Предисловие редактора перевода

Многие математики и люди, сталкивающиеся с теорией спецфункций и с ее приложениями, воспринимают эту теорию как нечто законченное и классическое, сверкающее или замшелое, в зависимости от личных пристрастий и степени знакомства/незнакомства с предметом. Уровень общематематического интереса к спецфункциям в разные периоды времени была разной. В XIX веке спецфункции были важнейшей частью математики. На протяжении XX века интерес к ним уменьшался, чтобы потом возродиться в последние два-три десятилетия.

Надо сказать, что и во времена снижения интереса, теория спецфункций продолжала успешно развиваться. Параллельно в самых разных областях математики "для внутреннего пользования" возникали свои собственные спецфункциональные сюжеты (например в теории представлений, комбинаторике, статистике, алгебраической геометрии, теории вероятностей, теории чисел, явно интегрируемых системах, и даже в таком, на первый взгляд, беспредметном предмете, как теория конечных абелевых p-групп). С другой стороны, в вычислительных средствах (которые не сводились к арифмометру 100 лет назад и не сводятся к нажатию клавиш компьютера сейчас) нуждались не только математики. Скажем, всамоделишними физическими задачами интересовались такие авторы как Рака́ [1941*], Дайсон (см. Дайсон, Мехта, [1963*]), Биденхарн (Biedenharn, Lauk [1981*]), Никифоров, Уваров(Никифоров, Уваров [1978*]). Последним, например, пришлось заняться спецфункциями при изучении "спектров разреженной плазмы при температуре несколько миллионов градусов" (см. Никифоров, Новиков, Уваров [2000*]).

Установочным текстом по спецфункциям многие годы оставался замечательный трехтомник "Higher transcedental functions", (цитируемый у нас как "Бейтмен"), изданный в 1953-55гг (и переведенный в на русский Виленкиным в 1964–67гг). С тех пор времени прошло немало. Даже такая классическая область, как теория ортогональных многочленов, сейчас выглядит совсем иначе. Теория q-рядов, о которой большинство математиков в течении 100 лет после Гейне слышали в лучшем случае краем уха, в конце 80-ых годов, после появления слов "квантовая группа" вдруг стала чрезвычайно модна и обширна. Сейчас над ней уже "возведена" вполне новая теория эллиптических гипергеометрических функций (см. Добавление S). Теория представлений и некоммутативный гармонический анализ дали внешний импульс для изучения многомерных спецфункций;[1] За последние 30 лет этот предмет превратился в серьезную содержательную область. Еще в конце 50-ых годов в работах Карла Герца [1955*] и Хуа Ло Кена

[1] Основную роль сыграла деятельность, связанная со сферическими функциями и сферическим преобразованием (интегральным преобразованием Хариш-Чандры). Ранний этап – это работы И. М. Гельфанда, М. А. Наймарка, Ф. А. Березина, Р. Годемана, Хариш-Чандры, И. М. Гиндикина, Ф. И. Карпелевича 1950–1962гг. Переход сюжета в теорию спецфункций произошел благодаря книге книга Макдональда [1971*] по сферическим функциям на ансамблях Брюа–Титса и работе Хекмана и Опдама [1987*] об интерполяции преобразования Хариш-Чандры по параметрам

[1958*] появились первые спецфункции матричного аргумента. В 80-ых годах в теории бесконечномерных групп и матфизике начали появляться спецфункции от бесконечного числа переменных (например, сферические функции на на группе диффеоморфизмов окружности, Неретин [1988*]). В 80-90 годы рос интерес к уравнениям Пенлеве (см. Ивасаки, Кимура, Шимомура, Иошида, [1991*], Ноуми [2000*], Фокаш, Итс, Капаев, Новокше́нов [2006*]).

Ну и, наконец, за время, прошедшее с издания "Higher transcedental functions", по многим классическим вопросам удалось достичь более высокого уровня понимания и более высокого уровня ясности. Для экспертов. Как и вообще в математике, понять из читабельных текстов, что именно сделано и что именно происходит, невозможно. Более того, последовательное изложение теории спецфункций – задача объективно непростая. Сама теория выглядит как необозримый и плотно переплетенный клубок формул, вылетающих как птицы из шляпы фокусника.

Авторам удалось написать интересную книгу, которую в самом деле можно читать и по которой можно учиться.

Я не комментирую нетривиальный стиль книги (лучше ознакомиться с ней самой), отмечу лишь, что изложение ориентировано не столько на эти самые "формулы", сколько на способы их получения и на попытки прояснить эти способы (во многом, с этим связан и большой объем данной работы). По своему опыту, должен отметить, что при чтении книги бывает полезно иметь под рукой какой-либо старый более формально написанный текст, вроде "Higher transcedental functions", Уиттекера–Ватсона [1940], Слейтер [1960*], [1966*], и т.п.

Авторы должны были столкнуться и с проблемой подбора материала. Книга посвящена прежде всего теории гипергеометрических функций одной переменной (гипергеметрических в широком смысле слова). Однако с этой "точки обзора" авторы зацепляют ряд других сюжетов, например, интегралы Сельберга, общие свойства ортогональных многочленов, анализ на сфере, теорию разбиений и комбинаторный анализ Мак-Магона. Приложения предмета вроде бы и не являются самоцелью, но часто возникают по ходу дела, в том числе и вполне неожиданно. Вообще, содержание книги очень разнообразно.

Так или иначе, книга является достойным памятником мысли, и, повидимому, на ближайшие годы займет место "Higher transcedental functions" в качестве "установочного" текста по данному предмету.

Книга является одним из самых значительных собраний формул, причем собранием современным. Но по жанру – это не справочник, и вполне может оказаться, что нужной читателю в данный момент формулы в книге не окажется (или же она окажется, но не будет найдена). В связи с этим, отмечу несколько полезных и обширных собраний формул. Прежде всего, это таблицы интегралов и рядов Прудникова, Брычкова, Маричева [1981*]. Это

— нетривиальная оригинальная работа[2], принципиально мажорирующая всем известного Градштейна–Рыжика. Очень много самого разнообразного материала (частью компилятивного, частью оригинального) содержится у Виленкина–Климыка [1992*-1995*]. Отметим в качестве собраний формул книги Гаспера–Рахмана [1990], Макдональда [1995], Ватсона [1944], Уиттекера–Ватсона [1940], Бейли [1935], Слейтер [1966*], Никифорова–Уварова [1978*], Никифорова–Уварова–Суслова [1985*], Кукука–Швартова [1994*].

Теперь несколько отстраненный комментарий. В книге теория спецфункций развивается на основе самой себя. В принципе возможно изложение на основе внешних организующих идей, например, теории представлений, спектральной теории или интегральных преобразований. Опишу вкратце, что мы имеем на сегодняшний день.

1. *Теория представлений.* Данный подход берет начало с книги Виленкина [1968], которая уже сильно устарела. Более поздние книги (которые, однако, не закрывают имеющуюся "брешь" в литературе) – цитированная выше работа Виленкина–Климыка [1991*-1995*] и книга Террас [1988*]. Отчасти, на сходной точки зрения основана недавняя книга Чередника [2005*], только в качестве организующего начала в ней присутствуют не представления групп, а представления "двойных аффинных алгебр Гекке".

2. *Задачи Штурма–Лиувилля и спектральная теория.* Известно, что большинство классических спецфункций являются собственными функциями для некоторых дифференциальных операторов. Наряду с дифференциальными операторами, бывают еще разностные. Например, рассмотрим пространство последовательностей $u(n)$ (где n может пробегать натуральные числа, целые числа, или конечный сегмент) и оператор вида

$$Du(n) = A(n)u(n+1) + B(n)u(n) + C(n)u(n-1)$$

Известно, что классические системы ортогональных многочленов дискретного переменного (т.е., системы Шарлье, Кравчука, Мейкснера, Чебышёва–Хана, двойственная система Хана (система Эберлейна), Рака́) являются собственными функциями задач Штурма–Лиувилля для таких операторов.

Понятие разностных операторов допускает ряд нетривиальных обобщений. Например, бывают разностные операторы вида

$$Df(x) = A(x)f(x+i) + B(x)f(x) + C(x)f(x-i)$$

в L^2 на прямой (здесь i – мнимая единица). Скажем, многочлены Вильсона являются собственными функциями задачи Штурма–Лиувилля для некоторого оператора D такого типа. Отмечу, что подобного рода задачи с дискретным спектром восходят по крайней мере к работам Мейкснера 30-ых годов[3].

[2] Наиболее интересна глава 8 третьего тома, посвященная барнсовским интегралам, на ней основана упоминаемая ниже "технология Маричева"

[3] Пример с непрерывным спектром есть в Добавлении N.

Бывают разностные операторы с отражением – операторы типа Данкла (скажем в правой части вышеприведенных формул может появляться слагаемое с $f(-x)$) (см. Данкль, Ксю [2001], Хекман, Опдам [1987*], есть и ряд других возможностей.

В итоге существует огромное число явно решаемых (но далеко не всегда решенных) задач Штурма–Лиувилля; все гипергеометрические системы ортогональных многочленов возникают как решения такого рода задач с чисто дискретным спектром. Но есть еще задачи с дискретным спектром, дающие неполиномиальные системы, и много задач с непрерывным спектром. Для многих задачи можно явно писать спектральное разложение в духе Г. Вейля–Титчмарша (см. Данфорд–Шварц [1963*]), далее каждое такое преобразование может использоваться как спецфункциональный инструмент.

На разностных задачах Штурма–Лиувилля основана книга Никифорова–Уварова–Суслова [1985*], более широкому классу задач Штурма–Лиувилля посвящен обзор Кулинка [2004*].

3. *Интегральные преобразования.* Как известно, система Вильсона, которая находится наверху иерархии классических ортогональных многочленов, была открыта около 1980 года. Индексное гипергеометрическое интегральное преобразование было обнаружено Германом Вейлем в 1908г. Любой человек, попытавшийся применить это преобразование к обычной ортогональной системе Якоби, получил бы систему Вильсона немедленно и достаточно тривиальным образом. Дальнейшая история теории спецфункций была бы иной.

Интегральные преобразования – мощный и несколько недооцененный большинством специалистов инструмент для исследования специальный функций. Мне не известно сколько-либо обстоятельного спецфункционально-ориентированного текста об интегральных преобразованиях. Отмечу, что в книге Маричева [1978*] излагается несколько очень простых и (даже скучноватых) приемов, тсполбзующих преобразование Меллина и барнсовские интегралы; эти рецепты однако оказываются поразительно эффективными. Насколько я могу судить, это одна из основных "high technologies", с помощью которых были получены таблицы Прудникова–Брычкова–Маричева (есть также комментарии к ним в работе Прудников–Брычков–Маричев [1989*]).

Чтение современных математических книг – дело, к сожалению, непростое. Читатель данной книги, безусловно, столкнется с разными проблемами – отдельными формулами, трудными для восприятия, замысловатыми доказательствами, поясняющими вставками, которые сами иногда превращаются в наиболее непонятные места, и т.д т т.п.– книга длинная, все в ней есть. Ко всему этому следует относиться спокойно. Обычно, читатель современной математической книги, не поняв ни слова, скажем, на странице 27, рискует понять примерно столько же и в дальнейшем. Данная книга этим свойством не обладает. Во-первых, изучаемые объекты, сами по себе, определяются элементарно на уровне учебника Фихтенгольца – это значения явно выписанных интегралов, рядов, произведений; никакой каббалистики (вроде необходимости понимать язык высокого уровня, для понимания которого надо выучить язык предыдущего уровня, для понимания которого...) в книге нет. Во-вторых, авторы предпринимают всевозможные усилия для "демократизации" изложения, и, в целом, это у них получается. Замечу, что вторая половина данной книги, ничуть не менее читабельна, чем первая (а тем самым и более интересена).

Ключевым местом для понимания книги является глава 2, при определенном уровне ее восприятия любую другую главу, в общем, можно, временами спотыкаясь, читать саму по себе.

К русскому изданию прилагаются также два добавления. Добавление S, написанное В.Спиридоновым, обсуждает важный новый сюжет – упомянутые выше эллиптические гипергеометрические ряды. Добавление N, написанное мною, содержит введение в индексное гипергеометрическое преобразование Мелера–Фока–Г.Вейля–М.Н.Олевского–Титчмарша; обсуждаются также его возможности в качестве спецфункционального инструмента.

Кроме того, добавлен небольшой список полезных спецфункциональных книг и важных статей, которые могли бы быть полезными человеку, пытающемуся "найти концы" в "клубке" наличной литературы.

Ю.А.Неретин
ИТЭФ, University of Vienna, МГУ