im Halbformalismus angeben, nach der diese Formel dort im letzten Schritt abzuleiten ist und, wenn O jetzt eine der Prämissen wählt (es können ja unendlich viele sein), so kann er für diese Prämisse eine kleinere Ordinalzahl berechnen, wieder die im letzten Schritt zu benutzende Regel angeben usw. Aus endlichen Daten, nämlich aus den Angaben von O, läßt sich so stets ein endlicher Ableitungsfaden des Halbformalismus berechnen. Das Berechnungsverfahren ist dabei rekursiv, also sogar im engsten Sinne konstruktiv. Die Aussageformen, die im Widerspruchsfreiheitsbeweis benutzt werden, sind dagegen im allgemeinen nicht rekursiv — alles bleibt aber im Rahmen des Dialogisch-Definiten und ist insofern ebenfalls konstruktiv.

Le programme ultra-intuitionniste des fondements des mathématiques

A. S. ÉSÉNINE-VOLPINE (Moscou)

Mon but principal est de démontrer la non-contradiction du système formel ZF de Zermelo-Fraenkel; les résultats permettraient d'en déduire la non-contradiction du système Σ, pour lequel K. Gödel a donné la démonstration relative de la non-contradiction de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu.

La nécessité d'une telle démonstration est due, me semble-t-il, à la circonstance que les raisonnements intuitifs qu'on a utilisés jusqu'à présent pour la justification de ces théories ont fait usage de l'idée de l'infini actuel, et cette idée est philosophiquement et logiquement douteuse. Cette circonstance est liée à d'autres difficultés, parmi lesquelles la nécessité d'employer les définitions imprédicatives me semble la plus sérieuse.

En premier lieu, j'ai réduit le problème de la non-contradiction du système ZF à celui de la non-contradiction du système ZF$^-$ qu'on obtient de ZF en écartant l'axiome de l'extensionnalité $\forall z(z \in x \sim z \in y) \supset x = y$ et en remplaçant l'occurence explicite de l'„égalité" $u = v$ dans le schéma du remplacement par l'occurence de $\forall z(z \in u \sim z \in v)$ & $\forall z(u \in z \sim v \in z)$. J'ai démontré que, si le système ZF$^-$ est non-contradictoire, le système ZF est aussi (et j'ai obtenu une démonstration analogue pour le système Z de Zermelo; je parle des variantes des systèmes qui ne contiennent ni l'axiome du choix, ni le „Fundierungsaxiom" dont la non-contradiction relative peut-être démontrée aussi pour le système Z).

Depuis longtemps j'ai eu une idée liée à la fondation des théories dont je parle. En admettant la non-contradiction de l'arithmétique, on peut démontrer celle de la théorie qu'on obtient de ZF$^-$ en rejetant l'axiome de l'infini (et de même pour ZF) — donc il suffit de démontrer que si ce système est non-contradictoire, le système ZF^{-} l'est aussi. Pour cela, il suffit de prouver que les longueurs des démonstrations du finitude des ensembles $\mathcal{E}_l$, définis explicitement par $\forall z(z \in \mathcal{E}_l \sim z = a_1 \vee \ldots \vee z = a_l)$, croissent indéfiniment avec l.

Ce problème des longueurs des démonstrations me semble bien intéressant pour lui-même. Mais, grâce aux difficultés liées au second théorème de K. Gödel, toute solution positive de ce problème exige que l'on sorte du domaine des raisonnements formalisables dans ZF (même avec l'axiome du choix) — c'est-à-dire, pratiquement, que l'on sorte des mathématiques qui existent.

Dans ce but, je propose l'introduction d'un concept essentiellement nouveau qui est lié à une critique des fondements de l'aritmétique. Cette critique est une continuation de la critique de L. E. J. Brouwer et je l'appelle *ultra-intuitionniste*. Il y a eu déjà dans la littérature des tentatives dans cette direction, entre autres dans l'article de D. van Dantzig, *Is* $10^{10^{10}}$ *a finite number?* (Dialectica 9 (1956), p. 273-277).

Van Dantzig doute de la possibilité de considérer le nombre indiqué comme un nombre fini et il fait quelques allusions aux modèles finis pour les nombres transfinis. Il cite aussi les travaux de Fréchet, Borel et Mannoury. Mon ami A. Ehrenfeucht de Varsovie m'a parlé des tentatives faites par Borel pour aborder le problème de la construction de la théorie des ensembles en partant de quelque critique de la notion du fini. Malheureusement, je n'en sais pas davantage.

Je commence l'exposition de ma critique ultra-intuitionniste et, après quelques considérations sur ses raports avec la théorie des ensembles, j'y reviendrai de nouveau. J'appelle *traditionnelles* les mathématiques qui ne tiennent pas compte de cette critique. Les affirmations suivantes de l'arithmétique intuitionniste traditionnelle ne me semblent pas justifiées, bien qu'elles soient acceptées par presque tout le monde:

a) la categoricité de la suite naturelle $0, 0', 0'', \ldots$ (c'est-à-dire l'assertion que cette suite est définie univoquement à un isomorphisme près);

b) l'existence des fonctions $a+b$, $a \cdot b$, a^b définies partout dans la suite naturelle (et même dans une suite naturelle);

c) le principe d'induction de n à $n+1$;

d) la forme suivante du modus ponens: $\vdash A$ et $\vdash A \supset B$ entraînent $\vdash B$ (mais j'admets $(A, A \supset B) \vdash B$).

J'ai été amené à ces doutes en réfléchissant sur les causes de la conviction commune que les assertions de la forme

$$A(0) \mathbin{\&} \forall a \big(A(a) \supset A(a+1)\big) \supset A(10^{12})$$

sont vraies. On parle alors d'habitude de la possibilité d'employer 10^{12} fois la règle du modus ponens. Il est clair qu'il y a là une idéalisation très forte de notre idée de possibilité. Je pense que cette idéalisation et les causes pour lesquelles on l'admet n'ont pas encore été suffisamment étudiées. Dans cet ordre d'idées je tiens pour possible l'introduction de la notion bien naturelle de „*nombre réalisable*“ (ou *exécutable*) — c'est-à-dire tel qu'il y ait quelqu'un qui puisse compter jusqu'à lui.

Ces nombres réalisables forment une série naturelle — dans ce sens qu'il y a d'abord 0, après chaque nombre réalisable b il y a un nombre immédiatement suivant b', de $a' = b'$ résulte $a = b$, enfin 0 ne suit immédiatement aucun nombre réalisable.

En général, j'appelle *suite* (ou *série*) *naturelle* (*concrète*) chaque procédé discret (réel ou imaginaire) où il y a un événement initial 0, après chaque événement b il y a un autre événement b' qui suit immédiatement b, $a' = b'$ entraîne $a = b$ et pour tous les b on a $\neg 0 = b'$.

Les événements du procédé s'appellent *nombres naturels* (*concrets*). L'opération a' est appelée *opération menante* du procédé.

Un bon exemple de suite naturelle concrète est fourni par le procédé K dont les événements sont les pulsations de mon coeur dans mon enfance.

Soient K_1 et K_2 deux suites naturelle concrètes $0_1, 0_1', 0_1'', \ldots$ et $0_2, 0_2', 0_2'', \ldots$ Les nombres 0_1 et 0_2, $0_1'$ et $0_2'$, $0_1''$ et $0_2''$, etc., sont appelés *équivalents*. En essayant d'établir un isomorphisme entre K_1 et K_2 à l'aide du concept des couples $\langle 0_1 0_2\rangle$, $\langle 0_1' 0_2'\rangle$, $\langle 0_1'' 0_2''\rangle, \ldots$ on n'obtient que la construction d'une troisième suite naturelle concrète dont les événements sont les formations de ces couples.

Si pour chaque nombre de K_1 il y a dans K_2 un nombre équivalent, je dis que la suite K_1 *n'est pas plus longue* que la suite K_2; et si encore il y a dans K_2 un nombre z qui n'est équivalent à aucun nombre de K_1, je dis que la suite K_2, ou le nombre z, est *explicitement plus longue que* K_1, ou que la suite K_1 est *explicitement plus courte* que K_2 ou z.

Les tentatives pour démontrer l'existence, pour chaque suite naturelle concrète, d'une opération $a+b$, définie partout dans cette suite et satisfaisant aux axiomes ordinaires de l'addition, ne peuvent pas réussir. Evidemment, je parle à présent des démonstrations dans un sens général, non seulement des démonstrations formalisables dans un système proposé formel.

Une tentative de cette espèce qui n'appartient pas à la théorie des ensembles a été faite dans le livre de Landau, *Grundlagen der Analysis*. Cette tentative est peut-être la plus naturelle, c'est pourquoi il faut l'analyser. Elle utilise une forme du principe d'induction — mais ce n'est pas encore tout. A l'aide de l'induction on ne démontre que l'existence, pour chaque nombre b, d'une opération $n+b$ qui est donc la valeur d'une fonction f_b (dont les valeurs sont les fonctions $\lambda n(n+b)$). Pour en obtenir la fonction $a+b$ de deux variables on forme la superposition de deux fonctions dont l'une est la fonction f_b et la seconde — $\lambda a(a+b)$. Mais la supposition: „il est toujours possible de former la superposition de deux fonctions (aux domaines convenables) et de la considérer comme une fonction nouvelle" exige, pour sa justification ultra-intuitionniste, une autre supposition qui est pareille à celle de l'existence d'une somme. Donc, il y a ici une *petitio principii*. A plus forte raison on n'y réussit pas en introduisant les fonctions $a \cdot b$ et a^b ou en identifiant les décompositions décimales ou dyadiques avec les nombres naturels concrets. On peut douter qu'un nombre naturel concret corresponde à chaque décomposition dyadique. On peut définir l'opération de l'addition pour les décompositions dyadiques, mais à cause de ce que je viens de dire on ne peut pas étendre cette opération à toute suite naturelle concrète. Ainsi dans les suites naturelles concrètes $a+b$, $a \cdot b$ et a^b sont les fonctions partielles (c'est-à-dire il n'est pas nécessaire qu'elles soient définies partout).

C'est pourquoi il n'est pas évident que dans chaque suite naturelle concrète il y ait un nombre équivalent à 10^{12} — et, en effect, il n'y en a pas dans la suite mentionnée K des pulsations de mon coeur dans mon enfance.

Les métathéories traditionnelles sont toujours profondément liées à la notion de série naturelle. Après ce que je viens de dire à propos de l'opération de l'addition, il est facile de comprendre qu'on puisse douter de l'assertion „$\vdash A$ et $\vdash A \supset B$ entraînent $\vdash B$", où le signe „$\vdash$" signifie „démontrable".

D'autre part — ce qui est pour moi beaucoup plus essentiel — cette assertion présuppose que les démonstrations sont toujours indépendantes et ne peuvent pas empêcher l'une l'autre.

Le manque de l'assertion donne lieu à la possibilité que $\vdash A$ et $\vdash B$ soient des affirmations vraies et $\vdash A \& B$ une affirmation fausse. Dans le cas où B coïncide avec $\neg A$, cela signifie que les formules A et $\neg A$ sont démontrables et $A \& \neg A$ ne l'est pas. Cette circonstance a réellement lieu dans quelques variantes des théories que je développe.

Je n'appelle une théorie contradictoire que dans le cas où une formule de la forme $A \& \neg A$ y est démontrable.

J'ai développé plusieurs théories qui s'occupent de l'étude simultanée de plusieurs suites naturelles, et aprés tout je préfére une méthode que j'appelle *génétique*. Outre les suites naturelles je considère aussi les *procédés ramifiants* qui diffèrent des suites naturelles en ce qu'ils admettent beaucoup d'événements initiaux (zéros) et plusieurs opérations menantes qui peuvent dépendre de plusieurs arguments. Ces procédés sont toujours représentables sous forme d'arbres et on peut parler de leurs *fils*. Pour chaque événement e d'un procédé ramifiant je considère la totalité $\hat{e}$ des événements qui précèdent e dans ce procédé (ou prennent part à sa construction) ou coïncident avec e. J'appelle $\hat{e}$ la *genèse* de e.

J'admets le postulat *Trad* qui consiste dans l'existence d'une suite naturelle N telle que l'opération 2^n soit partout définie dans N et qu'on puisse l'itérer un nombre quelconque de fois de N.

Je n'insiste pas sur la validité de ce postulat et c'est pourquoi j'admets que les résultats que l'on peut obtenir de cette manière n'ont qu'une veleur relative.

Le résultat principal que je cherche à obtenir est la non-contradiction du système ZF. Mais ma méthode permet d'espérer un résultat plus fort, à savoir la non-contradiction du système ZF + (A) où (A) est l'axiome suivant:

(A) *Dans le continu il existe un ensemble U qui n'est équivalent à aucun nombre naturel et à aucune partie propre de cet ensemble.*

De l'axiome (A) résulte dans ZF la négation de l'axiome du choix; outre cela la puissance $\aleph_0 + \overline{\overline{U}}$ est intermédiaire entre $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$ (l'égalité des puissances étant exclue). Ensuite, il existe dans le continu une famille croissante de telles puissances ordonnée semblablement à U. Ces conséquences s'obtiennent de (A) de la manière traditionnelle ordinaire. — Je ne connais aucune démonstration traditionnelle de la non-contradiction relative de (A) par rapport à ZF et je ne sais rien de nouveau à propos de l'hypothèse $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

J'appelle ZF_i^- le système qu'on obtient de ZF^- en écartant la loi générale du tiers exclu, mais en lui ajoutant les axiomes $\neg\neg x = y \supset x = y$ et $\neg\neg x \in y \supset x \in y$ et en remplaçant toutes les occurences des parties $A \vee B$ et $\exists x A$ des axiomes par $\neg(\neg A \,\&\, \neg B)$ et $\neg\forall x \neg A$, que je désigne par $A \underline{\vee} B$ et $\underline{\exists} x A$. La non-contradiction de ZF_i^- entraîne celle de ZF^- et de ZF et ce résultat (qu'on obtient en répétant la démonstration de K. Gödel pour la non-contradiction de l'arithmétique classique par rapport à l'arithmétique intuitionniste) peut être élargi dans le cas où l'axiome (A) est adjoint à ZF. J'appelle S le système $\mathrm{ZF}_i^- + (\mathrm{A})_i^-$ où $(\mathrm{A})_i^-$ est la forme correspondante de (A).

Soit S un système contradictoire contenant une contradiction de longueur l_0 (la longueur étant définie comme le nombre d'occurences des formules). Je pose $l = 2^{l_0+k}$, où k est une constante qui ne surpasse pas 50. Je cherche un modèle où tous les théorèmes de S, dont la longueur de la démonstration est $\leqslant l_0$, soient des affirmations vraies.

Je suppose que l_0 appartient à N — sinon je ne sais rien. Alors le nombre l appartient aussi à N. Je considère la suite naturelle concrète K_l dont les événements sont les établissement des faits que les nombres $m, n, \ldots$ de N satisfont à la condition $\exists a(m < a \cdot l)$, où a signifie les nombres de N équivalents aux nombres de K. On obtient la suite K_l en comptant, pour ainsi dire, chaque événement de K l fois de suite.

K_l est une suite naturelle concrète. K étant explicitement plus courte que 10^{12}, K_l est explicitement plus courte que $10^{12} \cdot l$. La propriété essentielle de K_l consiste en ce que le nombre l est *ajoutable* pour cette suite, c'est-à-dire, en parlant sans scrupules, pour chaque nombre a de K_l le nombre $a + l$ existe.

Je désigne l'événement initial (zéro) de K_l par $\underline{a}_1$ et l'opération menante par $p(a)$; donc les événements de K_l sont $\underline{a}_1, p(\underline{a}_1), p(p(\underline{a}_1)), \ldots$ et je les désigne aussi (pour le but de cette communication) par $\underline{a}_1, \underline{a}_2, a_3, \ldots$ Les événements variables de K_l sont désignés par $\alpha, \beta, \ldots$

Je considère aussi le procédé ramifiant D_l dont les événements initiaux (zéros) sont $a_0, a_1, \ldots, a_{10^{12} \cdot l}$ et les opérations menantes sont $[x]$ et $x + \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}$ ayant la forme $[y]$ ou a_i ($i =$

$0, 1, \ldots, 10^{12} \cdot l$). Je postule que tous les fils de D_l sont isomorphes à N.

L'existence de D_l se laisse réduire à celle de N mais je ne veux pas en parler beaucoup.

Je désigne par $x, y, \ldots$ les événements variables de D_l.

Les événements variables communs pour deux procédés D_l et K_l sont $\widetilde{x}, \widetilde{y}, \ldots$

Pour les valeurs de $\widetilde{x}, \widetilde{y}, \ldots$ je définis la relation $\widetilde{x} \in \widetilde{y}$ de la manière suivante:

(1) $\underline{a}_i \in a_i$;

(2) $x \in [x]$;

(3) $\widetilde{x} \in y + \mathfrak{z} \sim \widetilde{x} \in y \vee \widetilde{x} \in \mathfrak{z}$

($\mathfrak{z}$ ayant toujours la forme indiquée plus haut);

(4) $\widetilde{x} \in \widetilde{y}$ si et seulement si cela résulte des conventions (1)-(3) appliquées un nombre quelconque de fois de N.

C'est une définition primitivement récursive ordinaire pour les procédés ramifiés; le fait que la suite K_l est explicitement plus courte que $10^{12} \cdot l$ n'empêche jamais de calculer la valeur de $\widetilde{x} \in \widetilde{y}$ pour les valeurs données de $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$. J'admets aussi des définitions pareilles pour quelques autres fonctions et prédicats qui sont auxiliaires; elles sont toutes définies seulement dans D_l. La totalité de ces fonctions et prédicats, y compris $=$ et $\in$, $p(a)$, $[x]$ et $x+y$, sera désignée par s.

Je considère une théorie formelle $T(D_l, K_l)$, dont les alphabets des variables sont $\alpha, \beta, \ldots$ et $x, y, \ldots$ et les termes (appelés *termoïdes*) sont construits avec ces variables, les constantes $\underline{a}_1$, $a_0, \ldots, a_{10^{12} \cdot l}$ et les symboles fonctionnels de s comme dans les théories traditionnelles. Les alphabets sont les suites naturelles isomorphes à N et les formules sont construites avec les symboles des prédicats de s et des termoïdes à l'aide d'opérateurs logiques, de même que dans les théories traditionnelles, le nombre d'occurences des opérateurs logiques dans une formule pouvant être un nombre quelconque de N.

Un termoïde constant (c'est-à-dire sans variables) est appelé *terme* s'il désigne (dans le sens naturel) un événement de D_l ou K_l. Un termoïde avec variables est appelé *terme* s'il devient un terme après chaque substitution admissible des termes constants au lieu de ses variables.

Les *axiomes* de la théorie $T(D_l, K_l)$ sont les formules fermées atomiques qui sont vraies en vertu des définitions des fonctions et des prédicats dont les symboles en entrent et les formules fermées qui sont les axiomes du calcul intuitionniste des prédicats. Les règles de la déduction sont: le modus ponens, les règles ordinaires de la quantification et la règle de Carnap:

$$\text{(Ca)} \qquad \frac{A(t_0),\, A(t_1),\, \ldots,\, A(t_i),\, \ldots}{A(\overline{x})},$$

où $\overline{x}$ est une variable quelconque (n'entrant pas librement dans $A(t_0)$) et t_0, t_1, ..., t_i, ... sont tous les termes qui désignent (dans le sens naturel) les valeurs admissibles de la variable $\overline{x}$. $A(\overline{x})$ est appelé *axiome inductif*.

Dans la métathéorie j'admets le postulat de la *N-réalisabilité*: des objets quelconques $q_1, \ldots, q_s$ étant donnés, on peut leur appliquer les opérations métathéoriques (formation des termoïdes, des formules, itérations des opérations appliquées, etc.) un nombre quelconque de fois de N. (Au lieu de N je pourrais choisir une autre suite naturelle N^* plus longue que N; alors il faudrait remplacer par N^* la longueur des alphabets, etc.)

Ce postulat ne nous permet pas d'affirmer qu'un termoïde soit un terme; pour cella il faut attendre l'apparition de l'événement correspondant dans D_l ou K_l ou déduire de nos postulats que cette attente aurait une fin. Par exemple, le termoïde $p\Big(p\big(\ldots(p(a))\ldots\big)\Big)$ avec l occurences de „p" est toujours un terme (car, comme je l'ai déjà dit, l est un nombre ajoutable.)

Les figures en forme d'arbres, qu'on obtient d'une manière naturelle en partant des axiomes et des règles de la déduction, ne sont pas encore des démonstrations; je les appelle *corps de démonstrations*.

Pour chaque axiome de S (donc pour chaque théorème de ce système) je construits un corps de démonstration. Pour les axiomes de ZF_i^-, sauf l'axiome de l'infini, la possibilité de la construction est une chose naturelle, car ces axiomes sont vérifiés dans le domaine des ensembles finis (avec leurs éléments etc., c'est-à-dire ils doivent aussi être finis pour appartenir au domaine dont il s'agit). Quelques difficultés surgissent lorsqu'il s'agit des axiomes de l'union et de l'ensemble des sous-ensembles, car l'axiome de l'extensionnalité n'est pas respecté (tous les a_j avec les indices j bien grands étant des „ensembles vides", chaque ensemble x est coextensif avec $x + a_j$, etc.). Mais on peut surmonter ces difficultés en formulant ces axiomes comme dans le système Σ de K. Gödel. Il faut encore se borner à considérer des événements de D_l

représentables sous la forme $\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + \ldots + \mathfrak{z}_q$ où tous les $\mathfrak{z}_i$ ont la forme $[y]$ ou a_j $(j = 0, 1, \ldots, 10^{12} \cdot l)$, sont distincts et pour $i < j \leqslant q$ $\mathfrak{z}_i$ précède $\mathfrak{z}_j$ dans l'ordre alphabétique (qu'on peut définir en termes des fonctions et prédicats de s). (Sinon $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_1$, ... sont tous coextensifs et cela affaiblirait l'axiome de l'ensemble de sous-ensembles).

L'axiome de l'infini est formulé (dans ZF^-) comme l'existence d'un ensemble équivalent à sa partie propre. Pour cela j'admets que la langue de ZF contient le symbole $\{xy\}$. Dans le modèle que je considère à présent je pose $\{\underline{a}_i\} = a_i$, $\{x\} = [x]$ et $\{xy\} = \{x\} \cup \{y\}$, le signe „$\cup$“ étant défini de la manière naturelle. L'axiome de l'infini (pour ZF_l^-) est satisfait par l'ensemble $I = a_0 + a_1 + \ldots + a_{10^{12} \cdot l}$.

Quant à l'axiome (A), la suite K étant explicitement plus courte que $\frac{1}{2} \cdot 10^{12}$, K_l est explicitement plus courte que $\frac{1}{2} \cdot 10^{12} \cdot l$. Soit $V = \{a_{\frac{1}{2} \cdot 10^{12} \cdot l+1}, a_{\frac{1}{2} \cdot 10^{12} \cdot l+2}, \ldots, a_{10^{12} \cdot l}\}$ (c'est-à-dire $V = \{a_{\frac{1}{2}10^{12}+1}\} + \ldots + \{a_{10^{12} \cdot l}\}$ et $W = \{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{40+l}\}$ (c'est-à-dire $W = a_1 + \ldots + a_{40+l}$; le nombre 40 étant un nombre de K, l'événement $\underline{a}_{40+l}$ existe dans K_l), R est l'ensemble de tous les sous-ensembles de W dans le sens traditionnel. Alors la puissance de R est égale à $2^{40+l} > \frac{1}{2} \cdot 10^{12} \cdot l$ et il existe un sous-ensemble U de R équivalent à V dans le sens traditionnel. Les éléments distincts de U ne sont jamais coextensifs (ce qui est nécessaire pour obtenir la forme de l'axiome (A) convenable pour le système ZF^- et la démonstration relative traditionnelle de la non-contradiction de l'axiome de l'extensionnalité). Encore ces éléments sont les parties d'un sous-ensemble dénombrable qui existe dans I (en termes de la théorie ZF^-). L'ensemble U est équivalent à V et n'est équivalent à aucune de ses parties propres. Ce qui est essentiel dans ce raisonnement, c'est la circonstance qu'en le poursuivant nous n'avons rien à faire avec la „queue“ indéfinie de la suite K_l et avec les a_i correspondant à $\underline{a}_i$ de cette queue, tandis que tous les paradoxes qu'on peut attendre dans cette théorie sont liés à la difficulté qu'il y a à constater si l'on n'est pas sorti de cette queue (ou entré dans elle).

On démontre aussi, dans le modèle que je considère, que chaque nombre naturel est équivalent à la genèse d'un $\underline{a}_i$ de K_l (je fais abstraction ici de quelques considérations secondaires qui sont liées à la nécessité de remplacer les $\exists$ par $\exists$). La puissance de $\frac{1}{2} \cdot 10^{12} \cdot l$ de U étant plus grande que tout $\underline{a}_i$ on voit que U n'est équivalent à aucun nombre naturel.

Dans cette partie des raisonnements nous aurons peut-être à considérer la „queue“ de K_l — mais nous n'aurons pas à sortir d'elle.

Je reviens maintenant à la notion de la démonstration dans la théorie $T(D_l, K_l)$. A la notion de corps de démonstration il faut rattacher ce que j'appelle son *âme*.

Pour chaque axiome fermé de la forme (de P. Bernays)

$$\forall \bar{x} A(\bar{x}) \supset A(t) \qquad \text{ou} \qquad A(t) \supset \exists \bar{x} A(\bar{x})$$

je dis que le termoïde t y est *entendu* sous la variable $\bar{x}$, ce que je désigne par la „flèche de la substitution“ $t \rightarrow \bar{x}$. Je dis que cette flèche *accompagne* l'axiome considéré. Si t coïncide avec un a_i et si l'on fait l'analyse du corps de la démonstration, il faut identifier cette occurrence de a_i avec son apparition dans un axiome de la forme $a_i = \{\underline{a_i}\}$ ou $\{\underline{a_i}\} = a_i$ (c'est-à-dire constater le fait que les termoïdes a_i dans deux occurences sont identiques), je dis que $\{\underline{a_i}\}$ est aussi *entendu* sous la variable $\bar{x}$ (en axiome considéré plus haut) et que la flèche $\{\underline{a_i}\} \rightarrow \bar{x}$ l'accompagne aussi.

Considérons une application de la règle (Ca). Soit $\bar{y}$ une variable et $\varphi(\bar{x})$ un termoïde; en faisant l'analyse du corps de démonstration il faut identifier le terme t_i dans son occurence explicite dans la prémisse $A(t_i)$ avec son occurrence explicite dans un axiome fermé de la forme de Bernays

$$\forall \bar{y} F(\bar{y}) \supset F\big(\varphi(t_i)\big) \qquad \text{ou} \qquad F\big(\varphi(t_i)\big) \supset \exists \bar{y} F(\bar{y})$$

pour les événements t_i arbitrairement tards du procédé D_l ou K_l (c'est-à-dire pour les événements qui apparaissent arbitrairement tard le long d'un fil du procédé). Alors je dis que le terme $\varphi(\bar{x})$ est *entendu* sous $\bar{y}$ dans les axiomes de Bernays indiqués et dans l'axiome inductif $A(\bar{x})$ et que la flèche $\varphi(\bar{x}) \rightarrow \bar{y}$ *accompagne* ces axiomes.

Par exemple, chaque formule ouverte de la forme

$$\forall \bar{x} F(\bar{x}) \supset F(t) \qquad \text{ou} \qquad F(t) \supset \exists \bar{x} F(\bar{x})$$

peut être considérée comme un axiome inductif accompagné de la flèche $t \rightarrow \bar{x}$.

Si une flèche $t \rightarrow \bar{x}$ accompagne un axiome, je dis qu'elle *accompagne* aussi chaque formule qui suit cet axiome dans le corps de démonstration donné. L'ordre des flèches distinctes accompagnant une formule est défini d'une manière naturelle. (Voir la remarque 1.)

Pour deux flèches $t \to \bar{x}$ et $\varphi(\bar{x}) \to \bar{y}$ je considère la flèche $\varphi(t) \to \bar{y}$ que j'appelle *produit* des deux flèches données:

$$\varphi(t) \to \bar{y} = (t \to \bar{x}) \times \big(\varphi(\bar{x}) \to \bar{y}\big) .$$

(Si la seconde flèche $\varphi(\bar{x}) \to y$ ne contient pas la variable $\bar{x}$, on a $(t \to \bar{x}) \times (\varphi \to \bar{y}) = \varphi \to \bar{y}$.)

La force convaincante d'une démonstration dépend de la possibilité de considérer les termoïdes χ, qui figurent dans les flèches $\chi \to \bar{z}$ obtenues par la multiplication itérée des flèches accompagnant les axiomes (y compris les axiomes inductifs), comme les valeurs admissibles de la variable $\bar{z}$ (pour chaque système de valeurs des arguments de χ), c'est-à-dire de la possibilité de considérer ces χ comme des termes. Cette condition est essentielle même pour les théories traditionnelles (surtout pour la justification du principe d'induction de n à $n+1$) où on l'admet implicitement, peut-être sans raison suffisante, comme une chose triviale.

Je dis que le corps de démonstration P possède une *âme* s'il satisfait aux trois conditions I-III:

I. *Tous les termoïdes qui figurent dans P sont des termes.*

II. Soit F un ensemble fini de flèches accompagnant les formules de P dont la puissance appartient à N. F est partiellement ordonné par l'ordre qui existe dans l'arbre P. A chaque fléche f_p de F je fais correspondre l'ensemble F_p défini de la manière suivante:

Si dans F il n'y a pas de flèches situées au-dessus de f_p, alors $F_p = \{f_p\}$. Supposons que pour chaque f_n située dans F au-dessus de f_p l'ensemble F_n soit déjà défini et soit F_p^* l'union de ces ensembles. Je désigne par G_p l'ensemble contenant toutes les flèches de la forme $f_p^* \times f_p$, où f_p^* appartient à F_p^*, et la flèche f_p (ainsi les éléments de G_p sont f_p et les $f_p^* \times f_p$). Je désigne par H_p l'ensemble de toutes les flèches $g_p \times f_p^*$ où les flèches g_p et f_p^* appartiennent aux ensembles G_p et F_p^* respectivement. Alors F_p est l'union des ensembles F_p^*, G_p et H_p.

Je désigne par $\widetilde{F}$ l'union de tous les ensembles F_p pour toutes les flèches f_p de F.

La condition II consiste en ce que, *pour chaque ensemble F de l'espèce considérée, tous les tormoïdes qui figurent dans $\widetilde{F}$ sont des termes.*

Beaucoup de paradoxes naturels peuvent être expliqués par la condition II. Cette condition assure ce que j'appelle *l'usage juste des termes et des variables.* Mais il reste encore une source possible de paradoxes qui consiste dans le danger qu'il y a à considerer implicitement la suite K_l comme une suite achevée. Pour éviter ce danger il faut tenir compte de l'emploi des identifications des termes nécessaires pour l'analyse d'une démonstration.

Il y a lieu de revenir ici à la critique des mathématiques traditionnelles. Il s'agit de la critique de la conception métathéoretique de l'*identité* des objets formels de même que de l'*identité* des objets des modèles considérés. On a ainsi deux aspects de la critique de l'identité — les aspects *syntaxique* et *sémantique*. Ici je me borne à remarquer que la notion des lettres identiques n'est claire que pour les formules *écrites* — mais lorsqu'on considère les procédés infinis tels que, par exemple, les applications de la règle de Carnap, on ne peut jamais considérer comme *écrites* toutes les formules qui y figurent.

L'analyse complète d'une dèmonstration exige l'indication explicite de chaque identité de deux objets syntaxiques ou sémantiques usée dans la démonstration. Cette indication est appelée *identification* des objets considérés. Les actes des identifications doivent être compris dans chaque procédé qu'on considère — et il ne peut être question de l'identification de deux événements avant leur apparition, de même qu'on ne peut pas effectuer une autre construction en partant des événements qui ne sont pas encore apparus. C'est le point pricipal du point de vue génétique.

L'identification de deux objets composés n'est possible qu'après celle de leurs parties composantes. Outre les identifications, quelques autres événements interviennent dans l'analyse d'une démonstation — à savoir, les *usages* des identifications, dont je ne veux pas parler ici.

Il faut tenir compte du procédé de l'identification de deux objets composés, soit de deux mots $c_1 \dots c_k$ et $d_1 \dots d_k$. Pour l'effectuer, il faut vérifier que pour chaque $i \leqslant k$, c_i est identique à d_i. L'ordre de ces identifications ne joue aucun rôle, car pour la coïncidence de deux mots de longueur 100, par exemple, l'identité de leurs 72es signes a la même importance que celle des premiers.

Pour l'identification des $c_1 \dots c_k$ et $d_1 \dots d_k$ figurant dans un corps de démonstration P il faut considérer, pour chaque signe α qui coïncide avec c_i ou d_i, le procédé π_α qui enregistre toutes les occurrences de a dans P dans l'ordre de leur apparition, de même que les identifications de ces occurrences nécessaires pour l'analyse de P. Ce sont les événements de π_a; d'après ce que je viens de dire, il ne faut pas tenter de réduire les π_a à un seul procédé. D'une manière analogue, pour les objets plus compliqués composés des parties $p_1, \ldots, p_q$ il faut d'abord considérer les procédés π_{p_i}. La transitivité et la symétrie de l'identité ne sont pas présupposées, mais, si ceci est nécessaire, les identifications correspondantes appartiennent à l'analyse.

Il faut donc considérer d'abourd tous les π_a où a sont les symboles atomiques de P, puis les π_A pour tous les A composés directement de ces symboles, etc.

Ce sont les identifications des a_i avec les $\{\underline{a}_i\}$ qui sont la cause de mon inquiétude. À chaque $\{\underline{a}_i\}$ correspond un procédé $\pi_{\{\underline{a}_i\}}$. Chaque acte de l'identification ou de l'usage des identifications présuppose les événements de quelques procédés π_t. Selon mon point de vue génétique, il est toujours nécessaire que tous les $\underline{a}_i$ qui interviennent dans ces t soient *bornés* dans K_l, c'est-à-dire qu'ils appartiennent à la genèse d'un événement $\underline{a}_j$.

Je crois encore à la nécessité d'éviter les rencontres des suites $\{\underline{a}_i\}$, où les $\underline{a}_i$ ne sont pas bornés dans K_l, dans les parties des raisonnements qui prétendent être finies. Voici les définitions nécessaires:

𝔄. Supposons que Q soit une partie de P et que le nombre d'occurences des formules dans Q appartienne à N et admettons que tous les événements de D_l ou K_l exprimés par les termes figurant dans Q ,appartiennent à la genèse d'un évenement de D_l ou respectivement de K_l. Alors j'appelle Q *partie finie* de P. (Voir la remarque 2.)

𝔅. Soit Q une partie de P et f une flèche accompagnant dans P une formule de Q. Si f a la forme $t \rightarrow \bar{x}$ où t est un termoïde constant ne figurant pas dans les formules de Q, j'appelle f *flèche oubliée* (dans Q).

Il est évident qu'une partie finie de P ne peut pas contenir d'applications de la règle (Ca), tandis que pour chaque prémisse de (Ca) sa déduction des axiomes inductifs qui figurent dans sa démonstration est finie.

Voici enfin l'énoncé de la condition III.

III. *Il faut que pour le corps P il existe une analyse prolongée sur les flèches accompagnant les formules de P. Pour chaque ensemble F de la condition* II *l'analyse doit être prolon-*

geable sur les explications des apparitions des flèches dans $\widetilde{F}$. *L'analyse doit comprende les actes d'identification de manière que l'identité des termoïdes dans les flèches soit symétrique et transitive. Pour chaque partie finie* Q *de* P *et chaque ensemble* F^0 *de flèches, qui accompagnent dans* P *les formules de* Q *et ne sont pas oubliées dans* Q, *les conditions suivantes doivent être satisfaites*:

(Cf_1) *Le long de chaque fil de* $\widetilde{F}^0$, *pour les flèches de la forme* $t \to \bar{x}$ *où* t *est un termoïde identifiable avec un* a_i *les événements de* K_l *équivalents aux indices* i *ne peuvent pas ne pas être bornés dans* K_l.

(Cf_2) *Il en est de même dans les fils des formules de* Q *pour les occurrences des* a_i *qui ne figurent pas dans d'autres termoïdes.*

La condition (Cf) garantit qu'il n'y a pas de suites des $\{\underline{a}_i\}$ dans l'analyse des parties finies, y compris l'analyse des flèches non-oubliées et les identifications nécessaires. Je ne parle pas dans (Cf) des termoïdes plus généraux $t(a_i)$, car si les identifications des a_i et $\{\underline{a}_i\}$ deviennent nécessaires, alors les conditions (Cf) sont déjà applicables.

La transitivité et la symétrie de l'identité dans la condition III garantissent que si deux occurences d'une flèche $t \to \bar{x}$ sont apparues et si l'analyse exige:

1) l'identification de deux occurrences explicites de „$\bar{x}$" dans ces occurrences de la flèche et

2) l'identification du termoïde t avec un autre termoïde t' pour une de ces occurrences de $t \to \bar{x}$, alors il faut que l'identification de t et de t' soit contenue par l'analyse aussi pour la seconde occurrence de la flèche.

La totalité des flèches $t \to \bar{x}$ indiquant le domaine des valeurs de la variable $\bar{x}$ usées dans la démonstration, il faut tenir compte de ce que le sens d'une expression $A(\bar{x})$ peut dépendre non seulement des termoïdes admissibles pour $\bar{x}$, mais aussi de la manière dont on identifie ces termoïdes dans le raisonnement. C'est pourquoi la transitivité dans la condition III est nécessaire.

Un corps de démonstration qui *possède une âme* (c'est-à-dire satisfait aux conditions I-III), est appelé *démonstration* et sa dernière formule sera appelée *son résultat* et *théorème* de la théorie $T(D_l, K_l)$. (Voir la remarque 4.)

Il peut arriver que la formule de la forme $A \,\&\, \neg A$ soit démontrable sans qu'il soit possible de prolonger l'analyse de la démonstration sur l'identification de deux A au sens de la condition III. (Rappelons que l'axiome $A \supset (B \supset A \ \& \ B)$ n'exige pas l'identification de A et B!). Une telle contradiction est appelée contradiction *apparente.* Tel est, par exemple, le cas où A exprime que l'ensemble $\{a_0\}+\{a_1\}+\ldots+\{a_{10^{12}\cdot l}\}$ est fini. L'identification de deux A étant impossible, on ne peut pas appliquer l'axiome $\neg A \supset (A \supset B)$. La transitivité de l'identité étant violée chaque fois que l'on tente d'établir une identification de deux occurrences des A dans $A \ \& \neg A$, *je ne dirai pas* que ces deux A *ont le même sens dans la démonstration.* Evidemment j'admets ici une espèce nouvelle de sémantique qui lie le sens d'une formule à son occurrence dans la démonstration.

Tous les théorèmes du système formel S qui admettent une démonstration de longueur $\leqslant l_0$ sont aussi des théorèmes de la théorie $T(D_l, K_l)$ — donc aussi d'une partie $F(D_l, K_l)$ de cette théorie où il n'y a pas de contradictions apparentes. Ici la „longueur" peut signifier le nombre d'occurrences des formules. Le nombre k dans la définition de l est la longueur de la démonstration de l'axiome de l'infini dans $F(D_l, K_l)$.

Il s'ensuit que le fait que l'ensemble U. (ou R) usé dans la démonstration de (A) dans $T(D_l, K_l)$ est fini ne peut pas être démontré dans S par une démonstration de longueur $< l_0$. Donc la longueur minimale d'une démonstration dans S du fait que l'ensemble $\mathcal{E}_l = \{x_0, \ldots, x_l\}$ est fini croît au moins comme $\lg_2 l - 40$. Un résultat analogue s'obtient pour le système ZF.

Je vais décrire la théorie $F(D_l, K_l)$. Cela est possible de plusieurs manières et c'est avec peine que j'ai choisi la variante suivante:

A. Les axiomes inductifs sont: les lois générales de la logique intuitionniste (avec les axiomes d'égalité pour les symboles de s) (voir la remarque 3), les formules exprimant les définitions des fonctions et des prédicats de s, $\neg\neg \widetilde{x} = \widetilde{y} \supset \widetilde{x} = \widetilde{y}$, $\neg\neg \widetilde{x} \in \widetilde{y} \supset \widetilde{x} \in \widetilde{y}$ ($\widetilde{x}, \widetilde{y}, \ldots$ étant les variables pour les événements de D_l et K_l introduites de la manière ordinaire en termes de $x, y, \ldots$ et $\alpha, \beta, \ldots$), les formules

$$\exists\beta(\beta = p(\alpha)) \qquad \text{et} \qquad \exists x(x = \{\alpha\})$$

et les formules démontrables à l'aide de la régle

$$(\mathrm{I}^{\bar{x}}) \quad \frac{A(a_0), \ldots, A(10^{12}\cdot l), A(\bar{x}) \supset A([\bar{x}]), A(\bar{x}) \ \& \ A(\mathfrak{z}) \supset A(\bar{x}+\mathfrak{z})}{A(\bar{x})}$$

de l'induction ordinaire ($\bar{x}$ étant une variable de l'alphabet $x, y, \ldots$), dont les applications sont assujetties à la restriction suivante:

B. Les fléches accompagnant les formules qui interviennent dans la démonstration des prémisses de $(\mathrm{I}^{\bar{x}})$ ne peuvent avoir que les formes suivantes:

b1. $\bar{x} \to \bar{x}$,

b2. $t \to \bar{x}$, où t est un termoïde constant distinct de tous les $\{\underline{a_i}\}$,

b3. $\bar{x} \to \bar{y}$, où $\bar{y}$ est une variable qui ne figure pas dans les premiers membres des fléches accompagnant les formules dans leurs occurrences dans les démonstrations des axiomes inductifs excepté les flèches de la forme b1,

b4. $\varphi \to \bar{y}$, où $\bar{y}$ est une variable de l'alphabet $x, y, \ldots$ et φ est un termoïde contenant des variables et satisfaisant à la condition suivante:

b4 (a). Si la valeur de φ pour quelques valeurs $s_0, \ldots, s_q$ de ces variables est égale à a_i $(40 + l < i \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{12} \cdot l)$, alors une des valeurs $s_0, \ldots, s_q$ est égale à a_i. En outre, chaque termoïde contenant des variables et obtenu par la superposition de φ (y compris le termoïde φ lui-même) exprime une fonction distincte de tous ses arguments.

(Il est évident que la formule $A(\bar{x})$ de $(\mathrm{I}^{\bar{x}})$ peut être obtenue par l'application de la règle (Ca), donc en formulant $F(D_l, K_l)$ on peut employer d'une façon naturelle la notion de flèche accompagnant une formule.)

C. Pour chaque a_i qui figure dans l'axiome inductif usé dans la démonstration d'un théorème de $F(D_l, K_l)$, l'index i satisfait à la condition

c1. $i \leqslant 40 + l \vee i > \frac{1}{2} \cdot 10^{12} \cdot l$.

Je désigne par L la totalité des axiomes inductifs pour lesquels aucune formule accompagnée par une flèche de la forme $\{a\} \to \bar{x}$ ou $\{\underline{a_i}\} \to \bar{x}$ ($\bar{a}$ appartenant à l'alphabet $\alpha, \beta, \ldots$) n'intervient dans la démonstration d'une prémisse. Pour chaque théorème de $F(D_l, K_l)$ je désigne par R la partie de sa démonstration qu'on obtient en éliminant les démonstrations des prémisses des axiomes inductifs. J'appelle une définition *bonne* si chaque a_i qui y est usé explicitement satisfait à la condition c1.

Remarque. La fonction $a_{i+1} = \zeta(a_i)$ $(i < 10^{12} \cdot l)$ n'appartient pas à $'s$. C'est pourquoi la définition suivante *n'est pas bonne*:

$$U(a_0) = a_0\,, \qquad U(a_{i+1}) = U(a_i) + [U(a_i)] \qquad (i < 10^{12} \cdot l)\,.$$

Pratiquement, j'utilise une seule définition qui n'est pas bonne: $I = a_0 + a_1 + \ldots + a_{10^{12} \cdot l}$ (et les termoïdes plus courts usés dans cette définition).

D. Pour chaque théorème de $F(D_l, K_l)$, toute définition qui entre dans R, ou dans la démonstration d'un axiome inductif de L est bonne, ou n'entre pas dans les démonstrations des axiomes inductifs qui n'appartiennent pas à L.

E. Pour chaque démonstration de $F(D_l, K_l)$ tous les termoïdes admissibles pour les variables $\alpha, \beta, \ldots$ contiennent l_0 symboles „p" au plus.

F. Pour chaque théorème de $F(D_l, K_l)$ et chaque flèche f qui figure dans R, si le second membre de F appartient à l'alphabet $\alpha, \beta, \ldots$, alors la flèche f coïncide avec

f0. $p(\alpha) \to \beta$

ou bien elle a une des formes suivantes

f1. $\overline{\overline{\alpha}} \to \overline{\overline{\beta}}$;

f2. $t \to \overline{\overline{\beta}}$, où t est un termoïde constant.

G. Pour chaque théorème de $F(D_l, K_l)$ le nombre des formules dans R ne surpasse pas $l_0 + k - 1$.

H. Pour chaque théorème de $F(D_l, K_l)$ le nombre des variables distinctes qui figurent dans sa démonstration ne surpasse pas l_0.

La théorie $F(D_l, K_l)$ est ainsi décrite. Elle a devant $T(D_l, K_l)$ l'avantage que dans $F(D_l, K_l)$ on peut considerer les démonstrations du point de vue traditionnel finitiste. En effet, pour chaque axiome inductif de $T(D_l, K_l)$ on peut fournir de sa démonstration toutes les flèches qui l'accompagnent — et alors le reste n'est plus qu'une vérification finitiste facile. Les flèches accompagnantes peuvent aussi être obtenues d'une manière qui n'exige pas que l'on sorte du domaine traditionnel finitiste excepté le cas où l'on considère des flèches de la forme $t \to \overline{x}$, où t est un termoïde constant, pour lesquelles la notion de terme est indispensable. Mais cela ne présente jamais de grandes difficultés. Il est probable que tous les théorèmes de

$F(D_l, K_l)$ sont aussi des théorèmes de $T(D_l, K_l)$. La vérification des conditions I-II est directe et ne fait pas usage des conditions D et H, de même que des restrictions pour b4. Celle-ci sont nécessaires pour la condition III.

D'ailleurs la vérification complète de la condition III est bien compliquée et exige quelques considérations sur l'ordre partiel dans $\widetilde{F}$, que je ne peux pas discuter ici. Faute de quelques définitions, il y a encore une lacune que je comble plutôt par l'intuition que par des raisonnements complètement explicites. Mais je n'insiste pas sur mon affirmation à propos de $F(D_l, K_l)$. J'ai utilisé cette théorie pour vérifier que chaque théorème du système S, dont la démonstration a la longueur $\leqslant l_0$, possède un corps de démonstration dans $T(D_l, K_l)$ qui satisfait aux conditions I-II. Quant à la condition III, je l'ai vérifiée par des raisonnements directs liés à la considération des démonstrations directes de $A(I)$ pour chaque axiome inductif $A(\bar{x})$ et les identifications nécessaires pour I. (Voir la remarque 5.)

Il me reste à considérer deux sources de doutes. Tout d'abord la force convaincante des postulats de la logique intuitionniste n'est pas absolue. Elle dépend du choix de l'interprétation pour les opérateurs logiques. J'ai critiqué les mathématiques traditionnelles et j'ai commencé par considérer des procédés pareils à K. C'est pourquoi les interprétations traditionnelles, comme celles de S. C. Kleene ou de A. N. Kolmogoroff, ne me semblent plus convenables et il ne me reste qu'une interprétation psycholinguistique. Pour l'implication il faut supposer qu'on comprend le sens des séquences: $A_1, \ldots, A_n \to B$ $(n \geqslant 0)$: „B est nécessaire dans les suppositions $A_1, \ldots, A_n$" où d'ailleurs $A_1, \ldots, A_n$, B peuvent à leur tour être des séquences. Pour les autres opérateurs, de même que pour l'implication, on peut admettre la méthode de Gentzen. La difficulté la plus grande consiste dans la justification des postulats $A \,\&\, \neg A \supset B$. Quant à moi, je préfère l'éviter dans les métathéories et proposer une démonstration de sa non-contradiction relative pour les théories formelles que je considère. Une telle démonstration est basée sur l'interprétation de $\neg A$ comme $A \supset f$, où f est une formule convenable. Il faut que chaque formule de la forme $f \supset B$ soit démontrable. Pour cela il suffit de prendre pour f la formule $\forall \widetilde{x} \forall \widetilde{y} (\widetilde{x} \doteq \widetilde{y})$. Mais alors la force convaincante de la formule $\neg p(a) = \underline{a}_1$ disparaît. Donc je prends pour f la formule $\underline{a}_1 = \underline{a}_2$ (analogue à la formule $0 = 1$ de l'arithmétique traditionnelle). Alors la force convaincante de la formule $\neg p(a) = \underline{a}_1$ coïncide avec celle de la formule $p(a) = \underline{a}_1 \supset \underline{a}_1 = \underline{a}_2$ et cette formule est démontrable à l'aide d'une fonction analogue à la fonction $sg(n)$ de S. C. Kleene (*Introduction to metamathematics*, § 44). L'induction définissant cette fonction est possible dans K_l de même que pour la fonction partielle $a+b$ $(b = 0, 1)$. Donc on peut démontrer $\underline{a}_1 = \underline{a}_2 \supset \mathbf{V}\widetilde{x}\mathbf{V}\widetilde{y}\ (\widetilde{x} = \widetilde{y})$ après avoir admis le principe d'induction sous une forme convenable et quelques autres suppositions secondaires.

Le développement de cette théorie des opérateurs logiques doit être rattaché à la considération proposée des identifications.

D'autre part, on peut mettre en doute la force convaincante des raisonnements très longs. A vrai dire, ce doute existe aussi pour les théories traditionnelles, mais ici la situation est beaucoup plus compliquée à cause de la présence de plusieurs suites naturelles.

On peut bien admettre que si les raisonnements de longueur n sont convaincants, les raisonnements de longueur $n+1$ le sont aussi. Donc les nombres exprimant les longueurs des raisonnements (corrects) convictifs forment une suite naturelle concrète J. Évidemment elle est explicitement plus courte que K. Mais la justification de la règle de Carnap demande qu'elle soit isomorphe à N.

Pour lever cette difficulté j'ai construit une théorie des fonctions et prédicats récursifs des événements de D_l et K_l. Le fait que le procédé D_l est ramifié n'y change presque rien car on peut le transformer en une suite naturelle isomorphe à N. On le fait à l'aide de l'énumeration de K. Gödel (avec quelques changements des identifications). (Les a_i deviennent des nombres premiers p_i, et on transforme les opérations $[x]$ et $x+3$ en $2^{(x)}$ et $3^{(x)} \cdot 5^{(3)}$, où (w) signifie le résultat de la transformation de w.) La différence la plus essentielle par rapport à la théorie traditionnelle consiste en ce que même les récursions primitives ne donnent souvent que des fonctions partielles.

J'introduis les nombres de Gödel pour ces fonctions de la même façon que dans le livre mentionné de S. C. Kleene. Ces nombres appartiennent à la suite N.

Les $\wedge$-notations s'introduisent aussi comme dans le livre de S. C. Kleene, mais il faut alors tenir compte de deux alphabets des variables (pour K_l et D_l).

Ensuite j'introduis la notion de nombre réalisant la formule — comme le fait Kleene, § 82. Par exemple, si la formule $A(\underline{a})$ est réalisée par $a(\underline{a})$ pour chaque $\underline{a}$ de K_l, la formule $\forall\bar{a}A(\bar{a})$ est réalisée par le nombre $\wedge\bar{a}a(\bar{a})$ ($\bar{a}$ est une variable de l'alphabet $\alpha, \beta, \ldots$). De même pour l'alphabet $x, y, \ldots$

Les affirmations: „Le nombre r réalise la formule A" appartiennent à un domaine W. En analysant ces affirmations et les raisonnements correspondants j'introduis la notion de flèche accompagnant une affirmation de W — et des conditions analogues à I-III. Je démontre l'analogue du théorème de R. J. Nelson: chaque formule démontrable dans $F(D_l, K_l)$ est réalisable.

Le calcul des valeurs des fonctions récursives de cette théorie peut être envisagé comme exécutable par une machine qui diffère essentiellement de la machine de Turing par ce que pour y introduire un nombre de K_l, il faut attendre son apparition.

L'avantage qu'on tire de cette considération consiste en ce que le problème de la force convaincante ne se présente pas en connexion avec le travail d'une machine: ses résultats sont des nombres, non pas des propositions. Il reste donc le postulat que les conditions analogues à I-III — qui garantissent l'usage juste des termes et des variables de même que la possibilité des identifications nécessaires — représentent les conditions suffisantes pour la possibilité (potentielle) de la marche de la machine.

En démontrant l'analogue du théorème de R. J. Nelson j'emploie, il est vrai, quelques raisonnements dont la justesse dépend encore de conditions analogues à I-III pour le domaine W. Mais la longueur de ces raisonnements pour chaque formule F démontrable dans $F(D_l, K_l)$ ne surpasse pas considérablement celle de la démonstration de F mesurée par le nombre d'occurrences des symboles logiques et des règles de la déduction.

Il est à remarquer que la justesse de ma théorie dépend de celle de mon analyse des raisonnements mathématiques en général. Seule la justesse de cette analyse peut assurer que je n'ai omis aucune condition nécessaire. On peut encore discuter la justesse de ces conditions telles que je les ai énoncées. Ces réflexions sortent du cadre de mes considérations. En tout cas je me sens incapable de démontrer la justesse de mon analyse; c'est pourquoi je propose de considérer l'hypothèse qu'aucune condition nécessaire n'a été omise et que les énoncés de mes conditions ont été corrects comme un postulat nouveau que j'appelle *postulat de mon irréprochabilité.* Sa force convaincante ne surpasse pas celle de la thèse de A. Church.

J'ai considéré ici seulement la théorie de deux procédés correspondant à deux suites naturelles concrètes K_l et N. Je suis persuadé qu'en introduisant une troisième suite N_1, explicitement plus longue que N, et en admettant le postulat de N_1-*réalisabilité* on peut démontrer de la même manière la non-contradiction relative de la théorie $\mathrm{ZF}+(\mathrm{A})+(\mathrm{I})_1$, où $(\mathrm{I})_1$ est l'axiome de l'existence d'un nombre cardinal inaccessible (au sens de A. Tarski). En admettant l'existence de plusieurs suites de longueurs croissantes (N_1, N_2, ...) on peut établir la non-contradiction relative des théories formelles contenant les axiomes de l'existence de plusieurs nombres cardinaux inaccessibles et même de suites infinies de tels nombres.

Pour obtenir les suites N_1, N_2, ... il suffit de tenir compte de l'existence traditionnelle des fonctions qui croissent plus vite que 2^n et dont chacune croît plus vite que la précédente. Mais je n'ai pas encore développé la technique nécessaire pour ces considérations.

Le programme ultra-intuitionniste des fondements des mathématiques consiste avant tout dans la justification du postulat „Trad" de l'existence d'une suite naturelle où l'opération 2^n est définie partout.

Il me semble que ce problème est lié à une étude approfondie des modalités. En effet, il s'agit de la *possibilité* de continuer le calcul jusqu'à 2^n pour chaque n obtenu. Beaucoup de „possibilités" interviennent dans Trad et il s'agit d'examiner leurs relations. Ensuite, il faut développer dans tous les détails la théorie des identifications et la sémantique correspondante que j'ai mentionnée une fois.

Ce n'est qu'alors qu'on pourra considérer les démonstrations obtenues comme définitives.

Remarque 1. Les flèches accompagnant les formules d'un corps P de démonstration sont ordonnées par l'ordre qui existe dans l'arbre P. Plus exactement, pour deux (occurrences des) flèches accompagnant les (occurrences des) formules distinctes, leur ordre relatif coïncide avec celui des (occurrences dans P des) formules accompagnées par les flèches. Si deux flèches distinctes accompagnent la même occurrence d'une formule A dans P, chacune de ces occurrences des flèches est nouvelle ou provient de l'occurrence d'une flèche accompagnant une formule précédente dans P (non nécessairement „immédiatement précédente"). Alors l'ordre de ces occurrences des flèches accompagnant la formule A coïncide avec l'ordre dans P des formules accompagnées par les occurrences des flèches (y compris la formule A).

Évidemment, dans le cas général, c'est un ordre partiel. L'ensemble de toutes les flèches accompagnant les occurrences des formules dans P ainsi ordonné n'est plus un arbre. Pourtant on peut parler de ces fils.

Remarque 2. Je dis qu'un termoïde t exprime un événement e, si e est désigné par le termoïde t_1 qu'on obtient de t en calculant les valeurs des fonctions dont les symboles y interviennent et en substituant les termes désignant ces valeurs dans t (au lieu de ces symboles avec leurs arguments).

Remarque 3. Quant aux lois logiques mentionnées dans A, je suppose que les terms t des axiomes $\forall \bar{x} A(\bar{x}) \supset A(t)$ et $A(t) \supset \exists \bar{x} A(\bar{x})$ contiennent un signe „p" au plus. On démontre facilement que cette restriction n'empêche jamais la possibilité de construire un corps de démonstration pour une formule arbitraire.

D'ailleurs, si un t a la forme $p(\bar{a})$, où $\bar{a}$ appartient à l'alphabet $\alpha, \beta, \ldots$, on peut de même supposer que „$\bar{a}$" coïncide avec „α", car un axiome nécessaire $\forall \bar{x} A(\bar{x}) \supset A(p(\bar{a}))$ peut toujours être obtenu à partir des deux axiomes $\forall \bar{x} A(\bar{x}) \supset A(p(\alpha))$ et $\forall \alpha A(p(\alpha)) \supset A(p(\bar{a}))$ (et d'une façon analogue pour $\exists$).

Je suppose encore que, si t est constant, il ne contient pas de signes fonctionnels. Evidemment on peut obtenir un axiome $\forall \bar{x} A(\bar{x}) \supset A(f(\underline{a}))$ où $\underline{a}$ est constant à partir des axiomes $\forall \bar{x} A(\bar{x}) \supset A(f(\bar{x}))$ et $\forall \bar{x} A(f(\bar{x})) \supset A(f(\underline{a}))$ (et d'une façon analogue pour $\exists$). (Le cas où $f(\underline{a}, \underline{b})$ contient deux constantes $\underline{a}$ et $\underline{b}$ exige évidemment deux variables.)

Remarque 4. Faute de la règle $\vdash A, \vdash B \rightarrow \vdash A \,\&\, B$ on ne peut pas, en général, conclure que $\vdash \forall \bar{x} A(\bar{x})$ entraîne $\vdash A(t_{i_1}) \,\&\, \ldots \,\&\, A(t_{i_s})$ pour chaque système de valeurs admissibles $t_{i_1}, \ldots, t_{i_s}$ de la variable $\bar{x}$. Pour lever cette difficulté, on peut rempalcer les $A(t_i)$ dans (Ca) par les conjunctions des $A(t_j)$, où t_j sont tous les événements de la genèse de t_i (pris dans un certain ordre).

D'ailleurs, dans la théorie $F(D_l, K_l)$, $\vdash \forall \bar{x} A(\bar{x})$ entraîne toujours $\vdash A(t_{i_1})$ & ... & $A(t_{i_s})$, et c'est pourquoi j'ai évité cette complication.

Remarque 5. On peut d'ailleurs démontrer mon affirmation à propos de $F(D_l, K_l)$ en ajoutant quelques autres clauses aux conditions A—H. Ces nouvelles clauses, compatibles avec la vérification des axiomes de $\mathfrak{S}$, sont les suivantes:

(I) Le seul termoïde, dont la définition n'est pas bonne et qui intervient dans les démonstrations des théorèmes de $F(D_l, K_l)$, sauf dans les démonstrations des axiomes inductifs de L, est $I = a_0 + \ldots + a_{10^{12}.l}$. Ce termoïde ne figure que dans les démonstrations des axiomes inductifs $a \in I$ et $\neg x \in I$.

(J) Soit Q une partie finie de P qui intervient dans la démonstration d'un axiome inductif de L. Alors les conditions suivantes sont satisfaites:

j1. Dans chaque fil des flèches accompagnant les formules de Q et non oubliées en Q il y au plus une flèche de la forme $a_i \to \bar{x}$.

j2. Le long de chaque fil des flèches accompagnant les formules de Q et non-oubliées en Q, pour chaque a_i et chaque signe fonctionnel φ de s, la flèche de la forme $\varphi(\bar{x}, a_i) \to \bar{y}$ ou $\varphi(a_i, \bar{x}) \to \bar{y}$ (où φ est un termoïde distinct de ses arguments et les variables $\bar{x}, \bar{y}$ peuvent coïncider) apparaît une fois au plus.

j3. Pour chaque flèche non-oubliée de la forme $a_i \to \bar{x}$, accompagnant une formule de Q, $\bar{x}$ ne figure pas au premier membre d'une flèche de la forme b3.

(K) Le nombre d'axiomes inductifs dans P qui ne contiennent pas de termoïdes constants ne surpasse pas un nombre de K_l.

Soit $F_1(D_l, K_l)$ la théorie $F(D_l, K_l)$ élargie par les conditions (I)-(K). Les contradictions apparentes sont impossibles dans $F_1(D_l, K_l)$.

Ajouté en cours d'épreuves. Une analyse plus détaillée m'a montré que la nouvelle condition suivante est aussi utilisée en connexion avec l'axiome $(A)_{\bar{i}}$:

(L) Les parties composantes (pour rapport à „+") du terme R mentionné à la page 209 entrent dans la démonstration symétriquement (dans un sens naturel).

La totalité L (p. 216) doit comprendre aussi les formules entrant en démonstration de $(A)_{\bar{i}}$.