Индексное гипергеометрическое преобразование

Неретин Ю.А.

Как известно, непрерывным аналогом рядов Фурье является преобразование Фурье. Оказывается, что разложение по многочленам Якоби тоже имеет непрерывный аналог – интегральное "преобразование Якоби" (о терминах см. ниже), ему и посвящено это добавление. Об этом преобразовании можно сказать много, к сожалению на сегодняшний день обстоятельного обзора его свойств и его применений в литературе нет, и настоящая статья таких целей не ставит. Разные дополнительные факты можно найти в работах [1], [3], [4], [9]–[11], [17]–[18], [26].

По аналогии с иерархией гипергеометрических ортогональных многочленов есть иерерхия гипергеометрических интегральных преобразований (см. [1]–[2], [6], [3], [8], [15], [19]–[20], [25], [26], а также ссылки Хекман–Опдам [1987*], Макдональд [1972*], Чередник [2005*] из основной библиографии). Обсуждаемое преобразование не относится ни к самым простым (скажем, преобразование Ганкеля и преобразование Конторовича–Лебедева явно проще), ни к самым сложным элементам иерархии. Оно достаточно просто, чтобы быть относительно гибким спецфункциональным инструментом (о чем ниже в §2), с другой стороны оно "контролирует" гармонический анализ на гиперболических симметрических пространствах (т.е. на пространствах Лобачевского и их комплексных и кватернионных аналогах), об этом чуть-чуть сказано ниже в §4, подробнее см. [10], [17].

1 Индексное гипергеометрическое преобразование

1.1. Многочлены Якоби. Рассмотрим ортогональную систему Якоби на отрезке $[0,1]$,

$$\mathcal{P}_n^{\alpha,\beta}(x)=\frac{(-1)^n\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)n!}\;\;{}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,n+\alpha+\beta+1\\ \beta+1\end{matrix};x\right]$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\gamma_n:=\|P_n^{\alpha,\beta}\|^2=\\ &=\int_0^1\mathcal{P}_n^{\alpha,\beta}(x)^2\,x^\beta(1-x)^\alpha\,dx=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\,n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\end{aligned}\qquad(1.1)$$

Для функции $f(x)$ рассмотрим числа ("коэффициенты Фурье"), заданные формулой

$$c_n(f):=\int_0^1 f(x)\mathcal{P}_n^{\alpha,\beta}(x)x^\alpha(1-x)^\beta\,dx$$

Тогда функция $f(x)$ восстанавливается по формуле

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(f)}{\gamma_n} \mathcal{P}_n^{\alpha,\beta}(x) \tag{1.2}$$

Кроме того, верна формула Планшереля

$$\int_0^1 f(x)\,\overline{g(x)}\,x^{\beta}(1-x)^{\alpha}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} c_n(f)\,\overline{c_n(g)}$$

Разложение по многочленам Якоби имеет аналог, в котором ряды заменяются интегралами.

1.2. Индексное гипергеометрическое преобразование. Пусть $b,\ c > 0$. Для функции f, определенной на полупрямой $[0,\infty)$, определим функцию переменной $s \geqslant 0$

$$\begin{aligned} J_{b,c}f(s) = [\widehat{f}]_{b,c}(s) =& \\ = \frac{1}{\Gamma(b+c)} \int_0^{\infty} f(x)\ {}_2F_1\left[\begin{matrix} b+is,\, b-is \\ b+c \end{matrix}; -x\right] & x^{b+c-1}(1+x)^{b+c-1}\,dx \end{aligned} \tag{1.3}$$

Теорема 1.1 *a) Оператор $J_{b,c}$ является унитарным оператором*

$$J_{b,c}:\ L^2\Bigl([0,\infty),\, x^{b+c-1}(1+x)^{b+c-1}\,dx\Bigr) \to L^2\Bigl([0,\infty), \Bigl|\frac{\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)}\Bigr|^2 ds\Bigr)$$

Иными словами, верна формула Планшереля

$$\int_0^{\infty} f_1(x)\,\overline{f_2(x)} x^{b+c-1}(1+x)^{b-c}\,dx = \int_0^{\infty} [\widehat{f}]_{b,c}(s)\overline{[\widehat{f}]}_{b,c}(s) \Bigl|\frac{\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)}\Bigr|^2 ds$$

b) Обратный оператор задается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a+b)} \int_0^{\infty} [\widehat{f}]_{b,c}(s)\ {}_2F_1\left[\begin{matrix} b+is,\, b-is \\ b+c \end{matrix}; -x\right] \Bigl|\frac{\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)}\Bigr|^2 ds \tag{1.4}$$

Отметим, что утверждение b) выткает из a), т.к. для унитарного оператора U выполнено $U^{-1} = U^*$.

Как и в случае преобразования Фурье, возникает вопрос о точном определении. Можно, например, сказать, что преобразование $J_{b,c}$ определено на непрерывных функциях с компактным носителем, а далее оно продолжается по непрерывности до унитарного оператора, определенного в пространстве L^2.

1.3. Голоморфное продолжение в полосу.

Лемма 1.2 *Пусть f интегрируема на $\mathbb{R}_+$, и*

$$f(x) = o(x^{-\alpha-\varepsilon}), \qquad\qquad x \to +\infty$$

где $\varepsilon > 0$. Тогда $[\widehat{f}(s)]_{b,c}$ голоморфна в полосе

$$|\operatorname{Im} s| < \alpha - b$$

и удовлетворяет в ней условию $\widehat{f}(-s) = \widehat{f}(s)$.

Доказательство. Это вытекает из следующей асимптотики для гипергеометрической функции (см. Бейтмен, том 1, (2.3.2.9)) при $x \to +\infty$

$$ {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) = \lambda_1 x^{-b+is} + \lambda_2 x^{-b-is} + O(x^{-b+is-1}) + O(x^{-b-is-1})$$

где $2s \notin \mathbb{Z}$, а λ_1, λ_2 – некоторые константы (при $2s \in \mathbb{Z}$ появляется дополнительно множитель $\ln x$ при старшем слагаемом). $\square$

1.4. Операционное исчисление. Обозначим через D гипергеометрический дифференциальный оператор

$$D := -x(x+1)\frac{d^2}{dx^2} - \big[(c+b) + (2b+1)x\big]\frac{d}{dx} + b^2 \tag{1.5}$$

(мы заменили x на $-x$ по сравнению с обычными обозначениями). Гипергеометрические функции в (1.3) суть (обобщенные) собственные функции оператора D:

$$D\ {}_2F_1\left[\begin{matrix} b+is,\, b-is \\ b+c \end{matrix}; -x\right] = -s^2\ {}_2F_1\left[\begin{matrix} b+is,\, b-is \\ b+c \end{matrix}; -x\right] \tag{1.6}$$

Легко видеть, что D формально самосопряжен в следующем смысле

$$\int_0^\infty Df_1(x)\cdot f_2(x)\, x^{b+c-1}(1+x)^{b-c}dx = \int_0^\infty f_1(x)\cdot Df_2(x)\, x^{b+c-1}(1+x)^{b-c}dx$$

(и на самом деле существенно самосопряжен, см. ниже) и наша теорема 1.1 есть теорема о разложении оператора D по собственным функциям.

Теорема 1.3 *Пусть f, $Df \in L^2$, тогда*

$$[\widehat{Df}(s)]_{b,c} = -s^2\widehat{f}(s) \tag{1.7}$$

Доказательство. Это перефразировка формулы (1.6).

Теорема 1.4 *Пусть функция f на $\mathbb{R}^+$ непрерывна и удовлетворяет условию*

$$f(x) = o(x^{-b-1-\varepsilon}); \qquad x \to +\infty \tag{1.8}$$

Тогда

$$[\widehat{xf(x)}]_{b,c} = P[\widehat{f(x)}]_{b,c} \tag{1.9}$$

где разностный оператор Pg задан формулой

$$Pg(s) = \frac{(b-is)(c-is)}{(-2is)(1-2is)}(g(s+i)-g(s)) + \frac{(b+is)(c+is)}{(2is)(1+2is)}(g(s-i)-g(s)) \tag{1.10}$$

Замечание. Отметим две забавных особенности данной теоремы.

1. Оператор P есть разностный оператор, но сдвиг $s \mapsto s+i$ производится в мнимом направлении, а интегрирование идет вдоль вещественной оси.

2. Преобразование $J_{b,c}^{-1}$ переводит оператор P в оператор умножения на функцию x, т.е., наш оператор $J_{b,c}^{-1}$ задает спектральное разложение разностного оператора P.

3. Оператор P похож на разностные операторы, связанные с ортогональными многочленами Вильсона, Хана, Мейкснера–Поллачека, см. (6.10.6), (6.10.9), (6.10.12) и задачу 6.37.в . Рациональные коэффициенты оператора P "сцеплены" с гамма-множителями в формуле (1.4).

Доказательство. Это сводится к проверке тождества

$$P\ {}_2F_1\left[\begin{matrix} b+is,\, b-is \\ b+c \end{matrix}; -x\right] = x\ {}_2F_1\left[\begin{matrix} b+is,\, b-is \\ b+c \end{matrix}; -x\right]$$

Теорема 1.5 *Пусть f и f' непрерывны и удовлетворяют условиям убывания* (1.8). *Тогда*

$$[\widehat{x(x+1)\frac{d}{dx}f}]_{b,c} = H[\widehat{f}]_{b,c} \tag{1.11}$$

где разностный оператор H задан формулой

$$\begin{aligned} Hg(s) = {}& \frac{(b-is)(b+1-is)(c-is)}{(-2is)(1-2is)}(g(s+i)-g(s)) + \\ &+ \frac{(b+is)(b+1+is)(c+is)}{(+2is)(1+2is)}(g(s-i)-g(s)) - (b+c)g(s) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Доказательство. Мы можем вычислить $J_{b,c}$-образ коммутатора $[x, D]$.

1.5. Исторические замечания. Преобразование $J_{1/2,1/2}$ было введено Мелером [14] в 1881г. Он же без доказательства написал формулу обращения (надо сказать, совсем не очевидную). Доказательство было опубликовано В. А. Фоком[5] в 1943г., само преобразование $J_{1/2,1/2}$ в итоге называется преобразованием Мелера–Фока. Общее преобразование $J_{b,c}$ было введено Германом Вейлем в 1910 в работе [24] по спектральной теории дифференциальных операторов, но этот результат, как будто, не привлек к себе никакого внимания. Снова это преобразование "появляется на поверхности" в книге Титчмарша [23] 1946г. В 1949 оно было переоткрыто М. Н. Олевским [21], по-видимому, в связи с его исследованиями по многомерным пространствам Лобачевского.

Наиболее употребительные термины, используемые для $J_{b,c}$ – *преобразование Олевского* и *преобразование Якоби* (введен Коорнвиндером).

2 Спецфункциональные приложения

Наша первая цель – вычислить явно индексные преобразования для некоторых функций. Это сделано в пункте 2.2 с помощью преобразования Меллина. Далее в пп.2.3-2.4 мы демонстрируем эффективность индексного преобразования как инструмента теории спецфункций.

2.1. Преобразование Меллина. Напомним, что преобразование Меллина функции $f(x)$, определенной на луче $x > 0$, задается формулой

$$F(s) = \mathcal{M}f(s) := \int_0^\infty f(x)x^{is}\frac{dx}{x}$$

Область абсолютной сходимости этого интеграла – некоторая вертикальная полоса вида $u < \operatorname{Re} s < v$ (и функция $g(s)$ тогда голоморфна в этой полосе), границы полосы могут входить или не входить в область сходимости, полоса может вырождаться в прямую вида $\operatorname{Re} s = u$. Разумеется, она может быть и пустой.

Отметим, что преобразование Меллина является унитарным оператором из $L^2(\mathbb{R}, dx/x)$ в L^2 на вертикальной прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. В частности,

$$\int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\,dx/x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(1/2+is)\overline{G(1/2+is)}\,ds$$

Напомним также теорему о свертке. Если области определения $F(s) = \mathcal{M}f(s)$ и $G(s) = \mathcal{M}g(s)$ пересекаются (по полосе или прямой), то мультипликативная свертка

$$f * g(x) := \int_0^\infty f(y)g(x/y)\,dy/y$$

переходит в $F(s)G(s)$ (на общей области определения).

Конечно, преобразование Меллина сводится к преобразованию Фурье подстановкой $x = e^y$, с точки зрения абстрактной теории между преобразованием Меллина и преобразованием Фурье разницы нет. Но для фиксированной функции f преобразования Меллина и Фурье, разумеется, различны; их роль в теории спецфункций тоже различна.

2.2. Игра в преобразование Меллина. Небольшая таблица индексных преобразований. Так как нам будут встречаться длинные произведения Γ-функций, мы введем следующее обозначение

$$\Gamma\begin{bmatrix} a_1, & \dots, & a_k \\ b_1, & \dots, & b_l\end{bmatrix} := \frac{\Gamma(a_1)\dots\Gamma(a_k)}{\Gamma(b_1)\dots\Gamma(b_l)}$$

Теперь рассмотрим произвольный (сходящийся) барнсовский интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma\begin{bmatrix} a_1+s,\dots,a_k+s, b_1-s,\dots,b_l-s \\ c_1-s,\dots,c_m-s, d_1+s,\dots,d_n+s\end{bmatrix} x^s\,ds$$

Он может быть представлен как линейная комбинация гипергеометрических функций вида ${}_pF_q$ с гамма-множителями. Как это делать, объясняется в книге в параграфе 2.4. Вычисление требует отслеживания некоторых асимптотик, но его можно раз и навсегда проделать "в общем случае". Окончательные "правила" можно найти в Слейтер[1966*], Маричев[1978*] или Прудников–Брычков–Маричев, т.3.

С другой стороны, есть неожиданно много случаев, когда интеграл допускает более простое выражение, чем это дается общим алгоритмом, см. таблицы Прудникова, Брычкова, Маричева, т.3, глава 8 (рациональных объяснений этого я не знаю).

Теперь мы вычислим два вспомогательных интеграла.

Лемма 2.1

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(x+z)^\rho}\ {}_2F_1(p,q;r;-x)\,dx = \\ = \frac{z^{\alpha-\rho}}{2\pi i}\Gamma\begin{bmatrix} r \\ p,q,\rho\end{bmatrix}\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma\begin{bmatrix} s+\alpha,\rho-s-\alpha,p+s,q+s,-s \\ r+s\end{bmatrix} z^s ds \qquad (2.1)$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}\ {}_2F_1\begin{bmatrix} p,q \\ r\end{bmatrix};-\omega x\Big]\ {}_2F_1\begin{bmatrix} u,v \\ w\end{bmatrix};-\tilde\omega x\Big]\,dx =$$

$$= \frac{\omega^{-\alpha}}{2\pi i}\Gamma\begin{bmatrix} r,w \\ u,v,p,q\end{bmatrix}\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma\begin{bmatrix} \alpha+s,u+s,v+s,p-\alpha-s,q-\alpha-s,-s \\ r-\alpha-s,w+s\end{bmatrix}\left(\frac{\omega}{\tilde\omega}\right)^{-s} ds \qquad (2.2)$$

Доказательство. Проверим, например, первое равенство. Преобразование Меллина от функции $f(x) := x^{\alpha-1}/(x+z)^\rho$ равно $B(s+\alpha,\rho-s-\alpha)z^{s+\alpha-\rho}$. Преобразование Меллина от $g(x) := {}_2F_1(p,q;r;-x)$ было вычислено в параграфе 2.4 и равно некоторому произведению Г-функций. Наш интеграл есть свертка функций $xf(1/x)$ и $g(x)$. Далее, мы замечаем, что преобразование Меллина функции $xf(1/x)$ равно $F(1-s)$. Далее, применяем теорему о свертке. □

Итак, проведенное вычисление состоит в "перекладывании Г-функций". В правой части стоят барнсовские интегралы, которые можно представить как линейную комбинацию функций ${}_3F_2$ и ${}_4F_3$ соответственно. Выписывать их мы не будем, а вместо этого заметим, что при некоторых значениях параметров в правых частях интегралов могут происходить сокращения.

Лемма 2.2 *Преобразование $J_{b,c}$ переводит*

$$(1+x)^{-a-c} \longrightarrow \frac{\Gamma(c+is)\Gamma(c-is)}{\Gamma(c+a)\Gamma(c+b)} \tag{2.3}$$

$$\frac{(1+x)^{b-a}}{(x+z)^{c+b}} \longrightarrow \Gamma\begin{bmatrix} c+is, c-is \\ c+a, c+b \end{bmatrix} {}_2F_1\begin{bmatrix} c+is, c-is \\ c+a \end{bmatrix}; 1-z \tag{2.4}$$

$$x^{-u-a} \longrightarrow \frac{\Gamma(-u+b)}{\Gamma(a+u)} \cdot \frac{\Gamma(u+is)\Gamma(u-is)}{\Gamma(b+is)\Gamma(b-is)} \tag{2.5}$$

$$ {}_2F_1\begin{bmatrix} p+b, q+b \\ a+b \end{bmatrix}; -\frac{x}{y} (1+x)^{b-a} \longrightarrow$$
$$y^{b-q}\Gamma\begin{bmatrix} a+b \\ p+q, p+b, q+b \end{bmatrix} \cdot \Gamma\begin{bmatrix} p+is, p-is, q+is, q-is \\ a+is, a-is \end{bmatrix} {}_2F_1\begin{bmatrix} p+is, p-is \\ p+q \end{bmatrix}; 1-y \tag{2.6}$$

$$ {}_2F_1\begin{bmatrix} p+b, q+b \\ a+b \end{bmatrix}; -x (1+x)^{b-a} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \Gamma\begin{bmatrix} a+b \\ p+q, p+b, q+b \end{bmatrix} \cdot \Gamma\begin{bmatrix} p+is, p-is, q+is, q-is \\ a+is, a-is \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

$$ {}_2F_1\begin{bmatrix} a+c, a+d \\ a+b+c+d \end{bmatrix}; -x \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \frac{\Gamma(a+b+c+d)\cdot\Gamma(c+is)\Gamma(c-is)\Gamma(d+is)\Gamma(d-is)}{\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)\Gamma(c+d)} \tag{2.8}$$

Доказательство. Посмотрим на правую часть тождества (2.2). Если $\alpha = r$, там сокращаются два Γ-множителя. То, что осталось – интегральное представление ${}_2F_1$. Это дает вторую формулу. Подставляя в нее $z = 1$, получаем первую формулу.

Далее, если $z = 1$, $r = p+q+\rho$, то в правой части – один из интегралов Барнса (см. теорему 2.4.3 основного текста). Это дает (2.5).

Теперь отслеживаем возможные упрощения в правой части (2.2). Если в подставить $\alpha = w = r$, то в правой части четыре Γ-множителя сокращаются. Это дает формулу (2.6). Подставляя $y = 1$ в (2.6), мы получаем (2.7).

Наконец, при попытке проверить (2.8), мы обнаружим, что один из Γ-множителей в правой части (2.2) сократится, а дальше применяется та же теорема 2.4.3.

2.3. Игра в формулу Планшереля. Только что выписана короткая таблица из 6 строчек для преобразования $J_{b,c}$. Применяя к этим строчкам формулу Планшереля для $J_{b,c}$, можно получить забавный набор интегралов. Мы приведем лишь несколько примеров.

а) *Интеграл Де Бранжа–Вильсона.* Применяя формулу Планшереля к паре функций $(1+x)^{-a-c}$ и $(1+x)^{-a-d}$, мы, после тривиальной выкдадки, получим интеграл де Бранжа–Вильсона (см. параграф 3.6 основного текста), Коорнвиндер [11].

б) *Другой бета-интеграл.* Применяя формулу Планшереля к x^{-u-a}, x^{-v-a}, получим интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\prod_{k=1}^{3}\Gamma(a_k+is)}{\Gamma(2is)\Gamma(b+is)}\right|^2 ds=\frac{\Gamma(b-a_1-a_2-a_3)\prod_{1\leqslant k<l\leqslant 3}\Gamma(a_k+a_l)}{\prod_{k=1}^{3}\Gamma(b-a_k)}$$

в) *Интегральное представление для* ${}_3F_2(1)$. Пара функций

$$(1+x)^{-a-e} \qquad \text{и} \qquad {}_2F_1\left[\begin{matrix}a+c, a+d\\ a+b+c+d\end{matrix}; -x\right]$$

приводит к забавному интегральному представлению ${}_3F_2(1)$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left|\frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)\Gamma(d+is)\Gamma(e+is)}{\Gamma(2is)}\right|^2 ds=$$
$$=\frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(a+e)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)\Gamma(b+e)\Gamma(c+d)\Gamma(c+e)}{\Gamma(a+b+c+d)\Gamma(a+b+c+e)}\times$$
$$\times\ {}_3F_2\left[\begin{matrix}a+c, b+c, a+b\\ a+b+c+d, a+b+c+e\end{matrix}; 1\right] \tag{2.9}$$

Левая часть симметрична по параметрам, поэтому симметрична и правая часть. Это *тождество Куммера* (см. следствие 3.3.5).

г) *Добавление еще одного гамма-множителя к числителю.* Применяя формулу Планшереля к паре функций

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a+c, a+d\\ a+b+c+d\end{matrix}; -x\right] \qquad \text{и} \qquad {}_2F_1\left[\begin{matrix}a+e, a+f\\ a+b+e+f\end{matrix}; -x\right],$$

мы получаем тождество

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left|\frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)\Gamma(d+is)\Gamma(e+is)\Gamma(f+is)}{\Gamma(2is)}\right|^2 ds=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(c+d)\Gamma(b+e)\Gamma(b+f)\Gamma(e+f)\times$$
$$\times\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma\left[\begin{matrix}a+b+s, a+e+s, a+f+s, d-a-s, c-a-s, -s\\ c+d-s, a+b+e+f+s\end{matrix}\right] ds \tag{2.10}$$

Правая часть – линейная комбинация трех функций ${}_4F_3(1)$ с гамма-коэффициетами. Впрочем, Барнсовский интеграл можно воспринимать как окончательный ответ.

д) *Добавление гамма-множителя у знаменателю.* Теперь мы применяем формулу順 Планшереля к паре функций

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} p+b, q+b \\ a+b \end{matrix}; -x\right](1+x)^{b-a} \quad \text{и} \quad {}_2F_1\left[\begin{matrix} u+b, v+b \\ a+b \end{matrix}; -x\right](1+x)^{b-a} $$

Опуская промежуточные выкладки, приводим окончательный результат

$$ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left|\frac{\Gamma(b+is)\Gamma(p+is)\Gamma(q+is)\Gamma(u+is)\Gamma(v+is)}{\Gamma(2is)\Gamma(a+is)}\right|^2 ds = $$
$$ = \frac{1}{2\pi i}\Gamma\left[\begin{matrix} u+v, p+q, p+b, q+b \\ a-v, u-v \end{matrix}\right] \times $$
$$ \times \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma\left[\begin{matrix} u+p+s, u+q+s, b+u+s, a-v+s, v-u-s, -s \\ u+a+s, u+b+p+q+s \end{matrix}\right]. \qquad (2.11) $$

Два последних тождества не столь эстетичны как предыдущие. Рассмотрим, однако, два частных случая последнего интеграла.

е) *Интеграл Нассраллаха–Рахмана.* Полагая в последнем интеграле $a = b + u + v + p + q$ (это приведет к сокращению гамма-множителей) и применяя теорему 2.4.3 основного текста книги (и поменяв обозначения), мы получаем интеграл Нассраллаха–Рахмана (его q-вариант есть в основном тексте книги, теорема 10.8.2)

$$ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left|\frac{\prod_{j=1}^5 \Gamma(a_j+is)}{\Gamma(2is)\Gamma(\sum_1^5 a_j + is)}\right|^2 ds = 2\frac{\prod_{1\leqslant k<l\leqslant 5}\ \Gamma(a_k+a_l)}{\prod_{k=1}^5 \Gamma(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5-a_k)} $$

ж) *Тождество Уиппла и симметрия многочленов Вильсона по параметрам.* Теперь мы выписываем правую часть (2.11) через ${}_4F_3$,

$$ \Gamma\left[\begin{matrix} u+v, p+q, p+b, q+b \\ a-v, u-v \end{matrix}\right] \times $$
$$ \times\Bigg\{\Gamma\left[\begin{matrix} v-u, u+p, u+q, u+b, a-v \\ u+a, u+b+p+q \end{matrix}\right] {}_4F_3\left[\begin{matrix} u+p, u+q, u+b, a-v \\ 1+u-v, u+a, u+b+p+q \end{matrix}; 1\right] + $$
$$ +\Gamma\left[\begin{matrix} u-v, p+v, q+v, b+v, a-u \\ v+a, v+b+p+q \end{matrix}\right] {}_4F_3\left[\begin{matrix} p+v, q+v, b+v, a-u \\ 1-v+u, v+a, v+b+p+q \end{matrix}; 1\right]\Bigg\}.) \qquad (2.12) $$

Левая часть (2.11) симметрична по параметрам b, p, q, u, v, а правая часть в форме (2.12) таковой не выглядит. Это дает соотношения симметрии для ${}_4F_3$ в форме "линейная комбинация четырех слагаемых равна 0". Это "необрывающееся тождество Уиппла". Его "обрывающийся" вариант (теорема 3.3.3), интенсивно используемый в книге (симметрия многочленов Вильсона относительно параметров), получается при подстановке $a = v - m$

с целым m, тогда два слагаемых исчезают за счет множителей $\Gamma(-m)$ в знаменателе.

з) *Еще одно обобщение интеграла де Бранжа–Вильсона.* Применяя формулу Планшереля к $(1+x)^{b-a}(1+x+y)^{-b-c}$ и $(1+x)^{b-a}(1+x+z)^{-b-d}$, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left|\frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)\Gamma(d+is)}{\Gamma(2is)}\right|^2 \times \\ \times\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}c-is, c+is\\ a+c\end{matrix}; -y\right]\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}d-is, d+is\\ a+d\end{matrix}; -y\right] ds = \tag{2.13}$$

$$= \frac{\pi\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)\Gamma(c+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}2b+c+d, c+d\\ a+b+c+d\end{matrix}; -y\right]$$

2.4. Вывод соотношения ортогональности для многочленов Вильсона. Вычислим теперь образ относительно $J_{b,c}^{-1}$ функции

$$|\Gamma(a+is)|^2 W_n(s), \qquad \text{где } W_n(x) = W_n(a,b,c,d) \text{ – многочлен Вильсона.}$$

Т.е., нам надо вычислить интеграл

$$\frac{1}{\Gamma(b+c)}\int_0^\infty \left|\frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)}\right|^2\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}b+is, b-is\\ b+c\end{matrix}; -x\right] W_n(s)\, ds = \\ = \frac{(a+b)_n(a+c)_n(a+d)_n}{\Gamma(b+c)}\int_0^\infty \left|\frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)}\right|^2 \times \\ \times\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}b+is, b-is\\ b+c\end{matrix}; -x\right]\sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k(n+a+b+c+d-1)_k(a+is)_k(a-is)_k}{k!(a+b)_k(a+c)_k(a+d)_k}\, ds$$

Мы получили линейную комбинацию известных нам (в силу формулы обращения и (2.3)) интегралов вида

$$\int_0^\infty \left|\frac{\Gamma(a+k+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)}\right|^2\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}b+is, b-is\\ b+c\end{matrix}; -x\right] ds = \\ = \frac{\Gamma(a+b+k)\Gamma(a+c+k)}{(1+x)^{a+b}}$$

В итоге получаем

$$\frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)(a+b)_n}{\Gamma(b+c)}(1+x)^{-a-b}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n, n+a+b+c+d-1\\ a+d\end{matrix}; \frac{1}{1+x}\right]$$

Это многочлен Якоби, записанный через переменную $1/(1+x)$.

Меняя местами a с d, мы получаем обратное индексное преобразование от $|\Gamma(d+is)|^2 W_m(s)$. Теперь вычисляем интеграл (см. (3.8.3)

$$\frac{1}{\Gamma(b+c)}\int_0^\infty \left|\frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)\Gamma(d+is)}{\Gamma(2is)}\right|^2 W_n(s)\, W_m(s)\, ds$$

с помощью формулы Планшереля. Получается выражение вида

$$\mathrm{const} \int_0^\infty {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, n+a+b+c+d-1 \\ a+d \end{matrix} ; \frac{1}{1+x} \right] \times$$
$$\times \; {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -m, m+a+b+c+d-1 \\ a+d \end{matrix} ; \frac{1}{1+x} \right] x^{b+c-1}(1+x)^{-a-d-c} dx$$

Переходя к переменной $y = 1/(1+x)$, мы получаем интеграл, дающий соотношения ортогональности для многочленов Якоби.

На первый взгляд, рассуждение может показаться проверочным, но в действительности оно дает также следующее:

Ортогональная система Вильсона с $a = d$ есть образ ортогональной системы Якоби при индексном преобразовании.

Если учесть, что индексное преобразование было обнаружено в 1910г и стало вполне известным с 1950г, выглядит странным, что многочлены Вильсона были обнаружены так поздно...

3 Вывод формулы обращения

Выводов известно много, см. [10]. Можно например, различными способами разлагать индексное преобразование в произведение более простых интегральных преобразований, а далее писать формулы обращения для каждого сомножителя. Впрочем, оригинальный путь Вейля, основанный на спектральной теории выглядит и сейчас наиболее естественным (см., например, [3], §13.8, или [23]). Мы приведем вариант вывода, использующий минимум теории, но требующий избыточных вычислений. Подробно спектральная теория дифференциальных операторов излагается у Титчмарша [23], Данфорда, Шварца [3], главы XII–XIII и Наймарка [16].

3.1. Скачок резольвенты. Напомним спектральную теорему. Рассмотрим конечный или счетный набор мер μ_1, μ_2,... на $\mathbb{R}$, пространство $V[\vec{\mu}] := \oplus_j L^2(\mathbb{R}, \mu_j)$ и оператор $Z_{\vec{\mu}} : V[\vec{\mu}] \to V[\vec{\mu}]$, заданный формулой

$$\big[Z_{\vec{\mu}} f_1 \oplus f_2 \oplus \dots\big](x) = x f_1(x) \oplus x f_2(x) \oplus \dots$$

Теорема 3.1 *Для любого самосопряженного (вообще говоря, неограниченного) оператора в гильбертовом пространстве H существует набор мер μ_j и унитарный оператор $U : H \to V[\vec{\mu}]$ такой, что $A = U^{-1} Z_{\vec{\mu}} U$*

Для любого борелевского подмножества $M \subset \mathbb{R}$ рассмотрим подпространство $W(M) \subset V[\vec{\mu}]$, состоящее из функций, равных нулю вне множества M. Определим спектральное подпространство $\Omega(M) := U^{-1}W(M)$. Через $P[\Omega]$ обозначим проектор на это подпространство.

Предлжение 3.2 *a) Для конечного интервала $(a, b) \subset \mathbb{R}$,*

$$P\big[(a,b)\big] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \to +0} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \big((\lambda - i\varepsilon - A)^{-1} - (\lambda + i\varepsilon - A)^{-1}\big)\, d\lambda$$

Здесь предел понимается как предел в сильной операторной топологии, $T_n \to T$, если для любого вектора v выполнено $\|T_n v - Tv\| \to 0$.

Проверка этого высказывания достаточно очевидна (и является хорошим упражнением, в частности, для конечномерных пространств), мы с самого начала можем считать, что наш оператор действует в $V[\vec{\mu}]$.

Аналогично, для любого вектора v,

$$v = \frac{1}{2\pi i} \lim_{N\to\infty} \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-N}^{N} \big((\lambda - i\varepsilon - A)^{-1} (\lambda + i\varepsilon - A)^{-1} v \, d\lambda$$

Вычисление предела дает спектральное разложение. Сейчас мы это проделаем для дифференциального оператора D, заданного формулой (1.5).

3.2. Решения уравнения $(D-\lambda)f = 0$**.** При каждом λ это уравнение имеет два линейно независимых решения. Мы выберем два базиса в пространстве решений (оба состоят из куммеровских рядов), см. Бейтмен., 2.9. Первый базис состоит из функций

$$\varphi(x,\lambda) = {}_2F_1[b+\sqrt{\lambda}, b-\sqrt{\lambda}; b+c; -x] \tag{3.1}$$

$$\psi(x,\lambda) = (-x)^{1-b-c} \, {}_2F_1[1+\sqrt{\lambda}-c, 1-\sqrt{\lambda}-c; 2-b-c; -x] \tag{3.2}$$

Второй базис $u_\pm(x)$ задается формулами

$$u_\pm(x,\lambda) = (-x)^{-b\mp\sqrt{\lambda}} \, {}_2F_1[b\pm\sqrt{\lambda}, 1\pm\sqrt{\lambda}-c; 1\pm 2\sqrt{\lambda}; -x^{-1}] \tag{3.3}$$

Мы полагаем, что плоскость λ разрезана по отрицательной полуоси.

У первой пары функций хорошо видно поведение вблизи нуля, у второй – вблизи бесконечности. Чуть ниже нам понадобится формула, выражающая φ через u_+ и u_-

$$\varphi(x,\lambda) = B_+(\lambda) u_+(x,\lambda) + B_-(\lambda) u_-(x\lambda)$$

где

$$B_\pm(\lambda) = \frac{\Gamma(b+c)\Gamma(\mp\sqrt{\lambda})}{\Gamma(b\mp\sqrt{\lambda})\Gamma(c\mp\sqrt{\lambda})} \tag{3.4}$$

3.3. Самосопряженность. Пусть $b>0$, $c>0$. Мы определим оператор D на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ гладких функций с компактным носителем на $(0,\infty)$. Оператор D формально симметричен относительно веса $x^{b+c-1}(1+x)^{b-c}\,dx$, т.е.

$$\int_0^\infty (Df)(x)\overline{g(x)} x^{b+c-1}(1+x)^{b-c}\,dx = \int_0^\infty f(x)\overline{Dg(x)} x^{b+c-1}(1+x)^{b-c}\,dx$$

с f, $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Его сопряженный оператор D^* определяется из условия $D^* g = h$, если f, $g \in L^2(\mathbb{R}_+, x^{b+c-1}(1+x)^{b-c})$ и

$$\int_0^\infty (Df)(x)\overline{g(x)} x^{b+c-1}(1+x)^{b-c}\,dx = \int_0^\infty f(x)\overline{h(x)} x^{b+c-1}(1+x)^{b-c}\,dx$$

для всех $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Этот оператор по-прежнему задается формулой (1.5), но его область определения увеличилась.

Напомним, что для любого формально симметричного оператора A числа $\dim\ker(A^* - \lambda)$ (индексы дефекта) постоянны на полуплоскостях $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и $\operatorname{Im}\lambda < 0$. Оператор A существенно самосопряжен, если эти числа нулевые. Тем самым мы должны проверить, существуют при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ у дифференциального уравнения $Df = \lambda f$ решения, лежащие в L^2 по нашему весу. Для определенности, положим $\operatorname{Im}\lambda > 0/$

Легко видеть, что в случае $b + c > 2$ таких решений нет. А именно ψ слишком велико́ вблизи нуля, а u_- слишком велико́ около ∞. Поэтому L^2-решение должно совпадать с φ и u_+ одновременно, а они различны.

Поэтому D самосопряжен.

Замечание. Если $b + c < 2$, то и φ и ψ лежат в L^2 вблизи 0. Поэтому $u_+ \in L^2$, и тем самым D не самосопряжен. Мы расширим область определения оператора D до пространства функций гладких на замкнутом луче $[0, \infty)$ и равных нулю при достаточно больших x. Тогда оператор становится самосопряженным. В дальнейшем мы не отслеживаем этот случай.

3.4. Резольвента.

Лемма 3.3 *Резольвента $(D - \lambda)^{-1}$ оператора D определена в области $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0)$ и задается формулой*

$$L(\lambda)f(x) = \int_0^\infty K(x, y; \lambda) y^{b+c-1}(1+y)^{b+c}\, dy \tag{3.5}$$

где ядро K – функция Грина –

$$K(x, y; \lambda) = \begin{cases} 2B_-(\lambda)^{-1}\lambda^{-1/2}\varphi(x, \lambda)u_+(y, \lambda), \text{ если } x \leqslant y \\ 2B_-(\lambda)^{-1}\lambda^{-1/2}\varphi(y, \lambda)u_+(x, \lambda), \text{ если } x \geqslant y \end{cases} \tag{3.6}$$

а $B_-(\lambda)$ задается формулой (3.4)

Скачок резольвенты образуется на полуоси $\lambda \leqslant 0$ за счет скачка функции $\sqrt{\lambda}$ на разрезе. Вычисляя скачок резольвенты, мы получаем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{d\lambda}{2\sqrt{\lambda}} \frac{\varphi(y, \lambda)}{B_+(\lambda)B_-(\lambda)} \int_0^\infty \varphi(z, \lambda) f(z) z^{b+c-1}(1+z)^{b-c}\, dz$$

Формула получается столь простой, потому что φ скачка не испытывает, а скачок u_+ оказывается пропорциональным φ.

Последняя формула и есть формула обращения.

Доказательство леммы. Прежде всего формально проверим, равенство $(D - \lambda)L(\lambda) = 1$. Надо убедиться, что функция K удовлетворяет уравнению

$$(D_x - \lambda)K(x, y; \lambda) y^{b+c-1}(1+y)^{b+c} = \delta(x - y) \tag{3.7}$$

Очевидно, что вне диагонали $x = y$, равенство $(D_x-\lambda)K = 0$ выполнено. На диагонали ядро K непрерывно, а первая производная испытывает скачок. Поэтому,

$$(D_x-\lambda)K(x,y;\lambda) = x(x+1)\Big\{\frac{\partial K(x,y,\lambda)}{\partial x}\Big|_{y=x+0} - \frac{\partial K(x,y,\lambda)}{\partial x}\Big|_{y=x-0}\Big\}\delta(x-y) =$$
$$= 2B_-(\lambda)^{-1}\lambda^{-1/2}\Big[\varphi(y,\lambda)'u_+(y,\lambda) - \varphi(y,\lambda)u_+(y,\lambda)'\Big]\delta(x-y)$$

В квадратных скобках стоит детерминант Вронского двух решений дифференциального уравнения $(D-\lambda)f$. С точностью до постоянного множителя, вронскиан пары решений определяется самим уравнением, в нашем случае он равен $\mathrm{const}\cdot y^{-b-c}(1+y)^{c-b-1}$. Для вычисления постоянного множителя, мы отслеживаем асимптотику вронскиана при $y \to \infty$.

В действительности это вычисление достаточно для доказательства. Но не совсем очевидно, что наш оператор ограничен в L^2. Эту трудность можно обойти следующим образом.

Так как D существенно самосопряжен, при $\lambda \notin \mathbb{R}$ оператор $(D-\lambda)^{-1}$ ограничен. В силу теоремы Лорана Шварца о ядре (см. [7]), этот оператор является интегральным, а ядро $K(x,y;\lambda)$ является обобщенной функцией двух переменных. Оно должно быть удовлетворять уравнению (3.7) и условию симметрии $K(y,x;\lambda) = \overline{K(x,y,\overline{\lambda})}$. Поэтому вне диагонали $x = y$ функция должна удовлетворять системе уравнений

$$(D_x-\lambda)K = 0, \qquad (D_y-\lambda)K = 0$$

А дальше легко убедиться, что наше ядро K является единственным возможным кандидатом, все остальные решения системы слишком быстро растут.

3.5. Многочлены Романовского[1]. Пусть теперь $b < 0$, $b + c > 0$. Пусть $m = 0, 1, \ldots, [-b]$. Рассмотрим многочлены p_m, заданные формулой

$$p_m(x) := {}_2F_1\left[\begin{matrix}-m, 2b+m\\ b+c\end{matrix}; -x\right] = \frac{\Gamma(b+c)\Gamma(-m-b)}{\Gamma(2b+m)\Gamma(c+b+m)}\, {}_2F_1\left[\begin{matrix}-m, 1-m-b-c\\ 2-b-c\end{matrix}; -\frac{1}{x}\right]$$

Теорема 3.4 *a) Многочлены p_m содержатся в $L^2(\mathbb{R}_+, x^{b+c-1}(1+x)^{b-c})$*

b) $Dp_m = (b+m)^2 p_m$

c) Многочлены p_m попарно ортогональны,

Утверждения a), b) очевидны, а c) следует из a) и b).

Таким образом, мы получили конечную систему ортогональных многочленов. Увеличить ее мы не можем, потому что одночлены x^N с бóльшими номерами не лежат в L^2.

[1]Известный узбекский математик, основатель Ташкентского университета. Специалист по матстатистике

Таких систем странных конечных ортогональных систем известно довольно много (их перечислял П. Лески [12], [13], некоторые дополнения есть в [18]). Что это значит, видно из вышеприведенных рассмотрений.

А именно, при $b<0$, $b+c>0$ у нашего оператора D появляется конечное число дискретных собственных значений, которые и добавляются к нашему непрерывному спектру.

Разумеется, в наше вычисление будут внесены соответствующие изменения. А именно, у резольвенты (см. формулу (3.6)) появляются конечное число полюсов в точках $\lambda=(b+m)^2$, они связаны с появлением полюсов у $B_-(\lambda)^{-1}$. Чтобы найти скачок резольвенты нужно дополнительно посчитать вычеты резольвенты в этих полюсах.

4 Приложения к гармоническому анализу

4.1. Псевдоунитарные группы ранга 1. Пусть $\mathbb{K}$ – это $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или тело кватернионов $\mathbb{H}$. Отметим, что для первоначального ознакомления с ситуацией можно держать в голове лишь случай $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Ниже мы без доказательства приводим различные простые факты, читатель может или поверить на слово или проверить.

Через r мы обозначим размерность тела $\mathbb{K}$. Через $\mathbb{K}^n$ мы обозначаем n-мерное пространство над $\mathbb{K}$ со стандартным скалярным произведением.

$$\langle z,u\rangle=\sum z_j\overline{u}_j$$

Через $\mathrm{U}(1,n;\mathbb{K})$ мы обозначим *псевдоунитарную группу* над $\mathbb{K}$, т.е. группу $(1+n)\times(1+n)$-матриц $\begin{pmatrix} a&b\\ c&d\end{pmatrix}$ над $\mathbb{K}$, удовлетворяющих условию

$$\begin{pmatrix} a&b\\ c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1&0\\ 0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a&b\\ c&d\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix} -1&0\\ 0&1\end{pmatrix}$$

Стандартные обозначения для групп $\mathrm{U}(1,n;\mathbb{K})$ в случаях $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$ соответственно: $\mathrm{O}(1,n)$, $\mathrm{U}(1,n)$, $\mathrm{Sp}(1,n)$.

4.2. Однородные гиперболические пространства. Через $\mathrm{B}_n(\mathbb{K})$ мы обозначим шар $\langle z,z\rangle<1$ в $\mathbb{K}^n$. Через S^{rn-1} мы обозначим сферу $\langle z,z\rangle=1$. Группа $\mathrm{U}(1,n;\mathbb{K})$ действует на $\mathrm{B}_n(\mathbb{K})$ дробно-линейными преобразованиями

$$z\mapsto z^{[g]}:=(a+zc)^{-1}(b+zd) \tag{4.1}$$

Стабилизатор K точки $0\in\mathrm{B}_n(\mathbb{K})$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a&0\\ 0&d\end{pmatrix}\qquad |a|=1,\quad d\in\mathrm{U}(n;\mathbb{K}) \tag{4.2}$$

Поэтому $\mathrm{B}_n(\mathbb{K})$ есть однородное пространство

$$\mathrm{B}_n(\mathbb{K})=\mathrm{U}(1,n;\mathbb{K})/\mathrm{U}(1;\mathbb{K})\times\mathrm{U}(n;\mathbb{K})$$

Замечание. В случае $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, наш шар – это n-мерное пространство Лобачевского в модели Бельтрами–Клейна. Напомним, что в этом случае прямые в смысле Лобачевского являются отрезками, а наша сфера S^{n-1} является абсолютом в смысле Лобачевского. Группа $\mathrm{O}(1,n)$ является группой движений пространства Лобачевского. В случае $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$ мы получаем т.н. гиперболические пространства, комплексные или кватернионные. □

Якобиан преобразования (1.5) равен

$$J(g;z)=|a+zc|^{-r(1+n)}$$

Отметим простую формулу

$$1-\langle z^{[g]},u^{[g]}\rangle=(a+zc)^{-1}(1-\langle z,u\rangle)\overline{(a+uc)}^{\,-1}$$

Отсюда видно, что $\mathrm{U}(1,n;\mathbb{K})$-инвариантная мера на $\mathrm{B}_n(\mathbb{K})$ имеет вид

$$dm(z)=(1-\langle z,z\rangle)^{-(n+1)r/2}dz$$

где через dz обозначена мера Лебега на $\mathrm{B}_n(\mathbb{K})$.

Группа $\mathrm{U}(1,n;\mathbb{K})$ действует в $L^2(\mathrm{B}_n(\mathbb{K}),dm(z))$ заменами переменной

$$\rho(g)f(z)=f\big((a+zc)^{-1}(b+zd)\big) \tag{4.3}$$

Легко видеть, что эти операторы унитарны. Иными словами, мы получили унитарное бесконечномерное представление группы $\mathrm{O}(1,n)$.

Наша следующая задача – разложть это представление на неприводимые подпредставления.

4.3. Сферическая основная серия. Пусть $s\in\mathbb{R}$. Представление T_s *сферической основной унитарной серии* группы $\mathrm{U}(1,n;\mathbb{K})$ реализуется в $L^2(S^{rn-1})$ и задается формулой

$$T_s\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}f(h)=f\big((a+hc)^{-1}(b+hd)\big)|a+hc|^{-(n+1)r/2+1+is} \tag{4.4}$$

где $h\in S^{rn-1}$.

Замечание. Все эти представления неприводимы, представления T_s и T_{-s} эквивалентны (это не совсем очевидно, см. Виленкин [1968]).

Замечание. Слово "серия" употребляется потому что эти группы имеют несколько разных типов представлений. Слово "сферическая" в названии серии означает, что любое такое представление содержит (единственный) вектор, инвариантный относительно подгруппы K. В нашей модели это функция $f=1$.

4.4. Сплетающий оператор. Теперь рассмотрим пространство функций $\varphi(h,s)$ на полуцилиндре $S^{rn-1}\times\mathbb{R}_+$ (какое именно пространство, мы уточним ниже), пусть $\mathrm{U}(1,n;\mathbb{K})$ действует на этом пространстве по формуле

$$\tau(g)\varphi(h,s)=T_s(g)\varphi(h,s)$$

при любом фиксированном s мы получаем представление $T_s(g)$. Т.е., мы имеем что-то вроде прямой суммы всех представлений T_s по непрерывному параметру s (это называется "прямым интегралом").

Теперь определим оператор A из пространства $L^2(\mathrm{B}_n(\mathbb{K}), dm(z))$ в пространство функций на $S^{rn-1} \times \mathbb{R}_+$, заданный формулой

$$Af(h,s) = \int_{\mathrm{B}_n(\mathbb{K})} f(z) \frac{|1-\langle z,h\rangle|^{-(n+1)r/2+1+is}}{|1-\langle z,z\rangle|^{(n+1)r/4+1/2+is/2}} dz \tag{4.5}$$

Лемма 4.1 *Оператор A является сплетающим, т.е.,*

$$A\rho(g) = \tau(g)A, \qquad \text{для всех } g.$$

Это утверждение является полезным двухшаговым упражнением. Во-первых, стоит "в лоб" проверить эту лемму, а во-вторых интересно придумать соображения, из которых можно придумать формулу для оператора A, заранее ее не зная.

4.5. Формула Планшереля.

Теорема 4.2 *Оператор A является унитарным оператором из пространства*

$$L^2(\mathrm{B}_n(\mathbb{K}), dm(z)) \to L^2\left(S^{rn-1} \times \mathbb{R}_+, \left|\frac{\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)}\right|^2 ds\, dh\right) \tag{4.6}$$

где

$$b = (n+1)r/4 - 1/2; \qquad c = (n-1)r/4 + 1/2 \tag{4.7}$$

Учитывая предудущую лемму, мы получаем, что оператор A отождествляет представление группы $\mathrm{U}(1,n;\mathbb{K})$ в L^2 на шаре с непрерывной прямой суммой представлений основной серии.

Доказательство. Прежде всего объясним внезапное появление Γ-множителя. Для этого ограничим оператор A на пространство функций, зависящих лишь от радиуса. Удобно ввести переменную

$$x = \frac{|h|^2}{1-|h|^2}$$

и положить $f = f(x)$. Тогда соответствующая функция $G(h,s)$ зависит лишь от переменной s, и несложное вычисление дает знакомую формулу

$$G(s) = \mathrm{const} \cdot \int_0^\infty f(x)\ {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) x^{b+c-1}(1+x)^{b-c} dx \tag{4.8}$$

Итак, мы видим, что оператор A является унитарным оператором из пространства L^2-функций на шаре, зависящих лишь от радиуса, в пространство функций на полуцилиндре, зависящих лишь от s.

Это – основное соображение[2], остался лишь розыгрыш стандартных теоретико-представленческих трюков.

4.6. Окончание доказательства. Обозначим $G := \mathrm{U}(1, n; \mathbb{K})$, $K := \mathrm{U}(n, \mathbb{K})$. Обозначим гильбертовы пространства L^2 из строчки (4.6) соответственно через V и W. Через V^K и W^K обозначим пространства K-неподвижных функций в V и W. Через P_V и P_W мы обозначим проекторы на V^K и W^K.

Напомним следующее стандартное утверждение.

Лемма 4.3 *Пусть $\rho(k)$ – унитарное представление компактной группы K. Тогда проектор на подпространство K-неподвижных векторов задается формулой*

$$P = \int_K \rho(k)\, dk$$

где K – мера Хаара на K, нормированная так, что мера всей группы равна 1.

Следствие 4.4 $P_W A = A P_V$

Лемма 4.5 *Каждое G-инвариантное пространство в V содержит гладкую ненулевую функцию.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность гладких положительных функций r_j на G с компактным носителем, аппроксимирующих δ-функцию в единице. Для вектора $v \neq 0$ из подпространства рассмотрим последовательность (гладких) функций $\int r_j(g)\rho(g)v\, dg$, сходящуюся к v. $\square$

Лемма 4.6 *Каждое G-инвариантное подпространство в V содержит K-инвариантный вектор.*

Доказательство. Рассмотрим гладкую функцию f из подпространства. Пусть $f(a) \neq 0$. Рассмотрим $g \in G$ такой что $0^{[g]} = a$. Далее усредняем функцию $f(x^{[g]})$ по K. $\square$

Следствие 4.7 *Линейная оболочка векторов вида $\rho(g)v$, где g пробегает G, а v пробегает V^K, плотна в V.*

Доказательство. В противном случае берем ортогональное дополнение к этой линейной оболочке. В ней есть K-инвариантный вектор. $\square$

Лемма 4.8 *Линейная оболочка векторов вида $\tau(g)w$, где g пробегает G, а w пробегает W^K, плотна в W.*

[2] В случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ можно также рассматривать действие группы $\mathrm{U}(1, n)$ в линейных расслоениях над шаром. Задача тоже сводится к индексному преобразованию (с другими параметрами), представление имеет конечный дискретный спектр, который контролируется многочленами Романовского.

Доказательство. Мы используем неприводимость представлений T_s основной серии. В качестве векторов w берем функции вида $f(x,s)=1$, если $|s-s_0|<\varepsilon$ и 0 в противном случае. Легко убедиться, что функций, ортогональных ко всевозможным $\tau_g(g)f$, нет. $\square$

Теперь перейдем к собственно доказательству теоремы. Пусть $\rho(g)v$, $\rho(g')v'$ – два вектора только что упомянутого вида. Тогда

$$\langle \rho(g)v, \rho(g')v'\rangle_V \overset{(\text{представление } U \text{ унитарно})}{=} \langle v, \rho(g^{-1}g')v'\rangle_V \overset{(P_V \text{ – проектор})}{=}$$
$$= \langle v, P_V\rho(g^{-1}g')v'\rangle_V \overset{(\text{формула Планшереля})}{=} \langle Av, AP_W\rho(g^{-1}g')v'\rangle_W =$$
$$\overset{(A \text{ – сплетающий оператор})}{=} \langle Av, P_W\tau(g^{-1}g')Av'\rangle_W \overset{(P_W \text{ – проектор})}{=}$$
$$= \langle Av, \tau(g^{-1}g)Av'\rangle_W \overset{(\text{представление } \tau \text{ унитарно})}{=} \langle \tau(g)Av, \tau(g')Av'\rangle_W$$

References

[1] Cherednik I. *Harish-Chandra transform and difference operators.* Preprint, available via http://xxx.lanl.gov.9706010

[2] Cherednik, I.; Ostrik, V. *From double Hecke algebra to Fourier transform.* Selecta Math. (N.S.) 9 (2003), no. 2, 161–249.

[3] Dunford, N., Schwartz, J.T. *Linear operators, v.2*, Wiley & Sons (1963): Русский перевод: Москва, Мир, 1966

[4] Flensted-Jensen, M., Koornwinder, T. *The convolution structure for Jacobi function expansions.* Ark. Math., 11 (1973), 245–262.

[5] Fock, V. A. *On the representation of an arbitrary function by an integral involving Legendre's functions with a complex index.* Доклады АН СССР 39, (1943). 253–256.

[6] Groenevelt, W. *The Wilson function transform.* Int. Math. Res. Not. 2003, no. 52, 2779–2817.

[7] Hörmander, L. *The analysis of linear partial differential operators. V. 1. Distribution theory and Fourier analysis.* Springer, Berlin, 1983.

[8] Koelink E., Stockman J.V. *Askey–Wilson transform scheme.* Preprint available via http://xxx.lanl.gov/math/9912140

[9] Koornwinder, T.H., *A new proof of a Paley–Wiener theorem for Jacobi transform,* Ark. Math., 13 (1975), 145–159.

[10] Koornwinder, T.H.,*Jacobi functions and analysis on noncompact symmetric spaces* in *Special functions: group theoretical aspects and applications*, eds. Askey R., Koornwinder T., Schempp, 1–85, Reidel, Dodrecht–Boston(1984)

[11] Koornwinder, T.H. *Special orthogonal polynomial systems mapping to each other by Fourier–Jacobi transform.*, Lect. Notes Math., 1171 (1985), 174–183.

[12] Lesky, P. A. *Endliche und unendliche Systeme von kontinuierlichen klassischen Orthogonalpolynomen.* (German) Z. Angew. Math. Mech. 76 (1996), no. 3, 181–184.

[13] Lesky, P. A. *Unendliche und endliche Orthogonalsysteme von continuous Hahnpolynomen.* (German), Results Math. 31 (1997), no. 1-2, 127–135.

[14] Mehler, F.G., *Ueber eine mit den Kugel und Cylindrfunctionen verwandte Function und ihre Anwedung in der Theorie der Elektricitatsvertheilung.* Math. Ann., 18 (1881), 161–194.

[15] Молчанов В.Ф. *Формула Планшереля для псевдоримановых симметрических пространств ранга 1.* Докл. АН СССР, 290 (1986), 3, 545–549.

[16] Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы.* Москва, Наука, 1969

[17] Неретин Ю.А., *Индексное гипергеометрическое преобразование и имитация анализа ядер Березина на гиперболических пространствах,* Мат. Сборник, 192 (2001), 3, 83–114;

[18] Неретин Ю. А. *Бета-интегралы и конечные ортогональные системы многочленов Вильсона.* Мат. Сборник, 193 (2002), no. 7, 131–148;

[19] Неретин Ю.А. *Непрерывные аналоги разложения по многочленам Якоби и векторно-значные гипергеометрические ортогональные базисы.* Функц. Анализ и прилож., the expansion in Jacobi polynomials, and vector-valued orthogonal bases. (Russian. Russian summary) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 39 (2005), no. 2, 31–46, 94; translation in 39 (2005), no. 2, 106–119

[20] Неретин Ю.А. *Возмущение многочленов Якоби и кусочно-гипергеометрические ортогональные системы.* Мат.сборник, 197 (2006) 1607-1633

[21] Олевский М.Н. *О представлении произвольной функции через интеграл с ядром, включающим гипергеометрическую функцию,* Докл. АН СССР, 69 (1949), №1, 11–14

[22] Romanovski, V.I. *Sur quelques classes nouwels of polynomes orthogonaux.* Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 188 (1929), 1023–1025

[23] Titchmarsh E.C. *Eigenfunction expansions with second-order differential operators.*, Oxford, Clarendon Press (1946); Русский перевод: Издательство иностранной литературы (1960).

[24] Weyl H. *Uber gewonliche lineare Differentialgleichungen mis singularen Stellen und ihre Eigenfunktionen (2 Note).* Nachr. Konig. Gess. Wissen. Gottingen. Math.-Phys., 1910, 442–467; Reprinted in Weyl H. *Gessamelte Abhandlungen*, Bd. 1, 222–247, Springer, 1968.

[25] Wimp, Jet *A class of integral transforms.* Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 14 1964/1965 33–40

[26] Yakubovich, S.B., Luchko Yu.F., *The hypergeometric approach to integral transforms and convolutions.*, Kluwer (1994).