Г. ВЕЙЛЬ

О ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ

СБОРНИК РАБОТ

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
А. П. ЮШКЕВИЧА

ПРЕДИСЛОВИЕ
С. А. ЯНОВСКОЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1934 ЛЕНИНГРАД

2-я тип. ОНТИ им. Евгении Соколовой. Ленинград, пр. Красных Командиров, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Наиболее интересным явлением в области современной философии математики безусловно следует признать интуиционизм. Интуиционизм — не изолированное, ограничивающееся математикой или философией математики, явление. Он не случайно возник и получил широкое распространение именно в XX столетии, в эпоху империализма. Современный кризис основ математики наиболее яркое выражение получает именно в философии интуиционизма.

Развитие науки уже в XIX столетии находилось в противоречии с общественными отношениями, характеризующими капитализм. Но все же многочисленные ученые представители господствующего класса, рядясь в тогу научной „беспартийности", могли еще в ту пору пытаться не замечать этого противоречия. Эпоха империализма, до предела обнажившая и обострившая все противоречия капиталистического общества, сделала такую позицию невозможной. Ученые были поставлены перед неизбежностью выбора. И между наукой, в муках рождающей диалектический материализм, и философией класса, в устах представителей которого все чаще и чаще звучит теперь лозунг „назад к варварству!", интуиционисты выбрали философию. Они принесли основные органические части живого тела современной математики в жертву своей реакционной философской установке, в жертву стоящим вне науки метафизическим догматам.

Это не исключает правильности ряда отдельных положений интуиционизма, особенно в критической его части, направленной против формально-логических методов в математике. То обстоятельство, что империализм есть загнивающий капитализм, не исключает элементов роста и развития отдельных областей, отдельных моментов науки и техники. Больше того, именно этот рост, усиливающий противоречия капитализма, и ведет к неизбежности его конца. Именно такой подход необходим и при оценке интуиционизма. Противоречивость интуиционизма, наличие в нем таких моментов, которые обусловлены именно ростом науки делают знакомство с ним необходимым не только для его критиков, но и в целях положительной разработки марксистско-ленинской философии математики.

Если еще в начале текущего столетия большинство математиков, в том числе и столь крупных как Ф. Клейн, были убеждены в том, что работами Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса проблема обоснования анализа решена окончательно и бесповоротно, что проблемы иррационального числа, например, больше не существует, если такое убеждение распространяется еще и в настоящее время среди подрастающего поколения

наших молодых советских математиков — не только студенчества, но и аспирантуры, — то работы Вейля во всяком случае показывают, что вопрос этот еще спорный, что над проблемами числа и континуума еще много и много придется поработать. Больше того, если такому крупному математику, каким является Вейль, приходится констатировать наличие тупика, в который это обоснование заходит, если он вынужден заговорить поэтому о кризисе основ математики, то это является еще одним прекрасным доказательством невозможности вообще обосновать математику на путях идеализма.

Кризис основ математики, кризис естествознания вообще дает возможность фашистам вопить о крушении науки. В действительности же этот кризис, как было отмечено Лениным еще 25 лет тому назад, обусловлен как раз несоответствием методологической оболочки конкретному содержанию науки. В этом смысле ленинская оценка этого кризиса как кризиса роста остается справедливой и для настоящего момента, ибо выход из кризиса есть. Он лежит на путях диалектического материализма.

С. Яновская.

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

25 лет назад в своем „Материализме и эмпириокритицизме" Ленин показал, что переживаемый современной ему физикой кризис есть по существу кризис ее методологических основ. Нарисованная Лениным картина философской борьбы идеализма с материализмом вокруг новейших научных открытий оказалась, как того и следовало ожидать, типичной для всего буржуазного естествознания и математики. Последнее десятилетие и в области математики прошло под знаком кризиса ее методологических основ.

Но если с ленинской оценкой кризиса физики широкие слои наших советских читателей имеют возможность непосредственно познакомиться по „Материализму и эмпириокритицизму", то сущность кризиса основ математики в нашей литературе осталась почти неосвещенной. У нас нет до сих пор даже сколько-нибудь удовлетворительного, в смысле полноты, изложения взглядов различных борющихся групп. Между тем выработка марксистских воззрений немыслима без знания и понимания этих — в основном нематериалистических — теорий. Нужно иметь в виду, что кризис основ математики был, как и кризис физики, вызван в значительной мере именно ростом самих математических теорий, выдвинувших ряд новых и по-новому поставивших ряд старых методологических проблем, мимо которых теперь пройти уже нельзя. Кроме того в работах школ Ресселя, Гильберта и др. имеется тонко разработанный формальный аппарат, без овладения которым невозможно обойтись при работе.

Все эти обстоятельства и поставили вопрос о необходимости выпуска серии сборников, посвященных буржуазной философии математики и имеющих своей задачей дать возможность советскому читателю познакомиться с современными философскими спорами вокруг основных методологических проблем математики по оригинальным работам буржуазных математиков и философов математики.

В настоящее время основными направлениями в иностранной философии математики являются учения логистов, интуиционистов и формалистов. Если воззрения школы Рёсселя в русской литературе представлены несколькими переводными работами [1]), то изложений идей двух других и притом более новых течений почти совершенно не имеется. Работы Пуанкаре [2]) поставить в счет здесь, разумеется, нельзя, ибо современный интуиционизм во многом отличается от старого. Что касается нашей небогатой журнальной литературы, то статья А. Я. Хинчина [3]) дает несколько субъективное изложение идей Броуера, а критическая статья С. А. Яновской, лишь весьма кратко намечает основные философские принципы интуиционизма [4]).

Приходилось, таким образом, выбирать для начала между сборниками по интуиционизму или по формализму. Я остановился на первом, ибо, хотя развитие воззрений школы Гильберта и продолжало в основном намеченную им более 30 лет назад линию формального аксиоматического метода, но в последние десятилетия философская борьба в среде математиков шла по существу вокруг проблем, поставленных интуиционизмом. В дальнейшем, конечно,будет нужно дать советскому читателю возможность познакомиться с оригинальными работами гильбертовского направления.

При выборе материала для этого сборника я счел полезным остановиться на статьях Вейля, а не главы интуиционистской школы Броуера, потому что работы последнего доступны лишь очень ограниченному кругу читателей. Помещенные же здесь статьи Вейля, не говоря уже о том, что они неизмеримо более понятно, чем работы Броуера, излагают, — быть может, с несущественными отклонениями,— современные интуиционистские идеи, обладают еще тем преимуществом, что уделяют достаточно места рассмотрению других течений и развитому в математической логике аппарату.

„Легкость“ работ Вейля не следует понимать, однако, в абсолютном смысле. Будучи значительно более доступными, чем работы Броуера, они все же весьма трудны. Приходится особенно сожалеть о том, что места, имеющие наибольшее принципиальное значение, например посвященные доказательству наличия „порочного круга“ в современном обосновании анализа, очень туманны.

Несмотря на некоторые повторения, три эти статьи хорошо дополняют друг друга. Первая, более краткая — „Современное состояние проблемы познания в математике“ [5]) — и притом более других популярная, дает общий исторический обзор проблемы обоснования математики. Вторая, представляющая собой часть книги „Философия математики и естествознания“ [6]), довольно детально излагает основные

---

[1]) Л. Кутюра, Философские принципы математики, пер. Б. Кореня под ред. П. С. Юшкевича, 1912. „Новые идеи в математике“, сб. 10-й (полемика между Кутюра и Пуанкаре), 1915.

[2]) „Наука и гипотеза“, „Ценность науки“, „Наука и метод“, „Последние мысли“, „Новые идеи в математике“, сб. 10-й.

[3]) „Вестник Комм. академии“, № 16.

[4]) См. сборник „На борьбу за материалистическую диалектику в математике“.

[5]) Die heutige Erkenntnisslage in der Mathematik, Symposion 1925, I.

[6]) Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, 1927, 4-й вып. „Handbuch der Philosophie“ под ред. A. Baeumler и M. Schröter.

идеи и приемы математической логики, аксиоматический метод, учение о числе, об иррациональных числах и идеи интуиционизма и формализма. В последней, наконец, содержатся систематическое и подробное развитие интуиционистских воззрений, как их понимает Вейль [1]).

Нельзя, однако, не отметить, что при упомянутых достоинствах работ Вейля, они страдают одним недостатком, вина за который лежит отнюдь не на авторе. Все три статьи были напечатаны до 1927 г. Между тем за последние годы в области обоснования математики был получен ряд новых и выдающихся результатов. Скончавшийся в 1930 г. английский математик Ф. Рамзей внес ряд существенных изменений в систему Рёсселя, имевших целью построение математики без „расширенной теории типов" и допущение так называемого непредикативного образования понятий [2]). А. Хейтинг разработал интуиционистскую систему логики суждений [3]). Но особенно замечательные открытия принадлежат К. Геделю. Главные его результаты в общих чертах таковы. Во-первых, он нашел, что для всякой формальной системы математики можно сформулировать в ее же терминах такие арифметические положения, которые неразрешимы ее средствами, т. е. что невозможна „полнота" такой формальной системы. Во-вторых ему, удалось показать, что суждение о непротиворечивости всякой такой системы принадлежит к числу неразрешимых в ее рамках положений. Таким образом невозможно доказать непротиворечивость математики и логики при помощи чистой математики и логики и нельзя доказать непротиворечивость любой формальной системы, включающей учение о натуральных числах, при помощи средств, принадлежащих только к самой этой системе. Кроме того Геделю удалось установить соответствие между предложениями классического и интуиционистского исчислений суждений, при котором первое — включая и закон исключенного третьего — превращается в часть интуиционизма [4]). Наконец, А. Н. Колмогоров опубликовал интересную работу по вопросу о возможной интерпретации интуиционистской логики, как исчисления задач [5]). И эти исследования нужно осветить перед нашим читателем.

От марксистски образованного читателя можно, разумеется, ожидать критического подхода к публикуемым ниже работам Вейля, ибо основные принципы и идеи интуиционизма носят ярко идеалистический характер. Таково уже самое понятие сверхопытной и сверхлогической праинтуиции натурального числа и понятие произвольно становящейся посредством актов свободного выбора последовательности, лежащее

---

[1]) „Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik", Math. Zeitschr. 10, 1921.

[2]) См. краткое, но доступное изложение у примыкающего с некоторыми оговорками к Рамзею Р. Карнапа: R. Carnap, „Die logizistische Grundlegung der Mathematik", Erkenntnis, 1931, № 2.

[3]) См. A. Heyting, „Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik", Erkenntnis, 1931, № 2 (популярное изложение) и его же статьи „Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik" и „Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik" в Sitz — Ber. der Preuss. Akad. за 1930 г.

[4]) См. заметку Геделя в Erkenntnis, 1931, № 2, и его статьи „Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls", Monatshefte f. Math. u. Phys. 1930, „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica", ib. 1931 и популярное изложение у K. Menger, „Die neue Logik" в „Krise und Neuaufbau in den exakten Naturwissenschaften. Fünf wiener Vorträge", 1933.

[5]) „Zur Deutung der intuitionistischen Logik", Math. Zeitschr., 1931.

в фундаменте броуеровского учения о континууме. Я полагаю также, что голое отрицание интуиционистами закона исключенного третьего и так называемых „доказательств существования" носит совершенно недиалектический характер; оно приводит интуиционистов к отчетливому агностицизму в математике и к разрушению ряда важных ее отделов. Этот идеализм в философии математики полностью согласуется с гуссерлианством Вейля и с субъективным идеализмом и волюнтаризмом Броуера, декларированным последним, например, в его докладе в Вене, в котором он, в частности, рассматривает мир как творение нашей воли и утверждает индетерминированность его.

Чтобы дать читателю несколько более яркое представление о сущности этого махрового идеализма, достаточно привести несколько цитат из этого доклада Броуера[1]). „Среди математических рассмотрений, навязанных всем людям совокупной волей всего человечества, — пишет Броуер, — надо прежде всего назвать предпосылку гипотетического «объективного пространственно-временного мира»". „Само собой разумеется, что все существование какой-нибудь каузальной последовательности заключается в том, что она является коррелятом некоторой, вызывающей математические акции, установки человеческой воли; не может быть и речи о существовании каузальной связи мира независимо от человека". Итак, объективный мир „навязан" нам какой-то „совокупной волей всего человечества", причинной связи независимо от человека не существует, а время (собственно говоря, у Броуера нет времени, а есть временная установка человека), порождающее с помощью интуиции натуральный ряд чисел,— эту первооснову математики — „есть не что иное, как интеллектуальный первофеномен распада какого-нибудь момента жизни на две качественно различные вещи, из которых одна ощущается, как уступающая место другой и тем не менее как утверждающаяся путем акта воспоминания. Одновременно с этим распавшийся момент жизни обособляется от „Я" и перемещается сам по себе в мир, который можно назвать миром интуиции. Возникшую благодаря временной установке временную двоицу или двучленную временную последовательность явлений можно в свою очередь рассматривать как один из членов новой двоицы, благодаря чему создается временная троица и т. д.". И эта насквозь идеалистическая фантастика представляет собой философскую установку одного из крупнейших математиков современности!

Из настоящей работы читатель увидит все же, что интуиционизм ставил ряд важнейших вопросов в своей критике формально-логического направления в математике и теории континуума. В этом нет, пожалуй, ничего удивительного. „Когда один идеалист ругает другого, на этом выигрывает материализм" (Ленин). И значение работ Вейля именно в этой их критической стороне.

Пользуюсь случаем выразить дружескую благодарность С. А. Яновской, оказавшей мне помощь при выборе материала для сборника и прочитавшей настоящее предисловие, и Д. А. Райкову, сделавшему ряд ценных указаний при чтении корректур.

А. Юшкевич.

---

[1]) „Mathematik, Wissenschaft und Sprache". Mon.-Hefte f. Math. u. Phys., 1929.