

Добавление к предыдущему, частично с ним пересекающееся.

Список А

1. Исследовать на равномерную сходимость последовательность функций $f_n(x) = e^{-nx} - e^{-2nx}$ на $[0, \infty)$.

2-6. Найти 100-й коэффициент ряда Тейлора в нуле для

$$\frac{1}{1+x+x^2}; \quad \frac{1}{1+x-x^2}; \quad e^x \cos x; \quad \operatorname{arctg} x; \quad \frac{1}{e^x - 1}$$

7-13. Просуммировать ряды

$$\sum_{n \geq 0} n^2 x^n; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}; \quad \sum_{n \geq 0} \operatorname{ch}(nt)x^n; \quad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sin(nt)x^n; \quad \sum_{n \geq 0} q^n \cos nt;$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}; \quad \sum \frac{(-1)^n}{3n+1}; \quad \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots \quad (|x| < 1)$$

14. Найти степенной ряд $f(x) = \sum a_n x^n$, удовлетворяющий условиям

$$f'' + xf = 0; \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0$$

15. Найти площадь, ограниченную кривой $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$

16. Найти площадь фигуры

$$0 < a_1 \leq x/y \leq a_2; \quad 0 < b_1 \leq xy \leq b_2; \quad x > 0, y > 0$$

17. Вычислить

$$\int \int_{|x|+|y| \leq 1} (x^2 - y^2)^{20} dx dy$$

18. Расставить пределы интегрирования в пирамиде с вершинами $(1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, 1, -1)$, $(1, -1, -1)$.

19. Расставить пределы интегрирования в области $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $1 \leq x + y + z \leq 2$.

20. Вывести формулу для якобиана перехода к сферическим и цилиндрическим координатам.

21. Конечен ли объем области, зажатой между гиперболоидом $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ и асимптотическим конусом $x^2 + y^2 - z^2 = 0$?

22. При каких α конечен интеграл

$$\int \int_{x^2+y^2 \geq a^2} (x^2 + y^2)^{-\alpha} dx dy;$$

23. При каких α конечен объем "веретена"

$$x^2 + y^2 \leq a^2; \quad 0 \leq z \leq (x^2 + y^2)^{-\alpha}$$

24. Вычислить интеграл $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$

25. Найти центр тяжести полуокружности.

26. Найти кинетическую энергию проволочного кольца, вращающегося вокруг своего диаметра.

27. Найти центр тяжести полусфера

28. Найти центр тяжести полусферы

29. Вывести формулу для кулоновского притяжения точки к равномерно заряженной плоскости

30. Вывести формулу для площади сферического пояса $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $a \leq z \leq b$.

31. Какая часть поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2$ лежит внутри конуса $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \phi$, $z > 0$?

32. Является ли поле $\frac{y^i - x^j}{x^2 + y^2}$ потенциальным в \mathbb{R}^2 без начала координат?

Список Б

1. Разложить $\operatorname{arcsin} x$ по степеням $(1-x)$ в левой полуокрестности точки 1.

2. Разложить функции $\operatorname{arctg} x$, $\int_x^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ в ряд по степеням $1/x$ при $x \rightarrow +\infty$.

3. Найти коэффициент при x^{1998} в тейлоровском разложении $\sum_{n>0} \frac{x^n}{1-x^n}$.

4. Найти коэффициент при x^{100000} в произведениях $\prod_{n=1}^{100} (1 + x^{3^n})$, $\prod_{n=1}^{100} (1 + x^{3^n} + x^{2 \cdot 3^n})$
5. Найти коэффициент при x^6 в произведении $\prod_{n=1}^{100} (1 - x^n)^{-1}$
6. Пусть f – непрерывная ограниченная при $x > 0$ функция. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^\infty f(x) e^{-nx} dx$
7. Расставить пределы интегрирования в области, ограниченной $z = 1 - x^2$, $z = -1 + y^2$, в порядке $\int dz \int dy \int f(x, y, z) dx$
8. Переставить пределы интегрирования в $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y f(z) dz$ в порядке $\int dz \int dy \int f(z) dx$ и свести интеграл к однократному.
9. При каких α сходится интеграл $\int \int_{\mathbb{R}^2} (1 + x^2 + y^2)^{-\alpha} dx dy$?
10. Вычислить интегралы $\int_{\mathbb{R}} e^{-(1+i\alpha)x^2} dx$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos(\alpha x^2) dx$
11. Вычислить $\int \int_{\mathbb{R}^2} (1 + ax^2 + 2bxy + cy^2)^{-\alpha} dx dy$ где $ac - b^2 > 0$.
12. При каких $s > 0$, $t > 0$, α сходится интеграл $\int \int_{\mathbb{R}^2} x^{s-1} y^{t-1} (1 + x + y)^{-\alpha} dx dy$?
13. При каких p, q сходится интеграл $\int \int_{\mathbb{R}^2} (1 + x^p + y^q)^{-\alpha} dx dy$?
14. Найти объем пирамиды $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq 1$ в \mathbb{R}^n .
15. Найти объем n -мерного шара
16. Вычислить $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum a_{ij} x_i x_j} dx$, где $\sum a_{ij} x_i x_j$ – положительно определенная квадратичная форма.
17. Дана сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и цилиндр $x^2 + y^2 = 1$. Доказать, что отображение $(x, y, z) \mapsto (x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ из сферы в цилиндр сохраняет площади фигур.
18. Найти силу гравитационного притяжения точки к однородной сфере
19. В соседней вселенной сила гравитационного притяжения обратно пропорциональна расстоянию. Найти силу гравитационного притяжения точки к однородной сфере в соседней вселенной.
20. Вычислить площадь поверхности тора
21. Покажите, что центральное поле, т.е. поле вида $\frac{\alpha(r)}{r} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ является потенциальным. При каких $\alpha(r)$ оно является бездивергентным?
22. Найти потенциал поля $\frac{y\vec{i} - x\vec{j}}{x^2 + y^2}$ в плоскости \mathbb{R}^2 , из которой выкинута полуось $y = 0, x < 0$.
23. Найти работу поля $\frac{y\vec{i} - x\vec{j}}{x^2 + y^2}$ вдоль контура $x = \cos 3t + 2 \cos 2t, y = \sin 3t + 2 \sin 2t$
24. Найти поток

$$\iint \frac{xdy dz + ydz dx + zdy dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

через эллипсоид $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

25. Изобразить кривую и найти ее центр тяжести

$$\begin{cases} x = (a + b \cos 3\phi) \cos 2\phi \\ y = (a + b \sin 3\phi) \cos 2\phi \\ z = b \sin 3\phi \end{cases}$$

26. а) Найти момент инерции однородного куба относительно оси, проходящей через центры противоположных граней.

- б) Найти момент инерции относительно любой оси, проходящей через центр куба