В. М. Тихомиров

Поперечники в трудах Р. С. Исмагилова

Определение поперечников, получивших название поперечников по Колмогорову, было предложено Андреем Николаевичем Колмогоровым в [1] и им же были инициированы исследования по связанным с с этими величинами. В творчестве Раиса Сальмановича Исмагилова работы по поперечникам, занимают весьма скромное место. В заглавиях большинства работ Раиса Сальмановича фигурирует одно из двух слов — либо «представление», либо «спектр», и насколько об этом можно судить, на эти работы (во всяком случае в начальный период его творчества) влияли Марк Аронович Наймарк и Анатолий Георгиевич Костюченко — два последователя нашего выдающегося современника, ученика Андрея Николаевича Колмогорова — Израиля Моисеевича Гельфанда.

О поперечниках, насколько я могу об этом судить, Р. С. Исмагилов узнал совершенно случайно. В середине шестидесятых годов прошлого столетия автор этих строк старался найти темы для диссертации своему доброму знакомому из Самарканда — Сады Бабаджановичу Бабаджанову. Так случилось, что тот оказался в затруднительном положении: его стажировка подходила к концу, а предложенные ему задачи как-то не шли. Я предложил Сады Бабаджановичу некие задачи о поперечниках, и мы начали с ним их помаленьку решать.

Раис Сальманович был в очень дружеских отношениях с Сады Бабаджановичем, и как-то спросил его о том, чем он занимается. Тот рассказал о поперечниках. Мы занимались с Сады Бабаджановичем поперечниками функций в равномерной метрике. Раис Сальманович спросил, а как обстоят дела в подобными задачами в гильбертовом пространстве. Сады не был готов к ответу на этот вопрос, и возможно, сказал, что эти задачи кажутся ему слишком трудными. На что, согласно передаче Сады Бабаджановича, ему были сказаны слова, которые я уже никогда не забуду. Раис Сальманович сказал, что он сомневается в том, что есть геометрические задачи в гильбертовом пространстве, которые он не смог бы решить.

И вскоре появилась статья [6] — его первая публикация по поперечникам.

Но прежде, чем рассказывать о том, что было сделано в этой статье и в других работах Исмагилова по поперечникам, кратко введу читателя в курс дела.

Первое определение величины, получившее у нас название поперечника, появилось в одной из работ П. С. Урысона. Эта величина была связана с понятием «лебеговой размерности» множества в метрическом пространстве.

Поперечник по Урысону $u_n(C)$ множества C, расположенного в метрическом пространстве есть нижняя грань тех ε, при котором существует покрытие C диаметра ε, кратности $n+1$.

В дальнейшем было предложено множество определений поперечников множеств, — величин, характеризующих размер уклонения множества «от n-мерности». Наибольшее число исследований было посвящено поперечнику по Колмогорову, определённому в статье [1]. Величина $d_n(C,X)$ n-поперечника по Колмогорову характеризует возможность наилучшего приближения множества C (для простоты центрально-симметричного и расположенного в нормированном пространстве X) подпространствами размерности

n. Формальное определение такого поперечника таково: $d_n(C,X) = \inf\limits_{L_n \in Lin_n(X)} d(C, L_n, X)$, где нижняя грань берётся по всем подпространствам L_n пространства X, а $d(C, L_n, X) = \sup\limits_{x\in C} \inf\limits_{\xi \in L_n} \|x - \xi\|_X$ — есть *уклонение* подмножества C от аппроксимирующего подпространства L_n в пространстве X. Подпространство$\widehat{L}_n$, для которого $d_n(C,X) = d(C, L_n, X)$ называют *экстремальным подпространством.*

Может показаться удивительным, что основные результаты Колмогорова по поперечникам и их развитие Исмагиловым могут быть проиллюстрированы на двух совершенно детских задачах об одномерных поперечниках эллипсоида и правильного октаэдра в трёхмерном евклидовом пространстве.

Пусть в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ векторов $x = (x_1, x_2, x_3)$ со скалярным произведением $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ (и нормой $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = |x|$) задан эллипсоид

$$\mathcal{E}_a(\mathbb{E}^3) = \{x \in \mathbb{E}^3 \mid (\tfrac{x_1}{a_1})^2 + (\tfrac{x_2}{a_2})^2 + (\tfrac{x_3}{a_3})^2 \le 1\}$$

с осями $a_1 \ge a_2 \ge a_3 > 0$. Какая прямая приблизит его лучше всего? Ответ напрашивается: *прямая, направленная вдоль большей оси эллипсоида.* И действительно, легко понять, что наиболее удалённая от этой прямой точка эллипсоида — это точка с координатами $(0, a_2, 0)$, и это приводит к оценке поперечника сверху: $d_1(\mathcal{E}_a(\mathbb{E}^3), \mathbb{E}^3) \le a_2$. А с другой стороны, эллипсоиду $\mathcal{E}_a(\mathbb{E}^3)$ принадлежит круг в плоскости, натянутой на первые две оси эллипсоида с центром в начале координат радиуса a_2, и для любой прямой ℓ, проходящей через начало координат, в ортогональном дополнении к ней найдётся граничная точка этого круга, не приближаемая прямой ℓ лучше, чем на величину a_2. Откуда следует оценка $d_1(\mathcal{E}_a(\mathbb{E}^3), \mathbb{E}^3) \ge a_2$ поперечника снизу, а значит, равенство $d_1(\mathcal{E}_a(\mathbb{R}^3), \mathbb{E}^3) = a_2$.

В работе [1] речь шла о бесконечномерном обобщении полученного только что результата (о нем рассказывается далее), но и по отношению к рассмотренному нами трёхмерному случаю А. Н. Колмогоров, а за ним и автор этой статьи, не сомневались в том, что построенная прямая, столь хорошо приближающая эллипсоид $\mathcal{E}_a(\mathbb{E}^3)$ с разными осями, единственна. А на вопрос о том, так ли это, ответ будет получен чуть позже.

А теперь обсудим вопрос об одномерном поперечнике правильного октаэдра $\mathcal{O}^3 = \{x \in \mathbb{E}^3 \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \le 1\}$ в $\mathbb{E}^3$.

Какие прямые приближают этот октаэдр лучше всего? И снова ответ напрашивается: такими прямыми будут четыре прямые, соединяющие начало координат с центрами равносторонних треугольников, образующими границу $\mathcal{O}^3$. Они, как легко понять, равноудалены от всех вершин, а любая другая прямая будет находиться на большем расстоянии от какой-нибудь вершины. Это рассуждение приводит к результату: $d_1(\mathcal{O}^3, \mathbb{E}^3) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

... Как-то вскоре после Войны Андрей Николаевич Колмогоров, размышляя над одной работой Гаусса, столкнулся с геометрической задачей о подпространстве заданной размерности, наилучшим образом приближающей правильный октаэдр, расположенный в евклидовом пространстве. Я думаю, что Андрей Николаевич интуитивно ощущал, что такое подпространство должно одинаковым образом приближать все вершины октаэдра. Обосновать это он предложил двум молодым людям, начинавшим свой путь в жизни. Одним из этих молодых людей был Юра Смирнов, который перед самым концом Войны усилиями Павла Сергеевича Александровича Александрова и самого Андрея Николаевича был демобилизован из флота, где прослужил всю Войну. Другим был Алёша Петров, не попавший на Войну по состоянию здоровья. Его, помимо математики, интересовали многие гуманитарные проблемы — поэзия, история, общественная жизнь. Оба они в тот период, о котором идёт речь, исполняли роль помощников: Смирнов при Колмогорове, Петров при Александрове, причём Колмогоров хотел занять Смирнова анализом, а Александров Петрова — топологией. Работа про октаэдр сыграла важную роль в судьбе обоих.

Молодые люди справились с поставленной задачей только наполовину: они (вместе с Андреем Николаевичем) доказали оценку снизу.

Усилия, затраченные молодыми людьми при получении этого результата, привели к их профессиональной переориентации: Юрий Михайлович Смирнов понял, что анализ не для него, он ушёл в топологию и стал замечателным топологом, а Алексею Аркадьевичу Петрову анализ понравился, и он стал заниматься теорией вероятностей.

Итак, молодые люди при участии Колмогорова получили оценку искомой величины снизу. А для нужной оценки сверху достаточно было построить подпространство равноудалённое от вершин октаэдра. Но так как дело у юношей не шло, Андрей Николаевич попросил построить такое подпространство одного из самых замечательных алгебраистов того времени, своего ученика Анатолия Ивановича Мальцева. Тот, разумеется, справился с поставленной задачей, и в итоге в Известиях АН СССР появились две статьи: Колмогорова, Петрова и Смирнова и Мальцева. О том, что по ходу дела был вычислен поперечник правильного октаэдра в евклидовом пространстве, речь не шла (по-видимому, в тот момент Андрей Николаевич не вспомнил о своём определении). Вспомнил о поперечниках в связи с описанной нами «двойной» статьей Сергей Борисович Стечкин. Он впервые выписал явную формулу для n-поперечника правильного октаэдра $\mathcal{O}^N$, расположенного в $\mathbb{E}^N$: $d_n(\mathcal{O}^N, \mathbb{E}^N) = \sqrt{\frac{N-n}{N}}$, и получил первые после Колмогорова результаты по поперечникам функциональных классов.

В итоге, можно сказать, что была опубликована «тройная» статья: [2], [3] [4] (статья Колмогорова, Петрова, Смирнова, статья Стечкина и маленькая заметка Мальцева, что дало повод в шутку сокращённо обозначать эту тройную статью набором букв КПСС(м)).

Теперь пришло время рассказать о вкладе Р. С. Исмагилова в теорию поперечников.

1. Наблюдение о неединственности экстремального подпространства для эллипсоида

Начнём с обсуждения поставленного выше вопроса о единственности экстремальной прямой для трёхмерного эллипсоида $\mathcal{E}_a(\mathbb{E}^3)$ с разными длинами осей. Самый простодушный взгляд на эту ситуацию сразу показывает, что описанную экстремальную прямую можно поворачивать в плоскости, натянутой на первую и третью оси до тех пор, пока расстояние от точки $(0, 0, a_3)$ до повёрнутой прямой не окажется равным a_2 (ведь вначале оно равнялось a_3 и следовательно, было меньше a_2). Для всех описанных повёрнутых прямых наиболее удалённой точкой эллипсоида будет точка $(0, a_2, 0)$ и значит, они тоже будут экстремальными. Это простое, но важное наблюдение было впервые сделано Р. С. Исмагиловым в его работе [7].

2. Идея усреднения при оценках снизу в задачах, подобных поперечнику октаэдра

Получим сначала оценку снизу в задаче о поперечнике правильного октаэдра по Исмагилову. Пусть L_n — подпространство в $\mathbb{E}^N$, e_k, $1 \le k \le N$ — стандартный базис в $\mathbb{E}^n$, $f_i = (f_{i1}, \ldots, f_{iN})$, $1 \le i \le n$ — ортонормированный базис в L_n. Тогда квадрат расстояния $d^2(e_k, L_n, \mathbb{E}^N)$ от вершины e_k до L_n в $\mathbb{E}^N$ равен $|e_k|^2 - \sum\limits_{i=1}^{n}\langle e_k, f_i\rangle^2 = 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} f_{ik}^2$, откуда $\sum\limits_{k=1}^{N} d^2(e_k, L_n, \mathbb{E}^N) = N - n$, ибо $\sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{i-1}^{n} f_{ik}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |f_i|^2 = n$. Воспользовавшись теперь тем, что уклонение октаэдра $\mathcal{O}^N$ от L_n равно расстоянию от L_n до максимально удалённой от L_n вершины октаэдра, получаем оценку снизу Колмогорова–Петрова–Смирнова–Стечкина:

$$d(\mathcal{O}^N, L_n, \mathbb{E}^N) = \max_{1\le k\le N} d(e_k, L_n, \mathbb{E}^N) \ge \tfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} d^2(e_k, L_n, \mathbb{E}^N) = \tfrac{N-n}{N},$$

причём этим доказано также, что если существует подпространство $\widehat{L}_n$ равноудалённое от вершин, то его уклонение от $\mathcal{O}^N$ равно $\frac{N-n}{N}$, т. е. оно является экстремальным в задаче.

3. Идея доказательства существования подпространства равноудалённого от вершин правильного октаэдра, состоящая в построении инвариантного подпространства той же размерности

Для доказательства существования подпространства равноудалённого от вершин октаэдра Исмагилов идёт отличным от Мальцева путём.

Рассмотрим следующее ортогональное преобразование A пространства $\mathbb{E}^N$ в себя: $Ae_k = e_{k+1}$, $1 \le k \le N-1$, $Ae_N = e_1$. У него есть заведомо одно одномерное инвариантное подпространство $L_1 = \mathrm{span}(e_1 + \ldots + e_N)$, и некоторое число двумерных. Легко понять, что из них возможно набрать инвариантное подпространство $\widehat{L}_n$ размерности $n < N$. Обозначим теперь через P оператор ортогонального проектирования на $\widehat{L}_n$, а через η_i — вектор $A^{-1}Pe_i$. Тогда: $d(e_i, \widehat{L}_n, \mathbb{E}^N) \overset{\mathrm{def}}{=} |e_i - Pe_i| \overset{\mathrm{def}}{=} |Ae_{i-1} - A(A^{-1})Pe_i| = |e_{i-1} - \eta_i| \ge \inf\limits_{\eta\in\widehat{L}_n} |e_{i-1} - \eta| \overset{\mathrm{def}}{=} d(e_{i-1}, \widehat{L}_n, \mathbb{E}^N)$. Продолжая это рассуждение дальше, приходим к тому, что пространство $\widehat{L}_n$ равноудалено от всех вершин октаэдра, что и приводит к формуле Стечкина.

4. Вычисление поперечников классов $W_1^r(\mathbb{T})$ в $L_2(\mathbb{T})$

Через $W_p^r(\mathbb{T})$, $r \in \mathbb{N}$, $p \ge 1$, где $\mathbb{T}$ — это одномерный тор, который реализуется как отрезок $[-\pi, \pi]$, у которого точки $\pm\pi$ идентифицированы, обозначают соболевский класс 2π-периодических функций $x(\cdot)$, у которых $(r-1)$-ая производная абсолютно-непрерывна, а r-ая производная удовлетворяет неравенству $\int\limits_{\mathbb{T}} |x^{(r)}(t)|^p dt \le 1$. Функции $x(\cdot)$ из класса $W_p^r(\mathbb{T})$ представимы в виде свёртки: $x(t) = c + B_r * h(\cdot)$, где $B_r(\cdot)$ — ядро Бернулли, которое имеет следующий ряд Фурье: $B_r(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} k^r \cos(kt - \frac{\pi r}{2})$, а $\|h(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T})} \le 1$.

В первой работе А. Н. Колмогорова [1] были вычислены поперечники класса $W_2^r(\mathbb{T})$

в пространстве $L_2(\mathbb{T})$. Если перейти к рядам Фурье, то оказывается, что класс $W_2^r(\mathbb{T})$ изометрически вкладывается в пространство l_2, как ортогональная сумма $\mathbb{R} \oplus \mathcal{E}_r(l_2)$, где $\mathcal{E}_r(l_2) = \{x \in l_2 \mid \sum_{k\in\mathbb{N}} k^{2r}(x_{2k-1}^2 + x_{2k}^2) \le 1\}$. Мы видим, что это бесконечномерное обобщение эллипсоида $\mathcal{E}_a(\mathbb{E}^3)$. Нетрудно доказывается, что среди экстремальных подпространств для колмогоровских поперечников этого эллипсоида имеются пространства, натянутые на первые n его осей: $d_0(W_2^r(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T})) = \infty$, $d_{2n-1}(W_2^r(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T})) = d_{2n}(W_2^r(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T})) = n^{-r}$.

Класс $W_1^r(\mathbb{T})$, как нетрудно понять, можно чуть расширить так, что он будет всюду плотно лежать в расширенном классе. Этим расширенным классом является класс $\widetilde{W}_1^r(\mathbb{T})$, состоящий из функций $x(\cdot) = c + B_r * h(\cdot)$, где $h(\cdot)$ — функция ограниченной вариации, вариация которой не превосходит единицы. При этом оказывается, что вновь построенный класс является обобщением октаэдра $\mathcal{O}^3$: роль единичного вектора e_1 в $\mathbb{E}^3$ играет в $L_2(\mathbb{T})$ функция $B_r(\cdot)$, а роль преобразования $Ae_k = e_{k+1}$, $1 \le k \le N-1$, $Ae_N = e_1$ исполняет сдвиг: $\tau \mapsto B_r(\cdot - \tau)$. И для вычисления бесконечномерного аналога октаэдра $\mathcal{O}^3$ возможно применить те же идеи усреднения и инвариантности, которые привели к вычислению поперечников этого октаэдра. Инвариантные пространства здесь напрашиваются: это пространства тригонометрических полиномов $\mathcal{T}_m = \operatorname{span}\{\cos k\cdot, \sin k\cdot,\ 0 \le k \le m\}$. Приближение функции $x(\cdot)$ из класса $\widetilde{W}_1^r(\mathbb{T})$ тригонометрическими полиномами степени $n-1$ осуществляется с помощью тригонометрического полинома $y_{n-1}(\cdot, x(\cdot))$, определяемого с помощью свёртки $dx^{r-1}(\cdot)$ с $B_{rn-1}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} k^r \cos(kt - \frac{\pi r}{2})$. Расстояние от $x(\cdot)$ до $y_{n-1}(\cdot, x(\cdot))$ легко подсчитывается, и оказывается равным $d_{nr} = (\sum\limits_{k\ge n} k^{-2r})^{1/2}$, откуда приходим к оценке сверху: $d_{2n-1}(W_1^r(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T})) \le d_{nr}$. Оценка снизу получается методом усреднения аналогично тому, как это было проделано с октаэдром $\mathcal{O}^3$. В итоге приходим к следующим формулам: $d_{2n-1}(W_1^r(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T})) = d_{2n}(W_1^r(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T})) = (\sum\limits_{k\ge n} k^{-2r})^{1/2}$. Этот результат был фактически доказан в [6], где получены ещё некоторые важные результаты, в частности, получена слабая асимптотика для величин $d_n(W_p^r(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T})$ для $1 \le p \le 2$. Оказалось, что в этих случаях $d_n(W_p^r(\mathbb{T}), L_2(\mathbb{T}) \asymp n^{-(r-(1/p-1/2))}$, причём нужную оценку сверху дают тригонометрические полиномы.

Основной работой Р. С. Исмагилова, среди посвящённых поперечникам, является работа [7]. Выделим несколько идей и результатов, получивших освещение в этой работе и оказавших большое воздействие на развитие всей тематики.

5. Введение и изучение абсолютных поперечников

В обозначении $d_n(C, X)$ поперечника по Колмогорову множества C, расположенного в нормированном пространстве X, присутствуют оба аргумента: и C и X, поскольку, как было замечено в [5], поперечник по Колмогорову может уменьшаться при изометрическом вложении множества C в объемлющее X нормированное пространство $\widetilde{X}$ (в отличие от поперечника по Урысону, который определяется лишь метрикой самого множества C). Р. С. Исмагилов в статье [7] ввёл понятие *абсолютного поперечника.* Абсолютным поперечником по Колмогорову $D_n(C)$ он назвал нижнюю грань всех поперечников $d_n(iC, \widetilde{X})$ образов iC множества C, взятую по всем изометрическим расширениям $(\widetilde{X}, i)$ пространства X.

Введя некое *универсальное расширение* $\widehat{i}$ в определённое им универсальное пространство $\widehat{X}$, Исмагилов получил формулу $D_n(C) = d_n(\widehat{i}C, \widehat{X})$ и ещё ряд аналогичных формул для других поперечников. Причём по отношению к одному из поперечников (а именно — линейному поперечнику) применение теории двойственности в выпуклом анализе позволили доказать, что абсолютный линейный поперечник оказался равным другому известному поперечнику, а именно, гельфандовскому поперечнику.

Между урысоновским и колмогоровским поперечниками был введён П. С. Александровым поперечник $a_n(C, X)$, получивший название *александровского поперечника.* Он определяется для компакта C, расположенного в метрическом пространстве X сходно с колмогоровским, как нижняя грань по всем n-мерным компактам супремумов по точкам из C расстояний от точки из C до её образа в n-мерном компакте. После введения Исмагловым понятия абсолютного поперечника автору этой статьи стало любопытно, чему равен абсолютный поперечник для александровского. Он оказался равным половине урысоновского!

6. Радикальный сдвиг в проблематике асимптотики соболевских классов $W_p^r(\mathbb{T})$ в $L_q(\mathbb{T})$ при $p \le q,\ q \le 2$.

Нетрудно доказывается, что уклонение $d(W_p^r(\mathbb{T}), \mathcal{T}_n, L_q(\mathbb{T}))$ класса Соболева от пространств тригонометрических полиномов слабо (по n) эквивалентно $n^{-(r-(1/p-1/q)_+}$. Довольно быстро было доказано, что приближение пространствами тригонометрических полиномов даёт правильный порядок убывания колмогоровского поперечника при $q \le p$. Как было указано выше, и в случае, когда $1 \le p \le 2$, а $q = 2$ тригонометрические полиномы снова дают правильный порядок убывания. Многие были уверены, что так будет всегда, пусть только кто-то сосредоточится и докажет, что $d_n(W_p^r(\mathbb{T}), L_q(\mathbb{T})) \asymp n^{-(r-(1/p-1/q)_+}$. И через некоторое время ожиданий стало известно, что такая формула доказана, и никто не торопился её проверять. Но Р. С. Исмагилов не поверил в правильность такой формулы. Он доказал, что эта формула действительно верна при $p \le q \le 2$, но встречаются случаи, когда это не так. Это был прорыв в хорошо построенной крепостной стене. В этой стене образовалась брешь, и этой задачей стали заниматься многие замечательные исследователи. Для достижения цели Исмагилов применил совершенно неожиданные для всех, кто занимался этими задачами методы из совершенно других областей. При этом оказалось, в частности, что линейная оболочка n тригонометрических мономов, расположенных не подряд, дают лучшее приближение, чем пространство $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов степени n. Это привело к новому понятию *тригонометрического поперечника*, сыгравшего большую роль в дальнейшем. Полностью задача о поперечниках соболевских классах не решена и поныне, но её решение при $1 < q \le p < \infty$, принадлежащее Б. С. Кашину, составляет одну из ключевых работ этого замечательного математика. Дальнейшее развитие работ Р. С. Исмагилова и Б. С. Кашина связано с именами Белинского, Галеева, Глускина, Куланина, Майорова, Темлякова и других.

7. Заключительные замечания. После работы [7] тематике поперечников Р. С. Исмагилов посвятил ещё несколько работ. В центральной печати это три работы [8]-[10]. Две из них написаны совместно с учениками, и в них методы, разработанные в

[6] применяются к сходным интересным задачам, третья, как мне кажется, ещё ждёт своего осмысления.

Работы Р. С. Исмагилова по поперечникам, бывшие лишь эпизодом в его многогранном творчестве, свидетельствуют о нём, как выдающемся исследователе, преданном науке и способном преодолевать большие трудности, обогащать математику новыми идеями и методами.

Список литературы

[1] Колмогоров А. Н. О наилучшем приближении функций заданного функционального класса (перевод статьи из Ann.Math., 1936, vol. 37, p. 107–110). Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика. М. Наука, 1985, стр. 186–189

[2] Колмогоров А. Н., Петров А. А., Смирнов Ю. М. Одна формула Гаусса по теории метода наименьших квадратов. Изв. АН СССР, сер. мат., 1947, т. 11, с. 561–566

[3] Стечкин С. Б. О наилучшем приближении заданных клас сов любыми полиномами. УМН, 1954, т. 9, вып. 1, с. 133–134

[4] Мальцев А. И. Замечаие к работе А. Н. Колмогорова , А. А. Петрова, Ю. М. Смирнова «Одна формула Гаусса по теории метода наименьших квадратов». Изв. АН СССР, сер. мат., 1947, т. 11, с. 587–588

[5] Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функционально м пространстве итеория наилучших приближений. УМН, 15, № 3, 1960, 81–120

[6] Р. С. Исмагилов. Об n-мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве. Функц. анализ и его прил., 2:2 (1968), 32–39

[7] Р. С. Исмагилов. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами. УМН, 29:3(177) (1974), 161–178

[8] Р. С. Исмагилов, Х. Насырова. О поперечниках класса гладких функций в пространстве L_2. Матем. заметки, 22:5 (1977), 671–678

[9] Р. С. Исмагилов. Минимальные поперечники метрических пространств. Функц. анализ и его прил., 33:4 (1999), 38–49

[10] Р. С. Исмагилов, К. В. Усков. Об асимптотике n-поперечников спирали Винера в комплексном гильбертовом пространстве. Матем. заметки, 89:5 (2011), 686–693