

О МЕТОДИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВОЗЗРЕНИЯХ Н. Н. ЛУЗИНА +

(к 80-летию со дня рождения)

В. Л. МИНКОВСКИЙ (Орел) +

Создатель и глава московской математической школы академик Николай Николаевич Лузин (1883—1950) был не только творцом новых путей в науке, но и замечательным педагогом. Его глубоко своеобразное педагогическое кредо не является только плодом интуиции большого ученого, а есть прежде всего результат постоянных и глубоких размышлений разносторонне одаренного человека над особенностями первоначального восприятия неискушенным в научных тонкостях интеллектом новых математических понятий и методов.

Мы глубоко убеждены в том, что следует начать тщательное изучение методико-математических воззрений Н. Н. Лузина и, выявив их особенности и достоинства, сознательно использовать в практике современного преподавания.

Самую большую опасность на путях развития науки и в преподавании Н. Н. Лузин усматривал в подмене подлинной науки собранием пустых слов и чисто логических понятий без концепций. Он настойчиво призывал хорошо понять, что наука — это не «логомахия», что за словами всегда должна скрываться сама реальность, т. е. те стороны действительности, которые являются предметом изучения данной науки (1; стр. 25). В частности, так называемую строгость рассуждений при обучении математике Н. Н. Лузин никогда не трактовал как самоцель. Он считал, что ее роль и место определяются математическим развитием обучаемых и теми целями, которые преследуются при изучении того или иного математического вопроса в определенном типе учебных заведений.

Однако при создании любой математической книги, даже справочника, по мнению Н. Н. Лузина, нельзя отказываться от теоретического обоснования предлагаемых правил, так как, «только зная вывод правила, можно быть уверенным в допустимости его применения в таком-то и таком-то случае, встретившемся на практике». Эта мысль особо подчеркивается Николаем Николаевичем потому, что случаев, не являющихся шаблонными, не так уж мало, а справиться с ними можно только при наличии драгоценного качества — «свободы инициативы», достигаемого только одним — знанием (2; стр. 5).

Еще в начале тридцатых годов Н. Н. Лузин, характеризуя педагогику математики современного этапа развития, указывал на огромное преимуще-

ство этого этапа перед предшествующими как освобожденного от мнимой необходимости употреблять лишь немногие формы математических доказательств. Речь здесь идет о том, что только эти избранные формы доказательств считались ранее единственно строгими.

Такое раскрепощение педагогики было достигнуто в результате развития самой математики. Глубокий анализ сущности понятия строгости математического доказательства привел к принципиально важному для педагогики выводу, что неуклонное проведение вполне строгих доказательств, как правило, недостижимо. «Все, о чем можно говорить в этом отношении, это — лишь о безукоризненной редукции сложного к более простому и неясного к более ясному или, точнее, к тому, что в данный момент соглашаемся считать более ясным или, по крайней мере, не могущим привести к противоречию. Именно современная критика математических доказательств и сделала равноценными, в смысле строгости, такие рассуждения, которые еще недавно казались совершенно неравноценными в отношении их научности» (3; стр. VII).

В настоящее время эти идеи стали достоянием советской методико-математической мысли.

Н. Н. Лузин на основе конкретных материалов истории классических руководств по математическому анализу для высшей технической школы пришел к убедительному выводу, что в отношении излагаемых в этих книгах фактов имеет место относительная устойчивость со времени Леонарда Эйлера. Между тем ни один из учебников, как бы прекрасен он ни был написан, не может претендовать на столь почтенное долголетие. Причина этого явления кроется в том, что жизнеспособность учебной книги находится в самой непосредственной зависимости от научных взглядов на основы анализа в переживаемую эпоху. Срок жизни учебного трактата определяется в первую очередь длительностью господства тех научных воззрений, которые нашли в нем свое воплощение.

На первый взгляд казалось бы, что жизнь учебника может быть продлена ценою удаления «соединительной логической ткани» между фактами, обладающими в основах анализа значительным постоянством. Опыт показал, что после этого книга становилась непреодолимо трудной для учащихся. Этот совершенно неожиданный эффект «упроща-

ющей» операции, очевидно, следует объяснить тем, что удалась именно то, что цементировало факты и благодаря этому могущественно помогало памяти.

Из поучительного урока истории Н. Н. Лузин извлекает важный педагогический вывод: обучая математике, никогда не следует ориентироваться лишь на механическую память обучаемых; учебник, составитель которого придерживается такой порочной ориентации, способен вызвать лишь разочарование и охлаждение к книге или даже, в несравненно худшем случае, к самому предмету (3; стр. VI).

Основную трудность создания полноценного курса математического анализа для высших технических школ Н. Н. Лузин усматривает в том, что в этом курсе требуется осуществить органическое сочетание минимума необходимых для инженера сведений из анализа бесконечно малых с такой трактовкой научных фактов, которая не вступает в противоречие с современной наукой. Попытки игнорировать это требование приводят к подмене вузовского курса суррогатом университетского. Наличие подобной фальсификации убедительно выдают такие вещи, как, например, сохранение доказательств иррациональности числа $\sqrt{2}$, абсолютно лишнего для инженера, которого вполне устраивают первые три или четыре десятичных знака названного числа.

Отказ от должной научной трактовки излагаемых фактов неизбежно приводит к недопустимому упрощенству. Так, например, если материал о непрерывности функций излагается с замалчиванием факта о существовании непрерывной кривой без касательной и учащимся тем самым внушается уверенность в существовании у каждой из непрерывных функций производной, то это, бесспорно, разительный пример отхода от требований научности в преподавании.

Нарушение требования научности преподавания Н. Н. Лузин видит не только в сокрытии от учащихся фактов, которые радикально изменили взгляды ученых на трактовку основных понятий курса, но и в сохранении в современных учебных руководствах рудиментарных терминов, понятий и теорий, например теории раскрытия всех видов неопределенностей. В свое время названная теория представляла значительный интерес, но в настоящее время она удерживается в тексте некоторых учебников только в силу прочно установившейся традиции (3; стр. VII).

Однако, сравнивая учебники математического анализа предыдущего и нынешнего столетий в плане сопоставления трактовки в них основных понятий курса, Н. Н. Лузин утверждает, что «в педагогическом отношении лицо учебников по математическому анализу неузнаваемо изменилось». В самом деле, на их страницах не встретишь ныне утверждений типа «сантиметр есть бесконечно малое по сравнению с расстоянием от Земли до Солнца», т. е. претензии определять бесконечно малое на основе противопоставления привычного расстояния космическому, которая культивировалась в прошлом даже «сильными людьми» (4; стр. 7).

Говоря о стиле учебной книги, Н. Н. Лузин характеризует два совершенно различных способа составлять учебник.

Сторонники первого способа составления учебников исходят из постулированного ими же представления об идеальном читателе, т. е. о таком читателе, которому никогда не изменяет безукоризненное внимание, понятливость, догадливость и сообразительность. Разумеется, что такой сверхблага-

приятный читатель понимает автора буквально с полуслова и прочно запоминает каждое из его указаний по поводу самых различных обстоятельств, по крайней мере, на все время изучения книги.

Принятие постулата об идеальном читателе позволяет автору сосредоточить все свое внимание только на предмете изложения. Благодаря этому, бесспорно, достигаются весьма экономные размеры книги, но назвать ее учебной в подлинном смысле этого слова становится затруднительным.

Иллюзия существования идеального читателя основана на том, что «под таким читателем автор просто разумеет себя самого и именно то самое состояние своего ума, которое он имеет в момент создания учебника, но отнюдь не то состояние ума, которое было у автора, когда он сам впервые знакомился с излагаемыми им идеями» (5; стр. XI).

Сторонники же второго способа составления учебников исходят из вполне реального представления о живом читателе, т. е. о таком читателе, первые движения ума которого не свободны от всяческих сомнений, недоумений и заблуждений. Разумеется, что такой читатель весьма нуждается в доброжелательных советах автора — опытного педагога, который как истинный учитель неуклонно следит за состоянием ума изучающего предмет, всегда готов прийти на помощь, предупредить о трудностях и скрытых опасностях.

Отказ от постулата об идеальном читателе требует перемещения центра внимания с предмета изложения на самого читателя: «его ум, начинающуюся его работу, его сначала слепое ощупывание предмета, его непрерывные заблуждения, ошибки, иллюзии и бесчисленные самообманы и, наконец, его трудное шествие по правильно найденному пути».

Проанализированные способы составления учебников глубоко и принципиально отличны друг от друга. В самом деле, первый из них является как бы красноречивым практическим претворением широко известного педагогического девиза Даламбера: «Идите дальше, потом когда-нибудь поймете»; второй же целеустремленно направлен на обеспечение полного понимания учащимися всех процессов рассуждений.

Итак, учебники первого типа неизбежно наталкивают учащихся на путь механического заучивания материала, тем самым лишая их возможности приобрести сознательное понимание предмета, а потому и инициативу в применении приобретенных знаний; учебники же второго типа, исключительно ориентированные на глубокое осознание всех основных принципов, наоборот, способствуют выработке драгоценного качества — умения ориентироваться в новой обстановке, выходящей за пределы привычного шаблона.

«В условиях ориентировки на понимание, — утверждает Н. Н. Лузин, — несколько не страшны дефекты памяти, т. е. механического заучивания, так как самый ход однажды понятого материала не позволяет утратить существенное, деталь же легко восстановить по справочнику. Ориентировка на понимание кажется громоздкой лишь вначале, на деле затраченное на понимание время с лихвой окупается в дальнейшем, так как при правильно понятых основаниях дисциплины, дальнейший материал часто принимает характер лишь упражнений в давно известном, чем создается уже экономия и времени».

Преодоление принципиальных основ даламберовского педагогического девиза было делом трудным и длительным. Оно составило главное содержание

движения за реформу в области преподавания математического анализа.

Характеризуя историю движения, Н. Н. Лузин называет в качестве его наиболее оригинального и яркого представителя в нашей стране Ивана Ивановича Жегалкина, о котором он неизменно говорит как о своем учителе в преподавании с большой теплотой и глубокой признательностью.

Метод преподавания И. И. Жегалкина, имя которого прочно связано с развитием одной из самых молодых математических дисциплин — математической логики, возник на основе материалов работы нескольких десятилетий по тщательному выявлению и углубленному анализу всех типичных ошибок учащихся. Отличительная особенность этого метода и состоит в концентрированной профилактической направленности против иллюзий и заблуждений обучаемых, которая явственно сказывается, например, в характере подбора примеров, в выявлении всех существенных в пределах данного типа вариаций с целью предупреждения возникновения односторонних ассоциаций и неправильных обобщений.

Н. Н. Лузин всемерно поддерживал стремление И. И. Жегалкина освободить или, по меньшей мере, обезопасить учебные курсы математического анализа от некоторых исторически сложившихся терминов, которые наталкивают учащихся на неверную трактовку понятий, обозначаемых этими словами, как например такой термин, как «бесконечно малое».

«Теория пределов в редакции Коши,— утверждает Николай Николаевич,— окончательно обосновала анализ бесконечно малых, подведя под него безупречный логический фундамент. Понятие бесконечно малого получило, наконец, точный смысл: это — самая обыкновенная переменная величина, конечная в течение процесса своего изменения, но имеющая своим пределом нуль. Ньютон в таком случае говорил об «исчезающе малом», мы же, осторожности ради, дабы не вызвать здесь ложной идеи постоянного, говорим о «бесконечно умалющемся» (Жегалкин), переходя на традиционный термин бесконечно малого тогда, когда в умах начинающих этот двусмысленный опасный термин уже не может вызвать никакого соблазна».

Будучи резко враждебным рутине и шаблону и творчески осознав все прогрессивное в преподавании математики, Н. Н. Лузин «пошел,— скажем мы, воспользовавшись его собственным выражением из характеристики одного автора,— по пути истинной педагогики», осуществляя сначала редактирование (с 1922 г.) и основательную переработку (с 1930 г.) «Элементов дифференциального и интегрального исчисления» В. Грэнвилля и затем создав собственные курсы дифференциального и интегрального исчисления (1946 г.), и теории функций действительного переменного (1940 г.).

Свою деятельность по «ориентировке преподавания принципов математического анализа на понимание, а не на заучивание» Николай Николаевич не случайно начал с редактирования перевода учебника английского автора Виллиама Грэнвилля: в этой книге интуитивное осмысливание предмета всегда предпосылается аналитическому исследованию.

На учебниках Н. Н. Лузина воспитано не одно поколение инженеров и учителей. Основные методологические и методические установки этих руководств оказали глубокое влияние на развитие советской методики математики в целом.

Создавая свои учебники для высшей школы, Николай Николаевич неизменно ориентировался на

следующую постановку этой проблемы: «Здесь должна быть решена своеобразная задача вариационного исчисления: дать минимум объема при максимуме заботы о начинающем читателе, научности и художественности».

Внимание к начинающему читателю выражается прежде всего в интуитивной психологической подготовке к восприятию определений (например, непрерывности функции в точке), доказательств и в предельно отчетливом оттенении всех существенных элементов их.

Исходя из убеждения, что источником ошибок учащихся, «в конце концов, является неверная оценка их умом тех или иных элементов обидной жизни» (5; стр. X), Н. Н. Лузин изложение многих вопросов (число, переменная величина, отрезок и промежутки, функция и т. д.) предваряет анализом математической сущности явлений окружающей нас действительности.

В некоторых случаях Николай Николаевич считает целесообразным фиксировать внимание обучаемых на самих типичных ошибках, но делает это не мимоходом, не ограничиваясь простым указанием на ошибку, а тщательно выясняет сущность и причины появления ошибки (см., например, параграф «Об ошибках, часто случающихся при дифференцировании функции от функции»). В частности, с этой же целью используются и «кажущиеся парадоксы» — математические софизмы, связанные с делением на нуль, легкомысленным и неосторожным обращением с пределами и бесконечностью.

Той же неизменной заботой о читателе продиктовано четкое расчленение трудностей, усиленное внимание к детальной геометрической интерпретации аналитических фактов и ряд замечаний педагогического отточенного характера («Учащийся отнюдь не должен думать, что все описываемые случаи разрыва функции «слишком отвлеченны», имеют лишь «теоретический» интерес и «никогда» не встречаются на практике. Напротив, современная техника как раз имеет дело с описываемым поведением функции. Например, ...»).

Некоторым представляется, что Н. Н. Лузин проявляет излишнее стремление к простоте; далеко не все осознают, что эта простота есть результат органического синтеза таланта крупнейшего математика и замечательного педагога. Внимательное, предупредительное отношение к своему читателю не выражает у Николая Николаевича снисходительности академика к массовому студенту, а является плодом исключительно проникновенного понимания процесса становления математических знаний.

«Обычно здесь слышишь,— говорит Н. Н. Лузин,— от неопытных еще педагогов вопрос: «Да зачем брать на себя такой труд? Не проще ли изложить предмет, как придется, но лишь бы правильно, и просто потребовать от учащегося не какого-то там утонченного понимания предмета, а твердого его знания, для чего ведь всегда найдутся в случае необходимости и принуждающие возможности?». Поставленный таким образом вопрос есть вопрос о замене полного понимания предмета его заучиванием».

При создании своих учебных руководств Николай Николаевич глубоко и творчески пользовался принципом научности в преподавании математики, который всегда трактовался им как требование не противоречить современному состоянию науки, а не рабски следовать за этим состоянием. В частности, до последних дней своей жизни он утверждал, что явно нецелесообразно в начальном преподавании математического анализа становиться на стационар-

ную точку зрения, лишая эту дисциплину самой идеи переменной величины.

«Наиболее ярким выражением происшедшей перемены взглядов,—говорит Н. Н. Лузин,—явился известный университетский учебник Валле Пуссена «Курс анализа бесконечно малых» (второе и третье издания), где в мелком шрифте знаменитый автор показал, каким образом математический анализ может быть построен без понятия переменного. Но уже в следующих изданиях автор возвратился к «ε-определениям», находя (с полным основанием), что стационарный математический анализ представляет еще большие логические трудности, чем классический «ε-анализ» Коши с его явным призывом к изначальной интуиции времени» (4; стр. 7).

Допуская в плане сознательного педагогического корректива нестрогости в изложении, Николай Николаевич считает нужным фиксировать внимание своего читателя на этом обстоятельстве.

Авторам учебных книг Н. Н. Лузин настоятельно рекомендует изучение источников, дающих историческую перспективу, так как их содержание всегда существенно обогащает составителя руководства, даже и в том случае, когда оно не попадает непосредственно на страницы учебника.

Постоянно пропагандируемое Н. Н. Лузиным требование максимальной художественности научного изложения многим представляется неправомерным по отношению к математическому материалу, несмотря на то, что еще учитель Николая Николаевича Б. К. Млодзеевский дал прекрасные образцы реализации этого требования.

Разносторонний ученый Болеслав Корнелиевич Млодзеевский своими научными сочинениями и учебниками блестяще доказал, что наука и учебный предмет ничего не утрачивают от художественной изобразительности и изящества стиля, а приобретают большую доступность и становятся интересными для многих.

Уделяя внимание художественной выразительности научного стиля, Н. Н. Лузин в созданном им курсе теории функций действительного переменного достигает вершин в совершенствовании этой стороны изложения. Он считает возможным сделать углубленное изучение математического анализа вполне доступным и по-настоящему привлекательным. На многих страницах названной книги абстрактные рассуждения сопровождаются такими образными сравнениями, которые придают изложению подлинную художественность. Ограничиваемся одним примером, относящимся к исходному понятию — понятию множества.

«Читатель не должен упускать из виду, что самое существенное в понятии множества — это акт объединения различных предметов в одно целое, именно в множество M , элементами которого (после акта объединения) будут данные предметы. Этот существенный пункт и желал подчеркнуть основатель теории множеств Георг Кантор, когда он впервые высказал свое знаменитое положение: «Множество есть многое, мыслимое нами как единое».

Чтобы прийти на помощь читателю, удобно будет прибегнуть к такому несколько грубому образу. Представим себе некоторую прозрачную непроницаемую оболочку, нечто вроде плотно закрытого прозрачного мешка. Предположим, что внутри этой оболочки заключены все элементы I данного множества M и что, кроме них, внутри оболочки никаких других предметов не находится. Эта оболочка с предметами I , находящимися внутри нее, и может служить образом множества M , составлен-

ного из элементов I . Сама же эта прозрачная оболочка, охватывающая все элементы (и ничего другого, кроме них), довольно хорошо изображает тот акт объединения элементов I , в результате которого создается множество M . Обычно такой акт объединения различных элементов в одно множество M совершается путем выяснения некоторого **характеристического свойства**, которым обладают элементы I (и только они одни). Например, когда мы произносим фразу: «Множество всех положительных чисел» — мы выявлением свойства «**быть положительным**» тотчас же выделяем из всех действительных чисел одни лишь положительные числа и как бы помещаем их все (и только их одних) в нашу прозрачную оболочку, оставляя снаружи нее все другие числа (отрицательные и нуль), как и все другие предметы».

Научно-педагогическое творчество Н. Н. Лузина имеет своими истоками его преподавательскую деятельность в средней и высшей школе.

Лекции Николая Николаевича отличались яркостью, содержательностью и идейной глубиной. Его ближайшие соратники известные ученые нашей страны Н. К. Бари и В. В. Голубев очень хорошо поведали о главном в этих лекциях — пробуждении творческой активности слушателей (6; стр. 475—476).

Лекции Лузина были таковы, что они запоминались на всю жизнь. Читать лекции так, чтобы они не забывались, — это высшая цель каждого лектора.

Создание учебных книг лузинского стиля — дело не только трудоемкое, но и требующее наличия у их авторов подлинного педагогического таланта.

Н. Н. Лузин очень охотно и всегда с большим подъемом выступал с глубоко содержательными лекциями перед московскими учителями. Учителя отмечают отчетливо выраженную научно-педагогическую целеустремленность этих лекций: преодоление неправильных, устаревших воззрений, имеющих в учебниках; выявление настоящей необходимости правильной трактовки принципиальных вопросов школьного курса математики; освежение материала, непосредственно используемого в классе.

Заканчивая этот очерк, следует еще раз подчеркнуть мысль о том, что академик Николай Николаевич Лузин, следуя славной традиции всех крупнейших русских математиков, внес существенный вклад в разработку проблем преподавания математики.

Литература

1. Н. Н. Лузин, Современное состояние теории функций действительного переменного. «Труды Всероссийского съезда математиков в Москве 27 апреля — 4 мая 1927 г.», М.—Л., 1928.
2. Н. Н. Лузин, Предисловие к русскому переводу справочника по математике Г. Дуббеля, М.—Л., 1933.
3. Н. Н. Лузин, Предисловие к книге В. Грэнвилля «Элементы дифференциального и интегрального исчисления», ч. I, изд. 3, Л., 1924.
4. Н. Н. Лузин, Дифференциальное исчисление, М., 1946.
5. Н. Н. Лузин, Предисловие к книге И. И. Жегалкина и М. И. Слудской «Введение в анализ», М., 1935.
6. Н. К. Бари и В. В. Голубев, Биография Н. Н. Лузина. «Собрание сочинений Н. Н. Лузина», т. III, М., 1959.