INTERNATIONAL MATHEMATICAL UNION
AND MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

# INFINITISTIC METHODS

## PROCEEDINGS OF THE SYMPOSIUM ON FOUNDATIONS OF MATHEMATICS

*Warsaw, 2-9 September 1959*

PERGAMON PRESS
OXFORD · LONDON · NEW YORK · PARIS

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

PERGAMON PRESS LTD.
*Headington Hill Hall, Oxford*
*4 & 5 Fitzroy Square, London W.1*

PERGAMON PRESS INC.
*122 East 55th Street, New York 22, N.Y.*
*Statler Center 640, 900 Wilshire Boulevard*
*Los Angeles 17, California*

PERGAMON PRESS S.A.R.L.
*24 Rue des Écoles, Paris Ve*

PERGAMON PRESS G.m.b.H.
*Kaiserstrasse 75, Frankfurt am Main*



Library of Congress Card Number 61-11351

*Printed in Poland*
*to the order of Państwowe Wydawnictwo Naukowe*
*by Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie*

## CONTENTS

# Foreword

This volume presents the proceedings of the Symposium held in Warsaw from September 2nd to September 8th, 1959.

It was organized by the Mathematical Institute of the Polish Academy of Science under the auspices and with the financial support of the International Mathematical Union. The Symposium received also indirect financial support from the National Science Foundation of the U. S. A., which paid the transportation expenses of the American participants.

Altogether there were 48 participants of the Symposium representing 13 countries. In the list which follows the names of members of the Organizing Committee are marked by an asterisk:

Czechoslovakia: L. Rieger (Prague).

France: P. Février (Paris), R. Fraïssé (Alger), D. Lacombe (Paris).

Germany: G. Asser (Berlin), P. Lorenzen (Hamburg).

Great Britain: G. Kreisel (Reading).

Hungary: L. Kalmár (Szeged), R. Péter (Budapest), J. Surányi (Budapest).

Israel: A. Robinson (Jerusalem).

Poland: A. Ehrenfeucht (Warsaw), D. Gierulanka (Cracow), A. Grzegorczyk * (Warsaw), S. Jaśkowski * (Toruń), M. Kokoszyńska-Lutmanowa (Wrocław), K. Kuratowski * (Warsaw), J. Łoś * (Toruń), A. Mostowski * (Warsaw), J. Mycielski (Wrocław), H. Rasiowa * (Warsaw), W. Sierpiński (Warsaw), R. Sikorski (Warsaw), J. Słomiński (Toruń), J. Słupecki (Wrocław), M. Stark * (Warsaw), A. Suliński (Warsaw), W. Zawadowski * (Warsaw).

The Netherlands: E. Beth (Amsterdam), A. Heyting * (Amsterdam).

Roumania: Gr. Moisil (Bucarest).

Sweden: S. Kanger (Uppsala).

Switzerland: P. Bernays (Zürich), G. H. Müller (Zürich), E. Specker (Zürich).

The U. S. A.: J. W. Addison (Ann Arbor, Michigan), W. Boone (Urbana, Illinois), L. Henkin (Berkeley, California), S. C. Kleene (Madison, Wisconsin), S. MacLane * (Chicago, Illinois), R. Montague (Los Angeles, California), D. Scott (Chicago, Illinois), C. Spector (Columbus, Ohio), A. Tarski (Berkeley, California), R. L. Vaught (Berkeley, California).

The U. S. S. R.: J. T. Medvedev (Moscow), P. S. Novikov (Moscow), A. J. Sragovič (Moscow).

As the general subject of the Symposium the Organizers chose infinitistic methods in the foundations of mathematics. It was the intention of the organizers that the Symposium should discuss works which use mathematical tools commonly thought of as non-constructive, e. g. inaccessible cardinals, infinitistic rules of proof, higher classes of number-theoretic and function-theoretic hierarchies of predicates, etc.

Papers presented by the participants were divided into six groups according to their subjects. This is a full list of the papers (1):

## Group I. Infinitistic problems in general set theory

A. Tarski, On predicative set theory **.

P. Bernays, Die hohen Unendlichkeiten und die Axiomatik der Mengenlehre.

J. Łoś, Some properties of inaccessible numbers.

S. Mac Lane, Locally small categories and the foundations of set theory.

R. Montague, Semantical closure and non-finite axiomatizability I.

R. L. Vaught and R. Montague, The natural models of set theories (2).

## Group II. Infinistic rules of proof

P. S. Novikov, Consistency of some logical calculi.

G. H. Müller, Über die unendliche Induktion I.

(1) Papers delivered at the Symposium but not handed in to the Editors are marked by a double asterisk.

(2) The text of this paper which was published in Fundamenta Mathematicae 47 (1959), pp. 219-242 is not reproduced in the present volume.

C. Spector, Inductively defined sets of natural numbers.

G. Kreisel, Set theoretic problems suggested by the notion of potential totality.

A. Mostowski, Formal system of analysis based on an infinitistic rule of proof.

L. Henkin, Some remarks on infinitely long formulas.

### Groupe III. Infinistic methods from the finitist point of view

A. Heyting, Infinitistic methods from a finitist point of view.

P. Lorenzen, Ein dialogisches Konstruktivitätskriterium.

A. S. Ésénine-Volpine, Le programme ultra-intuitionniste des fondements des mathématiques.

### Group IV. Models of axiomatic theories

L. Rieger, Sur le problème des nombres naturels.

D. Scott, On constructing models for arithmetic.

R. Mac Dowell, E. Specker, Modelle der Arithmetik.

A. Robinson, Model theory and non-standard arithmetic.

R. L. Vaught, Denumerable models of complete theories.

### Group V. Recursive functions and related problems

J. W. Addison, On Novikov-Kondo theorem **.

D. Lacombe, On statements of classical analysis which are expressible and provable in intuitionistic arithmetic **.

R. Fraïssé, Une notion de récursivité relative.

R. Péter, Über die Verallgemeinerung der Rekursionsbegriffe für abstrakte Mengen als Definitionsbereiche.

Gr. C. Moisil, Les logiques à plusieurs valeurs et l'automatique.

L. Kálmar, A practical infinitistic computer.

All the papers were read by the authors themselves with the exception of the paper by Ésénine-Volpine, who was not present and whose manuscript was read by A. Ehrenfeucht.

The papers are printed in this volume in the same order as that in which they are listed above.

The proceedings of the Symposium are incomplete insofar as the important papers of J. W. Addison, D. Lacombe, J. T. Medvedev, and A. Tarski were not received by the Editors and thus could not be included in this volume. The Editors hope very much that the authors of those papers will shor publish them elsewhere and that the picture of the Sym sium will thus be made complete.

The Editors wish to express their sincere thanks to persons and organizations whose help contributed to the succ of the Symposium. They are particularly grateful to the c tributors to this volume for their valuable and effect collaboration.

Warsaw, March 1960

# Die hohen Unendlichkeiten und die Axiomatik der Mengenlehre

P. BERNAYS (Zürich)

In Anbetracht des Themas unseres Symposiums, das ja von den infinitistischen Methoden handeln soll, möchte ich von etwas besonders Infinitistischem sprechen, nämlich den hohen Unendlichkeiten in der Kardinalzahltheorie.

Um uns den Grad des Infiniten zu vergegenwärtigen, mit dem wir es hier zu tun haben, seien kurz erst die grundlagentheoretisch verschiedenen Arten der Behandlung der Mathematik zusammengestellt: die finite Mathematik, die intuitionistische, die prädikative (welche das Tertium non datur für ganze Zahlen und für zahlenartige Gebilde in sich schließt), die bereits imprädikative Mathematik im Rahmen der Logik der zweiten Stufe, ferner die einfache Stufentheorie und schließlich die volle Cantorsche Mengenlehre, welche durch die axiomatische Mengenlehre genauere Abgrenzungen erhält.

Für unsere Betrachtungen möge ein Axiomensystem der Mengenlehre mit folgenden Eigenschaften zugrundegelegt werden: Das System ist äquivalent der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre. Das System enthält nur eine Gattung von gebundenen Variablen, welche Mengenvariablen sind. Das System ist formalisierbar in der üblichen Prädikatenlogik unter Hinzuziehung von Formelschematen und von Kennzeichnungen. (Eventuell können die Formelschemata durch einen Klassenformalismus mit freien Klassenvariablen entbehrlich gemacht werden.) Wie man weiß, wird durch das Ersetzungsschema das Aussonderungsschema entbehrlich; übrigens läßt sich das Ersetzungsschema mit dem Summenaxiom in ein Schema der allgemeinen Cantorschen Summenbildung zusammenziehen.

Im Unterschiede von den meisten Anwendungen der axiomatischen Methode, hat die Axiomatisierung der Mengenlehre nicht den Sinn, das System der Mengen als eine bestimmte Struktur zu beschreiben. Diese Auffassung ist höchstens in