мысли провели различие между *обозначающим* — словом, *предметом* или *предметами*, которые это слово имеет в виду, и содержанием, или *смыслом* слова — выраженной в нем *мыслью* (см. [11]).

[2] Выражаю благодарность проф. С. А. Яновской, побудившей меня заняться историей понятия *смысла* в логике и своими советами оказывавшей помощь при подготовке настоящей статьи.

[3] О фрегевском понимании *функции* и *понятия* см. [32].

Собственное имя есть имя отдельного, индивидуального предмета [4]. Примерами таких имен могут быть: 1) «Аристотель», 2) «Венера», 3) «Воспитатель Александра Великого и ученик Платона», 4) «Утренняя звезда», 5) «Тот, кто открыл эллиптическую форму планетных орбит», 6) «Вечерняя звезда» и т. п. [5]

Фреге дает следующее объяснение того, что он понимает под *собственным именем*: «под «знаком», или «именем», я понимаю какое-либо обозначение, представляющее собой собственное имя, чьим значением, следовательно, является определенный предмет (это слово употреблено в самом широком смысле), но не понятие и не отношение... Обозначение единичного предмета может также состоять из многих слов или других знаков. Для краткости пусть каждое такое обозначение носит название собственного имени» [5, стр. 27].

С каждым собственным именем Фреге связывает, во-первых, то, что он называет *значением* (Bedeutung) имени, и, во-вторых, то, что он называет *смыслом* (Sinn) имени. Значение имени есть тот предмет, который обозначается (назван) этим именем. Смысл собственного имени в понимании Фреге можно описать как те сведения, ту информацию, которая заключена в имени, а понимание имени человеком — как усвоение этой информации (ср. [22], § 01).

В отношении выражений «смысл» и «значение» Фреге устанавливает следующие обороты речи:

«Собственное имя (слово, знак, соединение знаков, выражение) выражает <drückt aus> свой смысл, означает <bedeu-

---

[4] Об именах, которые не обозначают никакого предмета, речь будет ниже.

[5] Из приведенных примеров видно, что фрегевское употребление выражения «собственное имя» отличается от его употребления в повседневной речи. Выражения, подобные 3) или 5), в обычной речи не считаются именами. В отношении выражений 4) и 6) могут, пожалуй, возникнуть разногласия. Это и понятно. Естественные языки не были созданы для логического анализа, а возникли как средство общения людей, выражения их мыслей и чувств. Логика же обязана уточнять выражения, которые в ней фигурируют. Фрегевское разъяснение понятия имени и есть попытка такого уточнения.

tet<или обозначает<beseichnet> свое значение. С помощью данного знака мы выражаем его смысл и обозначаем его значение» [5, стр. 31[.

В своем первом крупном труде «Исчисление понятий», изданном в 1879 г., Фреге еще не проводил различия между смыслом и значением имени. В «Основаниях арифметики», вышедших в свет в 1884 г., [10] понятие смысла тоже не фигурировало. Оно было введено лишь в 1892 г., в известной статье Фреге «О смысле и значении» [5[. Причиной, побудившей Фреге различать имена не только по их значению, но и по выраженному в них смыслу, послужили размышления над тем, что такое равенство.

Что представляет собой равенство[6]: является ли оно отношением между предметами или между именами, знаками предметов? Такой вопрос ставит Фреге в этой статье. Еще в «Исчислении понятий» он высказался в пользу второго решения вопроса. Аргументация, которую он развивает в статье «О смысле и значении», такова: «$a = a$ и $a = b$ являются — это очевидно — предложениями, имеющими различную познавательную ценность: $a = a$ имеет силу a priori и называется, по Канту, аналитическим, в то время как предложения формы $a = b$ часто содержат очень ценное расширение нашего знания и a priori не всегда могут быть обоснованы. Открытие того, что каждое утро восходит то же самое, а не новое солнце было, пожалуй, самым плодотворным в астрономии. Еще и сейчас открытие того, что вновь открытый астероид или комета совпадает с уже ранее известным астероидом или кометой, не всегда является чем-то само собою разумеющимся. Но если бы мы захотели видеть в равенстве отношение между тем, что значат имена «a» и «b», мы оказались бы не в состоянии провести различие между $a = b$ и $a = a$ в случае, если $a = b$ истинно. В этом случае было бы выражено отношение некоторой вещи к себе самой, причем такое отношение, в котором каж-

---

[6] Слово «равенство» Фреге употребляется в смысле тождества, понимая «$a = b$» как «a есть то же самое, что и b» или «a и b совпадают». См. [5, стр. 25] и [3, стр. IX].

дая вещь находится к себе самой и в котором ни одна вещь не находится к другой вещи»[7] [5, стр. 25—26].

В самом деле, если стать на эту точку зрения, то предложения (1) «Утренняя звезда есть[8] Утренняя звезда» и (2) «Утренняя звезда есть[8] Вечерняя звезда» окажутся — при условии, что предложение (2) истинно[9] (а оно действительно истинно),— выражающими один и тот же факт: то, что планета Венера тождественна планете Венере. Факт же этот очевиден.

Между тем ясно, что эти предложения совершенно различны по своей познавательной ценности. Едва ли кто-нибудь станет считать предложение (1) содержащим настоящее знание. Иной характер носит предложение (2). Оно расширяет знание, сообщая интересный астрономический факт.

Возникшее недоразумение можно объяснить тем, что предмет, относительно которого высказывается тождество его с самим собой, берется без учета тех имен «*a*» и «*b*», «Утренняя звезда» и «Вечерняя звезда», с помощью которых высказывается это тождество.

Отсюда намечается как будто следующий путь преодоления затруднения. Фреге характеризует его так: «То, что выражают, когда говорят $a = b$, состоит, кажется, в том, что знаки или имена «*a*» и «*b*» значат одно и то же, и поэтому речь идет именно об этих знаках; утверждается как будто отношение между именами или знаками лишь постольку, поскольку они нечто называют или обозначают. Оно опосредствовано связью

---

[7] Здесь Фреге рассуждает как метафизик. Тождество предмета самому себе — это отнюдь не универсальное свойство. Развитие современной науки, и в частности, математической логики— в полном согласии с философией диалектического материализма — убедительно показало, что не всякий предмет можно рассматривать как равный самому себе. Однако рассмотрение этого вопроса выходит за рамки настоящей статьи.

[8] По теории Фреге, в этих — и подобных им — предложениях слово «есть» является не только связкой, но служит также для выражения равенства, т. е. составляет часть предиката. В предложениях формы «Аристотель есть философ» слово «есть» является только связкой. См. [7].

[9] Истинность предложения (1) следует из его аналитического характера.

каждого из двух знаков с одним и тем же обозначаемым» (там же, стр. 26).

Таким образом, получается, что равенство «$a = b$» есть отношение, высказываемое об имени «a» некоторого предмета и об имени «b» некоторого предмета и состоящее в том, что предметы обоих имен совпадают друг с другом. Здесь учитывается пара {предмет, его имя}. Поэтому можно сказать (и к этому обороту речи прибегает Фреге), что «$a = b$» есть высказывание об «a» и «b» лишь постольку, поскольку они нечто обозначают.

Однако такое решение не может удовлетворить Фреге. Ведь обозначение предмета некоторым знаком зависит от нашего произвола. «Никому, — пишет Фреге, — нельзя запретить употреблять в качестве знака чего-либо любой произвольно произведенный процесс или предмет. Но тем самым предложение $a = b$ теряет связь с существом дела и становится относящимся только к нашему способу обозначения; мы не выражаем в нем как будто никакого знания в собственном смысле» (там же).

Что предложения, относительно смысла которых можно утверждать, что он ограничивается выражением того, что у предмета, называемого «a», есть еще имя «b», существуют, это несомненный факт. Таково, например, предложение

(3) «Цицерон есть Марк Туллий» [10]. Можно считать, что и в этом предложении содержится некоторое знание, состоящее в том, что человек по имени Цицерон иначе называется Марком Туллием. Но подобное знание относится не к самым предметам, а к тому, какими знаками мы обозначаем эти предметы.

Но разве все предложения о равенстве таковы? Разве среди них нет таких, которые выражают знание в собственном смысле? Разве предложение (2) или предложение

(4) «Аристотель есть воспитатель Александра Великого и ученик Платона»

не принадлежат к их числу?

Предлагаемое решение вопроса обязывает рассматривать предложение (4) как вполне аналогичное предложению (3).

---

[10] Пример не принадлежит Фреге, но часто используется современными авторами при обсуждении вопросов смысла.

Это значит, что предложение (4) должно пониматься так, будто в нем утверждается только то, что человек, по случаю получивший имя «Аристотель», — это тот же человек, которого называют именем «Воспитатель Александра Великого и ученик Платона»; при этом на последнее имя мы не имеем права смотреть как на выражение, состоящее из осмысленных частей («воспитатель», «Александр Великий», «воспитатель Александра Великого» и др.) и сообщающее те сведения, что обозначенный этим именем человек учился у Платона и преподавал Александру, а должны считать его знаком, по произволу людей обозначающим Аристотеля и не несущим в себе какой-либо иной информации. Ошибочность такой трактовки этого предложения очевидна. Не подлежит сомнению, что предложения (3) и (4) различны по своей ценности для познания.

Предлагаемый выход из положения по существу не дает возможности различить предложения «$a = a$» и «$a = b$» с точки зрения их познавательного значения. Если знак «a» отличен от знака «b» только по своей фигуре, а не как *знак*, т. е. не в силу того способа, каким он обозначает нечто, то между указанными предложениями не будет существенной разницы в случае, когда предложение «$a = b$» истинно (различие, состоящее в том, что в первом из предложений справа и слева от знака равенства стоят фигуры, имеющие одинаковые, а во втором предложении — разные очертания, не существенно для познания).

Различение значимости предложений «$a = a$» и «$a = b$» и выявление познавательной ценности предложений последнего вида окажется возможным, если к каждому имени отнести не только тот предмет, который обозначается этим именем (значение имени), но и тот способ, каким имя обозначает предмет, — его *смысл*.

Фреге следующим образом разъясняет понятие смысла. Пусть a, b и c суть прямые, соединяющие вершины некоторого треугольника с серединами противоположных сторон. Тогда точка пересечения прямых a и b совпадает с точкой пересечения прямых b и c. Мы имеем, следовательно, различные обозначения (имена) для одной и той же точки, и эти имена («точка пересечения прямых a и b» и «точка пересечения прямых *b* и *c*») указывают, говорит Фреге, на тот способ, каким обозначаемое нам дано. В самом деле, оба имени по-разному обозначают один и тот же предмет. Первое имя обозначает его как точку пересечения прямых *a* и *b*, а второе — как точку пересечения прямых *b* и *c*. В обоих случаях предмет дан нам по-разному. Различие в способе, каким предмет дан нам в его обозначениях, есть различие в сведениях о предмете, содержащихся в его именах. Поэтому предложение «Точка пересечения прямых *a* и *b* есть точка пересечения прямых *b* и *c*» представляет собой настоящее знание.

«Напрашивается мысль, — пишет Фреге, — связать с каждым знаком (именем, оборотом речи, письменным знаком), помимо обозначаемого, которое мы будем называть значением знака, также и то, что я называл бы смыслом знака и в чем выражается способ данности... Согласно такому пониманию в нашем примере окажется, что хотя значение выражений «точка пересечения прямых *a* и *b*» и «точка пересечения прямых *b* и *c*» одно и то же, однако смысл их различен. Равным образом, выражения «Вечерняя звезда» и «Утренняя звезда» имеют одно и то же значение, но отнюдь не одинаковый смысл» (там же, стр. 26—27).

* * *

От значения и смысла знака Фреге отличает связанное с ним представление. Если значение собственного имени есть чувственно воспринимаемый предмет, то представление человека об этом предмете есть внутренний образ, возникший из воспоминаний о чувственных впечатлениях, которые человек имел раньше. Представление субъективно: оно часто проникнуто эмоциями, ясность его отдельных частей различна и постоянно меняется; даже у одного и того же человека представления, связанные с одним и тем же смыслом, в различное время различны; представление одного не есть представление другого. Художник, кавалерист, зоолог, говорит Фреге, вероятно, будут связывать с именем «Буцефал» очень различные представления.

Смысл знака коренным образом отличается от представления, вызываемого этим знаком, тем, что он «может быть общим достоянием многих людей и, следовательно, не есть часть или модус отдельной души; ибо трудно, пожалуй, усомниться в том, что человечество имеет драгоценный фонд мыслей, которые оно передает от одного поколения к другому» [5, стр. 29].

Смысл, по Фреге, занимает среднее место между значением имени, в качестве которого выступает сам предмет, обозначаемый этим именем, и представлением, носящим субъективный характер; хотя смысл не является самим предметом, его нельзя считать субъективным. Фреге проводит следующее сравнение. «Предположим, кто-либо смотрит на Луну в подзорную трубу. Самую Луну можно сравнить со значением; она является предметом наблюдения, который опосредствован реальным образом, возникающим внутри подзорной трубы благодаря преломлению лучей в объективе, а также образом, возникающим на сетчатке наблюдателя. Первый я сравниваю со смыслом, второй — с представлением или восприятием. Хотя образ в подзорной трубе носит только односторонний характер и зависит от места наблюдения, все же он объективен, поскольку может служить многим наблюдателям. Во всяком случае можно устроить так, что им смогут воспользоваться одновременно многие. Что же касается образа на сетчатке, то каждый будет иметь свой собственный образ. В силу различий в устройстве глаз отдельных людей даже геометрическая конгруэнтность этих образов вряд ли достижима, а подлинное совпадение исключено. Продолжая это сравнение, можно было бы предположить, что образ на сетчатке *А* может быть сделан видимым для *Б*, или даже сам *А* может видеть в зеркале образ на сетчатке своего глаза. Отсюда следовало бы, что представление хотя и может быть отнесено к числу предметов, однако в качестве такового оно является для наблюдателя совсем не тем, чем оно является непосредственно для представляющего» [5, стр. 30][11].

---

[11] В комментарии к русскому изданию «Логико-философского трактата» Л. Витгенштейна автор комментария В. К. Финн утверждает, что «Фреге, рассматривая смысл выражений реального языка, пришел к выводу, что смысл в языке субъективен» [28, стр. 105]. Как смог убедиться читатель на основании нашего изложения теории Фреге и его подлинных высказываний, приведенных в настоящей статье, вряд ли можно считать правильным это утверждение. Конечно, трактовка понятия смысла у Витгенштейна в ряде пунктов отличается от фрегевской концепции смысла.

Отношение между именем и обозначаемым предметом(в данном языке) ныне принято называть *отношением называния*, или *именования* (так переведен английский термин «the name relation» в русском издании книги Р. Карнапа [29]). Отношение это состоит в том, что один и тот же предмет может иметь различные имена, но данное имя должно быть именем только одного предмета. С точки зрения Фреге отношение называния опосредствованно отношением имени к смыслу и смысла имени к значению. «Связь, существующая, как правило, [12] между знаком, его смыслом и его значением, такова, что знаку соответствует определенный смысл, а этому последнему — определенное значение, в то время как одному значению (одному предмету) принадлежит не только один знак» [5, стр. 27].

Смысл имени, по теории Фреге, можно рассматривать как выраженную в имени (закрепленную языковыми средствами) информацию о предмете, однозначно характеризующую предмет (ср. [22], § 01) [13]. Смыслу данного имени соответствует (или должен соответствовать) некоторый, причем е д и н с т в е н н ы й предмет — значение имени; в этом отношении можно сказать (Черч [22], § 01), что смысл имени определяет его значение. При этом одно и то же значение может определяться различными смыслами.

Мы не имеем здесь возможности останавливаться на этом различии; отметим лишь, что это различие *не* состоит в том, что в теории Фреге смысл, будто бы, субъективен, в то время как Виттгенштейн придает ему объективный характер. Мы полагаем, что если автор «Логико-философского трактата» (по своим философским взглядам являющийся, как известно, субъективным идеалистом) стремится придать смыслу объективный характер, то это скорее всего можно объяснить тем, что само понятие смысла было им заимствовано у Фреге.

[12] Оговорка «как правило» необходима потому, что в естественных языках (в отличие от большинства логических исчислений) встречаются отступления от формулируемого Фреге отношения: например, встречаются «имена», не имеющие значения. См. ниже.

[13] Эта информация основана на реальных свойствах предметов. С диалектико-материалистической точки зрения смыслы имен являются средством отражения вещей объективного мира.

Следует подчеркнуть, что понимание смысла имени не означает, что его значение обязательно известно. Путем анализа смысла имени не всегда можно определить его значение. По этому поводу Фреге пишет: «Всестороннее познание значения состояло бы в том, что мы могли бы для каждого данного смысла сказать, принадлежит ли он к этому значению. Этого мы никогда не достигаем» [5, стр. 27]. Поэтому смысл имени можно понимать, а о предмете имени можно не знать ничего, кроме того, что он определяется этим смыслом; может случиться, что нам понятны смыслы двух имен, но мы не знаем, определяют ли они один и тот же предмет или нет. Больше того, может оказаться, что предмета, определяемого смыслом данного имени, совсем не существует. Смысл имени не определяет существование предмета. Уточняя то, что было им ранее сказано об отношении смысла к значению, Фреге говорит: «Быть может, следует признать, что грамматически правильно составленное выражение, выполняющее роль собственного имени, всегда имеет смысл. Однако это не значит, что смыслу всегда соответствует некоторое значение. Слова «самое удаленное от Земли небесное тело» имеют смысл; однако весьма сомнительно, чтобы они имели значение. Выражение «наимедленнее сходящийся ряд» имеет смысл; однако доказано, что оно не имеет значения, так как для всякого сходящегося ряда можно найти медленнее сходящийся, но все-таки сходящийся, ряд. Отсюда следует, что если мы понимаем смысл, это не значит, что мы располагаем значением » [5, стр. 28].

Имена, имеющие смысл, но не обозначающие никакого предмета, — это не «настоящие» собственные имена; они только играют роль собственных имен; Фреге называет такие выражения *мнимыми* собственными именами. Мнимые имена встречаются в обычной речи, но при построении науки, указывает Фреге, их употреблять нельзя. В формализованном языке для таких имен не должно быть места. Фреге пишет: «От логически совершенного языка (исчисления понятий) следует требовать, чтобы каждое выражение, образованное из ранее введенных знаков в грамматически правильной форме в качестве собственного имени, действительно обозначало предмет и чтобы ни один знак не вводился в качестве собственного имени, если для него не обеспечено значение» [5, стр. 41][14]. Так Фреге и строил свое «исчисление понятий». В «Основных законах арифметики» он говорит, что для соблюдения полной строгости существенен принцип, согласно которому «все правильно образованные знаки должны обозначать нечто» [3, стр. XII]. Следуя этому принципу, Фреге формулирует специальные правила, обеспечивающие за каждым правильно образованным именем в его исчислении некоторое определенное значение (теперь такие правила называются *семантическими*).

Касаясь отношения между *именем* и его *смыслом*, Фреге пишет: «если совокупность знаков носит совершенный характер, то каждому знаку должен соответствовать вполне определенный смысл. Однако в народных языках очень часто нарушается это требование, и надо быть довольным уже, если одно и то же слово, употребляемое в одном и том же контек-

---

[14] Из практики математики известно, что выражения, не имеющие значения, зачастую используются в математических доказательствах в качестве вспомогательного средства. Так, некоторые теоремы о действительных числах можно доказывать, оперируя в ходе доказательства с ничего не значащим (в области действительных чисел) именем «$\sqrt{-1}$». Однако такие выражения всегда могут быть исключены, и доказательство теоремы, содержащее «мнимое», или «пустое», имя, может быть заменено другим доказательством той же теоремы (которое, правда, может быть более громоздко, нежели заменяемое), в котором «мнимые» имена отсутствуют. В этом смысле выражения, не имеющие значения, не являются необходимыми, ибо без них можно обойтись.

Однако было бы неверно налагать абсолютный запрет на использование в математике и математической логике имен, не имеющих значения, исключать их использование в какой бы то ни было форме. Использование ничего не значащих имен не может повредить, если мы в ходе рассуждения всегда отдаем себе отчет в пустоте соответствующих выражений и исключаем эти имена из окончательного результата доказательства; вместе с тем их использование часто оказывается целесообразным, поскольку упрощает рассуждения.

Разумеется, в предложениях, являющихся результатом доказательства, пустых имен не должно быть, так как предложения, содержащие такие имена, не истинны и не ложны. Именно в этом состоит рациональный смысл фрегевского требования, чтобы при построении науки не применялись имена, которые не имеют значения.

сте, всегда имеет один и тот же смысл» [5, стр. 27—28]. Одно и то же имя — не только в разных, но даже и в одном и том же языке — может выражать различный смысл. Многосмысленность выражений — довольно частое явление в обычных языках. Эта многосмысленность должна быть устранена, если язык применяется для целей логики. В последнем случае каждое имя должно выражать только один смысл (откуда следует, что оно должно иметь только одно значение).

Один и тот же смысл может быть выражен различными именами. Имена, выражающие одинаковый смысл, называются *синонимами* [16]. Поскольку синонимы имеют один и тот же смысл, они имеют и одинаковое значение.

* * *

В обычных языках собственные имена естественно делятся на простые и сложные (составные). Это деление сохраняется и в формализованных языках. Сложное имя — это имя, состоящее из осмысленных частей; в качестве таковых могут выступать как собственные имена, так и обозначения понятий, логические связки и другие выражения. Сложные имена иначе принято называть описательными именами, или описаниями. Примерами описаний могут быть 3), 4), 5) и 6). Имя, входящее в состав другого имени, называется составляющим именем. Например, в состав имени 3) входят составляющие имена «Платон» и «Александр Великий». Не всякое сложное имя

---

[15] Однако многосмысленность языковых средств составляет не слабую, а скорее сильную сторону естественных языков. Она позволяет им быть более экономными в обозначении огромного числа предметов, окружающих людей, позволяет языку постоянно изменяться под влиянием запросов жизни, практики, позволяет лучше выражать тончайшие оттенки мыслей и переживаний людей. Что касается недоразумений, могущих возникнуть вследствие многосмысленности выражений, то обыкновенно они предупреждаются тем, что смысл выражения выясняется из общего контекста речи и той ситуации, в которой оно было употреблено.

[16] Употребление выражения «синоним» в математической логике отличается от употребления этого слова в грамматике, где синонимами принято называть отдельные слова.

имеет составляющие имена: так, имена 4), 5) и 6) составляющих имен не содержат [17].

Простые имена не состоят из осмысленных элементов. Они могут входить в состав других имен, но сами имен не содержат. Примерами простых имен (иначе называемых элементарными) могут быть 1) и 2).

Элементарное имя по произволу обозначает определенный предмет. От человека, дающего название, вполне зависит отнести к называемому предмету тот или иной знак — его имя. Сложное имя обозначает предмет не по произволу людей, а в силу того смысла, который имеют его части. Например, смысл имени 3) [18] зависит от смысла собственных имен «Александр Великий» и «Платон», а также понятийных имен «быть воспитателем такого-то» и «быть учеником такого-то». Если нам не понятно хотя бы одно из этих выражений, нам не будет понятно и само сложное имя [19]. В образовании смысла имени 3

[17] Таким именам обычной речи соответствуют в некоторых формализованных языках (в частности, в исчислении Фреге), имена, образованные при помощи оператора, смысл которого можно передать выражением «тот, который»: ср. слова «тот, кто», входящие в состав 5) и соответствующие определенному артиклю в немецком и английском языках.

[18] В русском языке из формы выражения 3) нельзя усмотреть, что это — собственное имя. Иначе обстоит дело в немецком языке, где определенный артикль служит отличительным признаком собственного имени. Поэтому Фреге придает большое значение различению выражений с определенным и неопределенным артиклем. В русском языке в подобных случаях не ясно, является ли данное выражение собственным именем или обозначает понятие. Чтобы показать, что выражение 3) есть собственное имя, его следовало бы переписать, введя в него оборот «тот, кто»: «Тот, кто является воспитателем Александра Великого и учеником Платона». Мы этого не делаем, чтобы не усложнять изложения.

[19] Всякий, изучающий иностранный язык, хорошо знаком с этим положением. Достаточно не знать, в чем состоит смысл хотя бы одного выражения, чтобы не быть в состоянии понять целое, в которое это выражение входит. (Мы иногда *догадываемся* о смысле целого, даже если не знаем смысла какой-либо его части. Это объясняется тем, что общий контекст речи содержит в ряде случаев косвенные указания на смысл данного выражения. Однако у нас никогда нет гарантии в правильности нашей догадки. Поэтому приходится открывать словарь и вычитывать из него смысл непонятных слов. Только после этого приобретается уверенность в том, что смысл целого мы поняли правильно).

участвует и связка «и». Хотя, взятая сама по себе, она не выражает никакого смысла и не обозначает никакого предмета, ее роль в образовании смысла сложного имени существенна [это становится заметно, как только мы исключим ее из имени 3): последнее не только теряет прежний смысл, но по сути дела вообще его лишается]. Имя 3) построено по определенным правилам (например, составляющие имена стоят в нем в именительном падеже, связка «и» занимает место между выражениями «воспитатель Александра Великого» и «ученик Платона»). Нарушение правил, по которым построено имя, тоже может лишить его смысла. Это значит, что не всякая последовательность осмысленных выражений в данном языке является осмысленным выражением. В каждом языке существуют правила образования осмысленных выражений, в том числе имен. Эти правила входят в грамматику языка. В обычных языках они никогда не фиксируются точно. На практике, однако, мы в большинстве случаев без труда отличаем осмысленные выражения от бессмысленных [20]. Помимо грамматических правил здесь помогают общий контекст речи и ситуация.

В формализованных языках правила образования выражений, имеющих смысл, должны формулироваться строго. Впервые это понял и осуществил именно Фреге. В его «Исчислении понятий» перечислены исходные имена и точно указаны способы образования одних имен из других имен и выражений его языка. Так определяется понятие «правильно составленного имени»; при этом каждое правильно составленное имя имеет не только смысл, но и значение.

Итак, смысл сложного имени определяется смыслом его частей и характером тех правил, по которым оно построено; его смысл меняется, когда меняется смысл какой-либо его

---

[20] Поскольку в обычных языках не существует точных критериев отличения осмысленных выражений от выражений, не имеющих смысла, постольку на вопрос об осмысленности некоторого выражения часто даются противоположные ответы. Следует также учитывать, что живые языки непрерывно изменяются, в силу чего то, что вчера все сочли бы бессмыслицей, сегодня входит в язык и становится осмысленным выражением.

части. Если учесть, что смысл каждой части определяется ее языковым характером, а то, по каким правилам составлено имя, фиксируется в его грамматическом строении, то станет ясно, что смысл имени выражается средствами языка и только средствами языка.

Это совершенно естественно. Ведь смысл имени — это заключенные в нем сведения о его значении. Они должны найти себе материальное, языковое выражение, т. е. быть даны в самом имени, в самом знаке — в его форме, построении, характере его частей. Иначе как мы поймем его смысл, откуда получим информацию о его значении?

Однако не всякая особенность языкового состава и строения сложного имени служит для выражения смысла. Например, вместо 7) «Квадратный корень из 4, *который меньше* 0» можно сказать 8) «*Отрицательный* квадратный корень из 4» Это значит, что эти имена признаются имеющими одинаковый смысл (синономы); различие в их языковом строении не оказывает, по Фреге, влияния на их смысл. Впрочем, Фреге не дает никаких определенных указаний о том, как отличать те особенности состава и строения имен, которые служат для выражения смысла, от таких, которые для смысла безразличны. Это связано с тем, что он не устанавливает критерия равенства смыслов (ср. [22], § 02, примечание 37). Проблема синонимов, которая заключается в том, чтобы для достаточно широкого круга языков отыскать метод, позволяющий для любых двух имен решить вопрос о равенстве их смыслов, находится вне поля зрения Фреге. Как мы увидим ниже, это не случайно. Для целей Фреге достаточно считать, что смыслы можно различать и отождествлять, используя каким-то образом данные языка. Сам он в своих работах различает и отождествляет смыслы конкретных имен, причем делает это в полном согласии со свойственным каждому человеку чувством родного языка [21].

---

[21] Например, Фреге считает, что замена прилагательного на соответствующее определительное придаточное предложение или замена существительного на соответствующее придаточное-подлежащее не меняет смысла выражения.

Хотя Фреге не поставил проблемы синонимов, она сама собой выдвигается всем содержанием его исследований.

* * *

Остановимся на смысле элементарных имен. В логике издавна существовал взгляд, что такие имена, как 1) и 2), не выражают никакого смысла. Так думал, например, Д.-С. Милль [13]. Он делил имена на общие и единичные, а среди последних выделял класс собственных имен. Собственные имена Милля — это элементарные имена, а единичные, но не собственные — это описательные имена. По теории Д.-С. Милля, сложные имена обладают как значением, так и смыслом[22]. Простые имена — «Джон», «Лондон», «Англия» и др. — хотя и означают предметы, но смысла не имеют, так как не выражают никаких признаков, которые принадлежали бы этим предметам. Милль говорит: «Так, известного человека я называю Софрониском, но я называю его и другим именем: отец Сократа. Как то, так и другое имя обозначает одну и ту же личность; но их содержание совершенно различно — они прилагаются к этой личности с разными целями: одно только затем, чтоб отличить этого человека от других лиц, о которых идет речь, второе — с целью указать один факт относительно этого человека, а именно то, что Сократ был его сын» [13, стр. 31].

Милль безусловно прав, подчеркивая различие познавательной роли простых имен и описаний. Это прекрасно видел и Фреге. Но присоединиться к Миллю он не мог, ибо тогда понятие смысла лишилось бы своей общности и поэтому не могло бы выполнить ту роль, которая ему предназначалась в теории Фреге. Принцип «всякое собственное имя имеет смысл» есть неотъемлемая часть теории Фреге.

Возникает вопрос: в чем состоит смысл простых имен? какую информацию дают они о предмете? А. Чёрч [22], в це-

[22] Значению сложного имени в теории Милля соответствует так называемое «прямое значение» («denotation», которое переводчик труда Милля на русский язык В. Н. Ивановский переводит термином «означение», ср. [13]), а смыслу — «сопутствующее значение», т. е. указание на признак предмета («connotation», переводимое Ивановским как «соозначение»).

лом принимающий теорию Фреге, считает, что элементарное имя сообщает о предмете то, что предмет зовется этим именем. В этом и состоит его смысл. Знание об имени предмета — это ведь тоже некоторое знание[23].

Однако сам Фреге решил вопрос иначе. Он считал, что в обычном языке мнения о смысле таких имен, как «Аристотель», могут разойтись. «Например, — пишет Фреге, — можно было бы в качестве таковоro (смысла имени «Аристотель». — *Б. Б.*) принять: ученик Платона и учитель Александдра. Кто поступит так, тот свяжет с предложением «Аристотель был родом из Стагиры» иной смысл, чем тот, который в качестве смысла этого имени принимает: происходящий из Стагиры учитель Александра Великого» [5, стр. 27, примечание].

Может показаться, что взгляд Фреге противоречит основной посылке его теории, согласно которой смысл есть «общее достояние многих». Но это впечатление ошибочно. Фреге исходит из того, что употребление простых имен в обычных языках предполагает существование определений этих имен, связывающих их друг с другом. В определениях же определяемое и определяющее выражения имеют не только одно и то же значение, но и одинаковый смысл. Такой подход связан с особенностями логического исчисления Фреге. В нем каждое новое простое имя, помимо восьми неопределяемых функциональных имен, вводится посредством определения, устанавливающего, что оно должно иметь тот же смысл и то же значение, что и определяющее (которое составляется из уже известных знаков). То обстоятельство, что в обычном языке не существует общепринятых определений таких имен, как «Аристотель», не отменяет, по Фреге, того, что каждый человек, употребляя имя «Аристотель», должен иметь в виду какое-либо его определение, т. е. связывать с ним какой-либо смысл; то, что разные люди будут иметь в виду различные смыслы, не приведет к недоразумению, пока имеется в виду

---

[23] Разумеется, знание об **и м е н и** предмета отличается от знания о самом этом **п р е д м е т е**. Однако в целях общности теории можно поступить так, как предлагает Чёрч.

один и тот же предмет [24]. Колебания в смысле не допустимы при построении науки и не должны встречаться в «совершенном языке».

* * *

Важнейшим положением теории Фреге является *принцип замены на равнозначное имя* [25]. Его можно выразить так: *если одно из составляющих имен, входящих в данное сложное имя, заменить именем, имеющим то же, что и у заменяемого, значение, то сложное имя, получившееся в результате такой замены, будет иметь значение, совпадающее со значением исходного сложного имени.* Так, если в имени 3) заменить составляющее имя «Платон» равнозначным ему именем «основатель Академии», то значение сложного имени, получающегося в результате такой замены,

9) «Воспитатель Александра Великого и ученик основателя Академии»

будет совпадать со значением имени 3) (оба имени обозначают Аристотеля).

Относительно *смысла* сложного имени, которое мы получаем после подобной замены, нельзя сказать ничего определенного: он может совпадать, а может и не совпадать со смыслом первоначального имени. В нашем примере имена 3) и 9) имеют различный смысл. Если же взять имя 9) и заменить в нем составляющее имя «основатель Академии» именем «тот, кто основал Академию» (которое Фреге считал бы синонимом заме-

---

[24] Конечно, было бы неверно думать, что в обычных языках для таких имен, как «Аристотель», всегда существуют формальные определения их смыслов; точнее было бы сказать, что в таких языках собственные имена неявно определяются друг через друга. Поскольку обычно известно, что предметы, определяемые смыслами соответствующих имен действительно существуют, возникновение круга в определениях не ведет к неясностям или недоразумениям.

[25] Фреге считает его очевидным. В [5] он выражает его только для предложений (рассматриваемых как частный случай имен), что объясняется содержанием этой статьи. Более общая формулировка содержится в [3]. Мы формулируем фрегевский принцип по Чёрчу [22]. В современной литературе этот принцип — и его варианты и аналоги в различных семантических системах — называют также *принципом взаимозаменяемости языковых выражений*. Ср. [29] (напр., стр. 95—97, 156—163); см. также [34].

няемого), то получившееся сложное имя следует считать совпадающим по смыслу с именем 9). Поэтому Фреге говорит, что *смысл сложного имени не зависит от значения составляющих имен*. Касаясь предложений, которые для него суть имена особого рода, он пишет: «Говоря о смысле предложения, можно ведь принимать во внимание только смысл его частей, а не их значение» [5, стр. 33].

Существенно, что Фреге не сформулировал каких-либо принципов, касающихся отношения между смыслами составляющего и сложного имени. Для цели, которая стояла перед его теорией смысла и значения, это непосредственно не было нужно. Можно поставить вопрос, каковы соотношения для смыслов, которые получаются из теории Фреге. Ответ будет таков.

Если одно из составляющих имен, входящих в данное сложное имя, заменить другим именем с тем же, что и у заменяемого, смыслом (т. е. его синонимом), то полученное новое сложное имя выражает тот же смысл, что и первоначальное (ср. [22] , § 01, а также § 02, примечание 30); в силу принципа замены на равнозначное полученное сложное имя будет иметь значение, совпадающее со значением исходного сложного имени.

В теории Фреге справедливо также следующее положение: если одно из составляющих имен, входящих в данное сложное имя, заменить именем, смысл которого отличен от смысла заменяемого имени, то полученное таким образом новое сложное имя выражает уже иной смысл, нежели первоначальное; при этом значение полученного сложного имени — в силу много-однозначного характера отношения смысла к значению — может совпадать со значением исходного имени, но может оказаться и отличным от него.

Остается случай, когда составляющее имя заменяется именем, значение которого иное, нежели у заменяемого. Сложное имя, получающееся в результате, может иметь значение как отличное от значения первоначального имени, так и совпадающее с ним [26]. Что касается его смысла, то он всегда отличен от смысла исходного имени.

---

[26] Приведем пример, когда значение сложного имени остается тем же самым. Заменим в имени «столица СССР» составляющее имя «СССР» име-

Фреге нигде не опирается на принципы для смыслов. Ведь применение их предполагает, что для смыслов определено отношение равенства (т. е. дано определение синонимов), а такого определения в теории Фреге не содержится. В ней необходимо только правило замены равнозначным [27].

Для языков, в которых встречаются имена, не имеющие значения, имеет силу еще один принцип: *если составляющее имя не имеет значения, то и сложное имя, в состав которого это составляющее имя входит, значения не имеет.* Этот принцип можно прочесть и так: если сложное имя имеет значение, то его имеет каждое входящее в него имя.

* * *

нем «РСФСР», значение которого, конечно, иное, нежели значение заменяемого имени. В результате получим имя «столица РСФСР», значение которого совпадает со значением исходного сложного имени.

[27] Применение принципа замены на равнозначное имя тоже, конечно, предполагает, что равенство значений имен как-то определено. Ознакомление с трудами Фреге убеждает в том, что немецкий логик исходил из представления о том, что такое определение всегда возможно в силу присущей людям познавательной способности различения и отождествления предметов, причем предметы он рассматривал как нечто четко отграниченное, как строго друг от друга отличные вещи, которые в логике мы имеем право трактовать как постоянные и неизменные сущности.

Однако такое предположение весьма сильно. По сути дела оно является некоторой идеализацией, из которой мы вправе исходить в логике лишь постольку, поскольку не упускаем из виду того обстоятельства, что развитие, движение вещей объективного мира, их превращения и взаимодействия во многих случаях делают такое различение и отождествление практически неосуществимым; представление о возможности различать и отождествлять предметы есть некоторая абстракция от действительного положения вещей. Этот взгляд, вытекающий из учения диалектического материализма о том, что человеческие понятия всегда несколько упрощают объективную связь природы, лишь приблизительно отражая ее, искусственно изолируя те или иные стороны процесса развития (ср. В. И. Ленин [1], стр. 143), был, разумеется, чужд Фреге, который отнюдь не был диалектиком. Как метафизик, он по-видимому, считал, что любые объекты в мире всегда могут быть различаемы и отождествляемы.

Характер философских взглядов Фреге освещен в [32]. О том, как метафизические установки Фреге проявились в его теории смысла, см. ниже в настоящей статье.

Суть теории Фреге заключается в том, что в ней *предложения* рассcматриваются как частный случай имен. Фреге показывает, что при определенном истолковании всё, установленное для имен, оказывается верным и для предложений.

В чем же следует видеть смысл и значение предложений? При решении этого вопроса Фреге исходит из того, что каждое повествовательное предложение содержит некоторую *мысль*, которая может быть только или значением предложения или его смыслом. Если предположить первое, то к предложениям окажется не применим принцип замены на равнозначное. В самом деле, если в предложении (5) «Утренняя звезда есть тело, освещаемое Солнцем» заменить составляющее имя 4) равнозначным ему именем 6), мы получим предложение 6) «Вечерняя звезда есть тело, освещаемое Солнцем», которое должно выражать ту же мысль, что и (5). Но (5) и (6) содержат различные мысли. Это можно усмотреть хотя бы из того, что человек, не знающий, что Вечерняя звезда есть Утренняя звезда, мог бы считать одну мысль истинной, а другую ложной, чего не могло бы быть, если бы оба предложения служили для выражения одной и той же мысли. Таким образом, принцип замены нарушается. Значит, заключает Фреге, *мысль* не может быть значением предложения; напротив, ее следует считать *смыслом*.

Как же обстоит дело со значением предложения? Прежде всего Фреге отмечает, что существуют предложения, не имеющие значения. К их числу относятся те, которые содержат имена, не имеющие значения: например, «Одиссей был выброшен на берег Итаки глубоко спящим». Обратим внимание на то, что говорить об истинности или ложности этого предложения не приходится. Если Одиссей не существовал, то какой смысл в постановке вопроса, правда или нет то, что он был выброшен на берег Итаки глубоко спящим?[28] Отсюда возникает предположение, что значением предложения следует считать его истинность или ложность. Следующее

---

[28] Именно потому, что предложение, содержащее мнимые собственные имена, не может быть истинным, такие имена, указывает Фреге, не могут применяться в науке.

рассуждение, по мнению Фреге, придает этому предположению полную убедительность.

Предикат, считает Фреге, приписывается или отвергается не относительно имени, а относительно его *значения*, т. е. самого *предмета* [29]. Только тогда, когда имеет место приписывание или отвержение предиката относительно *предмета* имени, предложение получает достоинство истинности или ложности [30]. Если имя, являющееся субъектом, не имеет значения, то предложение ни истинно и ни ложно. Но в этом случае (по принципу, согласно которому сложное имя не имеет значения, если какое-либо входящее в него составляющее имя не имеет значения) оно не должно иметь и значения. Далее, если, как совершенно справедливо считает Фреге, предикат приписывается или отвергается относительно самого предмета, а не его имени, то истинность (или ложность) предложения останется, конечно, без изменения, если мы станем менять имена, обозначающие предмет суждения, пока эти имена будут обозначать один и тот же предмет. Итак, получается, что если смотреть на истинность и ложность как на значения предложений, то как принцип замены равнозначным, так и принцип, по которому, если сложное имя имеет значение, то его имеет каждое входящее в него составляющее имя, окажутся справедливыми и для предложений.

Из общего учения Фреге об именах следует, что смысл предложения, т. е. выраженная в нем мысль, определяется

---

[29] В России в некотором смысле аналогичного взгляда придерживался М. И. Каринский (см. [14], стр. 398), причем этот взгляд Каринского был связан с материалистической исходной точкой его логики (ср., например, [14], стр. 387, а также [15]). Подобным же образом и у Фреге его убеждение в том, что предикат приписывается или отвергается не относительно имени (логического субъекта), а относительно предмета имени, находился в непосредственной связи с материалистическими тенденциями его логических взглядов. О взглядах Фреге на логику см. [32].

[30] Это положение распространяется и на случаи, когда п р е д м е т о м и м е н и в свою очередь является какое-либо и м я или вообще языковое образование, а также и на случаи так называемого *автонимного употребления имен.* При автонимном употреблении языковых выражений последние выступают одновременно и в качестве о б о з н а ч а е м о г о — предмета, и в качестве о б о з н а ч а ю щ е г о — имени этого предмета Об автонимном употреблении выражений см. [33].

только смыслом его частей, а не их значением. Для понимания мыслей нет надобности знать, имеют ли составляющие имена значение или нет. На деле же мы обычно стремимся выяснить значение составляющих имен. Это указывает на то, что мы признаем значение и за самим предложением. «Но почему же мы хотим того, чтобы каждое собственное имя имело не только смысл, но и значение? — спрашивает Фреге.— Почему мысль не удовлетворяет нас? Потому что для нас имеет важное значение ее истинностное значение <Wahrheitswert>» [5, стр. 33]. Под *истинностным значением предложения* Фреге понимает то, что оно либо истинно, либо ложно. *Истинность* или *ложность* и составляет значение повествовательного предложения [31].

Понятие *истинностного значения* (или *значения истинности*, как иногда говорят) играет важную роль в математической логике. Еще до Фреге истинностные значения использовал американский логик Ч. Пирс [32]. Фреге впервые употребил понятие истинностного значения в докладе «Функция и понятие», относящемся к 1891 г. [9]. Но только в статье «О смысле и значении» он включил это понятие в качестве органической составной части в общую теорию смысла и значения.

Истинность и *ложность* рассматриваются Фреге как *предметы*. Известно, что такая трактовка истинности и ложности широко распространена в современной математической логике. Например, при табличном построении исчисления высказываний функции этого исчисления рассматриваются обычно как определенные на области, состоящей из двух «предметов» — «и с т и н а» и «л о ж ь», принимающих значение тоже из этой области. Разумеется, превращение *истинности* и *ложности* в *абстрактные предметы* есть только способ облегчить логическое исследование. Что касается Фреге,

[31] Теория смысла Фреге, и в частности его понимание предложения, оказала глубокое влияние на последующую логику. Однако отнюдь не все логики приняли фрегевскую трактовку предложений. Иногда взгляд Фреге даже называют абсурдным (ср. [26]). Но такое обвинение несправедливо. Можно, конечно, не соглашаться с Фреге. Но бесспорно одно: если принять фрегевскую теорию смысла имен и пожелать распространить ее на предложения, то волей-неволей придется рассматривать истинность и ложность в качестве их значений.

[32] Ср. [22], раздел «Введение», примечание 67.

то вводя в логику понятие об истинности и ложности как особых логических предметах, он, по-видимому, недостаточно ясно осознавал то, что с гносеологической точки зрения такое введение есть всего-навсего некоторый *вспомогательный прием*, эффективность которого как раз и связана с его ограниченным характером. С диалектико-материалистической точки зрения истолкование истинности и ложности как абстрактных предметов является производным от понимания истины как соответствия наших знаний материальной действительности, от диалектико-материалистического понятия объективной истины как такого содержания наших представлений и мыслей, которое не зависит от человека, от человечества, являясь отражением внешней реальности.

Из общих принципов фрегевской теории следует, что если предложение имеет *истинностное значение*, то последнее определяется *мыслью*, содержащейся в этом предложении. Мысль, же, по Фреге, не носит субъективного характера. Она, говорит немецкий логик, есть объективное содержание мышления, которое может быть общим достоянием многих людей.

Все предложения, согласно теории Фреге, разбиваются на два класса: на класс предложений, смысл которых таков, что он определяет истинностное значение «истина», и класс предложений, смысл которых таков, что он определяет истинностное значение «ложь». Мысль есть смысл имени истинности или ложности[33]. Истинное предложение — это имя истинности, а ложное предложение — это имя ложности. Мы можем понимать мысль, выраженную в некотором предложении, но не знать, каково определяемое ею истинностное значение. Может даже случится, что предложение ни истинно и ни ложно (что имеет место, когда в состав предложения вхо-

---

[33] Следует иметь в виду, что выражение «мысль» Фреге употребляет в специальном смысле, как термин своей теории. В то время как обычно термин «мысль» применяют не только к смыслам повествовательных предложений, но также и содержанию (смыслу) имен (в собственном смысле), вопросительных предложений и других выражений языка, Фреге употребляет этот термин только в отношении смыслов повествовательных предложений <Behauptungssätze>.

дят имена, не имеющие значения), а мы — хотя и понимаем его смысл — не знаем этого.

Здесь возникает следующий вопрос. Высказывая предложения, люди обычно хотят выразить не просто то, что содержащиеся в них мысли либо истинны, либо ложны, а претендуют на и с т и н н о с т ь высказываемого. Но в предложении как и м е н и истинности или ложности утверждения истины вовсе не содержится. Чтобы преодолеть это затруднение, Фреге вводит понятие *суждения* ⟨Urteil⟩.

Суждением Фреге называет «признание истинности мысли» [3, стр. 9]. Пока предложение рассматривается просто как *имя* истины или лжи, в нем еще нет никакого *утверждения*. Последнее будет иметь место лишь тогда, когда к предложению будет присоединено указание на его истинность. В обычном мышлении и научном познании на высказываемое кем-либо предложение обычно смотрят как на утверждение истины; утверждение истины в этом случае выражается самим фактом высказывания предложения.

В соответствии с этим Фреге считает необходимым ввести в свое «исчисление понятий» особый *знак утверждения*. Фреге пишет, что в простом равенстве «$2^2 = 4$» не содержится никакого утверждения; это равенство просто обозначает некоторое (причем не известно какое) истинностное значение. Чтобы показать, что речь идет об утверждении истины, Фреге предпосылает имени истинностного значения знак «$\vdash$», так что в «$\vdash 2^2 = 4$» у т в е р ж д а е т с я, что квадрат двух есть четыре. «Для меня,— говорит автор «Основных законов арифметики»,— суждение является не пустой оболочкой мысли, но признанием ее истинности» [5, стр. 34, примечание] [34].

* * *

[34] Предложенное Фреге различение между *утверждением предложения* и использованием его в качестве *особого рода имени* получило в дальнейшем распространение в математической логике. С некоторыми отклонениями от концепции Фреге (связанными с отказом от некоторых положений фрегевской семантики) его проводят Рассел и Уайтхед [16, стр. 92—93], И. И. Жегалкин [17, стр. 14—15; 18, стр. 314—315, 321; 19, стр. 207] и другие авторы. Наиболее, пожалуй, полно концепцию Фреге в этом вопросе принимает Чёрч [22, раздел «Введение»].

Принцип замены равнозначным в применении к *предложениям* касается *истинностных значений*. Фреге пишет: «Если наше предположение, что значение предложения есть его истинностное значение, правильно, то тогда последнее должно оставаться без изменения, если заменить часть предложения выражением, имеющим то же значение, но другой смысл» [5, стр. 35].

Применимость этого принципа в простейших случаях очевидна. Так, если в предложении (5) заменить имя 4) на отличное по смыслу, но одинаковое по значению имя 6), то истинностное значение предложения (6), получающегося в результате этой замены, совпадает с истинностным значением исходного предложения (и то, и другое истинно).

Теперь возьмем такой пример:

(7) «Георг IV однажды спросил, является ли Вальтер Скотт автором Ваверлея»[35].

Заменим в (7) имя «автор Ваверлея» равнозначным ему именем «Вальтер Скотт». Мы получим предложение:

(8) «Георг IV однажды спросил, является ли Вальтер Скотт Вальтером Скоттом».

В то время как предложение (7) истинно (то, что английский король некогда поставил указанный вопрос, это исторический факт), предложение (8), по всей вероятности ложно (вряд ли Георг IV сомневался в том, что Вальтер Скотт есть Вальтер Скотт). Мы видим, таким образом, что принцип замены нарушается. Это связано с тем, что заменяемое выражение входит в состав *косвенной речи*.

Как мы увидим далее, теория Фреге устраняет парадоксы этого рода, соответствующим образом объясняя смысл и значение слов в косвенной речи. К рассмотрению фрегевского истолкования косвенной речи мы и переходим.

* * *

---

[35] Этот пример разбирается у Рассела в [24] и [25] (глава «Описания»), у Чёрча в [22] (Введение, § 01) и у других авторов. Антиномию, составляющую содержание этого знаменитого примера в современной литературе, называют *антиномией отношения именования*, см. [29], § 32.

Пользование языком основано на принципе, согласно которому, если мы в предложении хотим сказать нечто о каком-либо предмете, мы пользуемся не самим этим предметом, но его именем [20, стр. 68 и 224; 21, стр. 95]. Этот принцип очевиден и не может быть нарушен, пока предметом высказывания не оказываются сами языковые выражения. Естественные языки, служащие целям общения людей друг с другом, являющиеся материальной оболочкой мысли, орудием познания внешнего мира, как раз и отличаются тем, что на этих языках можно говорить также о самом языке, о выражениях языка, о смысле выражений языка. В этом случае, если мы смешаем знак и обозначаемое, может получиться парадокс, пример которого приводит переводчик книги С. К. Клини «Введение в метаматематику» А. С. Есенин-Вольпин [20, стр. 225].

Фреге это понимал. Он требовал строго различать *предмет* и его *имя*, критикуя тех, кто смешивал *обозначаемое* и *обозначающее* [ср. 6]. Чтобы предупредить такое смешение в случае, когда речь шла о самих выражениях языка, Фреге или употреблял метаязыковые знаки, или заключал языковые образования в кавычки (начиная с [5] он стал помещать выражения, о которых шла речь, между двумя запятыми). То, что Фреге обратил такое серьезное внимание на необходимость отличать знак от обозначаемого им предмета есть его бесспорная заслуга

Фреге различал а) *упоминание* имени (слова, языкового образования), б) *прямое употребление* имени и в) его *косвенное употребление*.

Прямое употребление имен есть их обычное употребление: в этом случае имя выражает свой смысл и обозначает предмет. Предложение при прямом употреблении выражает мысль и — если оно имеет истинностное значение — обозначает истину или ложь. *Упоминание* слов имеет место при передаче прямой речи (цитирование)[36]. Слова того, кто передает чужую речь, имеют своим значением слова другого человека. Так, в пред-

---

[36] Передача прямой речи не есть единственная форма упоминания слов. Так, в следующих предложениях (в которых нет передачи прямой речи) слово «Маша» упомянуто:

ложении «Сенека писал: ««Rationale animal est homo»» не говорится ни о мысли Сенеки, ни о том, истинна ли эта мысль, а лишь сообщается, какую он написал последовательность букв (пример Чёрча [22], § 04, примечание 72). Предложение ««Rationale animal est homo»» имеет своим значением предложение «Rationale animal est homo». Фреге пишет: «Когда употребляют слова обычным образом, то то́, о чем хотят сказать с помощью этих слов, является их значением. Однако может также случиться, что хотят сказать нечто о самих словах или их смысле. Это происходит, например, тогда, когда приводят слова другого человека в прямой речи. Тогда собственные слова имеют своим значением прежде всего слова другого лица и лишь эти последние имеют обычное значение. Тогда мы имеем знаки для знаков. В таком случае в письменной речи словесные образования заключают в кавычки. Поэтому словесное образование, стоящее в кавычках, нельзя брать в обычном значении» [5, стр. 28].

Фреге далее показал, что мы можем говорить не только о предметах и не только об именах и предложениях, но также и о смысле имен и предложений. Какими же языковыми средствами осуществляется разговор о смысле? Если мы хотим сказать о смысле выражения «А», это можно сделать с помощью оборота «смысл выражения «А»». О смысле можно также говорить в форме косвенной речи. Например, предложение

(9) «NN понимает, что такое центр тяжести Солнечной системы»

есть высказывание о смысле имени «центр тяжести Солнечной системы». Последнее входит в состав косвенной речи. В косвенной речи слова не имеют обычного значения, а обозначают то, что в случае прямого употребления является их смыслом. Они, как говорит Фреге, употребляются *косвенно*, или имеют

««Маша» состоит из 4 букв»,

«Слово *Маша* состоит из 4 букв».

«Маша состоит из 4 букв».

В последнем примере имя «Маша» употреблено автонимно — как имя самого себя. Чтобы автонимия не приводила к парадоксам, надо иметь возможность всегда отличить автонимное употребление слов от его неавтонимного употребления.

косвенное значение. В соответствии с этим Фреге отличает *обычное значение* имени от *косвенного значения* и его *обычный смысл* от *косвенного смысла*. Косвенный смысл имени «А» совпадает со смыслом слов «с м ы с л и м е н и «А»». Косвенное значение имени — это его обычный смысл.

Каждое имя в косвенной речи имеет косвенный смысл и косвенное значение. Поэтому и все придаточное предложение, выражающее косвенную речь, имеет косвенный смысл и косвенное значение: его значением является то, что при обычном (прямом) его употреблении считалось бы мыслью, а его смысл совпадает со смыслом слов: «мысль, что... (где далее следует соответствующее предложение)».

* * *

В случае косвенного употребления имен принцип замены равнозначным нельзя применять так, как он применяется для имен в их прямом употреблении; в противном случае из истинных посылок окажутся выводимыми ложные заключения. Это и имело место в примере, рассмотренном на стр. 528. С точки зрения Фреге ошибка здесь получается потому, что имя «автор Ваверлея» в предложении (7) было употреблено косвенно (поскольку входило в состав косвенной речи). Это значит, что значением этого имени был его обычный смысл. Поэтому, применяя принцип замены, мы были обязаны заменять это имя выражением, имеющим не то же обычное, а то же косвенное значение (например, именем «тот, кто написал Ваверлея»). Если предложение (7) истинно, то истинно будет и предложение, которое получится после такой замены.

Отсюда вывод: *принцип замены равнозначным разрешает замену имени, употребленного косвенно, только на имя, имеющее то же косвенное значение.*

Это уточнение касается и того случая, когда замене подлежит целое предложение. Так, в сложном предложении «Коперник думал, что *видимое движение Солнца возникает в результате действительного движения Земли*» придаточное предложение (которое — если его рассматривать самостоятельно, т. е. вне главного предложения, в которое оно входит, —

имеет истинностное значение «истина») нельзя, разумеется, заменить любым предложением, содержащим истинную мысль; замена может производиться только на предложение, выражающее в точности ту же самую мысль, что и заменяемое придаточное предложение.

Для косвенного употребления имен (в частности, предложений) уточнению подлежит и принцип, по которому имя (в частном случае — предложение) не имеет значения, если его не имеет какое-либо входящее в него составляющее имя (в частности, предложение). Из сказанного выше с очевидностью следует, что если составляющее имя имеет косвенное значение, отсутствие у этого имени прямого значения не препятствует тому, чтобы все сложное имя, тем не менее, имело таковое. В предложении «В «Одиссее» говорится, что Одиссей был выброшен на берег Итаки глубоко спящим» имя «Одиссей» хотя и не имеет обычного значения, зато имеет косвенное значение, которое единственно и принимается во внимание в данном случае. Поэтому все предложение в целом имеет истинностное значение; именно, оно обозначает истину[37].

---

[37] Что касается применения принципа замены равнозначным к прямой речи (и вообще к случаю упоминания выражений), то очевидно, что слово (имя, выражение, целое предложение) в этом случае не может быть заменено ни словом с тем же обычным, ни словом с тем же косвенным значением, что и у заменяемого имени (слова, выражения, предложения). Так, в предложении

«Сенека писал: «Rationale animal est homo»»

(A) выражение, стоящее в кавычках, может быть «заменено» только... *тем же самым* выражением. Если же учесть, что выражение

«Rationale animal est homo»

(вместе с кавычками) есть имя выражения

«Rationale animal est homo»

и что для этого последнего всегда можно образовать другие имена, например, употребить кавычки иного рода

«,,Rationale animal est homo''»

или, скажем, условиться обозначать его буквой «Ф», то применение принципа замены равнозначным даст предложения:

«Сенека писал: «,,Rationale animal est homo''»

и

«Сенека писал: Ф.

Однако последнее предложение естественно представляется имеющим уже совсем иной смысл, нежели (A), что объясняется тенденцией рассматривать «Ф» в этом предложении как выражение, употребленное *автонимно*.

Возникает вопрос: в чем видит Фреге критерий, применение которого позволяет решить,что данное имя употреблено прямо, косвенно или относится к передаваемой кем-то прямой речи? Таким критерием Фреге, по-видимому, считает формы данного языка. Анализ, который он проводит в [5], весь ориентирован на формы немецкого языка. Признаком косвенного употребления выражения для Фреге является то, что оно встречается в составе косвенной речи, а косвенная речь выражается придаточным предложением. Придаточные предложения немецкого языка, в которых выражается косвенная речь, Фреге относит к особой категории придаточных предложений, которые он называет абстрактными именными предложениями (Nennsatz); такие предложения вводятся союзом «daß». Косвенная речь — в немецком языке — выражается конъюнктивом. Таковы признаки, указывающие на косвенное употребление слов. Ориентировка на анализ форм обычного языка при выяснении вопросов, связанных со смыслом и значением, характерна для Фреге. Вместе с тем он ясно отдавал себе отчет в различии между языковедческим и логическим подходом к языку.

Между тем в реальных человеческих языках не всегда легко отличить случаи, когда речь идет о смысле имени, от случаев, когда высказывание касается предмета имени. Например, в сложном имени «миф о Пегасе»[38] составляющее имя «Пегас» следует считать имеющим косвенное значение, хотя косвенной речи здесь нет. В самом деле, слово «Пегас» обозначает тут тот смысл, который этому имени придала греческая мифология; на это указывают слова «миф о». Поэтому-то «миф о Пегасе» имеет значение, хотя в него входит имя, не обозначающее никакого предмета. Таким образом, имя может иметь косвенное значение, но не входит в состав косвенной речи.

Мы знаем, что, если имя имеет косвенное значение, к нему нельзя обычным способом применять ни принцип замены равнозначным, ни принцип, по которому сложное имя не имеет значения, если какое-либо из составляющих имен не имеет

[38] Пример рассматривается Чёрчем в [22].

значения. Это позволяет считать нарушение одного из этих принципов — в том их применении, которое имеет силу для прямого употребления имен,— в отношении какого-либо имени признаком косвенного употребления этого имени. Этот критерий фактически содержится у Фреге[39]. Применение его к предшествующему примеру легко позволяет установить факт косвенного употребления слова «Пегас».

* * *

Принцип замены равнозначным должен быть справедлив и в том случае, когда выражение, подлежащее замене, само является предложением. «Если наш взгляд верен,— пишет Фреге,— то истинностное значение предложения, содержащего другое предложение в качестве своей части, должно остаться без изменения, если мы заменим предложение, составляющее часть другого предложения, предложением с тем же истинностным значением» [5, стр. 36]. Но если заменяемым предложением является придаточное предложение, то встречаются случаи, когда замена такого предложения предложением с тем же истинностным значением порождает из истины ложь. Чтобы объяснить эти случаи и показать к а к следует применять принцип замены равнозначным к придаточным предложениям, Фреге разбирает различные виды придаточных предложений, подразделяя их на четыре группы. Фрегевский анализ касается форм немецкого языка, но этим формам нетрудно подыскать русские соответствия.

Первую группу составляют предложения, выражающие косвенную речь[40]. Фреге приводит следующие примеры:

(10) «Коперник думал, что *орбиты планет являются кругами*»,

(11) «Коперник думал, что *видимое движение Солнца возникает в результате действительного движения Земли*».

---

[39] Применение его предполагает, что мы можем отличить употребление имени (прямое или косвенное) от его упоминания.

[40] Но не всякое придаточное предложение, выражающее косвенную речь, относится к этой группе. См. ниже.

В обоих (выделенных курсивом) придаточных предложениях слова употреблены косвенно. Поэтому каждое предложение, взятое в целом, имеет косвенное значение: им является выраженная в предложении мысль, а не его истинностное значение. В таких случаях смысл придаточного нельзя передать в самостоятельном предложении. В самом деле, предложение «Орбиты планет являются кругами» выражает иной смысл, чем то же предложение в функции придаточного. Смысл придаточного можно передать только описательным оборотом «Мысль, что орбиты планет являются кругами». Поэтому на придаточные предложения рассматриваемого вида можно смотреть как на собственные имена тех мыслей, которые выражаются соответствующими предложениями, если их брать самостоятельно. Главное предложение вместе с придаточным имеет своим смыслом одну единственную мысль, части которой сами не являются мыслями; смысл придаточного предложения составляет часть этой единой мысли. Поэтому истинность сложного предложения не включает в себя ни истинности, ни ложности придаточного предложения. Это видно на примерах. В (10) придаточное предложение (если его рассматривать как самостоятельное предложение) выражает ложную мысль, но все предложение (10) в целом истинно; в (11) придаточное предложение выражает истинную мысль и сложное предложение истинно. Это вполне понятно. Ведь мысль оказывается здесь не смыслом придаточного предложения, но его значением; поэтому-то для истинности целого безразлично, является ли эта мысль истинной или ложной (потому что значение предложения определяется только значением его частей, но не их смыслом). Такое придаточное предложение нельзя заменить предложением, имеющим то же истинностное значение, а можно заменить лишь таким, которое имеет то же косвенное значение (выражает ту же мысль). Только таким образом применимо в этом случае правило замены.

Вторую группу придаточных предложений составляют такие предложения, которые (иногда вместе с частью главного предложения) служат для образования сложных имен предметов. В качестве примера Фреге рассматривает следующее предложение:

(12) «*Тот, кто*[41] *открыл эллиптическую форму планетных орбит*, умер в нищете».

Придаточное предложение, входящее в (12), есть имя Кеплера. Слова в нем имеют прямое значение. Придаточные предложения этой группы объединяет то, что в них встречаются так называемые *неопределенно указывающие выражения*, которые и делают возможным связь между придаточным и главным предложением. В нашем примере таким выражением является «тот, кто». В математике и математической логике неопределенно указывающим выражениям соответствуют переменные, связанные операторами (например, оператором дискрипции и квантором общности)[42]. Неопределенно указывающие выражения не имеют значения и не выражают никакого законченного смысла.

Придаточные предложения второй группы не выражают завершенных мыслей и не обозначают истины или лжи. Смысл предложения этого вида нельзя выразить в отдельном непридаточном предложении. Применение принципа замены равнозначного на равнозначное к этому предложению означает его замену другим именем того же предмета.

Примером придаточного предложения *третьей группы* может быть предложение, входящее в состав следующего сложноподчиненного предложения:

(13) «Наполеон, *который понял опасность, угрожавшую его правому флангу*, сам повел свою гвардию в наступление на позиции неприятеля»[43].

---

[41] Так мы переводим определенный артикль немецкого языка.

[42] Другим примером придаточных предложений, содержащих неопределенно указывающие выражения, являются условные предложения, выражающие всеобщность, например: «Когда Солнце находится в Тропике Рака, в Северном полушарии самый короткий день» и «Если $x > 0$, то $x + 3x > 0$». В первом из предложений неопределенное указание касается времени и выражается формой настоящего времени глагола. Во втором примере неопределенно указывающей частью является *переменная x*. Свое учение о переменных Фреге изложил в [8]. Современная математическая логика в понимании переменных в целом следует по пути, намеченном Фреге.

[43] Имеется в виду битва при Ватерлоо.

В предложениях этого рода слова имеют обычный смысл и обычное значение. Придаточное предложение выражает законченную мысль, а его значением является истина или ложь. Мысль, выражаемая всем сложно-подчиненным предложением, складывается из мысли главного предложения и мысли придаточного предложения. В данном примере две мысли соединены конъюнктивно. Поэтому значение сложного предложения определяется истинностными значениями конъюнктивно соединенных предложений. Поскольку придаточное предложение имеет обычный смысл и обычное значение, его можно заменить предложением, которое имеет то же истинностное значение [44]. Таким образом, к предложениям этого вида принцип замены применяется в своей непосредственной форме.

Сложнее дело обстоит в тех случаях, когда придаточное предложение — благодаря связи с другим предложением — выражает больше, чем взятое само по себе. Иногда в таких случаях слова в придаточном предложении берутся дважды: один раз в прямом, а другой раз в косвенном значении. Так бывает в косвенной речи после таких слов, как «воображать», «лгать» и т. п. Например, в предложении

(14) «*А* лгал, что *он видел Б*»

выражены две мысли, про которые неверно было бы сказать, что одна из них принадлежит главному, а другая — придаточному предложению. Эти мысли таковы:

а) *А* утверждал, что он видел *Б*,

б) *А* не видел *Б*.

Выражая первую мысль, слова придаточного предложения имеют косвенное значение, в то время как те же слова, выражая вторую мысль, имеют прямое значение. Поэтому придаточное предложение, входящее в (14), нельзя заменить предложением с тем же истинностным значением.

---

[44] Фреге отмечает, что в отношении предложений типа (13) следует ввести следующее ограничение: у заменяющего предложения должен быть тот же субъект, что и у заменяемого. Ограничение отпадает, если допустить соединение при помощи союза «и», считая предложение (13) совпадающим по смыслу и значению с предложением «Наполеон понял опасность, угрожавшую его правому флангу, и Наполеон сам повел свою гвардию в наступление на позиции неприятеля».

Указанная замена бывает невозможна иногда и в случаях, когда слова в придаточном предложении берутся только в прямом значении. Именно, это имеет место тогда, когда придаточное предложение, помимо некоторой цельной мысли, выражает еще и часть другой мысли. Так обстоит дело, например, в предложении

(15) «*Так как удельный вес льда меньше удельного веса воды*, лед плавает в воде».

Мы имеем здесь три мысли:

а) удельный вес льда меньше удельного веса воды,

б) если нечто имеет удельный вес, который меньше удельного веса воды, то оно плавает в воде,

в) лед плавает в воде.

Придаточное предложение, входящее в (15), выражает не только первую мысль, но и часть второй мысли. Поэтому его нельзя просто заменить другим предложением с тем же истинностным значением, ибо поступив так, мы изменили бы и вторую мысль; изменение же последней могло бы затронуть также определяемое ею истинностное значение, что в свою очередь могло отразиться на истинностном значении всего предложения (15).

Как же следует применять принцип замены равнозначного на равнозначное в сложно-подчиненных предложениях, содержащих придаточные предложения *четвертой группы*? Сложное предложение следует предварительно подвергнуть логическому анализу, выявив содержащиеся в нем мысли; это означает замену данного предложения другим предложением, совпадающим с ним по смыслу, но в котором все мысли представлены явно

Например, в результате такого анализа предложение (14) принимает вид:

(16) «*А* утверждал, что он видел *Б*, и *А* не видел *Б*».

Применимость принципа замены равнозначного на равнозначное к предложениям «*А* утверждал, что он видел *Б*» и «*А* не видел *Б*», рассматриваемым (каждое) в целом, очевидна. Что касается придаточного предложения «он видел *Б*», то к нему правило замены тоже применимо, но только в той форме, в какой это правило применяется к косвенной речи.

Фреге понимал, что не всякое предложение легко поддается анализу по предложенному им способу. Он писал: «Если мы станем так рассматривать все встречающиеся в языке придаточные предложения, мы вскоре встретим такие, которые не так-то легко разложить по этим полочкам (имеются в виду выделенные Фреге четыре группы придаточных предложений.— *Б. Б.*). Причина этого, как мне кажется, состоит в том, что эти придаточные предложения имеют отнюдь не такой простой смысл. Кажется, почти всегда мы соединяем с главной мыслью, которую мы выражаем, побочные мысли, которые, хотя они и не выражаются в языке, слушатель, по законам психологии, тоже связывает с нашими словами» [5, стр. 46]. В таких случаях следует точно выяснить, что же именно имел в виду человек, высказавший данное предложение, и только после этого проводить анализ последнего.

* * *

Математическая логика, по крайней в основной, «классической», ее части, охватывающей обычное двухзначное исчисление высказываний и исчисление предикатов, носит *объемный* характер. В ней справедлив так называемый *принцип объемности*, согласно которому два *предиката* (*свойства* или *отношения*) не различаются, если они имеют один и тот же *объем*. Этот принцип получил четкую формулировку после того, как Фреге ввел в логику представление о предикатах как о *логических функциях*, т. е. функциях, относящих предметам (двойкам, тройкам и т. д. предметов) рассматриваемой предметной области истинностные значения — истину или ложь [45]. В объемной логике предикат считается заданным, если указан

[45] Термина «предикат» в том смысле, в каком его употребляют в современной логике (как выражение, равнозначное выражению «логическая функция») Фреге не применяет. Логические функции от одного аргумента он называет понятиями (причем фрегевские понятия совпадают с общими свойствами), а логические функции от двух аргументов — отношениями.

Следует иметь в виду, что в системе Фреге каждая логическая функция определена на универсальной предметной области, включающей в себя любые объекты (Фреге не налагает никаких ограничений на выражение «любой»). Эта особенность исчисления Фреге обусловила его противоречивость (противоречие в системе Фреге было обнаружено Б. Расселом).

его объем, т. е. в какой-либо форме сообщено, каким предметам (парам, тройкам и т. д. предметов) рассматриваемой предметной области предикат относит «истину». Поэтому оказывается возможным просто отождествить свойства с *множествами* предметов, а отношения — с множествами пар, множествами троек и т. д. предметов. Свойства и отношения, рассматриваемые таким образом, можно называть свойствами и отношениями в объемном смысле. В математике объемный подход полностью себя оправдывает. Хорошо известно, что средств объемной, теоретико-множественной логики достаточно для обоснования большей части современной математики.

Естественно поставить вопрос: какой характер носило построенное Фреге логическое исчисление, пользуясь средствами которого выдающийся немецкий логик предпринял обоснование арифметики [3 и 4], действовал ли в исчислении Фреге тезис объемности? Исчисление Фреге носило объемный характер. Если два предиката (две логические функции) $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ для любого аргумента принимают одно и то же значение, то мы можем, утверждает Фреге, превратить всеобщность этого равенства в равенство объемов, которые соответствуют этим предикатам. «На эту возможность следует смотреть как на логический закон, которым, впрочем, хотя и молчаливо, мы всегда уже пользовались, когда речь шла об объемах понятий. На нем в общем и целом и основано лейбницево-булевское логическое исчисление» [3, стр. 14). При этом следует особо подчеркнуть то, что объем понятия (т. е. класс предметов, для которых данная логическая функция принимает значение «истина»)[46] Фреге считает особым *логическим* предметом (подобным двум истинностным значениям).

Известно, что иной формой принципа объемности является *лейбницевская аксиома равенства*. Она гласит, что два предмета равны, если, и только если, всё, что верно относительно одного предмета, верно и относительно другого предмета, и наоборот. Эту аксиому можно выразить и в виде правила (будем называть его *правилом Лейбница*)

$$\downarrow \frac{p = q}{\Phi(p) \equiv \Phi(q),} \uparrow$$

[46] О фрегевском понимании объема понятия см. [32].

которое читается так: если p равно q, то в любом предложении Ф, содержащем p, последнее можно заменить (во всех или только в некоторых местах предложения Ф, где встречается p) на q, и при этом истинность высказывания не изменится; наоборот, если такая замена p на q возможна в любом предложении Ф, то p равно q ([21], стр. 91—92 и примечание редакции на стр. 293)[47].

Так как объемы выступают в качестве предметов, то они подпадают под это правило. Это значит, что если про некоторый класс А что-то сказано, то это можно повторить и про класс В в случае, если А совпадает с В. Но «сказать» про класс А можно не только при помощи оборота «класс А», но также употребив понятие того свойства, которое определяет данный класс. Про класс людей можно нечто высказать, не только употребив выражение «человечество», но и прибегнув к понятию «человек» (т. е. к понятию о свойстве быть человеком). Известно, что один и тот же класс может определяться различными свойствами. Из правила Лейбница следует, что понятия о свойствах и отношениях, определяющие один и тот же класс, т. е. равнообъемные понятия, можно заменить друг другом. Например, понятия о прямой, соединяющей вершину равностороннего треугольника с серединой противоположной стороны, и о прямой, делящей угол равностороннего треугольника пополам, равнообъемны. Поэтому, по правилу Лейбница, их можно заменить друг другом в любом предложении. Так, из истинного предложения

(17) «Прямые, соединяющие вершины равностороннего тре-

[47] «р» и «q» суть предметные переменные (на их место можно подставлять имена предметов из предметной области), а «Ф» есть переменная для предложений; знак «$=$» означает тождество предметов, а «$\dot{\equiv}$» служит для обозначения эквивалентности предложений в отношении истинности и ложности («двойная импликация»). Употребление свободных переменных при записи этого правила выражает всеобщность. Горизонтальная черта есть знак вывода, а стрелки указывают на выводимость верхней формулы из нижней и нижней из верхней.

угольника с серединами противоположных сторон, пересекаются в одной точке»

получается истинное предложение

(18) «Прямые, делящие пополам углы равностороннего треугольника, пересекаются в одной точке».

Равнообъемные понятия не отличаются друг от друга именно в том смысле, что они взаимозаменяемы в любом предложении рассматриваемой науки [48]. В этом — и только этом! — смысле понятия, имеющие один и тот же объем, отождествляются; в этом — и только в этом! — смысле можно сказать, что понятия, которым соответствует один и тот же класс предметов, можно отождествить с этим классом [49].

Нетрудно, однако, обнаружить контексты, в которых замена равнообъемных понятий друг другом из истины будет порождать ложь. Так, если справедливо, что

(19) «NN знает, что прямые, соединяющие вершины равностороннего треугольника с серединами противоположных сторон, пересекаются в одной точке»,

то из этого вовсе не следует истинность предложения:

(20) «NN знает, что прямые, делящие углы равностороннего треугольника пополам, пересекаются в одной точке».

Действительно, если предложение (19) верно, это отнюдь не гарантирует справедливости предложения (20), ибо NN, зная то, о чем говорится в первом предложении, вполне может не знать того, о чем говорится во втором. Мы видим, таким образом, что существуют особые — по выражению Квайна [27], «мутные» — контексты, в которых правило Лейбница нарушается.

Фреге сформулировал в некотором смысле более общий принцип, чем правило лейбница,— правило замены равно-

---

[48] Предполагается, разумеется, что логика данной науки основана на принципе объемности.

[49] Именно так понимал дело Фреге. Он не проводил *полного* отождествления понятия с его объемом. Он не считал, что обнаруживающееся между двумя равнообъемными понятиями отношение равенства стирает всякие различия между ними и превращает их в одно понятие. Возражая Б. Керри, Фреге писал: «Если он думает, что я отождествляю понятие и объем понятия, то он ошибается» [7, стр. 198]. Несмотря на это, Фреге в целом стоял на объемной точке зрения.

значным. Правило Фреге касается замены выражений, входящих в состав сложных имен. Введение понятия истинностного значения, а также представления о предложениях, как об именах истины или лжи, привело к тому, что правило Лейбница оказалось частным случаем правила Фреге. Правило Фреге для случаев, когда заменяемое имя входит в состав предложения, совпадает с правилом Лейбница.

Мы знаем, что по теории Фреге правило замены равнозначным действует во всех контекстах без изъятия; для обнаружения этого действия надо только правильно логически проанализировать, истолковать соответствующее выражение. Действует это правило и в том «мутном» — или, как иначе говорят, «интенсиональном», «необъемном» — контексте, который мы рассматривали выше, так сказать, «проясняя» его.

В (19) и (20) мы имели косвенную речь, а выражения в косвенной речи имеют косвенное значение. Поэтому мы не имеем права рассматривать выражения

10) «прямые, соединяющие вершины равностороннего треугольника с серединами противоположных сторон»

11) «прямые, делящие пополам углы равностороннего треугольника»

как равнозначные, так как в данном контексте они обозначают не объемы понятий, а их смыслы, т. е. то, что можно назвать свойствами в необъемном смысле [50]. Фрегевский принцип замены применим и к свойствам в необъемном смысле. Выражение 10) в составе предложения (19) может быть заменено выражением, обозначающим то же свойство в необъемном смысле, например, выражением «медианы равностороннего треугольника» (предполагается, что медиана, по определению, есть прямая, соединяющая вершину треугольника с серединой его противоположной стороны).

* * *

---

[50] Именно так в реальном мышлении понимаются свойства. *Быть прямой, соединяющей вершину равностороннего треугольника с серединой противоположной стороны*, и *быть прямой, делящей угол равностороннего треугольника пополам*, считаются обычно различными свойствами, хотя с объемной точки зрения они совпадают.

Мы говорили, что понятие *смысла* Фреге ввел для того, чтобы объяснить предложения, содержащие *равенства*. Но роль фрегевского понятия смысла выходит за рамки этой задачи. Фактически роль смысла в его теории состоит в том, чтобы придать объемный характер не только логическому исчислению, которое Фреге строит специально для обоснования арифметики, но также и обычному мышлению и обычному языку, поскольку последний используется для целей логики. Теория смысла Фреге охватывает и обычные, и формализованные языки.

Рассматривая обычный язык, Фреге встретился с «мутными» контекстами, в которых как будто нарушался принцип объемности и в которых выражения, так сказать, «обнаруживали», что они имеют смысл. Наиболее ярким примером такого рода контекстов была *косвенная речь*. Это была *реальная трудность*, которую впервые обнаружил именно Фреге [51]. Для ее преодоления открывалось два пути. Первый путь состоял в признании того, то тезис объемности действительно нарушается в некоторых контекстах обычного языка и что смысл выражений, который обнаруживается при этом, может быть исследован путем построения специальных логических исчислений. Это путь интенциональной логики.

---

[51] Интересно отметить следующий исторический факт. Известно, что продолжатель дела Дж. Буля и А. де-Моргана английский логик Стенли Джевонс в основу своей теории положил так называемый принцип замещения. Этот принцип фактически представлял собой неточно сформулированный фрегевский принцип замены равнозначного на равнозначное (для того частного случая, когда заменяемое выражение входит в состав предложения). Джевонс придавал этому принципу универсальное значение, утверждая, что «всякий термин, встречающийся в каком-либо предложении, можно замещать термином, о котором утверждается в какой-либо посылке, что он тождествен с первым» [12, стр. 48]. Что в отношении предложений, содержащих косвенную речь, это его утверждение ошибочно, он, по-видимому, не заметил. Объяснялось это, вероятно, тем, что Джевонсу был совершенно чужд семантический аспект логики. В отличие от своего соотечественника Д.-С. Милля он не понимал, что изучение отношения языковых выражений к объектам, о которых мы говорим с их помощью, имеет существенное значение для логики. Поэтому он **прошел мимо интенциональных контекстов**, в отношении которых его принцип замещения был непосредственно неприменим.

Второй путь состоял в том, чтобы отстаивать принцип объемности. На этот путь и вступил Фреге. Чтобы отстоять тезис объемности, Фреге надо было доказать универсальность своего правила замены равнозначным, а сделать это было можно, только соответствующим образом истолковав «мутные» контексты. Это и сделал автор «Основных законов арифметики». Он предложил свой способ логического анализа таких контекстов, основанный на открытом им понятии *смысла*. Это понятие дало возможность Фреге различить *прямое* и *косвенное употребление* слов и тем самым пролить свет на логическую природу *косвенной речи*. Фрегевское объяснение косвенной речи есть существенный шаг вперед в логическом анализе естественных языков.

На чем же основано то «прояснение» «мутных» контекстов, которые предпринял Фреге? На превращении *смыслов имен* и (рассматриваемых как их частные случаи) *мыслей*, выражаемых *предложениями*, в особого рода *абстрактные предметы*. Например, предложение (7) в отношении имени «автор Вaверлея» есть «мутный» контекст. В соответствии с теорией объяснения косвенной речи, предлагаемой Фреге, следует считать, что в данном контексте это имя обозначает свой обычный смысл, который выступает в качестве значения этого имени в этом контексте, т. е. в качестве некоторого *предмета*; правило замены и следует применять в соответствии с таким истолкованием. Применимость же этого правила свидетельствует о том, что контекст приобрел объемный характер. Аналогично обстоит дело с *мыслями*. Предложение «Орбиты планеты являются кругами» в контексте предложения (10) обозначает мысль, которая, таким образом, рассматривается как *предмет* [52].

Теперь ясно, почему Фреге не формулирует соотношений для смыслов. Ведь когда выражение обнаруживает свой смысл, последний превращается в предмет и подпадает под действие

---

[52] Разъяснение применимости правила замены для случая упоминания имен при передаче прямой речи, как это следует из примечания 37, тривиально, поскольку в этом случае в качестве предметов выступают цитируемые слова. Фреге специально не останавливается на этом случае.

правила замены равнозначным [53]. Фреге оперирует со смыслами объемным образом.

* * *

Чисто объемное истолкование логики мышления, по-видимому, всегда будет наталкиваться на трудности; их появление свидетельствует о том, что такое истолкование имеет свои пределы. Объемная логика есть некоторая *формализация логики реального мышления* и, как всякая формализация, проводится за счет огрубления объекта, в данном случае — действительного человеческого мышления. Это огрубление достаточно ярко проявилось в теории Фреге, особенно во фрегевском объяснении *условных предложений*. Остановимся на этом подробнее.

От *смысла* предложения — выраженной в нем *мысли* — Фреге отличал то, что он называл «окраской», «освещением» мысли. Например, употребление союза «хотя» придает предложению своеобразную окраску, которая может оказаться совершенно неподходящей, если мы заменим придаточное предложение, которое вводится этим союзом, другим предложением с тем же истинностным значением [54]. Тем не менее с логической точки зрения Фреге считал допустимой такую замену. «Окраска» предложения будто бы не имеет отношения к логике.

Аналогично, по мнению Фреге, обстоит дело с условным предложением. Мысль о логическом — по смыслу — следовании следствия условного предложения из его основания есть будто бы только «окраска» предложения; это *побочная* мысль, которая, собственно говоря, совсем не выражается предложением с союзом «если...то». Предоставим слово самому Фреге. Он рассматривает предложение «Если сейчас уже взо-

[53] При этом в теории Фреге, конечно, предполагается, что смыслы, выступающие в качестве предметов, мы умеем каким-то образом различать и отождествлять, подобно тому как мы, по мнению Фреге, умеем это делать в отношении всех остальных предметов. Ср. стр. 517, а также примечание 27.

[54] Слова в уступительном придаточном предложении имеют прямое значение.

шло солнце, то небо покрыто тучами». «Можно сказать,— пишет Фреге,— что здесь устанавливается отношение между истинностными значениями предложения, содержащего условие, и предложения, содержащего следствие, причем такое отношение, что не может быть, чтобы предложение, содержащее условие, значило бы истину, а последующее предложение значило бы ложь. В соответствии с этим наше предложение истинно как в том случае, когда солнце еще не взошло, независимо от того, покрыто небо тучами или нет, так и в том случае, если солнце уже взошло и небо покрыто тучами. Так как при этом для нас важны только истинностные значения, то каждое из предложений, составляющих целое, можно заменить другим, имеющим то же истинностное значение, и при этом истинностное значение целого не изменится. Правда, и здесь характер окраски в большинстве случаев становится неуместным; мысль очень легко может оказаться нелепой; но это не имеет отношения к истинностному значению нашего предложения. При этом надо всегда следить за тем, чтобы сопутствующие мысли гармонировали с главной мыслью, однако побочные мысли, собственно говоря, не выражаются, и поэтому их нельзя включать в смысл предложения, для истинностного значения которого они, следовательно, не играют роли» [5, стр. 45—46]. В примечании к этому месту Фреге замечает, что мысль, содержащуюся в рассматриваемом предложении, можно было бы выразить также следующим образом: «Или солнце теперь еще не взошло, или небо покрыто тучами».

Из приведенных слов Фреге видно, что он истолковывал условные предложения чисто объемно, считая, что *материальная импликация* [55] есть п о л н а я формализация логической природы таких предложений. Заблуждение Фреге очевидно. Известно, что для формализации математических доказательств нет необходимости выявлять логическое следование по смыслу, а достаточно пользоваться материальной импликацией. Проводя математическое доказательство, мы интересуемся прежде всего тем, чтобы из истинных посылок

[55] С объемной точки зрения материальная импликация есть множество пар (истина, истина), (ложь, истина), (ложь, ложь).

получить истинное заключение. В этих целях можно пользоваться логическим аппаратом с материальной импликацией. Однако с логической точки зрения материальная импликация имеет тот недостаток, что плохо соответствует содержательному мышлению. Отнюдь не все, что выражают люди, когда они прибегают к форме условного предложения, оказывается в ней формализовано. Отсюда стремление создать логический аппарат, наилучшим образом отражающий законы содержательного мышления и, в частности, смысл логического следования (*Б* логически, по содержанию следует из *А*). Исчисления *строгой импликации* (Льюис, Аккерман), по сути дела, возникли из этого стремления.

Приходится констатировать, что Фреге не видел проблемы выявления смысла логического следования, выражением которого является условное суждение,— проблемы строгой импликации.

* * *

Основной идеей, пронизывающей логическую теорию Фреге, является метафизическое представление о логике и ее законах как о чем-то абсолютном и неизменном. С точки зрения Фреге законы мышления всегда и всюду одни и те же. Если когда-либо будут открыты отличные от людей мыслящие существа, они тоже, говорит он, будут мыслить по этим законам [56]. Отсюда невольно напрашивался вывод, что логические исчисления, выражающие эти законы, по существу однотипны и должны быть похожи на его «исчисление понятий». «Исчисление понятий», которое Фреге придумал для обоснования арифметики, носило объемный характер. Возможно поэтому Фреге казалось очевидным, что и логика реального содержательного мышления должна быть объемной. Чтобы обосновать объемный характер обычной содержательной логики, Фреге и ввел понятие *смысла*. Он справился с задачей [57], которую поставил

---

[56] См. предисловие Фреге к его книге «Основания арифметики» [10].

[57] Следует отметить, что предлагаемый Фреге способ проведения объемной точки зрения в обычных языках не носит эффективного характера, поскольку в теории Фреге отсутствует строгий критерий решения вопроса

перед собой, но при этом начисто выбросил из области логики «окраску», «освещение» мыслей, в том числе и понятие логического следования по содержанию, по смыслу. Метафизический характер концепции Фреге обеднил его логику.

Фреге не понимал того, что построение раз навсегда законченной системы логики, годной для любых языков, неосуществимо. «Мутные» контексты не устранимы до конца из содержательного языка, так как они являются выражением той неопределенности, которая в логике имеет место так же, как и в любой другой области. Процесс познания в логике заключается, в частности, в элиминации этой неопределенности, в уточнении смысла, содержания. Он осуществляется в процессе развития. Строится последовательность логических систем, или сами системы, так сказать, приходят в движение («пухнут»). На каждом этапе этого процесса, в каждой конкретной логической системе происходит формализация наших знаний, относящихся к некоторой конкретной области объективной реальности [58]; при этом не все особенности содержательного мышления, применяемого при познании этой области действительности, оказываются уточненными и выявленными. Построение последующих логических систем, позволяющее глубже формализовать содержание и выявить то, что не было выявлено ранее, ведет, как правило, и к более полной формализации содержательного мышления. однако на каждом этапе

о том, употреблено ли данное выражение прямо, употреблено ли оно косвенно или упомянуто. Ни чисто лингвистический критерий, о котором шла речь на стр. 532—533, ни тем более прием, о котором говорится далее, на стр. 533—534, не эффективны. Неэффективным характером отличаются и другие известные способы проведения принципа объемности в естественных языках (примером может служить способ, предлагаемый Расселом в [25]). Эффективное проведение принципа объемности в обычных языках, по-видимому, вообще невозможно, хотя бы уже в силу того, что живые языки находятся в состоянии непрерывного развития; но оно возможно для некоторых частей естественных языков, выделенных таким образом, что их словарный состав и грамматические правила могут быть точно определены логико-математическими средствами. Эта задача и решается при построении алгоритмов машинного перевода с одного языка на другой.

[58] Имеются в виду интерпретированные логические исчисления.

этой формализации обязательно остается «мутный», т. е. неопределенный, невыявленный, неуточненный остаток.

Реальное человеческое мышление бесконечно по своему содержанию, ибо это содержание черпается из объективного мира, который неисчерпаем; но оно бесконечно и со стороны своей структуры, или формы (выражением которой являются разнообразные естественные и искусственные языки), ибо последняя служит средством отображения бесконечно богатого содержания и развивается вместе с развитием содержания. Процесс познания всегда есть асимптотический процесс. По этому поводу Ф. Энгельс писал: «Подобно тому как бесконечность познаваемого материала слагается из одних лишь конечных предметов, так и бесконечность абсолютно познающего мышления слагается из бесконечного множества конечных человеческих голов, которые работают над этим бесконечным познанием друг возле друга и в ряде сменяющих друг друга поколений, делают практические и теоретические промахи, исходят из неудачных, односторонних, ложных предпосылок, идут ложными, кривыми, ненадежными путями и часто не находят правильного решения даже тогда, когда уткнутся в него носом... Поэтому познание бесконечного... может, по самой своей природе, совершаться только в виде некоторого бесконечного асимптотического прогресса» [2, стр. 186]. В логике этот прогресс заключается, в частности, во все более полном выявлении средствами формального аппарата особенностей содержательного человеческого мышления, которое совершается в ходе построения учеными-логиками все новых и новых логических исчислений. На каждом этапе развития логического символизма мы имеем некоторое знание об особенностях содержательного мышления, мы располагаем по этому вопросу объективной истиной, и эта истина в процессе развития логических систем становится все более полной и глубокой, оставаясь, однако, на каждом этапе относительной. Это значит, что к познанию законов содержательного мышления людей (как и к познанию любых других объектов) в полной мере применимы положения диалектического материализма об абсолютной и относительной истине, разъясняя которые В. И. Ленин писал в книге «Материализм и эмпириокритицизм»: «... человеческое мышление по природе своей способно давать и дает нам абсолютную истину, которая складывается из суммы относительных истин. Каждая ступень в развитии науки прибавляет новые зерна в эту сумму абсолютной истины, но пределы истины каждого научного положения относительны, будучи то раздвигаемы, то суживаемы дальнейшим ростом знания» [1, стр. 122].

* * *

Но вернемся к Фреге. Научное творчество этого несомненно выдающегося немецкого логика и математика представляет собой хорошую иллюстрацию приведенных выше слов Энгельса о людях, которые, внося свой вклад в познание мира человеком, тем не менее исходят зачастую из неудачных и односторонних предпосылок, допускают теоретические промахи. Неудачные, односторонние предпосылки, из которых исходил Фреге — предпосылка о неизменности предметов мира, представление о возможности различения и отождествления любых объектов, с которыми мы можем иметь дело в познании, убеждение во всеобщем и неизменном характере законов мышления, рассматриваемых в формальной логике, представление о всецело объемном характере логики содержательного мышления и др.— были предпосылками *метафизики*. Фреге не видел ни диалектического характера процесса познания в целом, ни того, как диалектика проявляется в развитии самой математической логики.

Однако несмотря на то, что взгляды Фреге носили в целом метафизический характер, его труды (в частности, осуществленное им изучение понятия *смысла*) представляли собой большой вклад в развитие логики. Три линии в логике идут от Фреге. Одна из них заключается в построении объемной логики, ориентированной на обоснование математики. Эта линия идет от фрегевских «Основных законов арифметики», явившихся первым опытом применения аппарата математической логики для формализации конкретной математической дисциплины. Эту линию продолжили создатели «Principia Mathematica» и другие ученые, работавшие в области оснований математики.

Вторая линия больше связана с логикой в собственном смысле и хотя непосредственно в работах Фреге не намечена, однако вытекает из проблем, поставленных в его трудах. Она состоит в построении исчислений, выявляющих смысл содержательных логических понятий, примером которых могут быть исчисления Льюиса [30] и Аккермана [31], формализующих понятие логического следования по смыслу, в изучении логических модальностей, условно-сослагательных предложений, предложений, выражающих законы науки и причинные отношения и т. д. Третья линия в логике, берущая свое начало в трудах Фреге, непосредственно связана с тем, что явилось предметом рассмотрения в настоящей статье. Она приводит к семантическим проблемам современной логики. Дело в том, что предпринятое Фреге уточнение понятия смысла положило начало целому кругу проблем математической логики, связанных с изучением отношения между именем и предметом, между обозначающим и обозначаемым. Вместе с Пирсом Фреге явился основоположником той области современной логики, которая позднее получила название *логической семантики*[59].

В самые последние годы вопросы, связанные со смыслом языковых выражений, стали актуальными в связи с приме-

[59] В математической логике термин «семантика» понимают в смысле, отличном от того, который в этот термин вкладывает обычное языкознание. Семантикой здесь называют логико-лингвистическую дисциплину, предметом изучения которой является отношение между формально построенным исчислением и той областью действительности, которая в нем отражается — его содержательной интерпретацией; в семантике стремятся уточнить такие — необходимые при интерпретации — понятия, как понятия «имени» и «предмета», «смысла» языкового выражения, «истинного» и «ложного» в формализованном языке и некоторые другие. Семантику как научное направление, как тесно связанную с лингвистикой ветвь математической логики не следует отождествлять с тем направлением в современной буржуазной философии, которое принято называть семантической философией и суть которого состоит в идеалистическом истолковании и субъективистском извращении результатов математической логики и логической семантики. При этом следует отметить, что многие работы в области семантики, принадлежащие зарубежным логикам, отражают субъективистские взгляды их авторов. Примером в этом отношении может быть книга Р. Карнапа [29], критическое освещение которой читатель найдет к предпосланному русскому изданию предисловии С. А. Яновской.

нением логико-математических методов в изучении естественных языков. Применение этих методов развилось вместе с работами по машинному переводу с одного языка на другой. Предпосылкой автоматического перевода является точное описание отношений между выражениями того языка, с которого переводят, и того языка, на который осуществляется перевод; только при этом условии возможно построение алгоритмов перевода. Практика, однако, показала, что то грамматическое описание языков, которое разработано обычным языкознанием, в целом мало пригодно для построения таких алгоритмов. Поэтому возник вопрос о более точной формулировке грамматик естественных языков. Так возникло то направление в изучении языка, за которым ныне все более укрепляется название *математической лингвистики*.

Основной проблемой перевода, в том числе и автоматического перевода, является проблема сохранения смысла выражения (данного языка) при переводе его на другой язык. Уже Фреге, разъясняя понятие смысла языкового выражения, характеризовал его как то, что сохраняется неизменным при переводе с одного языка на другой. Естественно поэтому, что в математической лингвистике круг вопросов, связанных со *смыслом*, приобрел существенное значение. Как мы знаем, Фреге не сформулировал каких-либо правил, относящихся к смыслам. Последующее развитие семантики привело к построению семантических систем, в которых понятие смысла подвергалось уточнению (ср., например, [29]). Возникновение математической лингвистики, приступившей к логико-математическому анализу естественных языков, показало, что, с одной стороны, такого рода системы могут быть практически полезны в лингвистическом анализе, но, с другой стороны, обнаружило сильную ограниченность многих семантических систем (в том числе системы, развитой в [29], ср. предисловие С. А. Яновской к русскому изданию этой книги). Проблемы семантики, и в частности, вопросы, связанные со смыслом языковых выражений, в настоящее время оживленно обсуждаются в лингвистической и логико-математической литературе, и было бы, пожалуй, преждевременным делать выводы, предвосхищающие результаты ведущихся в этой области исследований. Тем не менее вряд ли можно сомневаться, что окончательная ясность в эту область логико-лингвистической проблематики будет внесена практикой, в качестве которой в данном случае выступают работы по машинному переводу и усилия по созданию искусственных информационных языков и языков-посредников, используемых при автоматическом переводе. И очевидно, что каждый успех в этой области будет шагом вперед в решении той задачи, которую Фреге выражал словами «стараться разглядеть одну и ту же мысль в ее разнообразных одеяниях» [7, стр. 196], подчеркивая ее важность для логики.

Литература

1. В. И. Ленин. Материализм и эмпириокритицизм. Соч., т. 14, Госполитиздат, 1947.
2. Ф. Энгельс. Диалектика природы. Госполитиздат, 1952.
3. G. Frege. Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. Erster Band, Jena, 1893.
4. Его же. Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. Zweiter Band, Jena, 1893.
5. Его же. Über Sinn und Bedeutung. «Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik», 1892, Bd. 100, S. 25—50.
6. Его же. Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik. «Archiv für systematische philosophie», 1895, Bd. I, S. 433—456.
7. Его же. Über Begriff und Gegenstand. «Vierteljahrschrift für wissenchaftliche Philosophie», 1892, № 16, S. 192—205.
8. Его же. Was ist eine Funktion? «Festschrift Ludwig Bolzmanngewidmet zum sechzigsten Geburtstage 20 Februar 1904», Leipzig, 1904, S. 656—666.
9. Его же. Function und Begriff. Jena, 1891.
10. Его же. The Foundations of Arithmetic. Oxford, 1950.
11. B. Mathes. Stoic Logic. Berkley and Los Angeles, University of California Press, 1953.
12. Ст. Джевонс. Основы науки. Пер. с англ. М. Антоновича. СПб., 1881.
13. Дж. Ст. Милль. Система логики силлогистической и индуктивной. М., 1914.
14. Отрывок из литографированного издания М. И. Каринского «Логика» (1884—1885). «Вопросы философии», 1947, № 2, стр. 387—396.
15. П. С. Попов. О курсе логики М. И. Каринского. «Вопросы философии», 1947, № 2, стр. 386—387.
16. A. Whitehead and B. Russell. Principia Mathematica, v. I. Cambridge, University. Press, 1935.

17. И. И. Жегалкин. О технике вычисления предложений в символической логике. «Матем. сб.», 1927, т. 34, вып. 1, стр. 9—28.
18. Его же. Арифметизация символической логики. Теория предложений и функций одного аргумента. «Матем. сб.», 1928, т. 35, вып. 3—4, стр. 311—377.
19. Его же. Арифметизация символической логики. (Продолжение). «Матем. сб.», 1929, т. 36, вып. 3—4, стр. 205—338.
20. С. К. Клини. Введение в метаматематику. М., ИЛ, 1957.
21. А. Тарский. Введение в логику и методологию дедуктивных наук. М., ИЛ, 1948.
22. A. Church. Jntroduction to Mathematical Logic. Princeton, 1956.
23. H. Hermes und H. Scholz. Mathematische Logik. «Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften», Bd. I, Heft 1, Teil I.
24. B. Russell. On denoting. «Mind» (n. s.), 1904, v. 14, p. 479—493.
25. Его же. Einführung in die mathematische Philosophie, München, 1926.
26. V. Valpola. Über Namen. Eine logische Untersuchung. Helsinki, 1950.
27. W. O. Quine. Designation and nesessity. «Journal of Philosophy», 1939, № 39, p. 701—709.
28. Л. Виттгенштейн. Логико-философский трактат. М., ИЛ, 1958.
29. Р. Карнап. Значение и необходимость. М., ИЛ, 1959.
30. C. S. Lewis. Survey of Symbolic Logic. Berkley, University Press, 1918.
31. W. Akkermann. Begründung einer strengen Implikation. «Journal of Symbolic Logic», 1956, v. 21, № 2, p. 113—128.
32. Б. В. Бирюков. О работах Фреге по философским вопросам математики. «Философские вопросы естествознания. Вып. 2. Некоторые методологические вопросы физики, математики и химии». М., Изд-во МГУ, 1959.
33. Его же. Автонимное употребление выражений. «Философская энциклопедия», т. 1. М., 1960.
34. Его же. Взаимозаменяемости отношение. Там же.

ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ Г. Н. ПОВАРОВА «О ГРУППОВОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ»

а) *О вкладе Э. Шрёдера.* Известный математик Э. Шрёдер, написавший на рубеже XIX и XX вв. обширную монографию об алгебре логики XIX в., уделил большое внимание вопросу о типах булевых функций [Шр]. Это он, по-видимому, предложил представлять булевы функции геометрически в виде n-мерных гиперкубов, а преобразования однотипности — в виде преобразований n-мерного гиперкуба в себя (см. у нас гл. 4), на что ссылается и Д. Пойя [Пя].

Шрёдер подробно разбирает результаты У. С. Джевонса [Дж] и У. К. Клиффорда [Кл], включая понятие «расстояния» в позднейшем смысле Хэмминга. В частности, Шрёдер указал, что отрицания однотипных функций суть однотипные функции (см. у нас § 3.2) и что самодвойственные функции (он употребляет именно этот термин) однотипны со своим отрицанием. Тип и его отрицание (в смысле нашего § 3.2) Шрёдер называет «дополнительными» типами и объединяет их в один «главный тип». Итак, функция f принадлежит к одному главному типу с функцией g тогда и только тогда, когда f одного типа с g или с $\bar{g}$ (см. [Шр]).

Шрёдер особо отмечает то обстоятельство, что (см. у нас §§ 7.1—7.2) Джевонс подсчитывал числа Q_2 и Q_3 лишь для функций, не являющихся, как мы сказали бы, π-функциями, а Клиффорд искал полное число Q_4, охватывающее типы всех функций четырех переменных. Как рассказывает Шрёдер, ряд авторов не соглашался с мыслью Джевонса об исключении π-функций из поля зрения логики, однако джевонсовские подсчеты чисел Q_2 и Q_3 не пересматривались. Полные числа $Q_2 = 6$ и $Q_3 = 22$ определил сам Шрёдер [Шр]. Результат Клиффорда $Q_4 = 396$ (398 с учетом несобственных функций 0 и 1) Шрёдер проверял лишь частично и не заметил ошибок; правильное значение $Q_4 = 402$ дал лишь Д. Пойя [Пя].

Итак, по-видимому имеет место следующая картина преемственности:

Джевонс $\to$ Клиффорд $\to$ Шрёдер $\to$ Пойя $\to$ Шеннон. Впрочем, без специальных исторических изысканий и систематического просмотра разнообразной логической и математической литературы XIX в. было бы затруднительно судить о приоритетах.

б) *Новейшие работы*. После написания статьи вышел ряд новых работ, содержащих новые результаты по групповой инвариантности булевых функций и ее применению.

Так, Ю. Л. Сагалович в статье «О групповой инвариантности булевых функций» (Успехи мат. наук, 1959, т. 14, вып. 6(90), стр. 191—195) высказал мнение об ошибочности (неполноте) метода Мак-Класки, о котором у нас шла речь в § 5.4, и предложил свой метод опознания групповой инвариантности булевых функций, правда лишь для преобразований из группы γ_n. В другой работе (Об одной мере упорядоченности булевой функции, Известия АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1960, № 1, стр. 70—75) Ю. Л. Сагалович связал явление групповой инвариантности булевых функций с содержащейся в них информацией и потерями этой информации, имея в виду принципиальную, как он полагает, возможность получить на этом пути некоторые количественные характеристики человеческого мышления.

В § 1.3 у нас рассказывалось о таблицах контактных схем для типовых булевых функций четырех переменных; упоминались таблицы автора [По-3) и французских инженеров Р. Игонне и Р. Грема [ИГ-1], [ИГ-2]. Ю. Л. Васильев в статье «Минимальные контактные схемы для булевых функций четырех переменных» (Доклады АН СССР, 1959, т. 127, № 2, стр. 242—245) сообщает, что он объединил таблицы [ИГ-1] и [По-3] и после упрощения более 100 схем смог доказать минимальность всех схем своей окончательной таблицы.

СОДЕРЖАНИЕ

С. А. Яновская. О некоторых чертах развития математической логики и отношении ее к техническим приложениям . . . 3
А. С. Есенин-Вольпин. К обоснованию теории множеств 22
И. И. Ревзин. Формальный и семантический анализ синтаксических связей в языке 119
И. И. Ревзин. О логической форме лингвистических определений 140
С. К. Шаумян. Операционные определения и их применение в фонологии 149
Ю. В. Петров. Значение аксиоматического метода в учении о направлениях изменений живых систем 178
А. А. Зиновьев. Дедуктивный метод в исследовании высказываний о связях 215
А. А. Зиновьев. К вопросу об общности высказываний о связях 243
А. А. Зиновьев. Об одном варианте теории определений . . . 251
Г. Н. Поваров. О групповой инвариантности булевых функций 263
В. И. Шестаков. О двойной арифметической интерпретации трехзначного исчисления в высказываний, используемой при моделировании этого исчисления посредством релейно-коммутаторных схем 341
М. Л. Цетлин, Л. М. Шехтман. О некоторых вопросах физической реализации устройств, выполняющих логические функции 377
Т. Д. Майстрова. Применение многозначной логики в теории релейных схем 394
Г. Н. Поваров. Событийный и судженческий аспекты логики в связи с логическими задачами техники 415
Б. М. Кедров. «Фазовый способ» в формальной логике . . 421
Б. В. Бирюков. Теория смысла Готлоба Фреге 502