Из истории естествознания

От редакции

В этом году исполняется 110 лет со дня рождения выдающегося русского математика Николая Николаевича Лузина (1883—1950).

Его результаты относятся к теории функций, теории множеств, дифференциальной геометрии и теории дифференциальных уравнений. Каждому студенту, серьезно изучающему математику, знакома его знаменитая теорема, открывающая С-свойство измеримых функций, которая вошла в список важнейших достижений математики первой половины XX в. (см.: XIXth International Congress of History of Science. Zaragoza (Spain), 22—29 August 1993. Symposia Survey Papers — Plenary Lectures / Ed. J. Dhombres, M. Hormigon, E. Ausejo. Zaragoza, 1993. P. 13—18). Классическая диссертация Н. Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915) до сих пор читается с живым интересом. Его идеи и поставленные проблемы активно обсуждаются в современной математической литературе. Основанная им (вместе с Д. Ф. Егоровым) Московская школа теории функций (П. С. Александров, М. А. Лаврентьев, А. Н. Колмогоров, П. С. Новиков, П. С. Урысон, А. Я. Хинчин и др.) вкупе с Петербургской школой П. Л. Чебышева создали фундамент советского математического сообщества — одного из наиболее влиятельных в XX столетии.

Жизнь Н. Н. Лузина не была простой. Занятый, казалось бы, самыми абстрактными вопросами современной науки, он, никак того не желая, оказался вовлеченным в идеологические и политические дискуссии 30-х гг. Близкий знакомый П. А. Флоренского, сам интересный философ — продолжатель традиции Московской философско-математической школы, он стал объектом бешеной травли, вылившейся в 1936 г. в целое «дело академика Лузина», едва не кончившееся для него трагически (см.: Юшкевич А. П. Дело академика Лузина // Репрессированная наука. Л., 1991. С. 377—394). После этого он и его ученики старались избегать в своих публикациях каких-либо философических вольностей, могущих иметь нежелательные последствия. Уже после смерти Лузина в 1953 г. был издан русский перевод его «Лекций об аналитических множествах и их приложениях», и его ученики не рискнули при этом опубликовать имевшееся во французском издании предисловие А. Лебега, в котором было обращено внимание на философский дух творчества Лузина (по-русски оно было опубликовано только в 1985 г. — см.: Успехи математических наук. 1985. Т. 40. Вып. 3. С. 9—14). Только в последние годы стало возможным изучать и публиковать документы, касающиеся этих «темных» по советским меркам страниц его жизни и творчества. В 1989 г. в 31-м выпуске «Историко-математических исследований» опубликована переписка Н. Н. Лузина с П. А. Флоренским (из семейного архива Флоренских) и с А. Н. Крыловым (из Архива АН СССР). В настоящее время в секторе истории математики ИИЕТ РАН готовится издание документов Лузина, находящихся в государственных и частных архивах.

Два таких документа, а именно — предисловие Н. Н. Лузина к рукописи Л. А. Тер-Микаэляна о теоретико-числовых методах Ферма и письмо к племяннице, мы предлагаем сегодня вниманию читателей. Это письмо позволяет заглянуть в домашний мир Николая Николаевича, а в «Предисловии» неожиданным образом приоткрываются его интересы в теории чисел. Недавно увидел свет русский перевод теоретико-числовых работ Ферма (под редакцией профессора И. Г. Башмаковой). Рецензия на это издание, написанная академиком И. Р. Шафаревичем, обсуждает вопрос о месте теории чисел в математике, рассматривая и публикуемое «Предисловие» Лузина. Думается, что такое соседство материалов, объединяющих отдаленное и не столь отдаленное прошлое с результатами последних дней (вопрос о недавнем доказательстве теоремы Ферма также затрагивает и И. Р. Шафаревич) пришлось бы по вкусу Николаю Николаевичу — человеку, соединявшему выдающийся математический талант, направленный в будущее, с истинно философским отношением к настоящему и прошлому.

Н. Н. ЛУЗИН

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ МАТЕМАТИКОВ XVII ВЕКА (ПРЕДИСЛОВИЕ К КНИГЕ Л. А. ТЕР-МИКАЭЛЯНА)*

Н. Н. Лузин (около 1945 г.) Фото из семейного архива Н. Л. Мартыновой

«Предисловие» Н. Н. Лузина было написано в 1933 г. и должно было предварять книгу Леона Андреевича Тер-Микаэляна (1867—1943), посвященную теории чисел. В ней, вероятно, содержалось изложение развернутой гипотезы о методах Пьера Ферма, особенно, о его способе доказательства Великой теоремы. Напомним, что эта теорема утверждает, что неопределенное уравнение $x^n + y^n = z^n$ при $xyz \neq 0$ и $n > 2$, не имеет решения в целых числах. Книга Тер-Микаэляна не была издана. «Предисловие» пролежало в архиве его семьи вплоть до наших дней. Только осенью 1992 г. оно было передано младшим сыном Леона Андреевича — Михаилом Леоновичем Тер-Микаэляном, физиком-теоретиком, академиком Армянской АН, С. С. Демидову для публикации. Михаилу Леоновичу мы обязаны сведениями о жизни и творчестве отца, которые приведем ниже.

Л. А. Тер-Микаэлян известен как крупный инженер — строитель железных дорог России от Закавказья до Дальнего Востока. Он родился 26.II 1867 г. в селе Баян Елизаветпольской губернии (теперь Ханларский район Азербайджана) в семье священника. По окончании гимназии поступил в 1886 г. на физико-математический факультет Московского Университета. За время учебы он записал, обработал и издал курс лекций по механике, читанных Н. Е. Жуковским. Окончив Московский университет, Тер-Микаэлян поступил в Институт путей сообщения в Санкт-Петербурге, который закончил в 1895 г. После этого началась его большая плодотворная деятельность по строительству железных дорог, которая продолжалась более 40 лет. (Данные о его работе и его портрет можно найти в книге А. Т. Сагретяна «История железных дорог Закавказья в 1851—1921 гг.», Айастан, Ереван, 1970).

Л. А. Тер-Микаэлян интересовался составлением словарей и привлек к этой работе крупных армянских лингвистов. Сам он принял непосредственное участие в создании Русско-армянского и Армяно-русского словарей железнодорожной терминологии (Тифлис, 1923—1925 гг.). «Предисловие» Н. Н. Лузина показывает еще одну сторону этой богато одаренной натуры — оказывается, Леон Андреевич занимался историей чисел и стремился проникнуть в тайну методов ученых XVII века.

Но в «Предисловии» перед нами по-новому предстает и сам Н. Н. Лузин. Мы привыкли его воспринимать как одного из самых ярких творцов теории функций действительного переменного и теории множеств, как основателя Московской школы, разрабатывающей эти направления. И вдруг перед нами размышления Н. Н. Лузина о казалось бы такой далекой от него области, как теория чисел. И приходиться только удивляться тому, как глубоко он проник в науку чисел, как верно угадывал многое, еще скрытое от его современников, какой безошибочной интуицией он обладал!

Чтобы лучше понять точку зрения Н. Н. Лузина, полезно сравнить ее с воззрениями Н. Бурбаки, изложенными в статье «Архитектура математики» и воплощенными в серии «Элементы математики» и в исторических очерках к ним. Н. Бурбаки начинает изложение ма-

---

* Печатается с машинописной рукописи — 20 с., с минимальной стилистической правкой, согласно современным литературным нормам. Название условное — *Прим. ред.*

тематики с определения порождающих структур (les structures-mères) — множества элементов произвольной природы, для которых определены одно или несколько отношений. Свойства этих отношений постулируются системой аксиом. Если заданное отношение имеет тип «закона композиции», то получаем алгебраическую структуру (например, группу), если оно типа отношения порядка, то получим структуру порядка. Третьим типом являются топологические структуры, описывающие понятие непрерывности. Вся математика представляет иерархию структур: например, можно рассматривать алгебраическую структуру, закон композиции в которой определяется функцией, относящейся к той или иной топологии. При этом число выступает как чрезвычайно сложный объект, для определения которого необходимы все виды структур.

Точка зрения Н. Н. Лузина диаметрально противоположна. В основу математики он ставит целое число. Оно не сводимо к другим объектам и не может быть определено никакой системой аксиом (например, аксиомами Пеано). Такое недоверие к возможности аксиоматического определения системы целых чисел тем более удивительно, что оно было высказано Н. Н. Лузиным до того, как Т. Сколем получил свои результаты, согласно которым невозможно построить конечную или даже бесконечную систему аксиом, так, чтобы она определяла единственную (с точностью до изоморфизма) модель, а именно систему натуральных чисел n. Всегда будут существовать другие нестандартные интерпретации этой системы аксиом, не изоморфные n. Итак, Н. Н. Лузин возвращается в какой-то степени к взглядам пифагорейцев, выраженным в крылатой фразе: «все есть число».

Н. Н. Лузин считает, что для изучения чисел должны существовать особые арифметические методы, которые, как он полагает, были известны математикам XVII века, а с тех пор безвозвратно утрачены. Математики, начиная с Гаусса (добавим — а во многом с Эйлера), начали трактовать проблемы теории чисел либо алгебраически (так возникла алгебраическая теория чисел), либо с помощью методов математического анализа и теории функций комплексного переменного (что породило аналитическую теорию чисел). По мнению Н. Н. Лузина, такой подход к науке о числах крайне неестественен. Он приводит следующий пример: теорему о том, что существует бесконечно много простых чисел в натуральном ряду, Евклид доказал чисто арифметически, а обобщение этой теоремы («в каждой арифметической прогрессии, разность которой взаимно проста с первым членом, существует бесконечно много простых чисел») Лежен-Дирихле доказал с помощью сложных аналитических методов, используя теорию рядов, теорию аналитических функций и дифференциальное и интегральное исчисление. Нельзя ли найти для этой теоремы арифметическое доказательство? Н. Н. Лузин полагает, что работа над восстановлением утраченных арифметических методов имеет огромное значение. Из всех этих методов мы знаем только один — метод бесконечного спуска Ферма, который и в наши дни с успехом применяется в теории чисел и алгебраической геометрии. Работа Л. А. Тер-Микаэляна и была посвящена реставрации идей и методов математиков XVII века. Главную ее ценность Н. Н. Лузин видит именно в восстановлении утраченного духа науки XVII века. Он пишет: «Читая автора, невозможно не поддаться очарованию воскресающей жизни идей XVII века». К сожалению, мы не имеем рукописи книги Л. А. Тер-Микаэляна. Но проблема, поставленная Н. Н. Лузиным, несомненно, привлечет внимание и математиков, и историков науки. В творчестве П. Ферма, Б. Френикля и других приверженцев науки чисел скрыта великая тайна, которая манит и зовет за собой смельчаков, которых не страшат открывающиеся на пути бездны.

И. Г. Башмакова

Свойства целых положительных чисел всегда имели особую привлекательность для человеческого ума. И интересно отметить, что в то время как прогресс других ветвей математики идет вполне планомерно, сопровождаясь неуклонным *обогащением материалом и фактами* и глубоко естественной преемственностью методов, в это самое время арифметическая мысль являет изумительное зрелище, давая ряд немотивированных скачков, резкую смену методов, не имеющих между собой ничего общего и, наконец, сопровождаясь *утратой фактов, приемов и способов рассуждать.*

Пусть попробуют себе представить какую-нибудь теорему геометрии, некогда утраченную, сохранившую лишь свою формулировку, и которая при этом не может быть доказана в настоящее время. Между тем в Теории Чисел это — обычное зрелище, и является несомненным фактом, что в XVII в. о целых положительных числах знали больше, чем знаем сейчас о них мы, и что самое чувство целого положительного числа было несравненно глубже и ярче, чем тот бледный алгебраизированный его образ, который сейчас имеем мы. И это обстоятельство отнюдь не является случайным, но подготовленным всем ходом нашей культуры, поставившей в центр внимания естествознание, непрерывность и механику, с неизбежным отсюда преобладанием идей, направленных на анализ бесконечно малых.

Фактом является то, что в XVII в. мысль была менее склонной идти в одном и том же определенном русле, но, напротив, являла большую красочность и ширину, разнообразие и богатство направлений исследования. И, может быть, не случайным было то обстоятельство, что в XVII в. почти в одно и то же самое время явилось несколько человек (в Англии — знаменитый математик и гениальный криптограф Wallis (Валлис), во Франции — Pierre Fermat (Ферма) и Frenicle (Френикль)), мысль которых направилась существенным образом на свойства целых положительных чисел. Из них самым глубоким является гениальный математик Ферма, которому не без основания приписывают открытие аналитической геометрии до Декарта и анализ бесконечно малых до Ньютона и Лейбница. До нас дошли лишь геометрические и механические изыскания Ферма; арифметические же его исследования и методы являются утраченными окончательно. Тайна его методов, которыми он делал свои изумительные арифметические открытия, от нас в настоящее время скрыта. Не дошел также до нас какой-то удивительный метод Френикля, имевший геометрический характер и, вероятно, напоминавший номограмму, посредством которого Френикль мог отыскать в один вечер делитель всякого целого числа, писавшегося с помощью не свыше 20 десятичных знаков. Но более важным, без сомнения, является открытие Ферма одного или нескольких каких-то чисто арифметических методов, носивших, по современной квалификации, «элементарный» характер и глубоко проникавших в тайны целых положительных чисел.

Методы эти радикально утрачены. А между тем с их помощью Ферма получал свои изумительные арифметические результаты, удивлявшие современников и удивляющие нас. Известно, что Ферма, согласно обычаю своего времени, скрывал самый источник своих результатов, т. е. свои методы, и сообщал современникам лишь окончательные результаты. Известно также, что Ферма долгое время собирался составить книгу, дающую полное изложение его методов и результатов, но незадолго до своей смерти, поняв, что это потребует от него много труда и более усилий, чем он уже мог тогда сделать, отказался от этой мысли и завещал человечеству задачу реставрирования его методов, бросив, таким образом, ему в мировом масштабе вызов. Этот вызов брошен им в сравнительно недавно найденном его письме к его современнику Carcavi (Каркави).

После смерти Ферма многие сильнейшие умы и знаменитые ученые пытались восстановить доказательства всех его теорем, известных лишь по своим формулировкам, — и вот здесь-то обнаружилось во весь рост значение того факта, что самые *методы* Ферма утрачены. Из нескольких сотен теорем Ферма многие были передоказаны, но совершенно различными методами, не имевшими между собой ничего общего, методами, самая *природа* которых существенно различна и которые *заведомо* не могли иметься в руках Ферма. Неадекватность этих методов самой идее целого положительного числа ясна из того, что ни один из них не мог восстановить всего наследия Ферма, будучи взят в единственном числе. А вся совокупность предложенных методов после Ферма также не смогла дать *всех* предложений Ферма. Известно, что до сих пор более двух десятков теорем Ферма остаются еще никак не доказанными, «Великая теорема Ферма» в том числе. Эта последняя теоретически нисколько не хуже и не лучше остальных из двух десятков недоказанных теорем, и, если внимание исследователей является обращенным преимущественно на нее, то это происходит вследствие исключительной красоты этого предложения:

«доказать, что никакой куб не есть сумма двух кубов, никакой биквадрат не есть сумма двух биквадратов, и вообще, никакая n-ая степень, $n > 2$, не есть сумма двух n-ых степеней».

Такова была формулировка этой теоремы самим Ферма, когда он, согласно обычаям своего времени, бросал вызов английским математикам (преимущественно Валлису) с тем, чтобы, как он выражался «пощупать пульс английской науки»[1].

Следует заметить, что несколько преувеличенное внимание к именно этой «великой» теореме Ферма, а не какой-нибудь другой, как из двух десятков еще не доказанных, так из двух сотен уже доказанных, объясняется как исторически известными неудавшимися попытками величайших умов, заинтересовавшимися ею, так и просто из чувства, близкого к чувству спорта. Самое значение «великой» теоремы Ферма, самой по себе вероятно, ничтожно[2]; и если на нее были поставлены усилия великих умов, то это лишь в надежде, что попытка удачного доказательства «великой теоремы» Ферма будет — самой силою вещей — осуществлена лишь тем самым методом, которым сам Ферма сделал большую часть своих арифметических открытий. А тогда, раз метод Ферма становится найденным, можно будет без труда восстановить и *все* другие его арифметические открытия и, без сомнения, пойти еще дальше, дав новые теоремы, неизвестные самому Ферма. Кроме того, разумеется, внимание именно к «великой» теореме Ферма всегда было несколько обусловлено еще и тем, что она послужила для Ферма материалом вызова, брошенного им английским математикам и — через их посредство — всей науке дальнейших поколений.

В дальнейших взглядах на «великую» теорему Ферма иногда наступал перелом и время от времени ее начинают рассматривать не как теорему Ферма, а как гипотезу Ферма. Иными словами, считают, что Ферма считал внутренне абсолютно несомненной ее истинность, на основе своей арифметической интуиции, либо просто заблуждался, имея ложное доказательство. Но такое превращение теоремы Ферма в гипотезу («Vermuthung») Ферма несомненно продиктовано чувством, близким к чувству отчаяния, или просто чувством конфуза. Серьезно считать, что Ферма не имел в руках действительно абсолютно строгого доказательства не имеет основания. Прежде всего Ферма был поистине гениальный ученый, и эту свою силу Ферма доказал во весь рост в своих геометрических и механических сочинениях, дошедших до нас в полной сохранности; таким образом, Ферма не нуждался в помощи неискренности в целях кажущегося повышения уровня своей силы. Затем, «великая» теорема Ферма служила материалом для столь серьезного дела, каков был вызов на научную дуэль английских математиков; Ферма не мог не понимать, что в случае неполной уверенности, сложности, неотчетливости его доказательства он рисковал тем, что его предложение, служившее материалом вызова, может оказаться или просто неверным, или случайно тривиальным, т. е. доказуемым каким-нибудь неглубоким, лежащим на поверхности — на глазах у всех — способом. Таким образом, Ферма в обоих этих случаях рисковал бы тем, что его «великая» теорема оказалась бы просто неверной или легко доказуемой и тогда его доброе имя и репутация «первейшего ученого в мире» («le premier homme du monde») потерпели бы ущерб, чего он не мог допустить ни в коем случае. Следовательно, предположение неискренности или легкомыслия несостоятельно. Труднее дело с предположением о добросовестном заблуждении, т. е. самообмане Ферма. Ошибался ли Ферма, утверждая, что он имеет в руках строгое доказательство своего «великого» предложения?

Внимательное рассмотрение положения вещей показывает, что вероятность этого совершенно ничтожна. Во-первых, Ферма всегда был в высшей степени осмотрителен во всех своих научных высказываниях; здесь проглядывает не столько его заботливость о своем добром имени, сколько абсолютно верная интуиция действительно гениального математика, дальнозорко видящего веши, которые он *на деле* при желании или при необходимости может доказать со всей строгостью. Во-вторых, Ферма никогда не утверждал в течении своей жизни неверных предложений и в оставшемся после него наследии нельзя найти ни одной ошибки. Правда, указывают иногда на единственный случай, когда Ферма ошибался, утверждая, что числа вида $2^{2^n} + 1$ все *простые*. Неверность этого положения была, в самом деле, показана Эйлером, обнаружившим, что при частном значении показателя n указываемое Ферма этой формулой число окажется составным. Но здесь не принимают во внимание следующих исторически точных обстоятельств. Прежде всего Ферма никогда не утверждал, что он *доказал* это предложение, но писал своим друзьям и знакомым, что он *имеет уверенность* в истинности этого прекрасного свойства чисел[3]. Мы видим, что, в самом деле, здесь Ферма изменила его гениальная интуиция. Но мы не знаем, сколько раз, задумывая установить то или иное положение о свойствах чисел, Ферма сначала направлялся по ложному следу, а потом замечал это и давал своим мыслям верное направление. Это явление бывает у *всякого* математика, как бы гениален он ни был, и Ферма ни в каком случае не мог избегнуть этого свойства человеческой природы, так как именно это самое и делает науку и трудной, и прекрасной. Важно совсем другое: *направляясь по ложному следу, Ферма никогда не доводил его до сведения других лиц, прежде чем сам не получал свидетельства от своего собственного размышления о его ложности.* В этом и состоит никогда не изменившая ему привычная сдержанность, приобретенная, без сомнения, огромным внутренним опытом и проистекавшая из его силы. В рассматриваемом случае эта обычная для Ферма сдержанность как будто изменяет ему: он доводит до сведения других о «прекрасном свойстве чисел», в котором он «уверен», хотя про «которое он не утверждает, что он его доказал». А дальше, мы наблюдаем интересное явление: уверенность Ферма сменяется некоторым колебанием, изумлением в том, что это предложение оказывается столь трудным. Он пишет друзьям*: «Я уверен в истинности этого свойства; я для доказательства его сделал огромные усилия и исключил предположение чрезвычайно большого числа возможных делителей этого выражения и все напрасно: доказательство от меня ускользает». Далее уверенность и изумление перед трудностью сменяется растерянностью. Он пишет, что все еще не имеет строгого доказательства этого предложения. Наконец, чувство растерянности переходит в отчаяние, и Ферма в письмах к Pascal'ю (Паскалю) и Roberval'ю (Робервалю) просто просит помочь ему в доказательстве этого предложения, оказавшегося, как впервые установил Эйлер, ложным. Как видно, все это очень далеко от того положения, когда математик ошибается и, не замечая своего заблуждения, настаивает на верности своего ложного доказательства.

Таким образом, гипотеза ошибки Ферма при утверждении его «великой теоремы» кажется неверной.

Восстановление истинных методов Ферма, которые у него были в руках, является, в самом деле, вызовом, брошенным им грядущим поколениям, и представляется глубоко важным делом и интересным в высшей степени. Для того, чтобы понять, что изыскания современной Теории Чисел отнюдь не могут заменить изысканий Ферма и Френикля, нужно иметь в виду, что методы Ферма были истинно арифметического характера, глубочайше связанными с самой природой целого положительного числа, тогда как современные методы имеют все косвенный характер, лишь отчасти их относящий к *целым* числам как к таковым.

Первый, кто направил «Науку о Числах» Ферма по несвойственному ей руслу, превратив ее в современную «Теорию Чисел», был великий Gauss (Гаусс). Он первый облек Арифметику в несвойственную по самой ее природе алгебраическую форму, надев на нее, по выражению одного математика, «платье с чужого плеча». В руках Гаусса, Арифметика становится уже не самостоятельной наукой, а лишь веткой Алгебры, хотя и очень интересной. Вероятно, это было вызвано давлением века, начавшего все более и более пользоваться символизмом и, может быть, чувством безнадежности реставрации собственно метода Ферма. Далее, двигаясь по этому направлению, Теория Чисел почти окончательно утрачивает связь с понятием *целого* числа как такового. В теории алгебраических чи-

* Цитирую по памяти из переписки Ферма, которой у меня сейчас нет под рукой.

сел, в изысканиях Kummer'a (Куммера), мы имеем «обобщение» идеи *целого* числа. Это обобщение, правда, оказывается полезным, и дало Куммеру возможность увериться в истинности «великой» теоремы Ферма для показателей не превосходящих 100, но нет никакого сомнения в том, что *такой* путь не есть тесно связанный с понятием *целого* (и именно как такового) числа[4]. Мало того, в современной Теории Чисел мы имеем полное несоответствие в высшей степени простых формулировок арифметических теорем и методов, употребленных при их доказательстве.

Хорошим примером этого может служить так называемая «теорема об арифметической прогрессии», усмотренная Legendre (Лежандром) и впервые доказанная, по следу Gauss'a, Lejeune Dirichlet (Дирихле).

Теорема эта состоит в следующем: требуется доказать, что *при числах* a *и* b *взаимно-простых, арифметическая прогрессия*

$$b,\ a + b,\ 2a + b,\ 3a + b,\ 4a + b, \ldots,\ ax + b, \ldots,$$

где x есть целое и положительное, содержит бесконечное множество простых чисел.

Первоначальное доказательство этого предложения, данное Дирихле, в настоящее время несколько упрощено, но оно делается помощью комбинации следующих дисциплин: 1) теории бесконечных рядов; 2) мнимого переменного; 3) дифференциального и интегрального исчисления.

Без анализа бесконечно малых современная наука не умеет доказать столь простого предложения, какова «теорема об арифметической прогрессии». Мы видим, что здесь имеется полное несоответствие между «элементарной» формулировкой и методами доказательств, пользующимися «высшей» математикой.

В какой мере восстановление подлинных методов Ферма могло бы оказаться полезным для доказательства таких предложений и, в частности, теоремы об арифметической прогрессии — мы не знаем. Не знаем даже, возможно ли принципиально доказать теорему об арифметической прогрессии без идей анализа бесконечно малых или, вообще, без идеи перехода к пределу (замаскированного или явного) — таким образом, каким, например, Евклид доказывал существование бесконечного множества простых чисел. Мы не знаем, является ли участие бесконечно малых существенно необходимым при доказательстве некоторых положений Арифметики, в формулировки которых не входит ничего, кроме целых чисел в конечном количестве.

Если бы такие предложения Арифметики, т. е. с элементарной формулировкой и не могущие никогда никем* быть доказанными без Анализа бесконечно малых, существовали на деле, установление таких предложений было бы одним из величайших открытий нашего времени, затмевающим по своей важности все другие «доказательства невозможности», вроде невозможности доказательства постулата Евклида, решения в радикалах уравнения 5-ой степени, построения линейкой центров двух начерченных на плоскости окружностей и т. д. Так как вопрос имеет совершенно исключительную важность, то позволительно несколько долее остановиться на нем.

В XVII в. не существовало никакого аксиоматического движения в современном смысле этого слова. Перечень аксиом геометрии, оставленный Евклидом, разумеется, существовал, однако тенденции аксиоматизировать ту или иную науку совершенно не было. Не было и предваряющего это движение *«униформирования»* наук, т. е. желания видеть все добытым из одного и того же самого источника (определения) применением одного и того же самого метода. В то время брали явления внешнего мира и явления мысли такими, какими их имели, и не очень доискивались, какими они *должны* быть. В частности, в «Науке о Числах», вполне удовлетворялись пестротой различных приемов и только лишь требовали,

* Как, например, никогда и никем не может быть получена трисекция угла, квадратура квадрата, удвоение куба с помощью циркуля и линейки.

чтобы методы эти были *глубоки*, т. е. отвечали, согласно внутреннему чувству, самой сущности *целого* числа, как такового. Так, например, охотно доказывали теорему о том, что $ab = ba$, рассматривая прямоугольник, имеющий одну сторону равной a единицам, а перпендикулярную сторону равной b единицам: тогда простое поворачивание этого четырехугольника так, чтобы то одна сторона оказывалась горизонтальной, то другая, обнаруживало, *вследствие сохранения величины его площади*, что $ab = ba$. Но одновременно в других случаях охотно прибегали к чисто арифметическим соображениям.

Совсем иную картину имеем мы в современной Науке. Желание видеть науку униформированной, т. е. приведенной к полнейшему однообразию рассуждений, выводящих все из анализа единого определения, заставило базировать современную Теорию Чисел на так называемой *«полной индукции»*.

«Полная индукция» состоит в следующем: имея некоторое формулированное, но еще не доказанное свойство чисел, показывают, что оно верно для 1. Затем, предположив, что оно имеет силу для n, где под n разумеем *конечное*, целое и положительное число, логически выводят из этого предложения, что рассматриваемое свойство имеет силу и для $n + 1$. Когда это установят, т. е. 1) что свойство верно для $n = 1$; 2) что оно верно для $n + 1$, если верно для n, тогда говорят, что указанное свойство имеет силу для *всех целых положительных чисел*, и считают это свойство верным *всегда*, для всех конечных целых положительных чисел.

Henri Poincaré (Пуанкаре) думал, что «полная индукция» должна быть единственным источником арифметических теорем, и что, если мы имеем введенными в Теорию Чисел дифференциальное и интегральное исчисление, ряды, функции мнимого переменного и т. д. — то это делается лишь вследствие *слабости* человеческого ума, недостаточно сильного, чтобы вывести все в теории Чисел из одной полной индукции, не прибегая совсем к подпоркам, взятым из других наук[5]. С этой точки зрения, со временем всякая теорема Теории Чисел лишится, при ее доказательстве, таких паразитических элементов, каковы бесконечно малые, мнимости и т. д., совершенно чуждые идее целого числа, и будет доказана одним лишь методом «полной индукции». Без сомнения, немецкий математик Weierstrass (Вейерштрасс) имел тот же самый идеал Науки о числах.

Еще недавно этот идеал признавался официальным *credo* ученого, и нельзя было говорить противоположное, не вызывая удивления.

В настоящее время наша уверенность в осуществимости такого идеала для Теории Чисел несколько уменьшилась[6]. Прежде всего неясно, всякое ли свойство целых положительных чисел есть *индуктивное*, т. е. могущее быть доказанным при помощи одной лишь «полной индукции», и нет ли иных, неиндуктивных свойств целых положительных чисел, также имеющих силу для *всех* целых положительных чисел, но не могущих быть доказанными «полной индукцией». Вопрос этот представляет чрезвычайную глубину, так как связан с вопросом о том, имеем ли мы в настоящее время хорошее определение *конечного* целого положительного числа.

Если имеется такое определение, тогда вся Теория Чисел есть просто *аналитическая* дисциплина, в которой, следовательно, все предложения должны получаться из чистого анализа этого определения. Если такого определения не имеется, Теория Чисел есть *синтетическая* дисциплина, т. е. такая, в которой предложения выводятся из добавляемых время от времени новых принципов, несводимых один к другому, и, таким образом, мы имеем вечное обогащение науки абсолютно новым содержанием. Сам Пуанкаре занимал в этом вопросе промежуточную, трудно определимую позицию. С одной стороны, он полагал, что *все* арифметические свойства выводимы из одной только «полной индукции», так что, как будто, видел в Арифметике аналитическую дисциплину. Но, с другой стороны, он горячо защищал синтетической характер «полной индукции», т. е. был глубоко убежден в логической недоказуемости самой «полной индукции» на основании каких-либо определений конечного целого и положительного числа и в абсолютно интуитивном ее характере и *применения* (т. е. *практикования*) ее.

Деликатный пункт в этом вопросе — тот, что, по-видимому, мы действительно не имеем удовлетворительного определения *конечного* целого положительного числа. Логические определения Frege (Фреге) и геометрические концепции Zermelo (Цермело) не убедительны. А аксиоматическое обоснование натурального ряда явственно грешит *petitio principia*, как это заметил еще Пуанкаре: когда принимают, что натуральный ряд чисел определяется шестью аксиомами Peano (Пеано), в число которых входит «полная индукция», то это значит, что определяют натуральные (т. е., конечно, целые и положительные) числа собственно одной только полной индукцией, и вопрос ставится, выражаясь образно, вверх ногами: не потому «полная индукция» применима к конечным целым и положительным числам, что такова природа этих последних, но, наоборот, конечными числами называются лишь такие, к которым применима «полная индукция». С этой точки зрения, натуральный ряд определяется как носитель *всех* индуктивных свойств. *Petitio principia* в этом взгляде очень грубое: мы не знаем, говоря о «полной индукции», что такое число n. С одной стороны, оно обязано быть конечным; с другой стороны, конечными числами как раз называются только такие, к которым применима «полная индукция».

Все эти сомнения в современной науке вылились, наконец, в скептическое учение, принадлежащее голландскому ученому L. E. J. Brauwer'у (Брауэр). Согласно ему, нет никаких оснований полагать, что всякое предложение Арифметики обязательно будет или *верно*, или *ложно*. Согласно Брауэру, здесь может быть еще и третья возможность: не истина и не ложь, так как например, «великая теорема Ферма» может оказаться не истинной и не ложной, а просто *недоказуемой*, как, например, недоказуем постулат Евклида. Предрассудок, говорит Брауэр, что великая теорема Ферма есть или истина, или ложь, основан на соображении того же порядка, на котором, примерно, прежняя физика базировала теорию теплоты. Там создавался воображаемый «демон Максвелла», который, пропуская быстрые молекулы газа через форточку и задерживая медленные, разделял всю массу газа на две части: нагретую и холодную, и это без затраты работы. Аналогично поступаем и мы, желая утверждать, что «великая теорема Ферма» либо верна, либо ложна: мы создаем воображаемого «математического демона», который должен перепробовать всевозможные четверки целых положительных чисел x, y, z и n, составляя из них выражения $x^n + y^n = z^n$. Если хоть одно из этих выражений (для $n > 2$) наш демон найдет равным нулю, «великая теорема Ферма» ложна; если же, перепробовав все выражения, он найдет, что всякое из них отлично от нуля, «великая теорема Ферма» истинна. Но ведь число четверок x, y, z и n *бесконечно* и не существует никакого на самом деле математического демона, который бы взялся перепробовать *все* четверки x, y, z и n, одну за другой. Значит, таким образом рассуждать нельзя, и «великая теорема Ферма» прекрасно может оказаться не истиной и не ложью, а быть просто недоказуемой.

Таковы взгляды Брауэра. Мы видим, что скептическое отношение к «великой теореме Ферма» здесь бесконечно утончилось: уже не Ферма ошибался, считая эту теорему доказанной им, но мы все можем ошибаться, считая ее только истинной или только ложной.

Указанный длинный логический экскурс мы сделали вот по какой причине: вопрос о реставрации методов XVII в. и, в особенности, методов Ферма, приобретает теперь значение, далеко выходящее за пределы частного интереса к вопросу о том, была ли действительно некогда доказана «великая теорема Ферма». Здесь теперь дело идет уже о том, имелись ли в распоряжении математиков XVII в. какие-нибудь могущественные арифметические методы, глубочайше связанные с самой природой целого (конечного) числа и несводимого к «полной индукции». Судя по изумительным результатам самого Ферма и вызывающему удивление какому-то утраченному алгоритму Френикля, в руках математиков XVII в. действительно были какие-то могущественные методы, недошедшие до нас. Но каковы они были? Были ли это какие-то новые *принципы* мыслить конечное целое число, о которых мы не можем догадаться? И если, в самом деле, это было — можем ли мы, реставрировав их, освободить теорему об арифметической прогрессии от совершенно чуждого ей анализа бесконечно малых, а заодно и все те предложения Арифметики, которые современная Теория Чисел доказывает чуждыми средствами анализа бесконечно малых? Равносильны ли эти принципы XVII в. «полной индукции»? Все эти вопросы имеют огромное, уже принципиальное значение, соответственно чему повышается чрезвычайно интерес к проблеме реставрации метода Ферма.

Прежде всего, исторически, не имеется ли каких-либо указаний на методы Ферма в его сочинениях и переписке? Ответ на это приходится дать отрицательный, в смысле точных *указаний*: Ферма их сознательно не оставил нигде[7]. Но один намек все-таки имеется. Это знаменитое письмо Ферма к Каркави, где он завещает человечеству реставрацию своих методов и приоткрывает завесу на тайну их. Он сообщает Каркави, что очень часто, при доказательстве свойств чисел, он пользовался открытым им *«методом спуска»*.

Вот, по словам Ферма, в чем состоит этот метод:
желая доказать, что какое-нибудь свойство имеет силу для всех натуральных чисел, Ферма предполагал его ложным для n и тогда выводил его обязательную ложность для меньшего существенно положительного числа $n - k$, где k — число целое, заведомо большее нуля. И таким образом, пишет Ферма, *я оказывался вынужденным безгранично спускаться по целым положительным числам. А так как таковые не допускают никогда бесконечного спуска, то это было достаточным для утверждения истинности рассматриваемого свойства*[8].

«Таким образом, — пишет Ферма, — я мог доказать, например, что всякое целое положительное число есть сумма четырех или меньшего числа квадратов»*.

Оставляя в стороне в высшей степени важный вопрос, имелись ли у Ферма еще и другие общие арифметические принципы и не задаваясь вопросом о том, насколько логически равносилен «метод спуска Ферма» обычной «полной индукции», мы должны перенести все наше внимание на то, что открыв нам метод спуска, Ферма не показал, каким образом им пользоваться, т. е. применять его в каждом отдельном случае, а между тем в этом все дело.

Нет сомнений в том, что при доказательстве своей «великой теоремы» Ферма употребил метод спуска. Но как он его применил, применил ли его к понижению показателя и в допущенном равенстве $x^n + y^n = z^n$ или он понижал просто числа тройки x, y и z, или он применил свой бесконечный спуск еще к каким-либо количествам, связанным с четверкой x, y, z и n — остается неизвестным.

Наконец, остается тайной еще и то, не употребил ли Ферма еще какого-нибудь общего арифметического принципа, совершенно отличного от «метода спуска». Сам Ферма, обычно очень сдержанный, формулируя свою «великую теорему», препровождал ее следующими словами: «*Я нашел удивительное доказательство этого предложения, но поля книги слишком узки, чтобы оно могло на них поместиться*».

Таким образом, изумление самого Ферма могло быть вызвано либо неожиданным способом применения метода спуска, либо употреблением еще какого-либо нового принципа.

И еще здесь интересен вопрос, начинал ли сам Ферма доказывать свою «великую теорему» для случая *кубов*, где $n = 3$, или он начинал с *биквадратов*, т. е. с $n = 4$. Сам он, бросая английским математикам вызов и, когда таковые оказались бессильными, вызывая своих соотечественников, всегда давал либо одно только предложение о *кубах* (т. е. случай $n = 3$), либо начинал полную формулировку своей теоремы с утверждения о *кубах*. Но на деле трудно сказать, какой случай первым представился его уму в момент открытия[9].

Случай биквадратов не исключен, как первый. *Во-первых*, он, без сомнения,

* Цитирую по памяти письмо Ферма к Каркави.

более легкий, чем случай кубов, и исторически известно, что первым был доказан случай именно биквадратов ($n = 4$) Эйлером, причем им был применен как раз метод спуска. *Во-вторых*, также исторически, было естественно начинать с исследования случая не *кубов*, а *биквадратов*. Действительно, обычным приемом, практиковавшимся в XVII в. математиками и, прежде всего, самим Ферма при отыскании делителей заданного числа n, было изображение n в виде разности квадратов

$$n = x^2 - y^2,$$

потому что тогда мы сразу получаем два делителя:

$$n = (x + y)(x - y).$$

Случай же теоремы Ферма для биквадратов $x^4 + y^4 = z^4$ немедленно сводится к случаю разности квадратов, так как мы можем написать

$$x^4 = \left(z^2\right)^2 - \left(y^2\right)^2$$

и, следовательно, здесь естественно применим был для Ферма весь опыт, накопленный в связи с разложением чисел на разности квадратов.

Нам теперь остается подвести итог этому длинному предисловию и указать на характер предлагаемой читателю реставрационной попытки автора работы Леона Андреевича Тер-Микаэляна.

Прежде всего почти не остается никаких сомнений в том, что математики XVII в. и, среди них, первый Ферма имели в своем распоряжении какие-то могущественные методы, не дошедшие до нас и делавшие для них возможными и, может быть, легкими такие проблемы Арифметики, которые совершенно недоступны для нас. Утрата этих методов лишь для математиков кажется особенно чувствительной, но и в истории культуры известно много фактов утраты тех или иных приемов, которые неизвестны нам. Утрачена, например, тайна закалки меди, практиковавшейся в античной культуре; утрачено искусство окраски стекол и их соединения, широко употреблявшееся в Средние Века; утрачен секрет Палисси отделки фаянса и т. д. Некоторые секреты современная наука, по-видимому, раскрыла или близка к их раскрытию. Таков, например, секрет античной пурпурной краски. Другие же почти безнадежны при настоящем состоянии науки.

С этой общекультурной точки зрения, безусловный интерес представляет и реставрация арифметических методов математиков XVII в., не дошедших до нас, даже если не иметь в виду указанного мною принципиального интереса подобной реставрации. И в других науках реставрационные работы имеют большое значение, например, для палеонтологии, где сплошь и рядом приходится выполнять реставрационные работы по восстановлению форм того или иного вымершего животного, причем реставрации эти делаются разными учеными для одного и того же самого животного по-разному, и здесь всегда оставляется место для широкой дискуссии.

В этом отношении математик может вполне спокойно следовать примеру натуралиста и искать столь полного, как это только возможно, восстановления утраченного доказательства Ферма его Великой теоремы.

Предлагаемая вниманию читателя работа Леона Андреевича Тер-Микаэляна является именно такой попыткой.

С большой чуткостью автор работы выбирает за точку отправления разложение чисел на разность двух квадратов, называя это «законом квадратов». С большой точностью автор атакует сначала случай биквадратов (и, следовательно, всех n, делящихся на 4) и с чарующим изяществом, *употребив «метод спуска»*, доказывает верность теоремы Ферма для этого случая. Читая автора, невозможно не поддаться очарованию воскрешающей жизни идей XVII в. В этом — безусловная заслуга автора.

Мы не последуем за автором дальше, предоставляя вниманию и тонкости читателя самому определить, какие части работы автора дадут ему удовлетворение и какие пункты остановят его.

Мы должны указать читателю на то, что проверка работ по доказательству какой-либо трудной теоремы Арифметики, в частности, Великой теоремы Ферма, дело очень сложное и деликатное: обычно доказываемое предложение разделяется на ряд случаев, каждый из таковых делится на подслучаи; каждый из этих последних, в свою очередь, раздробляется на частные случаи и так далее. Полная проверка доказательства теоремы приходит только тогда, когда внимательно проанализированы все указанные случаи, подслучаи, их новые подразделения на частные случаи и т. д. Картина у проверяющего должна быть вся в уме, с ее многочисленными ветвлениями. В случае Великой теоремы, каждый из этих случаев должен приводить к невозможности. А если сюда присоединить еще то обстоятельство, что излагающий доказательство считает некоторые случаи, подслучаи или их подразделения непосредственно ясными, потому что сам близко стоит к делу и все ему представляется без дальнейшего понятным, тогда как проверяющий, по необходимости более далекий, останавливается в недоумении перед всяким таким препятствием — то дело проверки представляется еще более трудным. Кроме того, особую деликатность иногда, при проверке арифметических работ, создает еще то обстоятельство, что, при остановке во время проверки на каком-нибудь пункте, кажущемся абсолютно ошибочным, часто бывает достаточно лишь изменить изложение автора, дав свою собственную мотивировку или доказательство рассматриваемого пункта, и тогда можно опять идти благополучно дальше.

Но главное, что следует читателю принять во внимание, — это то, что дело вовсе не в том, чтобы даваемое доказательство Великой теоремы оказалось верным или неверным. Все дело в *методе*, которым оно проводится. Самое доказательство Великой теоремы прекрасно может оказаться вполне верным и, тем не менее, может не представлять ни малейшей ценности. Ему тогда место в специальном журнале, где оно, в случае если совершенно не соответствует ни характеру XVII в., ни содержит какого-либо арифметического принципа, будет сохраняться как некоторая музейная ценность. Напротив, та или иная попытка рассмотрения Великой теоремы может быть не полной, но если она хорошо дает почувствовать самый характер методов, которыми оперировал divus arithmeticus Ферма — то это уже явится большою ценностью.

В этом — значение и смысл предлагаемой работы автора.

Академик Николай Лузин.

17 июня 1933 г.
Москва, Арбат, д. 25, кв. 8

Публикация С. С. Демидова

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93—06—10134).

Примечания

1 Здесь Н. Н. Лузин допускает ошибку исторического характера. Дело в том, что ни в одном письме Пьер Ферма не сформулировал свою Великую теорему в общем виде. Он никогда не предлагал ее в качестве вызова другим математикам. Единственная формулировка ее записана Пьером Ферма на полях «Арифметики» Диофанта напротив задачи 8 книги II, в которой требуется разложить квадрат на два квадрата. В письмах же неоднократно встречается предложение доказать Великую теорему, но только для $n = 3$ и $n = 4$. Последнее обстоятельство, как справедливо отмечает Н. Н. Лузин, свидетельствует о том, что для этих двух случаев Ферма имел полное доказательство своей теоремы, так как в письмах он ставил перед своими корреспондентами только те задачи, решение которых ему было известно. Но мы имеем и более прямое свидетельство: до нас дошло одно-единственное теоретико-числовое доказательство Ферма, а именно, его Великой теоремы для $n = 4$. Оно было записано на полях «Арифметики» Диофанта в конце книги VI в замечании к комментарию Баше де Мезириака к задаче 24. (См. подробнее в книге: *П. Ферма.* Исследования по теории чисел и диофантову анализу. М., 1992. С. 109—110).

2 На самом деле исследования Великой теоремы показали, что она связана со многими глубокими математическими идеями и методами. Именно при этом было обобщено понятие целого числа и построена арифметика полей алгебраических чисел, введены понятия идеала и дивизора.

3 Ферма действительно долгое время писал своим корреспондентам, что не может доказать простоту всех чисел вида $2^{2^k} + 1$, хотя и уверен в справедливости этого утверждения. Однако в письме к Каркави от 1659 г., о котором Лузин упоминает ниже, Ферма помещает это предложение среди доказанных им теорем.

4 Куммер доказал Великую теорему для всех простых показателей λ которые не входят в числители $\frac{\lambda - 3}{2}$ первых чисел Бернулли. В настоящее время Великая теорема доказана для всех простых показателей $\lambda < 100\,000$.

5 Анри Пуанкаре высказывает свои мысли о полной математической индукции в знаменитой работе «Наука и гипотеза». Он считает, что без этого принципа все теоремы арифметики сводились бы к простой тавтологии (А есть А) или проверке. Так, он пишет: «Мы можем подняться выше только благодаря математической индукции, которая одна может научить нас чему-нибудь новому. Без помощи такой индукции, отличной в известных отношениях от индукции физической, но столь же плодотворной, как и последняя, процесс конструирования был бы бессилен создать науку» (См.: Анри Пуанкаре о науке. М., 1983. С. 21).

6 По существу, Н. Н. Лузин высказывает сомнение в возможности аксиоматического построения системы натуральных чисел. Дальнейшие исследования подтвердили справедливость такой позиции. Уже через год после того, как было написано «Предисловие», Т. Сколемом (Th. Skolem) было доказано, что существуют «нестандартные» модели аксиом Пеано, которые не изоморфны системе натуральных чисел. Более того, невозможно указать конечную или даже бесконечную систему аксиом, единственной (с точностью до изоморфизма) счетной моделью которых была бы система натуральных чисел. (См. об этом: *С. Клини.* Математическая логика. М., 1973; а также: *В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, В. Е. Плиско.* Вводный курс математической логики. М., 1991).

7 Это не совсем так. До нас дошло доказательство Пьера Ферма его Великой теоремы для $n = 4$, которое проведено методом спуска (см. примечание 1). Таким образом, Леонард Эйлер и другие математики XVIII в. имели возможность познакомиться с этим методом.

8 Н. Н. Лузин формулирует «метод спуска» не совсем обычным образом. Сам Ферма в письме к Каркави от 1659 г., о котором упоминает Н. Н. Лузин, говорит, что первоначально он применял этот метод «только для доказательства отрицательных предложений» и поясняет это на примере предложения «не существует прямоугольного треугольника в числах (т. е. стороны которого выражаются целыми числами — *И. Б.*), площадь которого была бы квадратом». Доказательство проводится так: «если бы имелся прямоугольный треугольник в числах, площадь которого была бы квадратом, то существовал бы другой треугольник, меньший первого, который обладал бы тем же свойством. Но если бы существовал второй, меньший первого, обладающий тем же свойством, то аналогичным рассуждением мы бы получили третий, меньший второго, который имел бы то же свойство, и, наконец, четвертый, пятый и т. д., спускаясь до бесконечности. Но если дано число, то не существует бесконечности по спуску меньших чисел (я имею в виду все время целые числа). Отсюда заключаем, что не существует прямоугольного треугольника, площадь которого была бы квадратом». Далее Ферма пишет, что долгое время не мог применить свой метод для доказательства утвердительных предложений, но наконец после «многократно повторенных размышлений» это ему удалось. Однако это потребовало «некоторых новых принципов». Далее, он приводит схему доказательства того, что любое простое число вида $4n + 1$ представимо суммою двух квадратов. Это, в основном, та же схема, которую приводит Лузин. Заметим, однако, что все доказательства методом спуска, которые встречаются у Эйлера и последующих математиков, относятся к отрицательным предложениям. Мне неизвестно ни одного утвердительного предложения в теории чисел, которое было бы доказано при помощи спуска.

9 Догадка Н. Н. Лузина о том, что Великая теорема для $n = 4$ была рассмотрена ранее, чем для случая $n = 3$, подтверждается рядом исторических фактов.
Во-первых, до нас дошло доказательство самого Ферма (см. примечание 7), в котором действительно применялось разложения для разности квадратов:

$$y^4 = z^4 - x^4 = (z^2 - x^2)(z^2 + x^2),$$

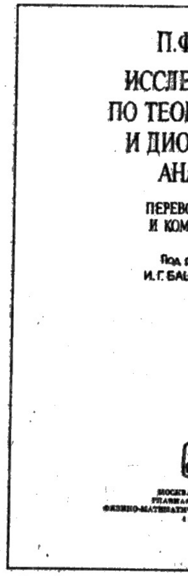
и если $(x, z) = 1$, то $z^2 - x^2 = u^2$, $z^2 + x^2 = v^2$.
С этих соображений и начинает доказательство Ферма.
Во-вторых, Эйлер начал с доказательства Великой теоремы для $n = 4$. Он провел его в 1734 г. И только через 30 лет сумел дать аналогичное доказательство для случая $n = 3$. Для этого ему пришлось, по существу, расширить понятие целого числа, а именно, перенести свойства целых чисел на выражения вида $a + b\sqrt{-3}$, где $a, b \in \mathbf{Z}$, т. е. выделить среди этих чисел «простые», предположить, что для них справедлив закон однозначности разложения на «простые» множители, иначе говоря, перенести на них обычную арифметику. Мог ли Ферма провести подобные рассуждения? В книге А. Вейля «Теория чисел» (*A. Weil.* Number Theory. An approach through history. From Hammurapi to Legendre. Birkhäuser, 1983) приводится реконструкция возможного доказательства Ферма. Эта реконструкция с существенными дополнениями приведена также в книге: *П. Ферма.* Исследования по теории чисел и диофантову анализу. М., 1992.

Примечания И. Г. Башмаковой

И. Р. ШАФАРЕВИЧ

ПЬЕР ФЕРМА И РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ (К ВЫХОДУ РУССКОГО ИЗДАНИЯ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫХ ТРУДОВ П. ФЕРМА)

Каждому, кого интересует логика развития математики, недавно вышедшая книга П. Ферма «Исследования по теории чисел и диофантову анализу» даст богатую пищу для размышлений. Исследования Ферма знаменуют собой рождение теории чисел в рамках математики Нового времени. Но это не только первый значительный шаг вперед в этой области после античности и особенно Диофанта. Идеи, методы и понятия, найденные Ферма в середине XVII в., играли фундаментальную роль во всем последующем развития теории чисел. Их часто можно явно увидеть и в современных исследованиях. Опосредованно, через связи теории чисел с другими разделами математики, они оказали влияние также на развитие алгебры, алгебраической геометрии, теории эллиптических интегралов и функций.



П. Ферма. Исследования по теории чисел и диофантову анализу. М.: Наука, 1992. — 319 с.

Книга содержит все сохранившиеся исследования Ферма по теории чисел. Они состоят из трех частей: переписки Ферма, его замечаний на полях «Арифметики» Диофанта и книги Жака де Бильи «Новое открытие в искусстве анализа», написанной на основе писем Ферма. Последняя книга впервые полностью и без каких-либо изменений переведена с латыни (перевод текстов с французского и латыни Т. А. Бобровниковой). Исследования Ферма дополняются подробными комментариями И. Г. Башмаковой и Т. А. Лавриненко.

При громадном конкретном материале теории чисел очень трудно угадать, какие ее вопросы приводят к новым глубоким концепциям. Например, с первого взгляда совершенно непонятно, почему исследование «магических квадратов» не привело до сих пор к особенно ярким новым идеям, а вопрос о разложении целых чисел в сумму квадратов оказался связанным с несколькими новыми областями математики и частично стимулировал их возникновение. Тем более поразительно, что Ферма выбрал в своих исследованиях как раз такие темы, которые оказались связанными с несколькими основными тенденциями будущего развития математики. Вот главные направления его работ.

1. «Малая теорема Ферма», как ее стали называть много позже: утверждение, что простое число p делит любое число $a^{p-1} - 1$, если a — целое число, взаимно простое с p. Сейчас эта теорема часто приводится как частный случай результата теории групп: $x^n = 1$ для любого элемента x конечной группы порядка n. Как и в отношении большинства его утверждений, неизвестно, как Ферма доказывал эту теорему. Однако по некоторым косвенным признакам можно думать, что он обладал доказательством (аналогичным найденному позже Эйлером), которое годится для любой конечной группы.

2. Вопрос о простых делителях чисел вида $a^2 + 1$. Ферма доказывает, что это — простые числа вида $4n + 1$ и только они. В обозначениях Лежандра это записывается как

ВИЕТ. 1993. №4. С. 37–40. © И. Р. Шафаревич