Невероятные совпадения и задача Морозова–Фоменко об исторических складках

Ю.А.Неретин

Время от времени встречается следующий полуматематический вопрос: допустим, что совпали два числа или два набора чисел, у которых нет видимых причин быть совпадающими. Могло ли это произойти случайно, или из их совпадения вытекают неожиданные следствия? В заметке эта задача обсуждается на примере теории исторических складок (она же теория "новой хронологии"), которая сейчас довольно модна и которой посвящена заметная часть издаваемой у нас исторической литературы.

§1 Задача Морозова

Существует

идея, что в нашем понимании истории и исторической хронологии есть глобальная ошибка, и что какая-то древняя эпоха (или страна) в изложении историков раздвоилась и ошибочно воспринимается нами теперь как две разные эпохи (или страны). В цели данной заметки входит обсуждение не самих этих теорий, а числовой мистики, используемой для их обоснования.

Предлагается следующий способ обнаружения исторических наложений. Допустим, что есть две династии, скажем из 15 королей(султанов, императоров и пр.) каждая, такие, что время правления j-ого короля одной династии совпадает со временем правления j-ого короля другой династии (для всех j). Такое совпадение не может быть случайным, а потому мы имеем право утверждать, что династии на самом деле совпадали и раздвоились лишь в представлении историков. Явные различия в биографиях соответствующих королей мы игнорируем, потому что летописцы и историки неточны, да и тенденциозны[1].

Как к этому относиться? Вопрос праздный, потому что ни одного такого совпадения не обнаружено.

Однако в 20-ых годах 20-го века известный революционер-народник Н.А.Морозов предложил 3 пары "династий", которые, по его мнению, были подозрительно похожи. В середине 70-ых годов нескольких московских математиков (М.С.Постников, А.Т.Фоменко, А.С.Мищенко, Е.М.Никишин и др.) заинтересовал вопрос о том, имеют ли списки Морозова какую-либо доказательную силу. Позднее этот вопрос разрабатывался главным образом академиком РАН А.Т.Фоменко и некоторыми его учениками.

Цель данной заметки — не полемика со школой Фоменко[2], а независимое (отрицательное) решение этой забавной и простой математической задачи. Никакого отношения к истории эта заметка не имеет, списки правителей для нас — лишь предмет статистической обработки.

Итак, в книге А.Т.Фоменко [1] на стр. 156–172 содержится 13 параллельных таблиц. Чтобы не быть голословными, приведем первую из них.

---

[1]В частности, предлагается игнорировать разницу в именах, странах, вероисповеданиях и т.п. Предлагается также не обращать внимания на возраст, в котором правители вступали на царство и степень родства правителей.

[2]См. по этому поводу интересную статью [2].

Слева – Каролинги, справа – правители Римской Империи. Подозревается (а точнее утверждается на основании "близости" продолжительностей правлений), что левый список идентичен правому, т.е. эпоха Карла Великого и эпоха великого переселения народов совпадают.

Таблица 1.

1) Пипин Геристальский 681–714 (33)	1) Констанций 324–361 (37)
2) Карл Мартелл 721–741 (20)	2) Феодосий 379–395 (16)
3) Пипин Короткий 754–768 (14)	3) Аркадий 395–408 (13)
4) Карл Великий 768–814 (46)	4)Феодосий Младший 408–450 (42)
5) Карломан 768–771 или 772 (4)	5) Константин 407–411 (4)
6) Людовик I 814–833 (19)	6) Лев I 457–474 (17)
7) Лотарь 840–855 (15)	7) Зенон 474–491 (17)
8) Карл Плешивый 840–875 (35)	8) Теодорих 493–526 (33)
9) Людовик Германский 843–875 (32)	9) Анастасий 491–518 (27)
10) Людовик II 855–875 (20)	10) Одоакр 476–493 (17)
11) Карл Толстый 880–888 (8)	11) Юстин 518–527 (9)

Длительности правлений здесь совпадают не точно, разности между ними равны соответственно

$$4,\quad 4,\quad 1,\quad 4,\quad 0,\quad 2,\quad 2,\quad 2,\quad 5,\quad 3,\quad 1 \tag{1.1}$$

При выписывании как левой колонки, так и правой, была проявлена определенная гибкость. Мы не ставим под сомнение ее правомерность, но, для понимания задачи, все же обсудим правую (для определенности) колонку[3].

$1A^*$. Восемь из упомянутых лиц – императоры Римской Империи. Поздняя Римская Империя 284–476 обычно имела 2–4 признаваемых друг другом императоров. В "Истории" Гиббона за рассматриваемое время (324–527) перечислен 31 император.

$1B^*$. Упомянутый Константин обычно числится по списку "узурпаторов". За обсуждаемое время были по крайней мере еще 4 "узурпатора", не менее достойных оказаться в Таблице 1, чем Константин.

$1C^*$. Упомянутые Одоакр и Теодорих Римской Империей не правили и императорского титула себе не присваивали. Это короли "варварского" государства в Италии. По-видимому, они проходят по списку "фактических правителей", см. ниже п.4.2. В обсуждаемое время можно насчитать с десяток лиц, могуществом не уступавших императорам.

Итак, из $31 + 5 + 10 = 46$ человек выбрано 11, что, как известно, можно сделать

$$C_{46}^{11} = \frac{46!}{11!\,35!} \simeq 1.3 \cdot 10^{10} \tag{1.2}$$

способами.[4]

Не следует думать, что наши 11 человек упомянуты ввиду их особой значимости. Обсуждаемая эпоха Римской Империи представлена в книге

[3] Левая колонка частично разобрана в [2].

[4] А даты 324–527 можно было бы заменить на любые другие, как и число 11.

[1] не только в вышеприведенной Таблице 1, но и в Таблицах 2, 8, 9, 10. В них за 324–527 годы в общей сложности упоминается в качестве римских правителей 24 императора, 3 "узурпатора", 4 "фактических правителя", а также три вполне посторонних лица (см. ниже п.4.3), всего 34 человека; ещё несколько императоров упомянуты в [1] на стр.196.

2*. Между соседними правлениями присутствуют промежутки в 18 и 7 лет.

3*. Номера 8–10 переставлены.

4*. У некоторых правителей могли бы быть указаны иные даты правления.[5]

Так или иначе, историки-профессионалы не склонны считать Таблицу 1 неотразимым доводом. Правы ли они?

Дальнейшая структура данной заметки следующая.

В §§2–3 мы решаем задачу Морозова. Наш текст в этих параграфах рассчитан или на читателя, чуть-чуть знакомого с простейшими понятиями теории вероятностей, или на читателя, не желающего вникать в детали.

Так как возможен промежуточный вариант (например, если читатель "знал, но забыл"), в конце статьи, в §5, мы обсуждаем необходимые понятия, такие как вероятностное пространство, независимые события, случайные величины. Этот же параграф содержит решения части задач, предлагаемых в статье; задачи, к которым даётся решение, помечены знаком $^\circ$.

Наша цель – лишь решение задачи Морозова и использование её как повода к обсуждению задачи о случайных совпадениях и некоторых простейших понятий теоретии вероятностей.

Однако, наши результаты отличны от результатов [1], и поэтому мы должны указать ошибку в соответствующем разделе книги [1]. Это делается в §4. Наш довод, сформулированный в этом парагафе, является чисто логическим. Его проверка не требует от читателя ни знакомства с историей, ни знакомства с математикой.

§2. Численный эксперимент

2.1. Критерий сходства. Давайте (для начала) рассмотрим следующую (волевую) модель. Для определённости мы будем работать с династиями из 15 человек. Правления длиннее 36 лет встречаются довольно редко. Предположим, для простоты, что продолжительность правления меняется от 1 до 36 лет, и что все эти возможности равновероятны. Давайте считать, что продолжительность правления $k+1$-ого правителя не зависит от продолжительности правлений k-ого, $k-1$-ого и т.д. правителей.

[5] Для полноты я должен отметить деталь, которая не используется в нашей дальнейшей аргументации. Даты правления Констанция 324–361 можно найти лишь в литературе по "новой хронологии", общепринятые же даты 337–361 (24 года правления), либо (годы единовластного правления) 353–361 (8 лет). Почему время единовластного правления Константина Великого (324–337) включено в правление его сына Констанция (род. около 323), в [1], к сожалению, не сообщается. В других таблицах А.Т.Фоменко почему-то использует для Константина и Констанция общепринятые даты правления.

"Династии" правителей ставится в соответствие последовательность продолжительностей правления ее членов. Таким образом, множество всех теоретически возможных "династий" превращается во множество всевозможных последовательностей длины 15

$$\overline{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_{15}), \tag{2.1}$$

состоящих из натуральных чисел, меньших или равных 36. Мы, допуская вольность речи, будем называть все такие наборы чисел "династиями"; общее число "династий", очевидно, равно $36^{15} \simeq 2.2 \cdot 10^{23}$.

Обозначим множество всех целых чисел между 1 и 36 через S, а множество всех 15-членных династий, т.е. векторов (2.1) — через S^{15}.

Далее введем (тоже волевым образом) следующий критерий сходства династий.

Критерий 1. Две точки $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}} \in S^{15}$ *близки*, если $|a_j - b_j| \leqslant 3$ для всех j.

На первый взгляд кажется, что мы позволяем себе слишком много: например разрешаем, чтобы все координаты отличались на 3, что не лучше набора (1.1). Вероятность того, что это случится с двумя наугад взятыми "близкими" точками однако не велика: она не превосходит $(2/7)^{15} < 10^{-8}$.

Задача 2.1°.Убедитесь в этом.

Фиксируем $\overline{\mathbf{a}}$ и рассмотрим всевозможные близкие точки $\overline{\mathbf{b}}$. Тогда среднее количество мест j, где отклонение $|a_j - b_j|$ достигает 3, очевидно, равно $15 \cdot \frac{2}{7} \simeq 4.3$ (на самом деле чуть меньше; почему?). Примерно в $\frac{3}{7} \cdot 15 \simeq 6.4$ местах ошибка не превосходит 1. Поэтому при нашем Критерии 1 близость понимается жестче, чем в образцовом примере (Таблица 1).

Нас интересует, насколько велика вероятность того, что среди некоторого набора династий встретятся близкие в смысле этого критерия. По поводу того, что означает в данном случае слово "вероятность", см. комментарии ниже в 5.2.

2.2. Игра в отрезки. Пусть $a \in S$. Через $I_3(a)$ мы обозначим множество всех $b \in S$, таких, что $|a - b| \leqslant 3$. Мы скажем, что два числа $a, b \in S$ *близки*, если $|a - b| \leqslant 3$.

Задача 2.2°. Найдите количество пар a, $b \in S$, таких, что a, b близки.

Ответ: $4 + 5 + 6 + 7 + 7 + \ldots (30 \text{ раз}) \cdots + 7 + 6 + 5 + 4 = 36 \cdot 7 - 12$.

Число всевозможных пар (a, b) равно 36^2, поэтому вероятность того, что a и b близки, равна

$$\delta = (36 \cdot 7 - 12)/36^2 = 1/5.4 \tag{2.2}$$

Задача 2.3. Найдите среднее количество точек в множестве $I_3(a)$ по всем $a \in S$ (Ответ $36 \cdot \delta = 6\frac{2}{3}$).

Задача 2.4°. Возьмем случайно $a, b \in S$.

а) Какая вероятность того, что отрезки $I_3(a)$ и $I_3(b)$ не пересекаются? (Ответ: $\simeq 0.67$)

б) Найти среднее число точек в пересечении отрезков $I_3(a)$ и $I_3(b)$.

Ответ: $(4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + \ldots (30 \text{ раз}) \cdots + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2)/36^2 \simeq 1.25$

2.3. Кубики. Пусть $\overline{\mathbf{a}} \in S^{15}$. *Кубиком* $K_3(\overline{\mathbf{a}})$ мы назовем множество всех $\overline{\mathbf{b}} \in S^{15}$ таких, что $|a_j - b_j| \leqslant 3$ для всех j.

Представим себе на минуту, что мы рассматриваем трёхчленные "династии". Тогда каждая "династия" задаётся набором чисел (a_1, a_2, a_3). Такой набор чисел можно рассматривать как точку куба

$$1 \leqslant x \leqslant 36; \quad 1 \leqslant y \leqslant 36; \quad 1 \leqslant z \leqslant 36$$

с целыми координатами (x, y, z). Условие

$$|x - a_1| \leqslant 3; \quad |y - a_2| \leqslant 3; \quad |z - a_3| \leqslant 3$$

задаёт куб с ребром 6 с центром в (a_1, a_2, a_3). Картинка, которая нам нужна, в сущности точно такая же, только 15-мерная. По поводу всего, что будет говорится в следующих трёх пунктах, удобно представлять себе соответствующую трёхмерную картинку.

Вернёмся к нашей задаче. Вычислим, сколько точек $\overline{\mathbf{b}} \in S^{15}$ лежит в кубике $K_3(\overline{\mathbf{a}})$. Если выполнено условие $4 \leqslant a_j \leqslant 32$ для всех j (т.е. кубик "не вылезает" за пределы S^{15}), то, очевидно, ответ 7^{15}. Координат однако 15, и вполне может случиться, что наше условие не выполнено (кстати, какая вероятность его выполнения ?)

Среднее число точек из S на ребре кубика K_3, как мы видели, равно $36 \cdot \delta$. Поэтому среднее число точек из S^{15} в кубике равно $(6\frac{2}{3})^{15}$.

Можно это же сказать иначе. Возьмем случайно точки $\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}} \in S^{15}$. Фиксируем j. Вероятность того, что $b_j \in I_3(a_j)$ равна δ. Поэтому вероятность того, что $\overline{\mathbf{b}} \in K_3(\overline{\mathbf{a}})$ равна

$$\varepsilon = \delta^{15} = \frac{1}{5.4^{15}} \simeq 10^{-11}. \tag{2.3}$$

Задача 2.5°. Вычислите непосредственно среднее число точек в кубике и убедитесь, что наш ответ – точный.

Задача 2.6°. Какое среднее число точек в пересечении двух наугад взятых кубиков $K_3(\overline{\mathbf{a}})$, $K_3(\overline{\mathbf{b}})$? (Ответ.$\simeq 1.25^{15} \simeq 28.5$.)

2.4. Игра в кубики. Пусть теперь в S^{15} наугад брошено N точек $\overline{\mathbf{a}}^1$, $\overline{\mathbf{a}}^2, \dots, \overline{\mathbf{a}}^N$. Попытаемся понять, какая вероятность того, что среди этих точек не будет ни одной пары точек, близких в смысле Критерия 1.

Будем бросать точки по очереди. Вероятность того, что $\overline{\mathbf{a}}^2$ не попадет в $K_3(\overline{\mathbf{a}}^1)$, равна $1 - \varepsilon$. Вероятность того, что $\overline{\mathbf{a}}^3$ не попадет в $K_3(\overline{\mathbf{a}}^1)$ и $K_3(\overline{\mathbf{a}}^2)$, равна $1 - 2\varepsilon$ и т.д. Вероятность того, что $\overline{\mathbf{a}}^{k+1}$ не содержится в $K_3(\overline{\mathbf{a}}^1), \dots K_3(\overline{\mathbf{a}}^k)$, равна $1 - k\varepsilon$. Поэтому вероятность того, что близких точек среди $\overline{\mathbf{a}}^1, \dots, \overline{\mathbf{a}}^N$ не окажется, равна

$$P = (1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)(1 - 3\varepsilon) \dots (1 - (N-1)\varepsilon). \tag{2.4}$$

2.5. Оценка произведения. Очевидно,

$$\ln(P) = \ln(1 - \varepsilon) + \ln(1 - 2\varepsilon) + \dots + \ln(1 - (N-1)\varepsilon).$$

Испольуя формулу $\ln(1+x) \simeq x$, мы преобразуем $\ln P$ к виду

$$\ln P \simeq -(\varepsilon + 2\varepsilon + \cdots + (N-1)\varepsilon) \simeq -\frac{1}{2}N^2\varepsilon. \tag{2.5}$$

Итак,

$$P \simeq \exp(-\frac{1}{2}N^2\varepsilon).$$

2.6. Опасная черта. Допустим, что при выбранном N, вероятность того, что по крайней мере две династии оказались близки, достигла $1/10$ (т.е. $P = 9/10$). Тогда, найдя две близкие династии, мы уже не можем сделать никаких достоверных выводов[6]. Если $P = 9/10$, то

$$\frac{1}{2}N^2\varepsilon \simeq 1/10,$$

или при нашем значении ε, равном (2.3), случайная близость каких-то двух точек из нашего набора становится вполне вероятной при числе династий, равном

$$N = 140\,000 \tag{2.6}$$

Задача 2.7°. Правомерно ли мы отбросили квадратичное слагаемое в Тейлоровском разложении $\ln(1+x)$?

Задача 2.8°. В нашем рассуждении мы пренебрегали тем, что кубики могут пересекаться. Были ли мы правы?

2.7. Сколько династий было белом свете? Попытаемся грубо оценить это число снизу. Я выписал для себя следующие списки правителей (здесь они из экономии места не приводятся, но их легко воспроизвести, исторические ссылки см. в конце заметки).

А. Древнерусские князья (862–1132): 17 человек

Б. Великие князья Киевские (1132–1236): 20 человек

В. Великие князья Владимирские (1238–1363): 16 человек

Г. Великие князья Московские и Владимирские (1363–1461): 4 человека

Д. Цари и императоры (1461–1917): 26 человек

Е. Генсеки (1917–1985): 6 человек

Ж. Президенты (1985–1999): 2 человека.

Итого от Рюрика до Ельцина – 93 человека.

Для понимания задачи важно подчеркнуть, что список содержит некоторую неопределенность. Например, в часть Д, при желании, можно включить, а можно и не включать следующих лиц или группы лиц:

— Иван Молодой, Елена Глинская*, Боярское правление 1538-47, Симеон Хасбулатович, далее ряд участников Смуты [Федор Годунов, Лжедмитрий I*, Василий Шуйский*, Вор Тушинский(он же Лжедмитрий II), Семибоярщина, Владислав Сигизмундович, Вор Псковский(он же Лжедмитрий III Сидорка), Маринка с Ворёнком

[6] Мы не в состоянии сделать даже правдоподобного предположения, потому что есть дополнительная степень свободы – возможность выбора модели и соответственно сознательной или бессознательной подгонки модели под ответ.

(Иваном Лжедмитриевичем), триумвират Минин–Пожарский–Трубецкой], далее Филарет Романов*, Софья*, Иван V, Верховники 1729, Иван VI* Антонович.

Лишь отмеченных звездочкой я включил в свой список 26 царей. Разумеется в некоторых из этих сомнительных случаях читатель может иметь другое мнение[7].

Далее, по крайней мере у 36 из 93 правителей можно указать разные даты правления.[8]

Теперь считаем династии.

1. Из 93-звенной цепочки можно вырезать $93 - 14 = 79$ отрезков по 15 звеньев.

2. Российская династия А–Б–В–Г–Д–Е–Ж вполне возможна, но не бесспорна. Отрезок Б с равным правом можно заменить на 6 Владимиро-Суздальских князей того же времени. Итого 34 новых династии.

3. Авторов книг по истории, однако, обычно интересует третий вариант: часть отрезка В заменяется на 5 московских князей Даниловичей. Еще 32 династии.

4. Список Б может быть продолжен князьями Киевскими же. Это дает лишь 8 династий.

Итого более 150 честных династий самого высокого уровня.

Задача 2.9°. Укажите возможные точки переклейки династий в Таблице 1.

Обработка списка Галицко–Волынских князей (990–1340) по той же методике дает 32 династии и т.д. Остановимся. Понятно, что по Русскому государству 300 "династий" легко набирается.

Насколько надо умножить 300, чтобы получить общемировое число династий? В любом случае, коэффициент больше 20.

Далее, допустим, что 15-звенная династия содержит правителя с "плавающими" датами царствования. Тогда из нее изготовляется два набора чисел, т.е вектора из S^{15} (вопрос: когда соответствующие им кубики не пересекаются?). Если же таких правителя оказалось два, то династия учетверяется, если три – то увосьмеряется и т.д. Не проявляя большого энтузиазма, мы легко утроим уже достигнутое число династий[9]

Итого 18 000 реальных династий. Дотянем ли мы до 140 000, – вопрос скользкий, и может не очень интересный.

Обращаю, внимание что число 18 000 достигается не за счет какой-либо эквилибристики, а за счет естественной неопределенности входных данных.

2.9. Восстановление прав Карла Великого.

Задача 2.10. Заменим в наших рассуждениях 2.1–2.6 параметр 15 на 11 (см. Таблицу 1). Что произойдет с N?

Ответ. Оно поделится на $5.4^2 \simeq 29$, т.е. $N \simeq 4800$.

---

[7]Вряд ли кому-нибудь захочется включить в список русских царей вора Сидорку. Однако, если читатель попробует сформулировать критерий, отличающий царя от не царя, то наш Сидорка при внимательном рассмотрении вполне может оказаться в царях (в смысле этого критерия).

[8]У Ельцина Б.Н. возможна ошибка лишь в один год (1990-99 или 1991–99). А вот Рюрик Ростиславич правил в Киеве в 1172–1211 с 7 (!) перерывами.

[9]Читатель может оценить коэффициент экспериментально на примере династии А–Ж.

Мы видим, что для реальных 11-звенных династий $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ вполне возможно случайное возникновение примерно такой ошибки (с точностью до порядка координат)

$$|a_j - b_j| = 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3$$

При этом не нужно ни переставлять, ни пропускать, ни объединять(см. п. 4.2) правителей, ни даже честно подгонять даты правления.

Задача 2.11. Заменим в рассуждениях пп.2.1–2.6 условие близости $|a_j - b_j| \leqslant 3$ на $|a_j - b_j| \leqslant 4$ (а это примерно соответствует ошибке в (1.1)). Чему станет равно N?
(Ответ: $\delta \simeq 1/4.26$, $N \simeq 1300$).

Задача 2.12. При каких N можно быть уверенным, что близкие династии наверняка будут?

2.10. Укороченный вариант рассуждения. Приведём рассуждение не строгое, но объясняющее, что же произошло. Во-первых, наша вероятность случайной близости двух династий $\varepsilon = 10^{-8}$ (в случае 11-звенных династий) не так уж мала. Конечно, если фиксировать династию (в том смысле, что фиксируется и список имен, и даты правления), то надежды найти близкую династию немного.

Рассматривая же N династий, мы стремимся найти хотя бы одну близкую пару. Но пар всего $N(N-1)/2$. Если число пар становится сравнимым с $1/\varepsilon$, естественно ожидать возникновения случайной близости.

При составлении параллельных таблиц типа Таблицы 1 А.Т.Фоменко разрешает следующие приёмы (подробнее, см. §4):

— пропуск правителей из списка,

— перестановки соседних правителей,

— введение понятия "фактического правителя" (который заменяет в списке титульного монарха),

— объединение двух правлений в одно

Более того, первые три приема были вполне использованы в Таблице 1.

Мы убедились, что сходство, лучшее, чем (1.1), может возникнуть случайно само собой, без (!) применения четырёх только что упомянутых приёмов. Подчеркнём, что мы ни как не использовали в нашей аргументации не такое уж маленькое число, указанное в формуле (1.2).

Отдельный человек может ошибаться, увлекаться, или иметь самые неожиданные мотивы для своих действий. Разумеется также, что в самом по себе вопросе о степени обоснованности исторической хронологии нет ничего крамольного.

Вызывает однако удивление, что люди с математическим образованием и профессиональные математики в течение 15 лет (1980-95) благожелательно относились к работе, математическая ошибочность которой вполне очевидна. Долгожданная реакция гуманитариев началась, и, как легко можно было предсказать, она, в определённой степени, направлена против математиков вообще. Остаётся лишь надеяться, что гуманитарии проявят бóльшее благоразумие, чем математики.

§3. Более тонкие задачи и перестраховка.

Задача о случайной близости, однако, заслуживает более подробного обсуждения, и работа [1] даёт к этому хороший повод.

В частности, в [1] предлагается рассматривать лишь династии длины 15, и сам автор [1] временами это делает. Как мы видели, при переходе от 11 к 15 число династий, при котором возможно возникновение случайной близости в смысле Критерия 1, резко возрастает. Вопрос о том, можно ли нарезать из реальных списков правителей, 140000 "династий" является скользким и, самое главное, очень скучным.

3.1. Влияние дополнительной ошибки. Введем новый критерий сходства династий.

Критерий 2. Две точки $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}} \in S^{15}$ близки, если точка $\overline{\mathbf{b}}$ может быть получена из $\overline{\mathbf{a}}$ изменением любого набора координат не более чем на три, и перестановкой двух пар соседних координат a_j с a_{j+1}, и a_k с a_{k+1} (положим для определенности все числа j, $j+1$, k, $k+1$ различными).

Пусть $\overline{\mathbf{a}}$ – некоторая династия. Вычислим количество допустимых пар перестановок (транспозиций). Первая транспозиция может быть сделана в 14 местах, вторая – как минимум в 11 (за исключением места первой и двух соседних мест). Итого пар – по крайней мере 77.

Таким образом из одной династии получилось 77, но тут возникает небольшая загвоздка. Соответствующие 77 кубиков могут пересекаться. Давайте допускать перестановки a_j и a_{j+1} лишь в местах, где $I_3(a_j)$ и $I_3(a_{j+1})$ не пересекаются (т.е., $|a_j - a_{j+1}| \geqslant 7$). Число кубиков станет несколько меньше, но они уже точно не будут пересекатся. В силу Задачи 2.4.а, число таких пар примерно равно $77 \cdot 0.67^2 \simeq 34$. Итак, число кубиков выросло в 34 раза, а поэтому опасная граница N (см. (2.6)) уменьшится в $\sqrt{34} \simeq 6$ раз и станет равным примерно 24000.

Таким образом, разрешение двух "малых" ошибок почти свело на нет положительный эффект от удлинения рассматриваемых династий с 11 до 15 человек.

Читатель возможно не удовлетворен, что мы чуть-чуть не дотянули до 18000 (т.е., до реального числа династий), но большой разницы уже нет, тем более, что во всех существенных местах мы занижали оценки не в нашу пользу.

Задача 3.1. Что случится, если мы разрешим сделать какие-нибудь (любые) две ошибки типа перестановки правителя и слияния двух правлений в одно (см. ниже п.4.2)?

3.2. Параметры модели. Число 36 лишь кажется параметром нашей модели §2, действительно же важно число ε (см. (2.3)), т.е. вероятность случайной близости точек $\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}} \in S^{15}$. Лишь оно используется при игре в кубики.

Критерии близости тоже почти ни причем. Они лишь участвуют в определении числа ε.

Теперь мы можем подойти к задаче более серьезно.

3.3. Неравномерное распределение. Допустим, что продолжительности правлений могут быть любыми, и пусть вероятность того, что правление имело длительность k, равна p_k, где $k = 1, 2, 3, \ldots, 100$; естественно, $\sum p_k = 1$. Допустим также, что продолжительность j-ого правления не зависит от продолжительностей предыдущих правлений; если бы это было не так (а, кажется, это правда чуть-чуть не так), то вероятность случайных совпадений бы увеличилась.

Вероятность того, что две точки $a, b \in S$ удовлетворяют неравенству $|a - b| \leqslant 3$, равна

$$\delta = \sum_{1 \leqslant i \leqslant 100, 1 \leqslant j \leqslant 100, |i-j| \leqslant 3} p_i p_j \tag{3.1}$$

Далее мы повторяем игру в кубики.

Величина δ может быть вычислена экспериментально. Для династии А–Ж, по моим вычислениям, вероятность близости длин правлений различных правителей примерно $\delta = 1/4.66$, что в случае 15-членных династий уменьшает N (см. (2.6)) примерно в 3 раза.

3.4. Перестраховка. Математическая часть наших рассуждений закончена, но вопрос о судьбах Рима, быть может, кажется читателю не вполне ясным. В этом деле от δ многое зависит, а величина $\delta = 1/4.66$ найдена по слишком малой статистике.

Легко однако надежно оценить δ снизу. Правления длиннее 45 лет уже точно почти не встречаются, а в большинстве встречающихся случаев они естественно расщепляются на регенство и правление. Чтобы уменьшить вероятность случайных совпадений, возьмем равномерное распределение вероятностей $p_j = 1/45$ (т.е. мы просто заменили 36 на 45), что даст $\delta \simeq 1/6.7$ (и это значение заведомо занижено!). Тогда N (в случае 15-членных династй) подскакивает в 5 раз.

Вероятность случайной близости по Критерию 1 для 15-звенных династий вроде бы становится малой. Начинает даже казаться (я не буду упорствовать в этом месте), что она мала и по Критерию 2. Но ... мы пока не трогали *главную неопределенность в понятии "династии" — неопределенность списка правителей.*

Если читателю еще не надоело, он может развлечься самостоятельно.

Впрочем и $\delta = 1/5.4$, по-видимому, занижено.

3.5. Вывод из сказанного выше очевиден. Разумеется, есть совпадения, которые могли бы произойти случайно, и есть – те, которые не могли бы. Но **пары похожих "династий", указанные Н.А.Морозовым и А.Т.Фоменко, вполне могут возникнуть случайно. Поэтому никаких логических следствий из их сходства извлечь нельзя.**[10]

§4. Игра в императоров

4.0. В своей фундаментальной работе [1] об исторических складках А.Т.Фоменко опубликовал положительное решение задачи Морозова. Оно основано на довольно замысловатом компьютерном алгоритме, излагаемом на стр. 115–117, 141 книги [1]. К сожалению, никакого логического обоснования этого Алгоритма (из которого далее извлекаются столь глобальные следствия) в книге не приводится, не обсуждается и то, к каким

[10] В частности, нет никаких оснований думать, что "параллелизмы" А.Т.Фоменко отражают какие-то неизвестные нам исторические закономерности.

результатам могли бы привести иные (в частности более простые) алгоритмы. Читателю же, пожелавшему проверить результаты работы Алгоритма экспериментально (хотя, что значит проверить?), пришлось бы – этого требует Алгоритм – ввести в качестве входных данных список всех правителей всех времен и народов; т.е. понадобилось бы набрать на клавиатуре компьютера текст размером с объёмистую книгу.[11]

Мы утверждаем, что работа [1] ошибочна (во всяком случае в той части, которая базируется на теории "династического параллелелизма"). Как найти ошибку в алгоритме Фоменко? Мы имеем обширный текст [1], в котором аргументация основана на сборе огромных внешних данных и трудно контролируемой компьютерной обработке. Тем не менее, *можно ли указать фатальную ошибку в тексте, исходя из самого текста*?

Приводимый ниже довод довольно прост и, по-существу, требует лишь внимательного прочтения таблиц 1–13 книги [1] (стр. 156–172) и указанных в них дат. С точки зрения формальной логики достаточно прочтения одной (любой) из этих таблиц. Но чтобы быть уверенным, что не произошло случайной ошибки или опечатки, лучше просмотреть их все или хотя бы несколько.

4.1. За что зацепиться? Рассмотрим 11-звенные династии и Критерий близости из пункта 2.1. По перестраховочным подсчетам п.3.4, мы имеем $\delta = 1/6.7$, а поэтому вероятность случайной близости двух точек $> 6.7^{-11} \simeq 1.2 \cdot 10^{-9}$. При сравнении этого числа с выражением (1.2) естественно возникает следующий вопрос:

Задача 4.1°. Дана произвольная династия $\overline{\mathbf{a}}$. Можно ли ее приблизить поддинастией из римских правителей?

Ответ: Нет.

Хотя ответ и отрицателен (см. решение), угрожающее число (1.2) никуда не девается. Ясно, что автор [1] стоит перед следующим выбором (который a priory безнадежен):

— если разрешить выбрасывать правителей из списка произвольным образом, то алгоритм станет даже внешне неправдоподобным, а количество пар "тождественных династий" (вроде Таблицы 1), возникающих при его прогонке, будет (по самым скромным оценкам) исчисляться тысячами.

— если запретить произвольный "просев" правителей, то Таблицу 1 нельзя оправдать.

По-видимому, простейший способ найти ошибку в Алгоритме — это выяснить, как А.Т.Фоменко решает данный вопрос. Его решение, в своём роде, красиво.

4.2. Декларированные свойства Алгоритма А.Т.Фоменко. Итак, на стр. 115–117, 141 книги [1] приводится Алгоритм, при прогонке которого на компьютере, как утверждается, должны получиться все пары "раздвоившихся" династий.

---

[11] Это сделано автором [2]. Разумеется, оппоненты могут оспаривать, например, полноту использованного им списка правителей(правда такого рода доводы обоюдоострых). В [2], однако, экспериментально обнаружены неожиданные патологические свойства Алгоритма. Любой желающий может сопоставить наблюдения из [2] с самим Алгоритмом.

В объявленные цели Алгоритма входит моделирование следующих типов ошибок

– {1} небольшая ошибка в измерении времени правления.

– {2} перестановка соседних правителей ;

– {3} объединение двух правлений в одно;

Коль скоро нам предлагаются такие правила игры, давайте с ними безропотно согласимся. Насколько они соответствуют решаемой задаче — вопрос другой. Он обсуждается ниже в 5.17.

Кроме того, разрешается

– {4} замена титульного правителя на "фактического правителя", т.е на какое-либо достаточно могущественное лицо.

Задача 4.2°. Попытайтесь написать "фактических правителей" и даты их правления для временных отрезков Д-Ж русской истории из п 2.7.

Наконец, НЕ считаются за ошибки следуюшие преобразования

– {5} выбор одной из возможных продолжительностей данного правления

– {6} пропуск произвольного набора правителей

"Компьютер" выбирает и то, и другое по своей воле. Пропуск правителя, очевидно очень опасен (или полезен, в зависимости от вкуса), но на стр. 117 и 141 делается важная оговорка: *При "просеве" правителей не должны образовываться промежутки между правлениями больше года.*

Задача 4.3°. Может ли Таблица 1 возникнуть как результат работы Алгоритма?

Здесь нет возможности обсуждать, насколько алгоритм А.Т.Фоменко моделирует ошибки {1}–{3}.

4.3. Неудовлетворительность алгоритма. А.Т.Фоменко сумел найти несколько десятков пар династий, которые показались ему "тождественными". Наиболее важные из них указаны в таблицах 1–13 на стр.156–172.

Удивительным образом оказывается, что *ни одна из этих таблиц не может быть получена как результат работы описанного в книге Алгоритма.* А именно, во всех случаях присутствуют следующие ошибки в списке правителей, которые не могут быть сделаны Алгоритмом.

– {7} пробелы между соседними правлениями (в явном виде до 24 лет)

– {8} замена произвольного набора правителей на слова "Смута", "Анархия" (до 29 лет), "Вставка" (до 78 лет) и др.

– {9} пополнение списка правителей произвольными лицами с произвольными датами правления.

Напомним, что {7} запрещено, {8} Алгоритмом не предусматриваются, а идея ввести в список Римских правителей Алариха (378–403)[12], богослова Василия Великого(333–378, это примерно совпадает с датами его жизни) и ересиарха Ария едва ли принадлежит компьютеру.

В действительности, преобразования {7}, {8}, снимают почти любые ограничения на пропуски правителей. Преобразование {9} позволяет находить соответствие правителю в безвыходных ситуациях (т.е. по-существу равносильно пропуску правителя; действительно, вычёркивая из таблицы Василия Великого, мы должны будем вычеркнуть и его "эквивалент").

---

[12] Кстати неожиданно не только присутствие Алариха в списке, но и эти даты

Для полноты, мы указываем максимальные пробелы между соседними правлениями (иногда замаскированные), которые *не могут быть итогом работы Алгоритма*, в Таблицах 1–13. Они составляют соответственно [далее в квадратных скобках указаны номера строк, в которых находятся эти пробелы]:

1° : 18 лет[1–2], **2**° : 42 года[5], **3**° : 11 лет[1–3],
4° : 42 года[4][13], **5**° : 19 лет[9-10], **6**° : 4 года[12-13],
7° : 8 лет[14-15], **8**° : 43 или 59 лет[1-3], **9**° : 4 года[7],
10° : 76 лет[12], **11**° : 28 лет[10 слева], **12**° : 53 года [8-11],
13° : 53 года[9-10].

Читатель работы [1] однако может не утруждать себя задачей вычитания трёхзначных и четырехзначных дат, на рис. 16.7–16.11 книги [1] эти пробелы изображены вполне наглядно.

4.4. Не декларированные преобразования. Цель, сформулированная в п.4.0, вполне достигнута нами в п. 4.3. Забавно, однако, что в Таблицах 1–13 встречается также ряд иных преобразований списка правителей, не входящие в разрешенные {1}–{6}.

– {10} Раздвоение правителя[14]

– {11} Слияние трех и более правителей в одного;

– {12} Перестановки несоседних правителей, а также перестановки групп правителей[15] ;

– {13} Нетривиальные преобразования[16]

4.5. Выводы. Я повторю основное наблюдение, сделанное в этом параграфе. Из сказанного в этом параграфе ни как не следует, хорош Алгоритм А.Т.Фоменко сам по себе или плох. Из сказанного также ни как не следует, хороши ли преобразования {1}–{13} с точки зрения изучения истории. Мы лишь утверждаем, что *ни одна из Таблиц Фоменко не может появиться как результат работы его же Алгоритма.*

Итак, А.Т.Фоменко не смог найти алгоритма, который оправдывал бы найденные им самим "тождества династий". Это ничего не доказывает, но зато хорошо согласуется с нашими выводами. С работой [2] наши выводы тоже хорошо согласуются.

§5. Решения задач и комментарии.

— Каждый четвертый человек является китайцем, а каждый пятый – индийцем. Поэтому каждый двадцатый является

[13] В таблице 4 утверждается, что тождество Тиберий + Калигула + Клавдий + Нерон = Генрих V сомнительно. Лакуна в 42 года возникает лишь если читатель соглашается с этим утверждением. Если же признать тождество несомненным, то рядом получаются две лакуны в 14 и 17 лет.

[14] В Таблице 9 Валент сначала соответствует Клавдию, а потом Нерону; там же два Иовиана, один из них назван Смутой(псевдоним раскрывает сам А.Т.Фоменко на стр.206). А вот Септимий Север раздвоен дважды (в Таблицах 4 и 9), один его дубль объединен с Каракаллой, а другой – с Каракаллой и Коммодом. Но последнее может быть истолковано как гибкий вариант преобразования {3}.

[15] Например, 170 летний отрезок библейской истории переставлен с 65-летним.

[16] Пример (Таблица 9). Октавиан Август 44–27 до н.э. = Константину Великому 306–324, а Октавиан Август 27 до н.э.–14 н.э. = Константину Великому 306–337. Итак 1 Август = 5/3 Константина Этот замечательный "параллелелизм, доходяший до тождества", подробно и правдоподобно обсуждается далее на стр. 201–204.

и китайцем, и индийцем одновременно.

— Какая вероятность встретить динозавра на Невском проспекте?

— Одна вторая: либо встретишь, либо нет

Из фольклора

5.1. Решение Задачи 2.1 (об углах кубика). Мы должны оценить число точек $\overline{\mathbf{b}} \in K_3(\overline{\mathbf{a}})$, таких, что $|a_j - b_j| = 3$ для всех j.

Если $4 \leqslant a_j \leqslant 32$, то число возможных значений b_j таких, что $|a_j - b_j| \leqslant 3$, равно 7. Из них в точности на 3 отстоит ровно 2 точки. Таким образом, вероятность того, что $|a_j - b_j| = 3$, в этом случае равна $2/7$.

(-0.03 0.1) 0 (0.03 -0.1) (0.3 0) (-0.03 0.1) 1 (0.03 -0.1) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (-0.03 0.1) 2 (0.03 -0.1) (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (-0.1 0.1) $a_j{-}3$ (0.1 -0.1) 0.025 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (-0.05 0.1) a_j (0.05 -0.1) (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (-0.1 0.1) $a_j{+}3$ (0.1 -0.1) 0.01 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02

Рис. 1

Если a_j близко к одному из концов промежутка $[1, 36]$, то число близких значений b_j будет 6, или 5, или 4, но из этих b_j лишь одно число будет отстоять точно на растояние 3.

(-0.03 0.1) 0 (0.03 -0.1) (0.3 0) (-0.1 0.1) $a_j{=}1$ (0.1 -0.1) ф:0 p:0.02 0.025 (0.3 0) ф:0 p:0.02

(0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (-0.1 0.1) $a_j{+}3$ (0.1 -0.1) 0.01 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02 (0.3 0) ф:0 p:0.02

Рис 2.

Вероятность того, что для b_j, близкого к a_j, выполнено

$$|a_j - b_j| = 3, \tag{5.1}$$

будут соответственно $1/6$, $1/5$, $1/4$. Все эти числа меньше $2/7$. Поэтому вероятность того, что (5.1) выполнено для всех j, меньше $(2/7)^{15}$.

5.2. О понятии вероятности. Мы начнём обсуждение этого понятия с того конкретного случая, который рассматривается в §2.

Мы считаем, что все династии, то есть точки в S^{15}, равновероятны. Допустим, что мы сделали высказывание об одной династии. Например: "длительность правления каждого следующего правителя не меньше, чем у предыдущего". Какова вероятность этого *события*? Мы должны посчитать все точки в S^{15}, удовлетворяющие этому условию[17]. Далее, полученное число точек делится на 36^{15}. Эти слова можно считать определением вероятности в нашем конкретном случае.

---

[17]Кстати, это приятная и допускающая простой ответ задача, хотя и вполне бессмысленная с точки зрения истории. Я не уверен, что другие обсуждаемые нами задачи с этой точки зрения более разумны.

Итак, *событием* в S^{15} мы назовем произвольное подмножество $A \subset S^{15}$, а его *вероятностью* – число точек в A, делённое на 36^{15}.

Задача 5.1. Какая вероятность того, что все правители правили больше 18 лет? Какая вероятность того, что ровно один правитель правил ровно 23 года? Какая вероятность того, что любые два правителя правили разное число лет (т.е $a_i \neq a_j$ для всех i, j)?

Ответ. Соответственно: 2^{-15}, $15 \cdot 35^{14} \cdot 36^{-15}$, $\frac{36!}{21!} \cdot 36^{-15}$.

Это же определение применимо к совсем простому случаю – к множеству S, состоящему из чисел $1, 2, 3, \ldots, 36$. Вероятность подмножества $A \subset S$ равна числу точек в A, делённому 36.

Также мы можем говорить о парах точек (a, b), где a, $b \in S$ (мы считаем пары (a, b) и (b, a) различными). Обозначим множество таких пар через S^2. Общее число точек в S^2 равно 36^2. Если мы имеем некоторое подмножество $B \subset S^2$, то его вероятность есть число точек множества B, делённое на 36^2. В задачах 2.2 и 2.4 мы играем с подмножествами множества S^2.

Можно сделать высказывание и о двух династиях. Например, "каждый правитель первой династии правил дольше, чем соответствующий правитель второй династии". В этом случае мы должны перебрать пары всех династий, удовлетворяющих этому условию, посчитать их количество и поделить на число $(36^{15})^2$ (т.е. на общее число пар династий).

Опять-таки, *событием* является подмножество в множестве пар $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})$, где $\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}} \in S^{15}$, а его вероятность, по определению, равна числу точек в A, делённому на 36^{30}.

Задача 5.2. Только что был приведён пример события. Какова его вероятность? Какова вероятность того, что $a_j \neq b_j$ для всех j?

Ответ. $[36 \cdot 35/2]^{15} \cdot 36^{-30}$; $(35/36)^{15}$

Можно сделать высказывание и о N династиях. Формализация этого следующая. Рассмотрим множество R всех наборов

$$(\overline{\mathbf{a}}^{(1)}, \overline{\mathbf{a}}^{(1)}, \ldots, \overline{\mathbf{a}}^{(N)}), \qquad \text{где } \overline{\mathbf{a}}^{(k)} \in S^{15}.$$

Общее число точек этого множества, очевидно 36^{15N}. *Событием* мы назовём произвольное подмножество A в R. *Вероятность события* – число точек в A, деленное на 36^{15N}.

Все вычисления нашего §2 состоят в подсчёте числа точек в различных подмножествах только что описанных множеств. Когда мы не можем найти число точек точно, мы оцениваем его.

Отметим следуюшую полезную и почти очевидную лемму.

Задача 5.3. Обозначим через Q множество, состоящее из всевозможных пар династий $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})$. Пусть A, B – события (подмножества) в S^{15}. Рассмотрим подмножество C в Q, состоящее из пар $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})$, таких, что $\overline{\mathbf{a}} \in A$, $\overline{\mathbf{b}} \in B$. Тогда

$$\bigl\{\text{вероятность } C\bigr\} = \bigl\{\text{вероятность } A\bigr\} \cdot \bigl\{\text{вероятность } B\bigr\}. \tag{5.2}$$

Здесь уместно вспомнить фундаментальное в теории вероятностей понятие независимых событий. А именно, два события A, B называются *независимыми*, если вероятность $A \cap B$ равна произведению вероятностей A и B.

Мы вернёмся к этому понятию чуть ниже.

5.3. Решение задачи 2.2 (о близких числах). Выписанные в ответе к задаче слагаемые соответствуют числу возможных значений b для $a = 1$, 2, 3, ..., 36; см. Рис. 1–2.

5.4. Решение задачи 2.4.а (о непересекающихся отрезках). Нам нужно посчитать число пар целых точек (a, b) на отрезке $[1, 36]$ таких, что $|a - b| \geqslant 7$. Если $a = 1$, то для b есть $36 - 7 = 29$ возможностей. Если $a = 2$, то будет $36 - 8 = 28$ возможностей, и т.д. Поэтому мы должны посчитать сумму

$$29 + 28 + \dots + 24 + 23 + 23 + \dots + 23 + 23 + 24 + 25 + \dots + 29$$

и поделить её на 36^2.

5.5. Решение задачи 2.4.б (о пересечении отрезков). Надо вычислить сумму

$$\sum_{1 \leqslant a \leqslant 36,\, 1 \leqslant b \leqslant 36} \Big\{ \text{Число точек в } I_3(a) \cap I_3(b) \Big\}.$$

Иными словами, мы должны найти количество троек (a, b, z),таких, что $|a - z| \leqslant 3$, $|b - z| \leqslant 3$, и все числа a, b, z лежат между 1 и 36. Нашу сумму удобно преобразовать к виду

$$\sum_{1 \leqslant z \leqslant 36} \Big\{ \text{Число пар } (a, b), \text{ таких, что } |a - z| \leqslant 3,\ |b - z| \leqslant 3 \Big\} =$$
$$= \sum_{1 \leqslant z \leqslant 36} \Big\{ \text{Число точек в } I_3(z) \Big\}^2.$$

5.6. Решение задачи 2.5 (о среднем числе точек в кубике) Рассмотрим кубик с центром $\overline{\mathbf{a}} = (a_1, \dots, a_{15})$. Обозначим через $\varkappa(b)$ число точек в отрезке $I_3(b)$. В этих обозначениях, число точек в кубике $K_3(\overline{\mathbf{a}})$ равно $\varkappa(a_1)\varkappa(a_2)\dots\varkappa(a_{15})$. Поэтому мы должны вычислить сумму по всем кубикам

$$\sum_{\overline{\mathbf{a}}} \varkappa(a_1)\varkappa(a_2)\dots\varkappa(a_{15}) = \sum_{1 \leqslant a_1 \leqslant 36, \dots, 1 \leqslant a_{15} \leqslant 36} \varkappa(a_1)\varkappa(a_2)\dots\varkappa(a_{15}).$$

Убедитесь, что это выражение есть в точности то, что получится при раскрывании скобок из

$$\underbrace{\big(\varkappa(1) + \dots + \varkappa(36)\big) \dots \big(\varkappa(1) + \dots + \varkappa(36)\big)}_{15 \text{ раз}}.$$

Теперь всё свелось к задаче 2.3.

В п.5.10 мы приведём решение той же задачи, требующее меньшего умственного напряжения.

5.7. Аксиоматика Колмогорова. Вероятностные пространства и независимые события. Перейдём к формальному определению простейших понятий теории вероятностей (мы приводим эти определения в минимальной возможной общности).

Конечным вероятностным пространством R, согласно Колмогорову, называется конечное множество $R = \{r_1, r_2, \dots\}$, точкам которого приписаны неотрицательные числа (вероятности[18]) p_1, p_2, ... , причем

$$p_1 + p_2 + \cdots = 1 \tag{5.3}$$

Событием называется произвольное подмножество в R, *вероятность* $p(A)$ *события* A – сумма вероятностей всех входящих в него точек.

Примеры вероятностных пространств были приведены в п.5.2.

Это простое определение, вместе с ещё несколькими, почти столь же простыми, выводит понятие вероятности из предмета туманного философствования в предмет точных рассуждений.

Конечно, остается вопрос о том, откуда взять числа p_1, p_2, ... Это вопрос отдельный, ответ на него иногда можно понять из смысла задачи, иногда можно найти экспериментально.

Если вероятности всех точек равны, то мы говорим, что вероятность распределена *равномерно*.

Задача 5.4. Пусть множества A, B не пересекаются. Тогда

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

Далее, пусть R, Q – вероятностные пространства. Рассмотрим их произведение $R \times Q$, т.е. множество точек вида (x, y), где $x \in R$, $y \in Q$. Тогда мы объявляем $R \times Q$ вероятностным пространством, положив, что вероятность точки (x, y) равна $p(x)p(y)$.

Задача 5.5. Убедитесь, что сумма вероятностей точек пространства $R \times Q$ равна 1.

Если мы имеем три вероятностных пространства, R, Q, T, мы определяем их произведение

$$R \times Q \times T = (R \times Q) \times T.$$

Приятнее сказать, что вероятность точки (x, y, z), где $x \in R$, $y \in Q$, $z \in T$, равна $p(x)p(y)p(z)$. Точно так же определяется произведение любого конечного числа вероятностных пространств.

Пример. Пространство S^{15} из п.5.2 является произведением 15 штук одинаковых пространств S из того же пункта. Введённое там же пространство R — произведение N копий пространства S^{15}.

Два события $A, B \subset R$ называются *независимыми*, если

$$p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

[18] Мы везде (независимо от пространства) обозначаем вероятность буквой p (от слова "probability").

Пример независимых событий приведен в задаче 5.3, а пример зависимых – в самом начале данного параграфа.

Задача 5.6 Пусть A – событие в R, а B – событие в Q. Положим $A' = A \times Q$ (т.е. возьмём множество всех точек (a, y), где $a \in A$, $y \in Q$. Положим $B' = R \times B$. Покажите, что

$$p(A' \cap B') = p(A')p(B') = p(A)p(B),$$

т.е. события A', B' независимы.

Набор событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ называется *независимым*, если для любого его поднабора A_m, A_n, $\dots$, A_l выполнено

$$p(A_m \cap A_n \cap \dots \cap A_l) = p(A_m)p(A_n) \dots p(A_l).$$

Пример. Рассмотрим пространство всех пар точек $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})$ в S^{15}. В силу задачи 5.6, события $|a_1 - b_1| \leqslant 3$, $|a_2 - b_2| \leqslant 3$, $\dots$, независимы. Это даёт решение задачи 2.4.б

(впрочем здесь введенная терминология не дала ничего нового).

5.8. Влияние неравномерности распределения на вероятность случайных совпадений. В качестве модельного примера мы обсудим следующую задачу.

В комнате сидят N случайно выбраных людей. Какова вероятность того, что среди них есть два человека с совпадающими днями рождения?

Предположим сначала, что мы имеем равномерное распределение вероятностей.

Будем искать вероятность того, что дни их рождения попарно различны. Вероятность того, что день рождения второго человека отличен от первого[19] равна $\frac{364}{365}$. Вероятность того, что день рождения третьего человека отличен от дня рождения первого и второго, равна $\frac{364 \cdot 363}{365 \cdot 365}$. Повторяя это рассуждение, мы получаем, что вероятность того, что дни рождения различны, равна

$$\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365 - N + 1}{365}. \tag{5.4}$$

Разумеется, это лишь упрощённый вариант нашей игры в кубики из п.2.4.

Рассмотрим более общую задачу. Пусть вероятность того, что человек родился в j-ый день года, равна p_j. Кажется интуитивно ясным, что в этом случае вероятность случайного совпадения дней рождения может только увеличиться по сравнению с (5.4). Убедимся аккуратно, что действительно так.

Нашим вероятностным пространством Ω является пространство последовательностей

$$(u_1, \dots, u_N), \tag{5.5}$$

[19] Допустим, для простоты, что в году 365 дней.

где $u_j = 1, 2, 3, \ldots, 365$ – номера дней в году. Вероятность точки (5.5) равна произведению чисел p с соответствующими номерами.

$$p_{u_1} p_{u_2} \cdots p_{u_N}.$$

То, что все дни рождения различны, означает, что различны все числа в наборе (5.5). Поэтому вероятность того, что все дни рождения различны, равна

$$\sum p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_N},$$

где суммирование ведётся по всем наборам попарно различных номеров $i_1, \ldots, i_N$, меньших 366. Собирая слагаемые, отличающиеся лишь порядком сомножителей, перепишем эту сумму в виде

$$N! \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_N} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_N}. \tag{5.6}$$

Теорема. *Величина* (5.6) *достигает своего максимума, если*

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_{365},$$

причем этот максимум равен (5.4).

В качестве образца для доказательства, приведём вывод известного неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n),$$

где x_j – неотрицательные числа; равенство достигается лишь когда все числа равны.

Рассмотрим функцию $f(x) = x_1 x_2 \ldots x_n$ на множестве всех наборов $(x_1, \ldots, x_n)$ неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$, где c фиксировано. Допустим, что $\widetilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ – точка максимума этой функции (почему точка максимума существует?). Допустим, например, что $a_1 \neq a_2$. Рассмотрим новую точку $\widetilde{b}$, которая получается из $\widetilde{a}$ заменой a_1, a_2 на пару одинаковых чисел $\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$, $\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. Тогда $f(a) = a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$ заменится на

$$f(b) = \frac{(a_1 + a_2)^2}{4} a_3 a_4 \ldots$$

Очевидно, $f(\widetilde{b}) > f(\widetilde{a})$, и, следовательно, a – не точка максимума.

Задача 5.7. Докажите нашу теорему тем же способом.

5.9. Аксиоматика Колмогорова. Независимые случайные величины. *Случайной величиной* называется числовая функция на вероятностном пространстве. Иными словами, каждой точке вероятностного пространства ставится в соответствие число.

Пример. В качестве пространства рассмотрим множество всех жителей Саратова, положив все точки равновероятными. В качестве примера функции можно рассмотреть возраст человека (а также рост, вес, количество букв в фамилии, число зубов, число голов и т.д.).

Средним значением или *математическим ожиданием* $\mathfrak{M}(f)$ случайной величины f на пространстве R называется следующая сумма по всем точкам пространства R

$$\mathfrak{M}(f) = \sum f(r_j)p(r_j).$$

Если вероятности всех точек равны между собой, то среднее — это просто среднее арифметическое значений функции во всех точках пространства R. В только что приведенном примере с городом Саратовым в качестве среднего мы получим средний возраст жителя, средний рост и.т.д.

Пример. Рассмотрим вероятностное пространство S^{15}. В качестве случайной величины $f(\overline{\mathbf{a}})$ рассмотрим число точек в кубике $K_3(\overline{\mathbf{a}})$. Её среднее было вычислено выше в п.5.6.

Задача 5.8. Покажите, что

$$\mathfrak{M}(f+g) = \mathfrak{M}(f) + \mathfrak{M}(g). \tag{5.7}$$

Следующее понятие не сразу становится прозрачным, оно однако очень важно.

Две случайные величины f, g на одном и том же пространстве R называются *независимыми*, если для любых чисел u, v их прообразы $f^{-1}(u)$, $g^{-1}(v)$ являются независимыми событиями (разумеется, если, скажем, f не принимает значения u, то это условие выполнено автоматически).

Задача 5.9°. Какие из пар вышеупомянутых случайных величин, связанных с городом Саратовым, независимы?

Теорема *Пусть f, g — независимые случайные величины. Тогда*

$$\mathfrak{M}(fg) = \mathfrak{M}(f)\mathfrak{M}(g). \tag{5.8}$$

Доказательство. Пусть A – подмножество в нашем вероятностном пространстве R. Через $I_A(r)$ мы обозначим так называемую индикаторную функцию множества A:

$$I_A(r) = \begin{cases} 1, & \text{если } r \in A \\ 0, & \text{если } r \notin A \end{cases} \tag{(5.9)}$$

Задача 5.10. Чему равно $\mathfrak{M}(I_A)$?

Пусть f принимает значения u_1, u_2, ... Через A_i мы обозначим прообраз u_i относительно f. Аналогично, для любого значения v_j функции g обозначим через B_j его прообраз относительно функции g.

По определению независимых случайных величин, событие A_i независимо с B_j для любых i, j.

Теперь замечаем, что

$$f(r) = \sum_i u_i I_{A_i}(r); \qquad g(r) = \sum_j v_j I_{B_j}(r).$$

Задача 5.11. Завершите доказательство теоремы.

Пусть f_1, f_2, ... f_k — случайные величины, определённые на одном и том же пространстве. Они называются независимыми, если для любых чисел $u_1, \dots, u_k$ их прообразы $f_1^{-1}(u_1)$, $f_2^{-1}(u_2)$, ... , $f_k^{-1}(u_k)$ независимы.

Для независимых случайных величин выполнено

$$\mathfrak{M}(f_1 f_2 \dots f_k) = \mathfrak{M}(f_1)\mathfrak{M}(f_2)\dots\mathfrak{M}(f_k). \tag{5.10}$$

5.10. Ещё раз решение задачи 2.5 (о среднем числе точек в кубике). В качестве вероятностного пространства берем S^{15}. В качестве случайной величины берём число $V(\overline{\mathbf{a}})$ точек в кубике $K(\overline{\mathbf{a}})$

$$V(\overline{\mathbf{a}}) = \prod_{j=1}^{15} \Big\{ \text{Число точек в } I_3(a_j) \Big\}.$$

По формуле (5.10) получаем, что её среднее есть произведение средних от случайных величин

$$\varphi_j(a) = \Big\{ \text{Число точек в } I_3(a_j) \Big\}.$$

Среднее от φ_j было вычислено в задаче 2.3.

Кажется, это решение уже более предпочтительно, чем приведенное нами в 5.6. В следующем пункте то же обстоятельство проявляется более ярко.

5.11. Решение задачи 2.6 (о пересечении двух кубиков). Рассмотрим пространство $S^{15} \times S^{15}$. Число $\Phi(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})$ точек пересечения кубиков $K(\overline{\mathbf{a}}) \cap K(\overline{\mathbf{b}})$ есть случайная величина на этом пространстве, причём

$$\Phi(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = \prod_{j=1}^{15} \Big\{ \text{Число точек в } I_3(a_j) \cap I_3(b_j) \Big\}.$$

Мы видим, что наша случайная величина является произведением случайных величин. Далее сомножители независимы (подумайте почему), применяя формулу (5.10), мы получаем желаемый результат.

5.12. Условные средние. Рассмотрим подмножество A в вероятностном пространстве R. Допустим, что вероятность A отлична от нуля. Тогда множество A можно превратить в вероятностное пространство, положив, что для любого $B \subset A$ выполнено

$$\widetilde{p}(B) = \frac{p(B)}{p(A)}.$$

Если f – случайная величина на R, то мы определеяем её среднее по множеству A как

$$\frac{1}{p(A)} \sum_{r \in A} f(r) p(r).$$

Разумеется, это совпадает со средним случайной величины f по пространству A.

5.13. Решение задачи 2.7 (оценка логарифма). Напомним (см. Фихтенгольца или любой другой начальный учебник по анализу), что при $|x| < 1$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots . \tag{5.11}$$

В частности,

$$\ln(1+x) \leqslant x$$

(это требует определённых размышлений при $x > 0$, у нас, однако $x < 0$, и все слагаемые суммы (5.11) отрицательны). Поэтому, отбрасывая младшие слагаемые в разложении логарифма, мы лишь завышаем выражение (2.4), и тем самым занижаем вероятность случайного совпадения.

Задача 5.12. Насколько мы ее занижаем?

Ответ: При наших значениях N, ε поправка в (2.5) будет лишь в шестом знаке после запятой, т.е. в нашем случае формула (2.5) на самом деле является точным равенством с любой разумной точки зрения

5.14. Решение задачи 2.8 (о несущественности пересечений кубиков). Вроде понятно, что это так. Среднее число точек в кубике – около 10^{11}, а среднее число точек в пересечении двух кубиков – 28.5. Всего же у нас есть только 140000 кубиков, поэтому пересечения j-ого кубика $K_3(\overline{\mathbf{a}}^j)$ со всевозможными другими кубиками составляют лишь малую часть его "обёма". Ниже мы "оформляем" это соображение.

В качестве вероятностного пространства Ω^l возьмём произведение l штук пространства S^{15}. Его точками являются всевозможные наборы

$$\omega = (\overline{\mathbf{a}}^1, \dots, \overline{\mathbf{a}}^l) \tag{5.12}$$

из 15-членных династий $\overline{\mathbf{a}}^j$. Мы будем рассматривать всевозможные $l = 1, 2, \dots, N$, где $N = 140000$.

Обозначим через $\Xi^l \subset \Omega^l$ множество всевозможных наборов династий $\omega = (\overline{\mathbf{a}}^1, \dots, \overline{\mathbf{a}}^l)$, таких, что никакие две династии $\overline{\mathbf{a}}^i$, $\overline{\mathbf{a}}^j$ не являются близкими. *Наша цель — найти верхнюю оценку для вероятности* $p(\Xi^N)$. Это автоматически даст нижнюю оценку для вероятности случайной близости.

Введем ещё одно обозначение: для произвольного множества A мы обозначим через $\#[A]$ число элементов в этом множестве.

Лемма.

$$\#[\Xi^{l+1}] = \sum_{\omega=(\overline{\mathbf{a}}^1,\dots,\overline{\mathbf{a}}^l)\in\Xi^l} \left\{ \begin{array}{c} \text{числа точек из } S^{15}\text{, не лежащих} \\ \text{в объединении кубиков } K_3(\overline{\mathbf{a}}^1),\ \dots,\ K_3(\overline{\mathbf{a}}^l) \end{array} \right\} . \tag{5.13}$$

Это равенство выражает в точности следующее. Пусть у нас есть точка ω из Ξ^l, т.е. набор из l кубиков с далёкими друг от друга центрами. Если мы хотим поставить $(l+1)$-й кубик, то его центр должен быть "далёким" от центров предыдущих кубиков, т.е. он должен лежать вне кубиков $K_3(\overline{\mathbf{a}}^1)$, $\ldots$, $K_3(\overline{\mathbf{a}}^l)$.

На языке вероятности равенство (5.13) переписывается в виде

(5.14)
$$p(\Xi^{l+1}) = p(\Xi^l)\cdot\Big[1-36^{-15}\cdot\Big\{\text{среднее по } \Xi^l \text{ от } \#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^1)\cup\dots\cup K_3(\overline{\mathbf{a}}^l)]\Big\}\Big].$$

(убедитесь в этом).

Итак задача свелась к вопросу о числе точек в обьединенении большого числа кубиков.

Прежде всего напомним *формулу включения–исключения*, выражающую число точек в объединении произвольных конечных множеств B_1, $\ldots$ B_l:

$$\#[B_1\cup\dots\cup B_l] = \sum_j \#[B_j] - \sum_{i<j}\#[B_i\cap B_j] + \sum_{i<j<k}\#[B_i\cap B_j\cap B_k] - \dots$$
$$- (-1)^l\#[B_1\cap B_2\cap\dots\cap B_l].$$

Это полезная точная формула (а её вывод — хорошая задача). Нам же будет достаточно следующего, более простого утверждения.

Задача 5.13. Выведите неравенство

$$\#[B_1\cup\dots\cup B_l] \geqslant \sum_j \#[B_j] - \sum_{i<j}\#[B_i\cap B_j].$$

Так как наша цель — верхняя оценка вероятностей $p(\Xi^l)$, мы можем заменить выражение в (5.14) в фигурных скобках на меньшую величину

$$\Big\{\text{среднее по } \Xi^l \text{ от } \sum_{1\leqslant j\leqslant l}\#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^j)] - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant l}\#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^i)\cap K_3(\overline{\mathbf{a}}^j)]\Big\}. \tag{5.15}$$

Очень легко вычислить среднее от той же величины, но по всему пространству Ω_l, т.е.

$$\Big\{\text{среднее по } \Omega^l \text{ от } \sum_{1\leqslant j\leqslant l}\#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^j)] - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant l}\#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^i)\cap K_3(\overline{\mathbf{a}}^j)]\Big\}. \tag{5.16}$$

Действительно, среднее от суммы равно сумме средних (см. формулу (5.7)), а среднее от каждого слагаемого нам известно (задачи 2.5 и 2.6). Поэтому среднее от (5.16) равно

$$l\cdot\big(6\tfrac{2}{3}\big)^{15} - \frac{l(l-1)}{2}\cdot 28.5. \tag{5.17}$$

Если бы могли просто заменить (5.15) на (5.16), то всё было бы прекрасно. Мы получили бы

$$p(\Xi^N) = \prod_{l=1}^{N}\Big(1-36^{-15}\big[l\big(6\tfrac{2}{3}\big)^{15} - \frac{l(l-1)}{2}\cdot 28.5\big]\Big) = \tag{5.18}$$
$$= \prod_{l=1}^{N}\Big(1-l\cdot 5.4^{-15} + 36^{-15}\cdot\frac{l(l-1)}{2}\cdot 28.5\Big) \simeq \prod_{l=1}^{N}\Big(1-l\cdot 5.4^{-15}\Big).$$

Последнее выражение в этой цепочке равенств — это в точности произведение (2.4), которое предлагалось в качестве $p(\Xi^N)$ в пункте 2.4. Что касается приближенного равенства в этой цепочке, то оно с любой разумной точки зрения точно (поправка легко оценивается с помошью логарифмирования и оказывается вполне ничтожной).

Осталось сравнить средние (5.15) и (5.16).

Сейчас мы проверим два высказывания:

А)

$$\text{(5.19)}\quad \Big\{\text{среднее по } \Xi^l \text{ от } \sum_{1\leqslant i<j\leqslant l} \#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^i)\cap K_3(\overline{\mathbf{a}}^j)]\Big\} < \\ < \Big\{\text{среднее по } \Omega^l \text{ от } \sum_{1\leqslant i<j\leqslant l} \#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^i)\cap K_3(\overline{\mathbf{a}}^j)]\Big\}.$$

(т.е. поправка происходит в благоприятную с точки зрения наших целей сторону)

Б) Если величина

(5.20)

$$\Big\{\text{среднее по } \Xi^l \text{ от } \sum_{1\leqslant j\leqslant l} \#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^j)]\Big\} - \Big\{\text{среднее по } \Omega^l \text{ от } \sum_{1\leqslant j\leqslant l} \#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^j)]\Big\}$$

и положительна, то она всё же очень мала́.

Начнём с обсуждения Высказывания А).

Прежде всего, обясним, почему оно правдоподобно. Допустим, что точки $\overline{\mathbf{a}}^i$ и $\overline{\mathbf{a}}^j$ близки. Тогда

$$\text{(5.21)}\qquad \#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^i)\cap K_3(\overline{\mathbf{a}}^i)] \geq 4^{15} \simeq 10^9$$

(поймите, почему это так), в то время как среднее число точек в пересечении двух случайно взятых кубиков — всего лишь 28.5.

Более того, фиксируем, например, кубик $K_3(\overline{\mathbf{a}}^1)$ и будем произвольно менять другие кубики. Тогда среднее число точек пересечения $K_3(\overline{\mathbf{a}}^1)$ со всеми остальными кубиками, вместе взятыми (т.е. с $\sum_{j\geqslant 2}\#(K_3(\overline{\mathbf{a}}_1)\cap K_3(\overline{\mathbf{a}}^j))$ равно

$$(l-1)\cdot 28.5$$

Выбирая l самым большим из возможных, т.е. $l = N = 140000$, мы получаем величину порядка $4\cdot 10^7$, что заметно меньше, чем (5.21).

Поэтому выбрасывая из Ω^l точки, не лежащие в Ξ^l, мы выбрасываем точки, где пересечения кубиков очень большие, а потому уменьшаем среднее от

$$\text{(5.22)}\qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant l} \#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^i)\cap K_3(\overline{\mathbf{a}}^j)].$$

Доказательство Высказывания А). Пусть утверждение доказано для Ξ^l. Докажем его для Ξ^{l+1}. Добавим к набору кубиков $(\overline{\mathbf{a}}^1,\dots,\overline{\mathbf{a}}^l)\in\Xi^l$ произвольный кубик $K_3(\overline{\mathbf{a}}^{l+1})$. Тогда величина (5.22) увеличится на

$$\text{(5.23)}\qquad \sum_{1\leqslant j\leqslant l} \#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^{l+1})\cap K_3(\overline{\mathbf{a}}^j)].$$

Среднее от этой добавки равно $28.5 \cdot l$.

Если же точка $\overline{\mathbf{a}}^{l+1}$ лежит близко к одной из ранее выбранных точек $\overline{\mathbf{a}}^{\alpha}$, то уже одно-единственное слагаемое $\#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^{l+1}) \cap K_3(\overline{\mathbf{a}}^{\alpha})]$ будет больше среднего значения $28.5 \cdot l$ (а тем самым, всё выражение (5.23) будет и подавно больше этого среднего). Поэтому, убирая из рассмотрения эту точку $\overline{\mathbf{a}}^{l+1}$, мы уменьшаем среднее значение добавки (5.23).

Проверка высказывания Б). Здесь всё просто. Фиксируем точку $(\overline{\mathbf{a}}^1, \dots, \overline{\mathbf{a}}^l) \in \Xi^l$. Обозначим через U объединение всех кубиков K_3 с центрами в точках $\overline{\mathbf{a}}^j$. Нам нужно оценить

$$\Big\{\text{среднее от } \#K_3(\overline{\mathbf{b}}) \text{ по всем точкам } \overline{\mathbf{b}} \notin U\Big\}. \tag{5.24}$$

Мы же знаем

$$\Big\{\text{среднее от } \#K_3(\overline{\mathbf{b}}) \text{ по всем точкам } \overline{\mathbf{b}} \in S^{15}\Big\} = \big(6\tfrac{2}{3}\big)^{15}. \tag{5.25}$$

Множество $U \subset S^{15}$ является очень маленьким — оно заполняет (даже при $l = N$) не более $1/(5 \cdot 140000)$ от всего пространства S^{15}, т.е., порядка 0.0001 процента (только эта информация о множестве U будет для нас существенна).

Самое большое возможное значение функции $\#K_3(\overline{\mathbf{b}})$ равно 7^{15}, что всего лишь в 1.78 раза больше среднего её значения по всему S^{15}. Самое меньшее мыслимое значение величины (5.24) может быть достигнуто, если функция $\#K_3(\overline{\mathbf{b}})$ равна максимуму (т.е. 7^{15}) на всём множестве U. Понятно, что это наименьшее мыслимое значение лишь на ничтожную долю процента отличается от (5.25).

Итак, получается, что приближенное равенство (5.18) для $p(\Xi^l)$ выполнено с очень большой степенью точностью (поправка не ранее, чем в пятой значащей цифре). На этом мы завершаем игру в 15-мерные кубики.

5.15. К задаче 2.9 (точки переклейки династий в Таблице 1). Ограничимся левой колонкой. В качестве основателя династии мог бы быть назван также Карл Мартелл (откуда слово "Каролинги") или Пипин Короткий (первый обладатель королевского титула среди Каролингов).

Далее, номера 1-2 не были королями, и они могли бы быть заменены на последних франкских королей — Меровингов.

Наконец, около 843 года Империя Каролингов распадается на страны, которые можно условно назвать Францией и Германией, и на плохо выразимую в современных терминах Хлотарингию. С этого места "династию" можно было бы продолжить любой из трёх ветвей. Они же в Таблице идут в перемежку (и, конечно же, с пропусками).

Дата обрыва "династии" 888г. тоже вполне произвольна.

5.16. Решение задачи 4.1 (об аппроксимации произвольных монархов римскими императорами). Римская Империя не была наследственной монархией, и в ней маловато длительных правлений; в частности с 44 г до н.э. до 396 г н.э. было лишь два правления $\geqslant 25$ лет, а именно Константин (31 год) и Август (56 лет); последнего (из-за необычной продолжительности правления) вообще трудно с кем-либо отождествить, см., однако, выше сноску 16. Поэтому у нас возникнут сложности, если мы попытаемся аппроксимировать римскими императорами, например, династию, которая начинается с двух 33-летних правлений.

Способ, которым А.Т.Фоменко преодолевает данное препятствие и находит "эквиваленты" длинным правлениям, ясен из следующего пункта.

5.17. Лирическое отступление о правилах игры. К п. 4.2. При применении математики к реальным задачам, никогда не вредно обсудить разумность используемой модели.

На первый взгляд, может показаться, что преобразование {3} (слияние правителей) осмысленно, действительно,

(5.26) Пётр+Софья=Пётр I, т.е. $35 + 7 = 42$.

Но ведь 42 и без того было бы учтено как "вариант правления" Петра (на добросовестность А.Т.Фоменко в этом месте можно положится). Поэтому для моделирования реальных ошибок преобразование {3} не нужно.

Зато, соглашаясь с преобразованием {3}, мы получаем законное право ввести в список русских царей (в качестве "малой поправки") одного–двух из следующих чудо-юд:

(5.27) Софья + Пётр $= 7 + 42 = 49$

Фёдор + Софья, Фёдор + Пётр, Фёдор + Иван V,

Иван V + Пётр, Иван V + Софья, Пётр + Екатерина;

отметим, что у Ивана можно указать два "варианта правления", а у Петра – три, в итоге у одного лишь гибридного Петроивана можно предложить 5 различных продолжительностей правления.

Это ещё не всё. Операция суммирования понимается гибко. Например (как показывает печальная судьба Септимия Севера, сноска 14), при суммировании мы можем сохранять отдельные слагаемые. Например, пара [Фёдор, Софья] может быть преобразована не только в Софьефёдора, но и в пары

[Софья, Софьефёдор], [Фёдор, Софьефёдор]

[Софьефёдор, Софья], [Софьефёдор, Фёдор]

И конечно, мир не сошёлся клином на Фёдоре, Петре, Иване и сестре их Софье. Рассматривая список А–Ж русских правителей, мы должны быть "не предвзятыми" и добросовестно включить в рассмотрение две сотни кентавров типа Горбоельцина, Николо-Ленина, Александра Двутретьего и Иванодмитрия Краснодонского.

Главное значение преобразования {3} — решение проблемы поиска соответствий для длинных правлений(см. выше п.5.16.).

Теперь о преобразовании {2} (перестановка правителей). Конечно, в список русских царей пара Софья Алексеевна и Иван V Алексеевич могут идти и в том и другом порядке. Но такой вопрос может возникать лишь в случае соправлений (регенств) или раскола государства. Допустимая (да и то, с оговорками) с исторической точки зрения форма преобразования {2}:

— Если промежуток правления одного правителя содержится в промежутке правления другого, то их можно писать в любом порядке.

В этом случае естественного порядка правителей просто нет, и правильней было бы (с математической точки зрения) его и не придумывать. Просто членов "династии" не всегда можно естественным образом занумеровать, что и следовало бы учесть в математической модели[20].

А откуда берется уверенность, что летописцы вообще склонны систематически путать (изменять по злому умыслу? по идеологичским соображениям?) порядок правителей, А.Т.Фоменко, к сожалению, не сообщает.

Так что статистическая модель, основанная на преобразованиях $\{2\}$–$\{3\}$ выглядит не обоснованной и не бесспорной. Несмотря на это, давайте примем предлагаемые нам правила игры. Наш основной контрдовод из §4 от этого ничуть не пострадает.

5.18. К задаче 4.2 (о невидимых правителях). Привожу случайный набор примеров для образца:

Овчина-Телепнин, Адашев, Малюта, Юрьев, Жолкевский, Заруцкий, Минин, Морозов, Ордын-Нащокин, Матвеев, Голицын, Нарышкин, Меньшиков, Бирон, Орлов, Потёмкин, Зубов, Аракчеев, Суслов, Яковлев,...

Совершенно непонятно, кого из них правильно включать в список, а кого нет. В итоге достаточно четкий список высших правителей расплывается во что-то аморфное.

Конечно, математическая статистика – объктивная наука. Но её результаты могут претендовать на объективность, лишь при объективности входных данных. При любом сборе статистики нужна чёткая (и точно сформулированная) методика и составление методики – отдельная (и возможно не простая) задача. Вводя "фактических правителей" в список монархов, мы теряем возможность работать с обьективными данными.

Приведём пример, когда статистическая ошибка возникает во вполне безобидной ситуации.

Задача 5.14. Студент Иванов ездит из пединститута на 103 автобусе, а студент Петров – на 130-м. Садятся они на одной остановке. Иванов утверждает, что 103-и автобусы – полные, а 130-е — пустые. Петров же утверждает точно противоположное. Предложите правдоподобное объяснение.

5.19. Решение задачи 4.3 (о Таблице 1). Разумеется нет. В левой части присутствуют пробелы между соседними правлениями в 7, 13, 7, 5 лет, а в правой части 18, 7. Все упомянутые числа больше 1.

5.20. Решение задачи 5.9 (про город Саратов). Число голов независимо с любой другой из случайной величин.

Рост, вес и число зубов зависимы между собой (при весе $<$ 5кг зубов у жителя города Саратова явно маловато).

Вес (рост и число зубов), как будто, можно считать не зависимым от числа букв в фамилии (по-видимому, это верно с довольно большой точностью).

[20] Замечу, что модель, основанная на линейном упорядочении правителей не применима в случае Римской империи, когда множество императоров имеет лишь естественное частичное упорядочение.

5.21. Решение задачи 5.13 (про логарифм). Воспользуйтесь формулой Тейлора с каким-либо приглянувшимся Вам остаточным членом. Легко провести оценку и непосредственно, исходя из (5.11).

5.22. Решение задачи 5.14 (про автобусы). Представим себе, что упомянутым студентам удаётся точно считать число пассажиров в увиденных ими автобусах. Человек, наблюдающий чужой автобус, будет примерно оценивать среднее арифметическое числа пассажиров

$$\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n). \tag{5.28}$$

Что касается своего автобуса, то человек обычно (если получается) садится в первый подошедший автобус. Вероятность попасть в j-й по счету автобус примерно пропорциональна промежутку времени между $(j-1)$ и j-ым автобусом. Но и число пассажиров в автобусе пропорционально этому временному промежутку. Следовательно, фактически наблюдается величина

$$\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{x_1 + \cdots + x_n}. \tag{5.29}$$

Задача 5.15. Покажите, что (5.28) меньше или равно (5.29). Равенство достигается лишь когда все x_j равны между собой.

Указание. Воспольуйтесь методом п.5.8 или неравенством между средним арифметическим и средним квадратическим.

Так что спор скорее всего имеет причиной не психологию человека, огорченного долгим ожиданием, а разницу в методиках сбора статистики.

Исторические ссылки.

1) В нашей основной аргументации (§§2–3, 5) исторические сведения, как таковые, почти не используются, для нас существенны лишь длины списков правителей, но для определения длин нужны и сами списки.

Интересующие нас списки русских князей в готовом виде можно найти в энциклопедии "Отечественная история", т.1-2 (Изд-во Бол. Росс. Энциклопедия, 1994, 1996), статьи Древнерусское государство, Владимирское великое княжество, Владимиро-Волынское княжество, Галицкое княжество, Галицко-Волынское княжество, Киевское княжество.

Списки русских президентов, генсеков, царей общеизвестны.

2) В §1 и §4 мы ссылаемся на список Римских императоров (правителей), этот список в ортодоксальной истории вполне стандартен. Все императоры (а также основные узурпаторы и наиболее могущественные министры) упоминаются, например, в "Истории упадка и разрушения великой Римской Империи" Гиббона. Готовые списки есть в "Британской энциклопедии" в статьях "Roman republic and empire" и "Byzantic empire". Там же легко найти списки Каролингов ("Carolings").

А.Т.Фоменко в основном оперирует с этим стандартным списком и стандартными датами (потому что этот список и должен быть входными данными для Алгоритма). Конечно, внимательный читатель может найти в его таблицах ряд неожиданных (неортодоксальных) дат, неожиданных комментариев и т.п., но это отдельный вопрос, который бы втянул бы нас в обсуждение истории; *с точки зрения нашей аргументации* *это безразлично.* Несоответствие между Алгоритмом Фоменко и его же таблицами видно из самих таблиц в том виде, в котором они предъявлены; наш тезис о наличии временны́х лакун хорошо проиллюстрирован в книге [1] на рис. 16.7–16.11.

3) Идея "исторического параллелелизма" с точки зрения историка обсуждается в [3].

Литература.

[1] Фоменко А.Т., "Методы статистического анализа нарративных текстов и приложения к хронологии" Изд-во Московского университета, 1990.

[2] Городецкий М.Л. "Коренная математическая ошибка в математико-статистических методах Фоменко" В "АнтиФоменко", Сборник Русского исторического общества 3(151), Москва, Русская па

норама, 2000; 124–129

[3] Kugler F.X. "Im Bannkreis Babels", 1910