ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

С. ЯНОВСКАЯ

Проблема учебника математики для втузов еще не решена

М. Я. ВЫГОДСКИЙ. Основы исчисления бесконечно-малых. ГТТИ, 2-е изд., 1932 г., 456 стр., ц. 4 р. 25 к., переплет 75 к.

Большинство распространенных в настоящее время (особенно за пределами СССР) учебников по математике для высшей школы принадлежит к одному из двух типов: это либо весьма формальные, абстрактные, оторванные от практики учебники, претендующие однако на высокую научность, а фактически нередко отстающие от современных научных направлений (по разбираемым вопросам) примерно лет на пятьдесят, либо вульгаризирующие, ползуче-эмпирические, сознательно пренебрегающие теорией и проповедующие голый практицизм, подчас переходящий в простую рецептуру. Из первых можно упомянуть например учебник Бибербаха [1].

Из вторых — учебник Гедера [2].

Пробным камнем, разделяющим при этом учебники по этим двум категориям, служит обычно отношение их к двум основным понятиям диференциального исчисления — производной и диференциалу. Исторически, как это видно уже из самого названия (диференциальное исчисление), основным понятием, с которого сразу же начиналось новое, отличное от элементарной математики диференциальное исчисление, было понятие диференциала. Производная рассматривалась как нечто вторичное, производное от него, именно, как отношение или частное двух диференциалов (и лишь в такой форме и употреблялась). Однако обоснование этого нового, специфического для диференциального исчисления понятия диференциала представило огромные трудности, которые не сняты по существу и до настоящего времени (вряд ли существует такой математик, которому не было бы памятно глубокое чувство искусственности, охватившее его при первом ознакомлении с современным определением диференциала), и с которыми математика эпохи Ньютона и Лейбница пыталась справиться при помощи мистических, метафизических, внематематических рассуждений, призванных обосновать не выдерживающее с научной точки зрения критики понятие диференциала как актуально бесконечно-малой величины. Лагранж первый сделал попытку обосновать анализ на понятии не диференциала, а производной, которую в свою очередь старался обосновать чисто алгебраически. Однако он ударился в противоположную крайность и хотел вообще изгнать диференциал из математики, превративши диференциальное исчисление в исчисление производных и жертвуя всеми оперативными преимуществами, которые приносит с собой употребление выражений именно в диференциалах. Современная математика, начиная с Коши, рассматривает диференциал как производное понятие от производной; пытается однако не столько вывести, развить его (диалектически) как необходимое звено в развертывании математической теории, сколько непосредственно свести к понятию производной. Наиболее последовательные и чистые представители этой современной точки зрения, к которым принадлежит и Бибербах, не останавливаются поэтому перед полным изгнанием понятия диференциала из учебника по диференциальному исчислению. Наоборот, учебники типа Гедера, который считает, что математическая теория нужна только ученым математикам, ею занимающимся, не смущаются трактовкою диференциала в стиле Ньютона и Лейбница (т. е. как актуально бесконечно-малых величин), покупая этою ценою возможность сразу, с самого начала пользоваться всеми оперативными преимуществами, доставляемыми употреблением этого понятия.

Можно смело утверждать, что у нас в СССР положение с учебником по математике, особенно для втузов, не хуже, а лучше, чем на Западе. Большевики ценят теорию не меньше, а значительно больше, чем представители буржуазной науки. Но — лишь действительно научную теорию, т. е. такую, которая связана с практикой в органическое единство. Ибо только «теория может дать движению уверенность, силу ориентировки и понимание внутренней связи окружающих событий» (Сталин). Поэтому у нас, особенно за последние годы, появилось довольно значительное количество учебников по математике, которые совершенно сознательно ставят себе задачей достижение этого органического единства теории и практики, сначала либо путем внесения (часто весьма большого, как например у Фихтенгольца) числа технических, физических или механических (вообще конкретных) задач в учебники в основном первого типа или путем придания большей теоретичности учебникам второго (переработка например Лузиным учебника Грэнвиля, Каганом — учебника Филиппса), а затем и путем создания новых, специально для наших втузов приспособленных учебников, прокладывающих новые пути в методах преподавания математики и содержащих богатый фактический материал из области техники и естествознания. Эти учебники ставят себе целью обучить учащегося уменью не только диференцировать и интегрировать, но и прилагать свои знания на практике социалистического строительства, требующей высокого уровня теоретической подготовки.

Правда, при этом не обходится без ошибок. Однако, повторяю, мы имеем теперь все основания сказать, что у нас есть уже немало учебников по математике для высшей школы, превосходящих лучшие европейские и американские образцы.

И все же это не дает еще нам права успокоиться и считать проблему учебника по математике решенной, ибо, как мы увидим в дальнейшем на основе разбора одного из наиболее свежих, оригинальных и лучших учебников этой категории, нам предстоит еще немало борьбы и работы над подлинным ее решением.

Учебник Выгодского — во всяком случае наиболее оригинальный, быть может и наилучший из всех. Автор прямо ставит себе целью достижение единства теории и практики, причем считает необходимым давать с этой целью основные понятия анализа в их развитии. Он хочет преодолеть идеализм и формализм современного, претендующего на научность, буржуазного учебника по математике, от которых далеко еще не свободны и распространенные у нас руководства. Его учебник написан легко и просто. В нем широко использован исторический материал. Он не засушен академическою формою изложения, — автор не брезгует и полемическими приемами. В нем имеется большое число обстоятельно и интересно разобранных задач из области применений к механике, физике и химии, задач, которые не внешне пристегнуты к учебнику, а на которых непосредственно излагается теория. Автор не держит учащегося на вводной части, весьма подробно и формально излагающей вещи, насчет которых учащемуся не сообщается, почему они приведены и как они могут ему понадобиться. Он непосредственно приступает к делу выяснения процессов интегрирования. Учебник имеет еще и другие достоинства и преимущества, о которых речь впереди и которые однако не устраняют того обстоятельства, что наряду со всеми крупными его достоинствами он не лишен и весьма существенных недостатков, мимо которых пройти невозможно.

Автор стоит на той точке зрения, что между учебником и научным трудом существует принципиальная разница, настолько большая, что ею даже может быть оправдана в отдельных случаях (к каковым он относит в частности вопрос о преподавании математики) пропаганда в учебнике положительно неправильных с научной точки зрения методов. Приведя мнение Маркса, что «правильным в научном отношении» является путь восхождения от простейшего («тощих абстракций») к целому как «к богатой совокупности, с многочисленными определениями и отношениями», автор спрашивает: «Но будет ли правильным строить начальный учебник так, как строится научный труд? И не будет ли тогда казаться учащемуся, что общие понятия и отношения науки свалились с неба?» По его мнению, «вопрос этот нужно решать для каждой отдельной дисциплины».

[1] Л. Бибербах. Диференциальное и интегральное исчисление, ч. I и II.

[2] Dr. Walter Haeder, Ung «Des Technikers höhere Matematik», 2-е изд. Берлин, 1928 г.

Свой отрицательный ответ на него в отношении математики он мотивирует тем обстоятельством, что «вследствие специфического характера математики» от ее «наиболее тощих абстракций» до ее конкретизации «с многочисленными определениями и отношениями» ведет длинный путь, на котором легко теряется перспектива движения; по этому пути гораздо легче пойти после того, как вскрыты те реальные отношения, из которых заимствованы основные понятия высшей математики. А эти реальные отношения вскрываются как раз в той классической форме, в которой диференциал рассматривается как ничтожно малое изменение величины (а не как главная часть проращения функции)»[1]. Поэтому, хотя автору известно, что Маркс считал диференциальный метод Ньютона и Лейбница мистическим[2], хотя он сам приводит то место из письма Энгельса Марксу, где Энгельс характеризует (вслед за Марксом и по поводу математических работ последнего) «обычный метод с опущением dx, dy и т. д.» как *положительно неправильный* и считает окончательное доказательство его неправильности заслугой Маркса[3], он полагает однако, что в учебнике по математике нужно излагать сначала именно этот положительно неправильный метод. И притом излагать не только (и не столько) для критического разбора, но и ради его самого. Ибо у Маркса, мол, речь идет не об учебнике, а «о том, каким является диференциал в научной системе, восходящей от простейших абстракций к богатой конкретной совокупности».

Наконец для окончательного убеждения читателя автор приводит пример из области физики, где, несмотря на то, что обычное представление о прямолинейном распространении света «положительно неправильно», «тем не менее мы знакомимся со световыми явлениями, начиная с представления о прямолинейном распространении света».

Последний аргумент основан конечно на явном недоразумении. Ибо обычное представление о прямолинейном распространении света не *положительно неправильно*, а *лишь приближенно правильно*. И притом с настолько большой степенью точности, что при решении весьма большого круга задач свет *нужно* считать распространяющимся прямолинейно. Иначе действительность будет отражена неправильно, ибо не будет ухвачено то основное звено, за которое (в каком-нибудь данном, конкретном случае, где *об'ективная* роль отклонений ничтожна) именно и нужно было ухватиться. Наука, которая в *подобном случае* за отклонениями не увидит (в общем и целом, в основном) прямолинейности распространения света, не более правильно отражает материальную действительность, чем человек, который за деревьями не видит леса.

Однако недоразумением является и первый, основной аргумент автора. Ибо т. Выгодский напрасно думает, будто «тощие абстракции», с которых должна, по Марксу, начинаться наука, не отражают реальных отношений материальной действительности, будто к этим отношениям мы вообще приходим лишь в *конце* научного пути. Нет, эти «самые тощие абстракции» представляют собою «самое простое, обычное, основное, самое массовидное, самое обыденное, миллиарды раз встречающееся» (Ленин). Конкретизация же состоит не в том, что мы от нереальных отношений идем к реальным, а в том, что от этого простейшего, неразвитого мы идем к сложному, развитому, «вскрывая в этом простейшем явлении (в этой «клеточке»...) все противоречия (resp. зародыш *всех* противоречий)» сложного целого. «Дальнейшее изложение (речь идет о «Капитале» Маркса.—*С. Я.*) показывает нам развитие (и рост и движение) этих противоречий и этого общества (в более общей форме: этого сложного и развитого целого.—*С. Я.*) в сумме его отдельных частей, от его начал до его конца. Таков же должен быть *метод изложения* (resp. *изучения*)[4] диалектики вообще (ибо диалектика буржуазного общества у Маркса есть лишь частный случай диалектики). Начать с самого простого, обычного, массовидного etc. (Ленин, «К вопросу о диалектике»).

Бесспорно, что такого диалектического построения математики мы еще не имеем. Бесспорно, что в современном анализе есть много весьма искусственных построений, обусловленных идеалистической и метафизической методологической установкой. Но тем не менее бесспорно и то обстоятельство, что современные методы в отличие от методов Ньютона и Лейбница математически правильны и что эта правильность достигнута не за счет отхода от материальной действительности, а в основном все же за счет приближения к ней, за счет более адэкватного отображения того движения, изменения вообще, количественную сторону которого изучает высшая математика (называемая так в отличие от элементарной, в основном имеющей дело с неподвижными об'ектами). Более того, «тощие абстракции» *переменной величины и функции*, с которых она при этом начинает, по существу отражают те «самые простые, обычные, основные, самые массовидные, самые обыденные, миллиарды раз встречающиеся» реальные отношения, с которых должна, по Ленину, начинаться наука и которые «в классической форме» лейбницевского исчисления бесконечно-малых не вскрываются, а, наоборот, замаскировываются.

[1] Предисловие ко 2-му изд., стр. 7.

[2] В письме к Энгельсу от 22 ноября 1882 г. К. Маркс и Ф. Энгельс, сочинения, т. XXIV стр. 590.

[3] В письме Марксу от 17 августа 1881 г. Там же, стр. 531. Слова «положительно неправилен» подчеркнуты Энгельсом.

[4] Подчеркнуто мною.— С. Я.

И если Энгельсу удается вскрыть материальные корни, зерно, частицу истины даже за отражающей действительность лишь в искаженной мистическими и метафизическими соображениями форме установкой Ньютона и Лейбница, то тем более должны быть вскрыты эти корни за современной, более правильной, а потому и более, а не менее действенной математической установкой. Правда, и они завуалированы господствующими в современной математике идеализмом и метафизикой. Но из этого еще не следует, что от современной математики мы должны итти назад к Ньютону и Лейбницу. Не следует, что нужно сочинять такую принципиальную разницу между учебником и научным трудом, которая делает возможной пропаганду в учебнике *положительно неправильных* с научной точки зрения методов. Перед автором (как и перед всеми советскими преподавателями математики) должна быть поставлена задача—в пределах необходимого для будущего инженера материала, в живой и доступной форме, с постепенным усложнением задач и методов (ролью этих и им подобных методических требований и отличается учебник от научного труда) изложить *научно-правильную* точку зрения. Притом изложить так, чтобы учащемуся были ясны те связи с практикой и материальной действительностью, которые в современном буржуазном учебнике подменяются часто весьма искусственными, формальными и условными построениями.

Разберем подробно несколько принципиально важных моментов, отраженных в учебнике т. Выгодского.

В отличие от большинства распространенных у нас руководств книга т. Выгодского начинается не с диференциального, а с интегрального исчисления. Некоторые даже думают, будто ею *впервые* практически доказана возможность начинать с процессов интегрирования (хотя в действительности эта возможность по меньшей мере в том же об'еме доказана уже учебником Куранта).

Начавши с проблем, приводящих к интегралам, т. Выгодский начал собственно даже не с той исторической ступени, на которой находились Ньютон и Лейбниц, а с еще более раннего периода. Ибо у Ньютона и Лейбница был, хотя и исходящий из неправильных, мистических и метафизических предпосылок, но все же *метод* диференциального и интегрального исчисления, исходный пункт которых лежал не в интегральном, а в диференциальном исчислении.

Первые же главы учебника т. Выгодского содержат не метод интегрального исчисления, а вычисление интегралов степенной функции (для целого, дробного и отрицательного показателя), основанное на ряде искусственных приемов и уловок. Из того, что мы имеем в настоящее время все основания полагать, что *начало методов* диференциального и интегрального исчислений лежит именно в диференциальном, еще не следует конечно, что нельзя (с целью открыть учащемуся некоторую перспективу на предмет, которым ему придется заниматься) начинать учебник непосредственно с решения задач, приводящих к интегралам, хотя бы для этого и приходилось прибегать к каким-нибудь искусственным уловкам и приемам.

Но это нужно сделать так, чтобы не создавать у учащегося никаких иллюзий, будто он начинает с *интегрального исчисления*, хотя не знает еще диференциального. Поэтому Курант поступает правильно, не скрывая от студента, усвоившего материал, совпадающий примерно с содержанием двух первых глав учебника т. Выгодского, что он собственно далек еще от владения *методом* интегрального исчисления и лишь умеет вычислить с помощью ряда искусственных приемов несколько отдельных интегралов. «Почти в каждом из рассмотренных примеров,—пишет Курант, — нам приходилось при решении прибегать к какому-нибудь особому соображению или специальной уловке. Существенным пунктом методов дифенциального и интегрального исчислений как раз является то, что вместо таких специальных уловок выступают соображения общего характера, обязательно приводящие к требуемым результатам. Чтобы притти к этим методам, мы должны обратиться ко второму основному понятию анализа — к понятию производной» (стр. 75).

Наоборот, т. Выгодский сделал все, чтобы представить дело так, будто он дает в руки учащемуся действительно общий метод решения задач техники, естествознания и общественных наук. И притом метод особенный—логически, правда, «грубый» (по словам Выгодского) и несовершенный, зато практически чрезвычайно ценный, наглядный, простой и для накопления фактического материала даже незаменимый — метод (актуально) бесконечных величин.

Между тем, что делает Курант, и тем, что делает т. Выгодский для нахождения интеграла степенной функции, по существу нет никакой разницы. Как тот, так и другой пользуются совершенно одинаковым искусственным приемом (рост абсцисс именно в геометрической прогрессии). Как тот, так и другой находят интеграл методом предельного перехода, предварительно преобразуя для этого сумму конечного числа слагаемых в некоторый одночлен. Однако т. Выгодский старается представить дело так, будто между его методом и методом пределов есть существенная разница. Именно, констатировав например, что дробь $\frac{1}{n}$ «по мере увеличения числа n уменьшается, приближаясь к нулю», он не говорит, как это делается обычно, что пределом дроби $\frac{1}{n}$ при n, безгранично возрастающем, служит 0, а заявляет: «при $n = \infty$ дробь $\frac{1}{n}$ должна равняться нулю:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0».$$

И хотя (на данной ступени по крайней мере) различие это пока лишь чисто словесного порядка, он придает ему огромное принципиальное значение, характеризуя свою формулировку как «смелую идею, оказавшуюся чрезвычайно плодотворной» в руках «математиков XVII в. и—еще раньше—мыслителей античного мира».

Автор впервые останавливается на этом вопросе, разбирая взаимоотношение между площадями двух фигур — криволинейной и апроксимирующей ее прямолинейной ступенчатой, причем опять-таки ведет все рассуждение в обычном стиле метода пределов, констатируя сначала, что последняя площадь дает лишь приближенную величину первой. «Но с увеличением числа n степень приближения увеличивается, и — что особенно важно — увеличивается неограниченно». Любая требуемая степень точности может быть достигнута. «Для этого нужно только взять число n достаточно большим». Однако вместо того, чтобы сказать дальше, что в таком случае криволинейная площадь есть предел последовательности прямолинейных, он предпочитает сформулировать так «основную идею интегрального исчисления»: «Идея эта (пишет автор) может быть выражена следующим образом: если с увеличением числа n точность формулы (выражающей площадь ступенчатой фигуры. — *С. Я.)* неограниченно возрастает, то теоретически точную величину (криволинейной. — *С. Я.)* площади формула эта даст в том случае, когда число n будет взято бесконечно большим». «Мы назвали, — пишет он далее, — эту идею смелой потому, что она немедленно порождает ряд возражений против существования бесконечно больших чисел. Но все эти возражения исходят из логической, формальной постановки вопроса. Практически всегда можно взять число n настолько большим, чтобы ступенчатая площадь и площадь (криволинейная.— *С. Я.)* стали практически равными. Но математика издавна заслужила себе славу точной науки: ее не может удовлетворить ссылка на «грубую» практику. И против идеи введения бесконечно больших величин в математику раздались резкие возражения с самого появления этой идеи на свет». Однако «наука должна была пройти через предшествующую стадию накопления материала, а накопить этот материал возможно было лишь теми методами, которыми пользовались математики XVII и XVIII вв. Их рассуждения были конечно несовершенны с формальной стороны, но они обладали, несмотря на это (лучше сказать именно поэтому), большой наглядностью и простотой. Существо всякого дела выясняется лучше всего тогда, когда с основной идеей мы знакомимся в ее общей, по необходимости грубой форме».

Так ли это? И чего на самом деле таким путем достигает автор?

Остановимся на взаимоотношении прямолинейной и криволинейной площади. Как прямое переходит в кривое? Многоугольник в круг например? Современная математика отвечает на вопрос о взаимоотношении кривого и прямого, изучая тот процесс предельного перехода, который при бесконечном увеличении числа сторон многоугольника приводит нас от многоугольника к кругу. Она выясняет не только его отличие от обыкновенного суммирования, но и его сходство с последним. Вскрывает, какие свойства обыкновенного суммирования (вроде например независимости «суммы» от порядка слагаемых) и при каких условиях этом сохраняются. А математика эпохи Ньютона и Лейбница просто снимает этот вопрос, рассматривая окружность непосредственно как многоугольник с бесконечно большим числом бесконечно-малых сторон, которые одновременно и прямые и кривые. Прямые потому, что стороны многоугольника. Кривые потому, что элементы круга. Прямому незачем переходить в кривое, раз оно уже заранее, с самого начала, было тем, во что ему нужно перейти. Но зато теперь, так как для нахождения например периметра многоугольника нужно лишь сложить его стороны, нахождение длины кривой линии сводится к простому, обыкновенному суммированию... только бесконечно большого числа слагаемых. Правда, непосредственно осуществить его т. Выгодский так же не может, как не может и никакой другой математик. Правда, и он тут вынужден прибегать к особым, на этой первой стадии еще весьма искусственным, приемам [1]. Но внимание читателя от них отвлечено. Ему кажется, что проблема решена, что трудности нет. Он может быть и сам применит по аналогии подобный же искусственный прием в сходном случае. Но ему будет казаться, что он владеет общим методом и что суть лишь в том, чтобы быть смелым и суммировать, не обращая внимания на то, конечно или бесконечно то число слагаемых, которое при этом приходится складывать.

Но ведь это значит не выяснить подлинное существо дела, а наоборот, смазать, скрыть его, отвертеться от основного подлежащего выяснению вопроса! Особенно если это «существо» состоит в том, чтобы самому на практике нахождения интегралов пользоваться методом пределов как рабочим методом и получать поэтому совершенно точные результаты, а в учебнике представлять учащемуся дело так, будто он весьма просто просуммировал если не действительно бесконечно большое число слагаемых, то хотя бы «настолько большое, чтобы ступенчатая площадь и площадь (криволинейной фигуры. — *С. Я.)* стали практически равными»! Особенно, если еще к тому же авторитетно уверить читателя, что трудности, связанные со смелой, правда, но зато «простой» и «наглядной» операцией суммирования бесконечно большого числа слагаемых, пустякового характера, только «логические» и «формальные» — практически не играющие никакой роли!

В итоге: плохо не то, что т. Выгодский начал с проблем, приводящих к задаче интегрирования. Плохо то, что под видом выяснения существа дела и раз'яснения читателю некоторого общего метода, отличного от метода пределов, автор скрыл от него те трудности, которые связаны с задачей суммирования бесконечно большого числа слагаемых, преодолеть которые ему удалось (пока лишь для частной задачи вычисления интеграла степенной функции) посредством некоторого искусственного приема, основанного к тому же на методе пределов. Плохо то, что он выдал при этом настоящие практические, потому и теоретические, трудности за только логические и формальные, вырыв таким образом пропасть между теорией и практикой вместо обещанного им в предисловии органического их единства.

Как уже было отмечено, первые главы учебника т. Выгодского в теоретической своей части не содержат еще методов интегрирования по Ньютону и Лейбницу (ибо и последние предполагают уже диференциальное исчисление). Методом (актуально) бесконечных автор в действительности пользуется в этих главах лишь там, где речь идет о решении конкретных задач, т. е. не о непосредственном вычислении некоторой «суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых», а о приведении одной такой «суммы» к некоторой другой, предварительно автором уже найденной (к

[1] Исторически действительно имевшим место на заре развития диференциального и интегрального исчислений.

интегралу степенной функции). Если слагаемые двух таких «сумм» различаются на бесконечно малые высших порядков, то (в пределе) эти суммы равны. Но исследование порядка малости предполагает методы теории пределов (и диференциальное исчисление). На данной ступени такое исследование (в большинстве случаев) еще не может быть проведено, и автор от него отказывается.

Однако вместо того, чтобы хотя намекнуть учащемуся на то, что приведенное решение *недостаточно* не только с «логической», «формальной» точки зрения, но и по существу, так как покоится на *недоказанной предпосылке* о высшем порядке малости отбрасываемых бесконечно малых, автор возводит и этот свой недостаток в добродетель. Особенно показательным в этом отношении является параграф о бесконечно тонкой полоске, где автор пытается соображениями философского порядка, по внешности опять-таки весьма материалистически звучащими (ибо он толкует о практике и соответствии математических абстракций действительности), обосновать *неверное* даже с точки зрения Ньютона и Лейбница положение о том, будто можно отвлечься от роста ординаты, не отвлекаясь одновременно от роста абсциссы [1], хотя это — бесконечно малые одного и того же порядка. Не служит ли допущенная автором ошибка лучшим показателем того, какие опасности кроются в некритическом применении методов Ньютона и Лейбница?

Нельзя не обратить внимание читателя (и автора) на рубрику о «преимуществах классической концепции интеграла» [2], где в доказательство того, что методы, основанные на теории пределов, «служат по преимуществу целям *оформления* полученных результатов, а не средством их получения», автор разбирает вопрос о геометрическом значении суммы $\Sigma 2\pi r_i (r_{i+1} - r_i)$ при n — конечном («n—не бесконечно большое число!») и обнаруживает, что в *таком случае* каждое ее слагаемое представляет площадь меньшую, чем площадь концентрического кольца окружности радиуса ri и толщины $r_{i+1} - r_i$, но «которую нелегко однако выделить из площади кольца». Трудность, подмеченная автором, действительно существует. Но она не перестанет существовать и в том случае, если мы «для сокращения» переименуем $r_{i+1} - r_i$ и об'явим число n бесконечно большим. К ней только прибавится новая трудность. Ибо обе площади — и площадь кольца и меньшая ее — вообще исчезнут. Автор «не боится» того, что бесконечно малое и нуль и не нуль одновременно (это ведь — «только логическая» трудность!). Но поскольку бесконечно малое rdr—нуль, никакая сумма, даже бесконечно большого их числа, не дает ничего кроме того же нуля; поскольку же оно не нуль, постольку (пока dr лишь сокращенное бесконечное для $r_{i+1} - r_i$) оно меньше площади соответствующего кольца— и констатированная автором трудность не снимается. Ее разрешает в действительности только теория пределов, средствами которой действительно удается доказать, что пределом отношения обеих площадей служит единица, т.-е. что разность между ними есть бесконечно малая высшего порядка, которой лишь поэтому автору и можно было пренебречь. Теория пределов тут не только оформляет, но и выясняет, когда и почему исходящие из ложных или недоказанных предпосылок «классические» методы могут давать правильные результаты, но и разрешает те трудности, от которых метод бесконечно малых может только отмахнуться. Неужели же для того, чтобы лучше выяснить *существо дела*, нужно сделать вид, что для метода бесконечно малых этих трудностей вообще нет? И неужели в слепоте этого метода к трудностям определенного рода можно видеть действительное его преимущество?

Автор совершенно прав, утверждая, что «органическая связь теории с практикой может быть достигнута лишь тогда, когда основные понятия теории даются не в их готовом виде, не в их застывшем бытии, а в их *развитии*», что для того, чтобы сознательно отнестись к современным научным методам, нужно знать, против кого они направлены, что именно в старых *неправильных* методах они исправляют. Однако он неправ, полагая, что если сначала убедить читателя в практической полезности, простоте, наглядности и законности в качестве математических абстракций актуально-бесконечно-малых, а затем, обнаружив в последних «формальные» противоречия, «очистить» вообще анализ от бесконечно-малого, то это и будет означать «давать основные понятия анализа в их развитии». И он неправ, думая, что, подменив серьезный критический разбор *положительно неправильных* методов Ньютона и Лейбница пропагандою «преимуществ «классической» концепции», он действительно демонстрирует студенту «границы применимости этих старых методов» и учит его «сознательному отношению к применению новых методов». Поэтому он неправ, называя свою установку «правильной с точки зрения методологии марксизма-ленинизма».

В действительности для диференциального метода Ньютона и Лейбница характерно именно то обстоятельство, что они не умели дать основное понятие диференциального исчисления — понятие *диференциала* — *в его развитии*, в котором оно выступает как производное от производной функции, в свою очередь произведенной в результате действительного (Δx, а не бесконечно малого — dx) изменения переменной величины *внутри* функции и его последующего «снятия» [1] (которое современная математика осуществляет в форме предельного перехода по Δx к нулю). Поэтому Ньютон и Лейбниц вводили — первый свои *моменты*, второй — *диференции* или *диференциалы* — как настоящие мистические сущности, существующие наряду с переменными величинами до каких бы то ни было процессов изменения, происходящих с ними. Эти сущности появлялись *сразу*, *с самого начала* в совершенно готовом виде, подобно Афине из головы Зевса, — отнюдь не в развитии, а как свалившиеся с неба; бесконечно далекие от элементарной математики, особые «мистические» существования и сущности, новые «качества» вроде энтелехии виталистов, которые не развиваются из старых, а заранее, до всякого развития и независимо от него, существуют *наряду* со старыми. Они «разрешали» противоречие между прямым и кривым, будучи, с одной стороны, прямыми, с другой—кривыми. Между движением и покоем, будучи, с одной стороны, изменением, бесконечно малой разностью отличной от нуля, с другой—покоем, нулем,—разностью, которая есть одновременно и неразность, тем и другим — *сразу*, *заранее*, *с самого начала*, без какого бы то ни было *перехода*, *превращения* одной из этих противоположностей в другую. Они служили таким образом по существу для *механического сведения* кривого к прямому, движения—к покою, всякого изменения вообще — к совокупности состояний.

В действительности между покоем и движением есть связь, переход, превращение одного из них в другое. Поэтому и в отражающей эту действительность математической теории должна быть связь, переход, единство развития между элементарной и высшей математикой. Именно потому, что основные понятия и методы анализа правильно отражают материальную действительность они нуждаются не в особом, чуждом математике метафизическом обосновании и «оправдании», а должны быть правильно *математически* обоснованными. Когда в науку под влиянием практики входят новые понятия и методы, научная теория изменяется, чтобы быть в состоянии охватить их. И единство теории и практики достигается не тогда, когда в науке эти новые понятия и методы выступают лишь неосвоенными ею чужаками, а когда они становятся полноправными гражданами научной теории. Ньютон и Лейбниц не в состоянии еще были это выполнить. Поэтому они вынуждены были ограничиться нематематическим, метафизическим *оправданием* своих методов. Тов. Выгодский *по-своему* пытается сделать то же самое. Но никакие ссылки на практику, никакие заклинания насчет соответствия абстракций действительности (пока они остаются только ссылками и заклинаниями) не могут подменить действительного научного исследования, в результате которого внутренняя логика развития науки, ее цельность и систематичность не будут отброшены или заменены простою *ссылкою* на практику, а предстанут как правильное отражение *внешних*, об'ективных связей материальной действительности, вскрываемых человеком в процессе его *практической деятельности*.

Пропаганда «классических» методов как практически незаменимых, хотя теоретически и несовершенных (несмотря на «соответствие с действительностью», означает не достижение «органической связи теории с практикой», а полный разрыв между ними.

Откуда взял однако т. Выгодский это разделение: для «*души*» — формальная тео-

[1] Выдерживая стиль Лейбница и отождествляя криволинейную полоску с прямолинейной ступенькой, нужно пренебречь не бесконечно-малой dy относительно бесконечно-малой dx, а площадью криволинейного прямоугольного треугольника с катетами dy и dx и элементом кривой в качестве гипотенузы относительно прямоугольника y dx.

[2] Стр. 39-41.

[1] См. письмо Энгельса Марксу от 18 августа 1881 г., Сочинения, т. XXIV, стр. 532.

рия (на практике однако неприменимая), для практики—«закулисная» сторона дела, «тот язык, на котором не гнушались говорить классики математической мысли, тот язык, на котором мыслит физик и инженер, тот язык, употребление которого предпочитают скрывать современные представители теоретической математики»? Дело в том, что он просто поверил современным буржуазным математикам и философам математики, которые вместо поисков преодоления узаконивают и расширяют тот действительный разрыв между теорией и практикой, который (хотя и в меньшей мере, чем для математики эпохи Ньютона и Лейбница) существует и в современной математике. Тем математикам, которые об'явили устами Клейна, что «математика интересует лишь вопрос о внутренней стройности и строгости его дисциплины, вопросом же о приложении к действительности пусть занимаются философы (как будто внутреняя стройность и строгость правильной научной теории может быть чем-нибудь иным, кроме следствия из строгой и стройной об'ективной закономерности материальной действительности!), что физику и технику вообще нельзя даже обращаться с диференциалом иначе, как с куском латуни. Поверивший им т. Выгодский пошел по линии наименьшего сопротивления и решил дать учащемуся анализ в такой форме, чтобы диференциал и в теории (по крайней мере на первой, несовершенной еще ее ступени) был этим же «куском латуни».

Отсюда впечатление «органической связи теории с практикой», которого, как ему кажется, он достигает, давая основные понятия анализа «в их развитии». Однако *то действительное, чего он на таком пути достигает* (кроме извращения подлинного существа дела и мистификации читателя), *состоит раньше всего в изгнании из высшей математики ее основного спецификума — движения*, изменения вообще. Уже первый параграф книги показателен в этом отношении. Из этого параграфа мы узнаем, что интегральное исчисление возникло из той же потребности, которой обязана своим возникновением и элементарная геометрия: из задачи вычисления площадей, поверхностей и об'емов, но уже не простейших только, а произвольных тел и фигур. Это правильно только наполовину, ибо благодаря такой односторонней характеристике остается в тени основная задача высшей математики — изучение количественной стороны движения, изменения вообще и в частности задача интегрирования диференциальных уравнений. Именно эта последняя задача и привела к необходимости создания интегрального исчисления в его аналитической форме, а не просто как некоторого нового вида геометрия вроде геометрии «неделимых» Кавальери.

Но особенно показательно в этом отношении, как т. Выгодский решает задачи. Допустим, мы ищем истинную скорость какого-нибудь (неравномерного) движения. Чтобы найти закон происходящего при этом изменения скорости, мы исследуем сначала *действительное* (конечное) изменение пройденного телом пути за конечный промежуток времени и находим среднюю скорость, как отношение приращения пути к приращению времени. При этом «первоначально выведенная формула $\frac{\triangle}{\triangle x}$ показывает это отношение, как оно происходит в ходе действительного изменения, т. е. в каждом данном изменении». «Но чтобы от отдельного случая прийти к всеобщему отношению, надо, чтобы этот отдельный случай был «снят» как таковой». И вот «окончательно выведенная формула $\frac{dv}{dx}$ показывает его в общей форме, в чистом виде, а потому мы можем прийти от $\frac{dy}{dz}$ к какому угодно $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, тогда как эта последняя формула всегда соответствует лишь отдельному случаю» (Энгельс). Иными словами, чтобы найти «в общей форме», «в чистом виде» закон этого изменения, мы сначала действительно изменяем переменные величины и лишь затем «снимаем» это изменение.

Совсем не так поступает т. Выгодский. «Мы умеем,— говорит он,— находить скорость движения только в том случае, *если она неизменна*. Однако в данном случае она изменяется. Возьмем поэтому *бесконечно малый* путь, «на протяжении которого скорость *можно считать неизменной*»[1], и разделим его на время (бесконечно-малое), потребовавшееся для его прохождения. Именно так решены в учебнике т. Выгодского все задачи: нам нужно изучить некоторую изменяющуюся величину, но мы этого сделать не умеем. Перейдем поэтому в область бесконечно-малых, *где изменений уже нет*, и решим задачу так, как если бы наши изменяющиеся величины не изменялись. То, что мы получим, и есть искомый закон изменения. Никаких *действительных* изменений он не рассматривает, и анализ действительно выступает у него не как математика переменных величин, имеющая своим предметом *количественную* сторону всякого движения, изменения вообще, а как универсальное средство разложения любого изменения в совокупность (неизменных) состояний...

[1] Стр. 234, разрядка наша. — **С. Я.**

* * *

Современные учебники анализа начинают с переменной величины и функции. Рассматривают касательную как предельное положение секущей, а не как секущую и несекущую одновременно. Истинную скорость— как предел средней, а не как скорость равномерного и неравномерного движения одновременно. Производную — как предел отношения конечных разностей, а не как частное двух бесконечно малых, т. е. и конечных и равных нулю разностей. Диференциал — как производное выражение от производной. Интеграл — как предел, а не простую сумму (...только бесконечно большого числа слагаемых). Кривое — как связанное предельным переходом с прямым, а не как и кривое и прямое одновременно. Во всем этом современная математика бесконечно более права по сравнению с математикой эпохи Ньютона и Лейбница.

И однако в учебнике т. Выгодского имеется одно действительное преимущество перед обычным, распространенным у нас в вузе и втузе, руководством. Выяснивши, что диференциал есть производное понятие от производной, современная математика не пошла дальше. Она не столько занялась специальным выяснением роли и функций диференциала (именно диференциала все же, а не производной) в анализе, сколько поставила себе задачу—свести вообще все *диференциальное* исчисление к исчислению производных. И утеряла на этом пути все те преимущества диференциального и интегрального исчислений, которые связаны именно с употреблением диференциала, играющего столь существенную роль в диференциальных уравнениях. Между тем умение решать и особенно *составлять* диференциальное уравнение и есть та часть математических навыков и познаний, которая в первую очередь нужна технику и естествоиспытателю и который, хотя подчас и в мистической форме, обучает учащегося буквально с первых же страниц учебник т. Выгодского. Именно эта задача стояла уже и перед Ньютоном и Лейбницем. Практика требовала ее решения, и она была решена, хотя основа решения — сущность диференциала— и осталась невыясненной (благодаря чему решение и оказалось в дальнейшем таким, которое не только не всегда решает предложенную задачу — даже приближенно,— но иногда решает ее и просто неправильно). Подобно физиократам, о которых говорит Маркс в «Критике политической экономии», они «таким образом обсуждали вопрос в его сложной форме раньше, чем разрешили его в элементарной форме», давая еще один пример того, «каким образом историческое развитие всех наук приводит к их действительной исходной точке только через множество перекрещивающихся и обходных путей. В отличие от других строителей, наука не только строит воздушные замки, но возводит отдельные жилые этажи здания, прежде чем заложен его фундамент». *Преимущество учебника т. Выгодского состоит в том, что он эти жилые этажи действительно возвел и показал их учащемуся.* Между тем как даже содержащие значительно больше материала другие учебники до этих жилых этажей, до действительного уменья составлять и решать диференциальные уравнения, учащегося обычно так и не доводят. И недостаток учебника т. Выгодского скорее даже не в том, что он не подвел под здание фундамента, сколько в том, что он сделал все возможное, чтобы убедить учащегося в том, что такой, логически правда несовершенный, недостаточно тонкий, зато практически прочный, «грубый», удобный (ибо наглядный и простой) фундамент им подведен. Такой подход не зовет учащегося на штурм высот современной науки, а отталкивает его от них как от бесполезных логических «тонкостей». Он льстит ему, апеллируя к скверным чертам его характера, узаконивая леность и ограниченность мысли, убеждая его, что он владеет уже общими методами анализа, когда ему до этого еще очень далеко, суживая его математическую культуру и математический горизонт.

Проблема учебника по математике для высшей школы еще не решена. По обычному формалистическому современному учебнику средний учащийся вообще мало чему выучивается. По учебнику т. Выгодского он действительно научается составлять и решать простейшие диференциальные уравнения. Но научается не потому, что этот учебник построен на актуально бесконечно малом, а потому, что автор широко пользуется диференциалом. Если бы в следующих изданиях автору удалось рассеять тот туман, которым окутан у него диференциал, и действительно вскрыть суть современных, более совершенных математических методов на основе подлинно критического разбора (а не пропаганды) исторически им предшествовавших, его учебник по праву заслужил бы название нового, по существу преодолевшего противоположность между строгим, но формальным, оторванным от практики буржуазным учебником одного сорта и деляческим, эмпирическим, буржуазным же учебником другого сорта. В настоящей же своей форме он содержит в себе элементы того и другого в непреодоленном виде, представляя собой значительно улучшенное, стоящее на гораздо более высокой теоретической ступени, но все же в основном издание учебника типа Гедера например. В настоящей своей форме, несмотря на все свои достоинства и успех, он не может быть признан шагом вперед в деле марксистско-ленинского построения учебника по математике. Ибо «марксист не может удовлетвориться простыми изречениями, он, прежде всего, должен понять явление, если оно в самом деле существует в природе, и об'яснить его для того, чтобы наметить потом действительные меры улучшения» (Сталин).

Те действительные меры улучшения, которые следуют из настоящего критического разбора и некоторые из которых (в результате происходивших дискуссий) уже признаны автором как необходимые при дальнейшем переиздании учебника, могут быть кратко сведены к следующему:

1. Первые две главы книги (занимающие почти четвертую ее часть), посвященные нахождению искусственным приемом интеграла степенной функции, должны быть по крайней мере вдвое сокращены. Автор должен раз'яснить учащемуся, что в них нет еще собственно метода интегрального исчисления, и исправить параграфы об «основной идее интегрального исчисления», «бесконечно тонких полосках», «пределе» и «преимуществах классической концепции интеграла». От того, что некоторые задачи этой части перейдут в дальнейшие главы учебника, они только выиграют, ибо учащийся будет действительно понимать уже, что он имеет дело с задачей на составление и решение диференциального уравнения, что он должен учесть при этом начальные условия и т. п. Больше того, без какого бы то ни было ущерба для понимания и овладения методами диференциального и интегрального исчисления некоторую часть этих задач можно было бы перенести в самостоятельные упражнения для учащегося, ограничившись только краткими к ним указаниями. Освободившееся место следовало бы использовать для таких например «вещей», как строки Тэйлора и Маклорена или методы приближенных вычислений, или даже простейшие случаи решения диференциальных уравнений с неразделенными переменными, без которых, если даже не говорить уже о таких разделах, как номография или тригонометрические ряды, нельзя обойтись почти ни в одном втузе.

2. В значительном исправлении нуждается также IV глава книги, посвященная основным понятиям диференциального исчисления. Точка зрения Ньютона и Лейбница в ней должна быть не только изложена и применена к решению задач и вычислению диференциалов, но и подвергнута серьезному разбору и критике. Современная точка зрения на производную и диференциал должна быть изложена так, чтобы не создавать у учащегося ложного впечатления только искусственности и неприменимости на практике. В соответствии с этим по крайней мере некоторые задачи должны быть действительно решены методом предельного перехода, т. е. начиная рассмотрение не с бесконечно малых неизменных состояний, а с конечных разностей как результата действительно происходящего изменения. Очень желательно было бы также (имея особенно в виду выяснение связи между приближенными вычислениями, играющими основную роль в технике, и точными методами диференциального и интегрального исчислений), не приводя строгого доказательства, раз'яснить все же учащемуся смысл и роль таких основных теорем диференциального и интегрального исчисления, как теоремы о среднем значении.

3. Меньше всего я собираюсь ратовать за превращение учебника для втузов в так называемую «рабочую книгу», создающую у учащегося иллюзию, будто он сам способен заново переоткрыть в 200 или 300 часов обучения пройденный наукою в течение столетий путь, и обреченную, по крайней мере по форме, на мешающую систематичности изложения теории отрывочность и чуть ли не контрабандный характер тех мест, где нельзя обойтись без восприятия материала из уст педагога и где дается последовательное и цельное теоретическое изложение. Однако то слишком полное обречение учащегося лишь на пассивное восприятие весьма тщательно и подробно изложенного в книге материала, которое характерно для учебника т. Выгодского, также не должно быть возведено в идеал. Учебник должен создавать стимулы и для самостоятельной работы учащегося, он должен ставить перед ним доступные на данном уровне вопросы на решение, открывать перспективу на дальнейшее развитие науки и усовершенствование ее методов. В частности, решая даже какой-нибудь вопрос методами Ньютона и Лейбница, нужно дать учащемуся хотя бы намек на те действительные трудности, которые при этом обходятся, чтобы толкнуть его, для примера, на поиски доказательств того, что, отыскивая этими методами диференциал синуса, он действительно отбросил лишь бесконечно малые высших порядков. Такой подход лучше помог бы ему проникнуть в сущность и овладеть методами диференциального и интегрального исчислений (в том числе и «классическими»), чем лишний десяток решенных в книге автором задач.

Не говорю уже о том, что кроме решенных весьма желательно помещение в книге и нерешенных задач.

4. Понятия переменной величины и функции и роль теории пределов, которые недостаточно и неправильно освещены автором, равно как и другие замеченные и самим автором в предисловии ко 2-му изданию существенные «недочеты», должны быть действительно исправлены в дальнейших изданиях, где раньше всего автору следует отказаться от своей манеры обучать не средствами серьезного научного разбора и критики, а путем пропаганды положительно неправильных с научной точки зрения методов, построенной на упрощенчестве и извращении подлинного существа дела.