„Каков смысл издания у нас в СССР в 1932 г. этой книги Листинга, написанной в 1847 г. и толкующей вдобавок о достаточно отвлеченных геометрических образованиях? Разве издательство не находит более насущной темы, могущей быть непосредственно примененной в нашем социалистическом строительстве, чем топология? Разве не известно, что 89% всей территории Урало-Кузнецкого комбината нанесены на карту без съемки и Геодезическое управление предполагало в течение года произвести съемку только 6% незаснятой площади, что дало бы карту комбината только через 15 лет? Разве не исключительно проблемы, подобные последней, должны являться предметом советских геометрических исследований?“

Кто не слышал рассуждений такого рода, таких узколобых толкований лозунга преодоления отставания теории от практики, толкований, насквозь проникнутых делячеством и ползучим эмпиризмом самого низкопробного пошиба? Конечно, отрыв теории от практики все еще у нас громаден, необыкновенны косность и самомнение известной части научных работников, воображающих себя жрецами „чистой“ науки и не желающих перестроиться, перестроить свою науку, связав ее с задачами социалистической промышленности, транспорта, сельского хозяйства и т. д. Но научное делячество, проповедуемое иными мнимыми борцами за социалистическую науку, является лишь другой разновидностью отрыва теории от практики: объективно оно обозначает утверждение монополии в разработке научной теории за буржуазной наукой, отказ от захвата этой важнейшей командной высоты, отказ от перспектив развития, ограничение исключительно задачами сегодняшнего дня.

Разумеется, подобные настроения на замыкание научной мысли в рамки узкого практицизма так же мало имеют общего с политикой партии и советской власти в области науки, как и стремление сохранить старые академические традиции в понимании науки исключительно как „чистого“, т. е. оторванного от практики, теоретизирования. Наряду со всемерным содействием развитию практических, „прикладных“, отраслей естественных и математических наук нам нужна широкая общетеоретическая научно-исследовательская работа, которая дала бы нам не в самотечном, а в плановом порядке результаты, с помощью которых свершился бы подлинный научный переворот. Если мы догоним передовые капиталистические страны экономически и технически тем, что полностью используем буржуазную науку и технику, освоив и перестроив ее, то перегнать технически капиталистический Запад возможно, лишь совершая технический переворот, а последний возможен лишь на основе новой науки, более высокой по своему уровню, чем современная буржуазная наука.

Такую науку может дать только применение к естествознанию и математике метода диалектического материализма. Четверть века назад это положение было развито Лениным и нашло блестящее оправдание в ходе всей истории развития естествознания эпохи империализма и пролетарских революций. В настоящее время, когда буржуазную науку до самых материальных корней потрясает жесточайший кризис, когда она не находит выхода из новых и новых противоречий теории относительности и теории квант, все больше запутывается в „финалистической" биологии и останавливается в тупике своей космогонии конечного мира, когда она все глубже погрязает в идеализме, поповщине, мистицизме,— вопрос об ее реорганизации на основе материалистической диалектики является составной частью борьбы двух систем: СССР и стран капитала.

Вернейший путь для преодоления буржуазной науки диалектическим материализмом состоит в изучении истории развития самой науки методом Маркса — Энгельса — Ленина. Только изучив проблемы естествознания и математики, основные методы и понятия этих наук в их развитии, выявив движущие силы и тенденции этого развития, мы сможем перестроить науку на действительно научных принципах. В этом и состоит громадное практическое значение истории естествознания, не говоря уже о том, что изучение истории естествознания и техники, как на это указывал Ленин, необходимо для дальнейшего развития диалектического материализма как единства мировоззрения и метода.

В свете этих соображений книга Листинга, способная послужить источником могущественных импульсов к дальнейшему развитию геометрии и математики, представляет исключительный интерес; однако, прежде чем осветить эту сторону вопроса, необходимо хотя бы вкратце остановиться на эпохе, породившей замечательную книгу Листинга. Эта эпоха, начало которой можно отнести к 1815 г., была эпохой непрерывного роста богатства, а вместе с ним и политической власти германской буржуазии.

Период интенсивного расширения торговли и роста промышленности был одновременно и периодом бури и натиска германской мысли, нашедшей наиболее тонкое выражение в немецкой философии. Маркс и Энгельс, давая в „Коммунистическом манифесте“ характеристику той в высшей степени революционной роли, которую играла в истории буржуазия, писали: „Менее чем в сто лет своего господства буржуазия создала более могущественные и более грандиозные производительные силы, чем все предшествующие поколения, вместе взятые. Подчинение сил природы, машины, применение химии к земледелию и промышленности, пароходы, железные дороги, электрические телеграфы, распашка целых частей света, приспособление рек для судоходства, целые, как бы из земли выросшие поселения...“ То обстоятельство, что „буржуазия Германии была далеко не такой богатой и сплоченной, как во Франции или в Англии, а также введение пара и быстро расширившееся главенство английской промышленности разрушили старую германскую промышленность. Новая же промышленность, получившая толчок при наполеоновской континентальной системе и развившаяся в других местностях страны, не могла служить компенсацией за потерю старой...“ — все это, отмеченное Марксом и Энгельсом в книге „Революция и контрреволюция в Германии“, имеет, конечно, громадное значение для развития естествознания в Германии в начале XIX в.

Но если Англия и Франция в период буржуазной революции дали своих Дальтонов, Пристли, Кевендишей, Лавуазье, Карно, Лапласов, Монжев, Лебонов, Бертолле, то Германия дала Майеров, Больцманов, Гельмгольцев. Однако вместе с расцветом в Германии естествознания, как отражения „немецкого переложения французской революции“ в области философии, выросла романтическая натурфилософия, опирающаяся на открытие электрических явлений Гальвани и Вольта, на законы химического сродства элементов, вытеснившие теорию флогистона и выведенные из опытов Лавуазье и Кевендиша, на физиологические открытия Галлером раздражимости и чувствительности мускулов и нервов, — натурфилософия, которая в дальнейшем нашла свое завершение в философии Шеллинга.

Шталь усматривал в организмах „anima vegetativa“, особый жизненный „тонус“, Блуменбах — „nisus formativus“, дающий направленность жизненным силам, Э. Ф. Вольф защищал эпигенез против господствовавшей дотоле преформационной теории, Месмер был яростным сторонником панпсихизма, проявления в телах некоего „fluidum universale“. „К чему сводится, собственно, все общение с природой, если мы путем анализа занимаемся лишь отдельными материальными частями и не чувствуем дыхания закона, предписывающего каждой части ее направление и укрощающего или утверждающего через внутренне присущую ей закономерность каждое отклонение!“ Так выражал Гете свой протест против механического раздробления целого на безразлично однообразные части. Шеллинг прямо звал „назад к качеству“, выступал против „природы для химиков и аптекарей“, за „творческую природу“, которую „a priori конструирует сам философ“, хотя и „не следует ему пренебрегать эмпирией“. Эта априорная конструкция привела Шеллинга к идее природы, располагающейся по трем степеням (Potenz), из которых каждая содержит три порядка (Stufe), а именно: отталкивание, притяжение, тяжесть — первая степень — всеобщая материя; магнетизм, электричество, химизм — вторая степень — свет; раздражимость, чувствительность, воспроизводимость — третья степень — жизнь. Основные законы, господствующие на всех степенях, — это усиление (Steigung) и поляризация.

Все эти идеи, также своеобразно отражающие борьбу молодой немецкой буржуазии против феодализма, ее „бунт на коленях“, оказали определяющее влияние на творчество Иоганна Бенедикта Листинга (1808—1882 гг.). В 1834 г. он был помощником известного геолога и минералога Вальтера Сарториуса Вальтерсгаузена при его обследовании Этны, в 1837 г. — преподавателем машиноведения в высшей промысловой школе в Ганновере, с 1839 г. — экстраординарным, а с 1849 г. — ординарным профессором физики Геттингенского университета. Необходимо отметить, что кафедру Листинг занял после Вебера, который вместе с другими шестью геттингенскими профессорами был уволен вследствие подачи протеста против упразднения конституции ганноверским королем Эрнестом-Августом.

Научная деятельность Листинга была не только разносторонней, но прямо-таки универсальной, что характерно для многих деятелей науки революционного времени. Листинг писал по оптике, астрономии, физиологии зрения, метеорологии, геофизике, математике (всего им издано 25 разных работ). Кроме Сарториуса на Листинга большое влияние имели Гаусс, Александр Гумбольдт, Вильгельм Вебер. Как указывает сам Листинг, мысль о создании качественной науки о пространственных образованиях наряду с геометрией как наукой количественной была внушена ему самим Гауссом, работавшим в том же Геттингене. Большое значение для развития этой мысли имели идеи, господствовавшие в то время в ботанике.

В то время как ботаника Жюсиена, Декандолла, Роберта Броуна путем сравнения различных видов растений стремилась вскрыть родственные связи между ними, новое направление сравнивает различные органы одного и того же растения между собой и ищет здесь внутренние связи. Эту идею развивает, например, „учение о метаморфозе“ Гете (1790 г.), и в ней важную роль играет теория „спиральной тенденции роста“. „Когда мы в совершенстве усвоили понятие метаморфоза, то нужно, далее, чтобы ближе познать образование растения, сначала обратить внимание на вертикальную тенденцию. Ее следует рассматривать как духовный стержень, который обосновывает бытие... Этот жизненный принцип проявляется в продольных волокнах, которые в качестве гибких нитей используются нами для различнейших нужд; это то, что в деревьях составляет дерево, что поддерживает прямой рост одно- и двухгодичных растений, да и во вьющихся и ползучих растениях воздействует на их распространение от узла к узлу. Однако в дальнейшем следует рассмотреть спиральное направление, которое вьется вокруг первого“. Эта теория получает у натурфилософов мистический смысл: вертикальное рассматривается ими как мужское начало, спиральное — как женское. С другой стороны, ботаник Шимпер развивает (1830 г.) математическую теорию расположения листьев на стебле растений, причем в основу кладется непрерывная дробь:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

подходящие дроби которой $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_5$, $^5/_8$... определяют положение листьев. Это формула так называемого „золотого сечения" отрезка на две части так, чтобы квадрат большей из них равнялся произведению меньшей части на весь отрезок, отношения, которое якобы определяет пропорциональность частей человеческого тела, является критерием эстетических пропорций и т. д. Налицо чисто пифагорейские построения, предполагающие постоянство видов, отрицающие причинность и развитие: природа вечно повторяет в своих формах заранее данные определенной числовой гармонией идеи.

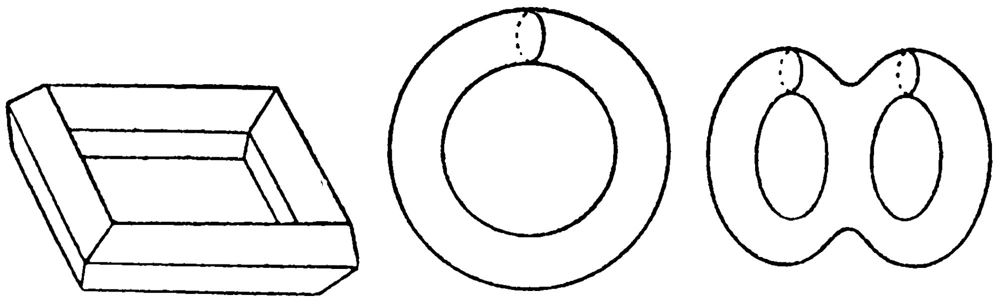
У Листинга, как у ученого времени промышленного расцвета, весьма сильна тенденция к тому, чтобы свою теоретическую работу так или иначе связывать с практикой или, по крайней мере, чтобы убедить читателя в возможности ее дальнейшего применения к практике текстильной промышленности, морского дела и т. п.

Топологические очерки Листинга этим резко отличаются от всего того, что дала интересующая нас отрасль математики в своем последующем развитии. Современная топология далеко ушла от своих материальных корней, превратилась в одну из наиболее абстрактных из всех математических наук. Это развитие от чувственно-конкретного ко все большей и большей абстракции характерно для любого из отдельных отпочкований математики (что отнюдь не уничтожается тем обстоятельством, что математика создает свою собственную конкретность, — именно это развитие внутренне противоречиво), и в нем одновременно и сила и слабость математики как орудия научного познания материального мира.

Основная идея топологии — это отвлечение от положения, величины и формы геометрических фигур: изучаются лишь те их свойства, которые сохраняются при одно-однозначных и непрерывных преобразованиях их; грубо выражаясь, те свойства, которые сохраняются в каучуковых моделях фигур (кривых, поверхностей, тел) при любой их деформации, не приводящей к разрыву или к склеиванию частей. Топология более обща, чем проективная геометрия, которая отвлекается от величины, положения, сохранения углов и от параллелизма линий и не допускает лишь их искривления и расстройства совпадения (того обстоятельства, что точка лежит на линии, линия проходит через точку и т. п.). Сама проективная геометрия более обща, чем аффинная геометрия, которая сохраняет параллелизм, хотя и разрушает равенство углов, чем и отличается от обыкновенной геометрии, преобразования которой — перемещение, зеркальное отображение и пропорциональное увеличение или уменьшение фигур — нарушают лишь положение и величину.

Таким образом топология является наиболее общей и вместе с тем наиболее бедной содержанием (сохраняющей в своих преобразованиях наименьшее количество свойств) из всех геометрий, но она и наиболее богата, так как содержит в себе как частные случаи и проективную, и аффинную, и обыкновенную геометрии.

Широко известна входящая в любой школьный курс стереометрии теорема Эйлера о многогранниках, которая гласит, что в каждом обыкновенном многограннике сумма числа вершин и граней на два больше числа его ребер. Но эта теорема остается верной и при любом непрерывном одно-однозначном преобразовании многогранника (например, и тогда, когда он превратится в шаровую поверхность, разбитую на любые участки), значит, и это — топологическая теорема. Эта теорема может быть широко обобщена в применении к более сложным пространственным образованиям, чем занимался и Листинг (Zensus räumlicher Komplexe oder Verallgemeinerung des Eulerschen Satzes von den Polyëdern, 1862; Anwendung des Zensustheorems, 1867), и приводит к классификации поверхностей с точки



a b c

Рис. 1.

зрения их связности, допустимости на них замкнутых линий — разрезов, не приводящих к распадению поверхности,— вопросам, которые в связи с теорией функций были разработаны Риманном (1857 г.).

Для многогранников вроде изображенного на рис. 1 теорема Эйлера, очевидно, видоизменяется: сумма числа вершин и граней равна числу ребер. Такой многогранник не может путем непрерывной однозначной деформации превратиться в шар, но зато может быть этим путем преобразован в тор — кольцевую поверхность, получающуюся вращением круга вокруг не пересекающей его оси (рис. 1, *b*). В то время как на шаровой поверхности любая замкнутая линия делит ее на две взаимно не связанные области, на поверхности тора могут быть проведены замкнутые линии, которые не разрезают поверхность на распадающиеся части. Лишь после того, как мы проведем о д н у такую линию, любая другая линия будет разбивать поверхность тора. Шар и все поверхности, непрерывно и одно-однозначно в него преобразующиеся, а значит, топологически сходные, или, как говорят, гомеоморфные с ним, это поверхности жанра 0; тор и гомеоморф-

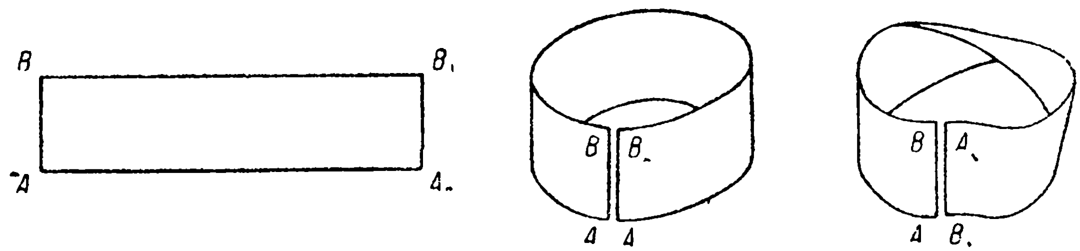


Рис. 2.

ные ему поверхности — жанра 1. Третья фигура (рис. 1, *c*) представляет собой пример поверхности жанра 2.

Другое простейшее топологическое свойство пространственных образований—это двусторонность и односторонность поверхностей. Шар, тор, поверхность жанра 2 на рис. 1 — все это двусторонние поверхности, так как, двигаясь как угодно по одной стороне любой из них, мы не сможем попасть на другую сторону; чтобы туда попасть, нужно пройти сквозь поверхность. Простую модель односторонней поверхности, так называемого листа Мёбиуса, можно получить так: возьмем прямоугольную полоску бумаги AA_1BB_1 (рис. 2) и, вместо того чтобы соединить ее края так, как указано на второй фигуре этого рисунка (A с A_1, B с B_1), соединим, повернув край, A с B_1, B с A_1 (третья фигура). Такая поверхность имеет только одну сторону, т. е. из точки, лежащей на „верхней“ стороне, к точке, лежащей под ней, на „нижней“ стороне ,мы доберемся, не пробивая поверхности. Двусторонность и односторонность поверхностей, так же как и одно- или многосвязность, жанр и т. п., имеют значение в теории потенциала, в электродинамике и в гидродинамике, а также в самой математике: в теории функций и диференциальных уравнений.

Уже в этих примерах можно отыскать оба основных направления, по которым развивается топология как комбинаторная топология, с одной стороны, и как теоретико-множественная — с другой.

Листинг, Риманн, Пуанкаре, Клейн развивали комбинаторную топологию. Ее идея — это разбиение пространственного образования (комплекса) на конечное число простых элементов (симплексов). Для топологии линий (одномерных образований) симплексом является отрезок; два отрезка могут иметь или общие концы, или не иметь вовсе общих элементов. Для топологии поверхностей (двумерных образований) симплексом является треугольник (конечно, и произвольно искривленный); два треугольника могут иметь или общую сторону, или вовсе не иметь общих элементов. В трехмерной топологии симплексом будет тетраэдр и т. д. Задача состоит в том, чтобы установить, когда два комплекса, построенные разными способами, должны считаться гомеоморфными, следовательно, в нахождении путей разбиения, например, данных двух поверхностей на треугольники, разбиения, которое должно продолжаться такое большое, но конечное число раз, пока обе поверхности не будут разбиты на одинаковое количество одинаково соединенных между собой треугольников. Хотя комбинаторная топология имеет много блестящих достижений, но основное положение, на котором она строится, утверждение, что при надлежащем разбиении двух гомеоморфных комплексов на элементы мы конечным количеством шагов всегда должны притти к разбиениям, одинаково построенным, доказано лишь для двумерных комплексов, а в общем многомерном случае является пока лишь гипотезой.

Разбивая пространственные образования на конечное число конечных элементов, изучая их комбинации и отыскивая характеризующие эти комбинации инварианты (числа Бетти и т. п.), комбинаторная топология восходит к теории групп, к этой сердцевине алгебры, оказавшей столь огромное положительное влияние на развитие геометрии. Поэтому, если комбинаторная топология как будто временно заходит в тупик, то причина этого лежит в той односторонности, с которой применяется ее метод (погоня за доказательствами существования), а не в самой ее идее. Многие из тех мыслей, которые выдвигал еще Листинг, оказались совершенно забытыми, не получили никакого развития.

Так, например, основная манипуляция — разбиение — превратилась исключительно во вспомогательный прием, интерес к нему самому как к процессу пропал. Между тем следует поставить задачу классификации разбиений и нахождения алгорифма подсчета всех возможных разбиений комплекса. Двумерный ограниченный комплекс, всегда гомеоморфный кругу (ограниченному замкнутым контуром — окружностью), может быть разбит, в зависимости от рода сечений, на две части тремя топологически различными способами, как это показано на рис. 3. Тот же комплекс дает при разбиении на три части 24 типа, помещенных на рис. 4. Что касается подсчета всех возможных типов при разбиении на части, то укажем лишь, что при сечениях, нигде себя не пересекающих и не имеющих с контуром общих точек (тип 0), нами установлен следующий рекуррентный алгорифм для этого количества F_n:

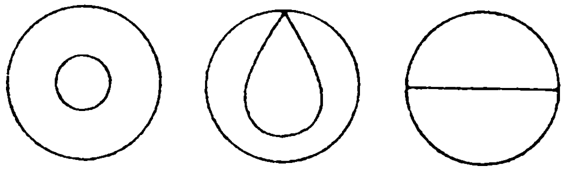


Рис. 3.

$$F_n = \Sigma F_a^\alpha \cdot F_b^\beta \cdot F_c^\gamma \cdot \ldots \cdot F_l^\lambda, \quad F_1 = 1,$$

где целые положительные числа $a, b, c, \ldots, l$; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ суть всевозможные числа, получаемые путем разбиения числа $n - 1$ на слагаемые, а именно так, что

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots + \lambda l = n - 1$$

и где

$$F_m^\mu = \binom{F_m + \mu - 1}{\mu},$$

следовательно:

$$F_m^1 = F_m.$$

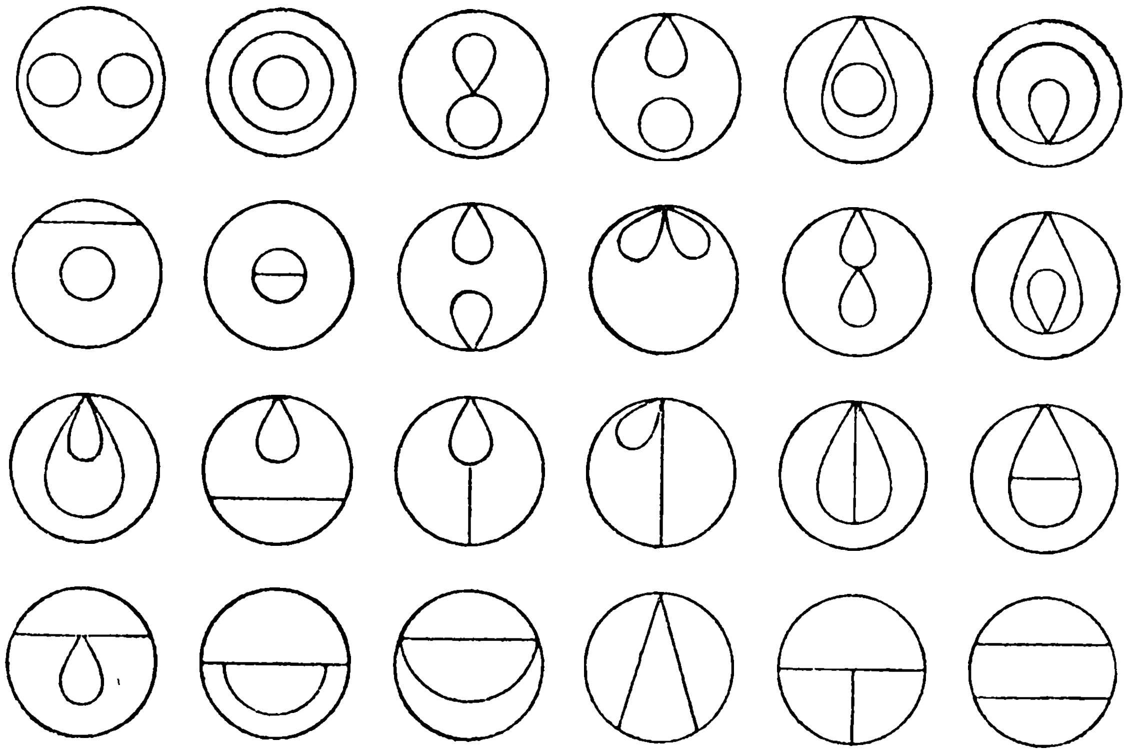


Рис. 4.

Первые значения F_n даны в следующей таблице:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n	1	1	2	4	9	20	48	115	286	719	1842	4766	12 488

При переходе к трехмерным комплексам количество возможных типов разбиений, даже лишь всего на две части, бесконечно, и вся проблема зависит от неразрешенной до сих пор проблемы классификации заузлений, также намеченной еще Листингом.

Совершенно иные пути топологии теоретико-множественной. Ее основная идея — это канторова идея множества, а именно множества точек, которая включает в себе представление о „предельной“ точке, последовательности точек и о соответствии между множествами. Под этим углом зрения понятие гомеоморфности выражается весьма просто: оно состоит в таком соответствии между двумя множествами точек, что, во-первых, каждой точке одного множества соответствует одна и только одна точка другого множества, и наоборот, и что, во-вторых, последовательности точек первого множества, сходящихся в какой-то предельной точке, соответствует последовательность точек другого множества, сходящихся в предельной точке, соответствующей первой, и наоборот. Отсюда получается понятие „топологического пространства“, удовлетворяющего следующим четырем аксиомам Хаусдорфа:

I. Каждая точка пространства имеет свою окрестность.

II. Каковы бы ни были две окрестности одной и той же точки, существует третья окрестность, содержащаяся в каждой из первых двух.

III. Окрестность некоторой точки есть в то же время окрестность каждой содержащейся в этой окрестности точки.

IV. Если имеем две различных точки, то существуют две различные, не имеющие общих точек, окрестности этих точек.

Введение этих понятий и их дальнейшее развитие позволяют решить такие проблемы, которых одна лишь комбинаторная топология разрешить не смогла. Так, Броуверу удалось доказать основное положение топологии: инвариантность размерности, невозможность непрерывного преобразования двумерного комплекса в трехмерный (квадрата в куб и т. п.), удалось развить теорию кривых и т. д. — путем сочетания как комбинаторной, так и теоретико-множественной топологии. Поэтому неудивительно, что теоретико-множественная топология получила такое широкое развитие (например, Лефшец, Александер в Америке, Александров в Москве) и значительно вытеснила топологию комбинаторную. Однако на это имеется и другая не менее, а, пожалуй, более значительная причина: чрезмерное увлечение вопросом обоснования математики, ее аксиоматикой. Это увлечение характерно для математики эпохи империализма и крушения капитализма, когда упадочническая философия все более и более отвлекает математиков от понимания этой науки как отображения объективного материального мира и орудия его познания, все больше внушает им представление о мире самодовлеющих математических категорий как об убежище от дольней суеты. Черты эти чрезвычайно выпукло вырисовываются в абстрактной теоретико-множественной топологии и находят своего рода завершение в построениях аналитических множеств, изучающих изолированные точки, получаемые, например, выкидыванием из отрезка всех точек с рациональными абсциссами (так называемая фундаментальная область Бера). В этом отношении характерны некоторые работы Бореля и особенно Лузина, в значительной степени уходящие в пустые абстракции.

Не менее знаменательно, что некоторые комбинаторные топологи вроде Александера защищают моднейшую разновидность „просвещенной поповщины“ — так называемый голизм, т. е. возрождение монадологии, виталистическую интерпретацию мира.

Тем не менее совершенно неправильно недооценивать значение топологии, рассматривать ее как учение о „дырке в бублике“. Как показали работы Пуанкаре, Бендиксона, Биркгофа, топологические исследования имеют громадное значение для механики и в частности для астрономии, так как позволяют решать вопрос о периодических решениях (дающих замкнутые кривые) диференциальных уравнений движения (например, планетной системы). Исследования того же направления, развитые московскими математиками Люстерником и Шнирельманом, дали топологические методы для решения некоторых проблем вариационного исчисления, в том числе проблем, связанных с существованием замкнутых геодезических линий на поверхностях, и т. п. Все это имеет непосредственное применение к решению задач теоретической физики.

Но такое понимание полезности топологии было бы чересчур узко. Нельзя упускать из виду, что геометрия всегда оказывала значительное и весьма полезное влияние на математику. В геометрии, как науке более вещной, чем математика, часто легче давался синтез тех или других ее ветвей, в то время как в математике изоморфные ответвления зачастую развивались параллельно, не находя точек соприкосновения, развивались однобоко и во многом бесплодно, между тем как только их взаимное проникновение могло бы дать новые методы.

В настоящий момент, когда вплотную поставлен вопрос о реконструкции математики, из топологии можно извлечь значительную методологическую пользу. На ее сравнительно небольшой истории прекрасно видно, куда приводит метафизическая односторонность развития и эклектические попытки совершенно внешним образом „пополнить" один метод другим. Она же указывает нам на необходимость диалектического понимания единства прерывного и непрерывного, единства комбинаторного и теоретико-множественного начала, между которыми, следуя моде, колеблется современная топология, единства алгебры и анализа, как взаимно проникающих друг друга противоположностей. Она зовет нас не назад к Листингу, но — на высшей, на социалистической основе — к той связи с практикой, из которой родились топологические очерки этого ученого буржуазной промышленной революции.

Перевод „Предварительных исследований по топологии“ снабжен рядом примечаний и, в частности, 15 новыми чертежами, поясняющими формулы $\sum (a_i \delta^i + b_j \lambda^j)$ различных сплетений.

Э. КОЛЬМАН

Более подробно о топологии см.: Александров П., об основных направлениях современной топологии, „Труды Всероссийского съезда математиков“, Гиз, 1928; Франкль Ф., Московская топологическая школа, „Естествознание и марксизм“ № 4 за 1929 г.; Романовский Г., Основные понятия топологии прямой и плоскости, „Математическое образование“ № 1, 2 за 1930 г.; Люстерник Л. и Шнирельман Л., Топологические методы в вариационных задачах, 1930; Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie; M. Dehn, P. Heegaard Analysis situs в „Encyklopädie d. Math. Wissenschaften“, III A, B. 3, 1907.