«Метод вторичного квантования» Березина. Взгляд 40 лет спустя

Ю.А.Неретин

Вот какую притчу о Востоке
Рассказал мне старый аксакал.
Даже сказки здесь и те жестоки
Думал я и шею измерял
Владимир Высоцкий

Сначала я попытаюсь рассказать о происхождении книги Березина и её влиянии на математическую жизнь. В параграфах 2 и 3 вкратце описываются две наиболее сложные конструкции данной книги, сейчас их можно описать достаточно просто. Наконец, в последнем параграфе автор обсуждает некоторые (относительно немногие) из приложений, которые имели эти конструкции за последующие годы.

1. Бесконечномерные группы. 1965

1.1. «Хрупкой памяти той моментальный снимок». Когда-то по поводу какой-то годовщины на Московском Мехмате была большая выставка старых фотографий. Я обнаружил там снимок с подписью «После лекции профессора Фридрихса». Как положено, вдоль доски стояла цепочка из 10-15 лиц. Среди них (это был конец 50х годов) – молодой Феликс Березин. В 60-70 годах этот человек будет одним из самых ярких математиков тогдашней Москвы. Сейчас, среди всеобщего шума, когда непонятность работ уже становится преднамеренной и чуть ли не обязательной, нам трудно давать объективные оценки. Но, так или иначе, его известность уже больше 25 лет после гибели[1] никуда не девается. Надо помнить, что речь идет о первопроходце-одиночке, персонаже не слишком приветствуемом в наш век все нарастающей социализации[2] науки (да и не слишком приветствовавшемся уже в его собственный век). В момент, запечатленный на снимке, этот человек уже имел звонкое имя, его тогдашние работы до сих пор не забыты. И все-таки его самого мы помним главным образом не из-за тех работ.[3]

[1]14 июля 1980 года.

[2]Может, чтобы уйти от не вполне точных ассоциаций, аккуратнее сказать, "социоцентризации"(когда основным занятием и/или основной целью научного работника становится social bargaining).

[3]Надо сказать, что эти работы (1956–58), частично совместные с И. М. Гельфандом и Ф. И. Карпелевичем, имели большое влияние; ввиду кризиса, в который сейчас вошла теория представлений, они снова становятся интересными как тексты эпохи, когда еще писали понятно.

Оказывается (кто бы мог подумать), что пути Фридрихса и Березина пересекались. Березин стал, кем он стал, в процессе работы над своим «Вторичным квантованием». А отправной точкой для

Скажем, довольно оживленным сюжетом математики последнего десятилетия была задача о спектре суммы двух эрмитовых матриц (с ее бесчисленными вариантами), множество возможных спектров заполняет довольно замысловатый многогранник Хорна–Клячко. Если я не ошибаюсь, первая попытка описать его была сделана в работе Березина и Гельфанда (1956). А именно, этот многогранник снабжен естественной мерой, и в работе эта мера была вычислена. Плотность меры задается знакопеременной суммой, но это еще не давало ответа на вопрос о носителе меры, т.е. не давало явного описания многогранника. Окончательное описание неравенств, задающих многогранник, было получено А. А. Клячко [**75**] в 1996г. Чуть раньше несколько более слабое утверждение было получено У. Хелмке и И. Розенталем [**56**]. Обсуждение истории этой проблемы уводит от цели настоящих заметок, один из интересных элементов в этой истории то, как люди не видели «простых ходов», скажем, неравенства Хорна–Клячко являются прямым следствием минимаксной теоремы Виланда [**138**], 1955, и теоремы о пересечении циклов Шуберта, известной еще раньше (кажется, Ходж, 1942). Это надо было просто увидеть и все... Но непонятно, как это можно было бы увидеть.

Кстати, в той же работе «Березин–Гельфанд» была (возможно, впервые) обнаружена связь этой задачи с вопросом о разложении тензорного произведения конечномерных представлений унитарной группы. Сама эта статья является во многом продолжением работ И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка, [**45**], И. М. Гельфанда [**41**], В. Б. Лидского [**80**] 1950г.

Другая интересная работа Березина того времени – «Операторы Лапласа на полупростых группах» (1956–57)[**9**], [**10**], [**11**], [**12**], [**13**]. Следует отметить, что в его теореме о классификации неприводимых представлений комплексных полупростых групп, были серьезные пробелы, что повлекло в свое время оживленную дискуссию. Березин ответил на возражения Хариш-Чандры в отдельной статье [**13**], но дискуссия с этим не вполне утихла (я видел переписку Д. П. Желобенко–М. Дюфло, где это обсуждалось еще в 1973г.). В книге Желобенко [**140**] (1974) результаты Березина, наконец, были превзойдены, а работа Березина переизложена отдельно (Добавление I).

Хотя наличие пробелов в начальной статье печально, подобное ее обсуждение тоже знаменательно. Так или иначе, с теоремы Хариш-Чандры о подфакторе 1953г. и с работы Березина 1956г. о характерах начались 30-летняя «борьба» за классификацию всех неприводимых представлений полупростых групп; дальнейшая история тоже сопровождалась большими «разрывами» (как правило, 7-8 лет) между правильными анонсами (Желобенко–Наймарк, Касселман, Ленглендс) и полными опубликованными доказательствами.

Кстати, в той же работе Березина были посчитаны (пробелы были в другом месте) радиальные части операторов Лапласа на полупростых группах (одновременно это было сделано Хариш-Чандрой), что из сегодняшнего дня может выглядеть не менее важным. Это было началом «совсем другой истории» (следующий «шаг», кажется, был сделан сделан М. А. Ольшанецким и А. М. Переломовым в [**103**], современное состояние этого сюжета, уже ушедшего очень далеко, см. у И. Чередника [**32**]).

него была книга Курта Фридрихса «Mathematical aspects of quantum theory of fields» [4] (1953). Быть может[5], именно момент, когда щелкал затвор фотоаппарата, был поворотом в математической судьбе этого, тогда еще молодого, человека.

Разумеется мне (а, скорее всего, уже и никому) не известно на самом деле, произошел ли этот поворот одномоментно, а если да, то в этот ли момент. Мои записки о том, что за этим поворотом последовало.

1.2. Книга Березина. Это была первая книга по бесконечномерным группам и их представлениям. Напомню, как это случилось. Фридрихс сформулировал и попытался решить задачу о максимальной области определения представления Вейля (A.Weil) бесконечномерной симплектической группы и спинорного представления бесконечномерной ортогональной группы. Я намеренно сказал так, чтобы фраза звучала банально. Статья Андрэ Вейля выйдет через 15 лет после Фридрихса.[6,7]

Последней в этой серии была работа Березина и Карпелевича, 1958г., где было получено явное выражение для сферических функций на группах $\mathrm{U}(p,q)$ через определители, составленные из гауссовых гипергеометрических функций ${}_2F_1$. Формула долго выглядела загадочной (см. статью Б. Хоугенбоума 1982г. по этому поводу); но сейчас, сохранив свою красоту, все же стала полуочевидной.

Далее «щелкнул затвор фотоаппарата» (см. ниже), и Березин оставил классическую теорию представлений. В первой половине 60х годов он был одним из инициаторов изучения гармонического анализа на псевдоримановых симметрических пространствах (см. работу его ученика В. Ф. Молчанова [**93**]), но сам им не занимался.

[4]Точные ссылки указаны ниже в библиографии в порядке английского алфавита. Ниже номер [$\cdot$] указывается, если ссылка не очевидна.

[5]Когда-то я внимательно просматривал эту книгу. Думаю, что нужен был сильный внешний толчок, чтобы начать в ней разбираться. Еще труднее в ней найти то, что в самом деле важно, если заранее не знать, что искать. Кстати, эта книга серьезно повлияла еще на одного знаменитого математика, Ирвинга Сигала, о котором многократно заходит речь ниже.

[6]История с «представлением Вейля» была такая. Фридрихс около 1950 заметил, что теорема Стоуна-фон Неймана влечет существование унитарного проективного представления симплектической группы $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$. Но ему лично был интересен лишь случай $n=\infty$, в котором его логическая связка не работала, он занялся им, и столкнулся с трудностями, продолжением которых была обсуждаемая нами история.

Ирвинг Сигал в 1959 нашел явную конструкцию этого представления для конечного n. В 1964 Андре Вейль написал работу, обобщавшую конструкцию Сигала на p-адические поля (с различными теоретико-числовыми приложениями), после чего и появился термин «представлений Вейля», с которым и между собой конкурирует около десятка других, менее употребительных.

У Вейля, кстати, была еще статья о спинорном представлении, написанная им под псевдонимом Lipschitz.

[7]Уже редактируя данные записки, я сообразил что в общераспостраненных историко-математических представлениях есть одна неточность. В рассказах о

Вопрос Фридрихса можно формулировать и благозвучнее: «описать естественную группу симметрий пространства Фока» или «описать группу симметрий свободной теории поля», или «описать группу автоморфизмов канонических коммутационных соотношений», как говорил сам Фридрихс (а за ним и Березин). Независимо от словесных упражнений, вопрос о максимальности диктовался Фридрихсу физической «природой вещей» (или тем, что он воспринимал как таковую).

В начале в 80х годов окажется, что за эту «максимальность области определения» стоило бороться и с математической точки зрения. А именно данные объекты окажутся «универсальными»[8]. Окажется, что представления бесконечномерных групп имеют склонность «пропускаться» через спинорное представление или представление Вейля[9]. А поэтому для построения представлений группы G надо просто уметь ее вкладывать в бесконечномерную симплектическую или ортогональную группу (которые, однако, определяются не очевидным образом; впрочем, нетривиальны и вложения). Окажется, что общие теоремы часто можно доказывать, не развивая никакой «теории», а просто анализируя свойства универсальных объектов. Для бесконечномерных групп эта универсальность заменяет параболическое индуцирование в смысле Гельфанда–Наймарка и Хариш-Чандры.

Независимо от Березина и примерно тогда же точное описание упомянутых групп было получено в работах Дэвида Шейла и Форреста Стайнеспринга. Сейчас не так уж интересны путанные приоритетные вопросы 45-летней давности. Березин сделал значительно больше.

Березин написал для этих представлений явные формулы. Представления писались интегральными операторами, более того, для данных представлений задание интегральными операторами вообще является самым простым их заданием. Тогда такого еще никто не видел.

Кстати, хотя конечномерное спинорное представление (объект, очевидно, фундаментальный) было обнаружено Эли Картаном в

начале теории бесконечномерных представлений, принято ссылаться на работы Гельфанда–Наймарка и Баргмана 1946-50. Если говорить именно о том, что самоназывалось словом «теория представлений», то это точно вполне. Но статьи Фридрихса 1951-53 (из которых механически была сложена его книга) в действительности были третьим исходным пунктом. И с этого пункта тоже пошло очень многое.

Березин увидел (или почувствовал) пересечение путей и на него вышел.

[8]Подробное обсуждение в [**96**], там же дальнейшие ссылки; в приводимой ниже бибиографии ниже сюда относятся работы И. Френкеля [**38**], Р. С. Исмагилова [**63**], Ю. А. Неретина [**94**], [**95**], Г. И. Ольшанского, [**105**]–[**106**], Грэма Сигала [**114**], см. также ниже 1.13.Как «вырожденный» вариант этой универсальности может рассматриваться схема Араки, в библиографии ниже см. [**6**], [**62**], [**64**], [**96**], [**126**], [**127**]

[9]Чуть раньше Роджер Хау [**59**] обнаружил универсальность тех же представлений на конечномерном уровне (см. некоторые из «отголосков» его статей в [**72**], [**35**], [**5**]). Впрочем, как заметил Г. И. Ольшанский, эти две «универсальности» между собой связаны.

1913 году, см [**31**]), оно оставалось плохо «осязаемым» на уровне группы Ли вплоть до Березина.

Потом уже многое диктовалось этими формулами. Об этом ниже.

1.3. Модели пространства Фока. Работа с «теорией поля» вынужденным образом есть работа с функциями от бесконечного числа переменных. А как такие функции записывать? Еще сложнее: как писать операторы в пространстве функций? Сейчас мы знаем и умеем много больше, чем знал и умел Березин тогда. И сталкиваемся с этими «проклятыми» вопросами каждый раз, пытаясь пройти чуть дальше мест, где люди уже ходили.

Тогда висела в воздухе идея использовать случайные процессы. Говоря казенным языком, они были «на знамени» матфизики, как в 90х годах алгебраическая геометрия. В частности, была готовая (и, кстати, очень красивая) модель Ирвинга Сигала с «гауссовой мерой на гильбертовом пространстве, сосредоточенной вне него».

Березин сумел от этого уйти и ввел голоморфную модель бозонного пространства Фока. Он также придумал как работать с операторами (на удивление просто). В итоге ему удалось избежать изнурительного отслеживания сходимостей и борьбы с искусственными расходимостями, которые его ждали бы на казавшемся более естественном пути.

Голоморфная модель была тогда же обнаружена Ирвингом Сигалом и Валентином Баргманом. Они, впрочем, оба остановились на факте наличия модели.

1.4. Анализ с нечетными переменными. Здесь можно спорить, была ли это новая сущность или удачный пересказ. Стоит вспомнить о старых физических работах Л. Онзагера, Н. Н. Боголюбова, И. М. Халатникова и о книге К. Шевалле «Алгебраическая теория спиноров», которой Березин скорее всего не знал. Но декларация о том, что это – анализ, была новой и навязывалась природой вещей в том мире, в который Березин вошел. Почему-то грассманов мир оказывался загадочной копией нашего, вроде бы настоящего. И очевидно, что эта декларация имела серьезные последствия.

1.5. Суперанализ. Супералгебры. Супергруппы. Этого в книге еще не было. Это был следующий ход, но ход уже вынужденный. Бозон-фермионная равноправность в книге просто слепит глаза[10]. Поэтому надо было рассматривать смешанное пространство, надо было рассматривать смешанные квадратичные операторы. А это

[10]Мы к этому привыкли, но здесь тоже все не так просто. Для этого надо было и бозонный и фермионный случай хорошо понять. А иначе они не столь уж похожи...

суперанализ. Это супералгебры[11]. А «физика» это или «не физика» – уже не важно. Дальнейший путь совсем не прост[12] но это трудности дороги с в принципе ясным направлением.

1.6. Книга Березина и физики. Я – не физик, и моя точка зрения не есть точка зрения физика. Не думаю, что книга Березина была книгой по физике. Это была книга, написанная под сильным физическим влиянием, и оказавшаяся на некоторое время важной для физиков теоретико-полевиков. Она быстро была переведена на английский, и значительная ее часть сразу перешла в "common knowledge"(в частности путем частичного переизложения в физических учебниках).

После этого перехода она сама, как текст, стала терять значение. Но ее запомнили надолго, а сам Феликс Александрович стал среди физиков широко известен.

Это, в свою очередь, придало ему определенную устойчивость в мире математиков.

1.7. Центральные расширения и связанные с ними казусы. Центральные расширения бесконечномерных групп вошли в моду около 80года. Я помню, что обсуждались, довольно бурно и восторженно, расширения группы диффеоморфизмов окружности, групп петель, бесконечномерных ортогональной и симплектической групп. Первые два действительно были новыми объектами, два последних были написаны в книге Березина мелким шрифтом и очень простыми явными формулами.

[11]Суперкоммутатор встречался ранее в дифференциальной геометрии, топологии и голомогической алгебре (что, в общем, едино), но это все же не те супералгебры, которыми занимается «теория супералгебр Ли».

[12]Решающим шагом, сделавшим гипотетический сюжет (идея высказана в конце заметки [**17**] 1967г) реальным, была работа Березин–Г.И.Кац (1970), где были введены формальные супергруппы. Мне кажется, что это был «потенциальный барьер», отделяющий серьезную математику от того, что могло бы казаться «игрой в определения». Сами формальные супергруппы были шагом к «глобальным супергруппам» и «суперпространствам», они были введены Д. А. Лейтесом и Ф. А. Березиным в [**79**], [**24**].

Работа Березина и Г. И. Каца любопытна и с психологической стороны. Иногда, смотря на статью, интересно попытаться представить себе, а «как это можно было изобрести», не зная того что в ней написано (и того, что последовало за ней), но все же имея возможность для взгляда «с птичьего полета». Эта статья вроде бы и несложная, но заданный вопрос превращается в мучительную головоломку. С другой стороны, немножко удивляет и то, что ее авторы не сделали еще нескольких шагов (но это при подъеме случается). Так или иначе, передвигаться дальше с этой точки было уже можно.

Я не часто слышал упоминания о втором авторе этой статьи, Г. И. Каце. Стоит отметить, что его работы по «кольцевым группам» во многом подготовили другой «взрыв», а именно «квантовые группы» (это и сами работы Г. И. Каца обсуждаются в [**34**]).

Кстати, эти формулы универсальны. Почти все прочие известные центральные расширения могут быть получены индуцированием с этих двух[13]. Я не знаю, написано ли это где-нибудь, но это так.

Кроме того, эти формулы совсем не очевидны в конечномерном случае. Лишь в 1978 году соответствующие выражения (включая $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$) были переоткрыты Аланом Гишарде и Дэвидом Вигнером [**49**] [14] и вызвали тогда определенное удивление.

Во всем последовавшем затем научном «движении» упоминаний о расширениях Березина нет. Можно было бы сказать, что Березин «опередил свое время», что потом сделанное им сами было «переоткрыто», что потом центральные расширения появлялись «независимо» от Березина и т.д. и т.п. Мне кажется, что подобные слова не имеют смысла.

Это забавный казус, который стоит обсудить (хотя из обсуждаемых в статье научных сюжетов центральные расширения – не самый важный). Дело в том, что «Вторичное квантование» сразу стало известным, и все последующее, независимо от юридической зависимости, происходило, когда книжка уже была. Обсудим это на примере открытия алгебры Вирасоро в 1968–1971гг.

Математики часто думают, что эта алгебра спустилась в 1970 свыше как «физическое откровение». На самом деле она возникла в физических вычислениях, но вполне математически. А именно алгебра Вирасоро — подалгебра алгебры Ли квадратичных операторов,[15] которая в свою очередь есть алгебра Ли бесконечномерной симплектической группы. У последней было расширение Березина. Т.е., с математической точки зрения, было два шага – указание удачной подалгебры в симплектической алгебре, а дальше – индуцирование центрального расширения.

Едва ли физики могли так думать. Но у них было common knowledge о квадратичных операторах, и сработало именно оно. Как оно возникло, я не знаю, но эти операторы, например, подробно обсуждаютя во «Вторичном квантовании», и это – один из возможных источников, хотя вряд ли единственный.

Механизм обнаружения центральных расширений у аффинных алгебр был тот же.

Алгебра Вирасоро появилась у математиков в 1968 году (И. М. Гельфанд, Д. Б. Фукс [**42**]). Вообще-то описание центральных расширений алгебры Ли векторных полей на окружности – тривиальная задача,

---

[13] А именно, мы вкладываем бесконечномерную группу G в (скажем) ортогональную группу; имея центральное расширение ортогональной группы, мы получаем и центральное расширение группы G.

[14] Обсуждение собственно этой работы увело бы нас в сторону

[15] Т.е., алгебры Ли квадратичных выражений по операторам рождения и уничтожения z_j, $\partial/\partial z_j$.

которую любой математик-профессионал может решить за несколько часов. С другой стороны, ее открытие было крупным достижением.

Возникает вопрос, почему алгебру Вирасоро не нашли раньше (ну, например, в 1935 году). Ответ очень простой: искать центральные расширения бесконечномерных алгебр или групп никому не приходило в голову. Задачу нетривиально увидеть. В 1965 году стало известно, что подобные расширения бывают, у людей мог появиться повод об этом задуматься. У авторов [**42**] могли быть и другие причины думать о расширениях и когомологиях бесконечномерных алгебр, но и в этом случае лишний повод не помешает.

В связи с этим, разумно встать на отстраненную точку зрения, что-то вроде Микромегаса ([**134**]). В подобных ситуациях иногда можно увидеть прямое использование результатов, можно увидеть или подозревать зависимость идей. А вопрос о «независимости» смысла не имеет.[16]

1.8. Системы когерентных состояний. (см. [**108**], [**70**]) Этот термин[17] очень часто упоминается и, по сути, ничего не значит. Это удачно выбранная система векторов в гильбертовом пространстве с известными скалярными произведениями. Оказывается, что базисы для работы с гильбертовыми пространствами не нужны, «систем когерентных состояний» вполне достаточно.[18] Правда нужна определенная

[16]В этом смысле более интересен вопрос о судьбе вполне безумной идеи суперсимметрии в физике. Она была сказана Березиным сразу после «Вторичного квантования», а дальше неясно, услышали ли ее физики или придумали сами (или был какой-нибудь промежуточный вариант, скажем, вторичное ее появление под влиянием «Вторичного квантования» вполне возможно).

Уже компилируя библиографию к статье, я наткнулся на слова A. S. Whightman'a 1986г (MR0869059) «…[Эта книга] была влиятельной по двум причинам. Во-первых, она суммировала несколько десятилетий применения формализма вторичного квантования. Во-вторых, она систематически развила формализм функций от антикоммутирующих переменных и новым способом высветила параллелизм между Бозе- и Ферми-системами.» Это примерно соответствует «вынуждению» суперсимметрий, о котором я писал выше. Но сама книга уже написана под впечатлением удивления от «параллелелизма» (это видно из текста).

Мне кажется, что вопрос о «независимости» идеи суперсимметрии от [**17**], [**22**] внутри Советского Союза (а первые работы [**132**], [**46**], [**133**] по суперсимметриям там и появились) не имеет смысла, так же, как и вообще не имеет смысла вопрос о независимости от «Вторичного квантования». Просто непонятно, что слово «независимость» в данном случае могло бы значить. Эти слова ни явно, ни косвенно не относятся к значению или оригинальности этих пионерских работ, повлекших за собой столь широкое движение в собственно теоретической физике. Речь идет о разных вещах.

С другой стороны собственно «зависимость» (в смысле прямого использования) здесь иногда видна сразу. Это обсуждал М. Маринов [**88**] в заметках о моменте открытия суперсимметрий, он, в частности, прослеживал цепочки видимых зависимостей первых физических работ на эту тему от «Вторичного квантования». Его наблюдения любопытны, но здесь не место их пересказывать. Еще есть любопытная статья о том же моменте времени М. Шифмана [**121**], где (из иной «системы ценности») затрагивается вопрос «летучести идей».

Ниже я еще раз вернусь к смыслу слова «независимость» обсуждая предмет, по определенным причинам, мне лично хорошо знакомый.

Я остановился на этом сюжете в связи со сложной судьбой самого Березина, которой я кратко коснусь чуть ниже.

[17]введенный И. Клаудером.

[18]Скажу об этом иначе. Речь идет о самодостаточности воспроизводящих ядер как инструмента работы с конкретными гильбертовыми пространствами, что позволяет уйти от $\ell_2 - L^2 - H^2$–точки зрения. Я уже застал время (после [**18**]), когда это еще вызывало удивление. Историю самих воспроизводящих ядер я проследить не в состоянии, см. старые работы И. Шонберга (1938), С. Бергмана, М. Г. Крейна (1949). Быть может, сюжет восходит к статье

«ловкость рук». Дальше оказывается, что бывают пространства сложной природы, в которых явно выписанные базисы вызывают лишь желание никогда их больше не видеть. Оказывается, что бывают внешне разные пространства (ну, например, разной размерности) с одной и той же «системой когерентных состояний» и т.д и т.п. Еще оказывается, что неединственность разложения по «когерентным состояниям» , наряду с бросающимися в глаза минусами, имеет и очень серьезные плюсы.

Никакой «высокой теории» в этом нет, есть лишь «ловкость рук». Но ее надо было развить. В книге Березина она уже присутствует как инструмент, но еще не изложена в виде «самоучителя».

Повторяю, все это вполне тривиально. Только давно бы это пора включить в учебники функционального анализа...

1.9. Общий комментарий. Обычно люди пишут книги, пытаясь изложить то, что уже было известно. В книге Березина подобного не было. Тогда, в 1965 году, в этом тексте все было новым.[19]

1.10. Книга Березина как памятник словесности. Сразу должен сказать, что эта словесность является не вполне изящной. Работы Березина бывали трудно читаемы[20]. С другой стороны, автор оригинальной работы всегда находится в несколько проигрышном положении по сравнению с автором работы заурядной. Ну и, наконец, книга имела тяжелую историю.

В итоге книга совсем не проста. Читатель оказывается в положении лыжника, идущего вторым по лыжне. Но с другой стороны, никакого дополнительного сопротивления, кроме естественного сопротивления местности и недотропленной лыжни, читатель не испытывает. В большинстве современных математических книг природа сопротивления чтению иная. Я вернусь к этому вопросу позже.

Наконец, книга была издана при поддержке физиков, и, по-видимому, на физиков была рассчитана. Наверное, это было к лучшему, но ее восприятие математиками от этого не упрощалось. Однако она является вполне точной и строгой математической работой.

Кстати, в качестве технически-аналитического текста книга с ее замысловатыми, но не занудными, деталями очень интересна и поучительна.

1.11. Бесконечномерные группы. Москва, 1965–1975. В 1946–1950гг. И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк с одной стороны и

Карла Менгера (1924) об изометричных вложениях метрических пространств в гильбертовы (и, соответственно, об условно положительно определенных ядрах).

[19]Но такие книги бывают. Читатель может попытаться поискать примеры.

[20]А бывали и понятными. Кстати, изданные А. А. Кирилловым и В. П. Паламодовым неоконченные посмертные записки Березина по суперанализу являются хорошо и понятно написанным текстом. Вообще Кириллов сделал очень много для распостранения идей Березина.

В. Баргманн – с другой сообщили, что представления полупростых групп очень интересны, и что там есть, что делать. Перечислю некоторых людей, которые в 1950–1965гг. занимались в Советском Союзе[21] полупростыми группами и их представлениями, по тем или иным причинам(не обязательно под влиянием Гельфанда и Наймарка), в том или ином возрасте, в той или иной степени: Ф. А. Березин, Н. Я. Виленкин, Э. Б. Винберг, С. Г. Гиндикин, М. И. Граев, Е. Б. Дынкин, Д. П. Желобенко, Р. С. Исмагилов, Ф. И. Карпелевич, А. А. Кириллов, А. У. Климык, М. Г. Крейн,Р. А. Минлос, В. Ф. Молчанов, М. Н. Олевский, М. А. Ольшанецкий, А. Л. Онищик, А. М. Переломов, И. И. Пятецкий-Шапиро, П. К. Рашевский, С. В. Фомин, М. Л. Цетлин. Список, надо сказать, внушительный.

А теперь перечислю некоторые работы по бесконечномерным группам и алгебрам Ли следующего десятилетия, 1965–75

— статья В. И. Арнольда о геодезических на группах диффеоморфизмов и уравнениях гидродинамики, 1966;

— начиная с 1967, статьи Р. С. Исмагилова о группе SL_2 над неархимедовыми нелокальными полями[22];

— книга Г. Е. Шилов, Фан Дык Тинь «Интеграл, мера, производная на линейном пространстве», 1967;

— начиная с 1968г., работы по когомологиям бесконечномерных алгебр Ли, И. М. Гельфанд–Д. Б. Фукс, а также Л. В. Гончарова и М. В. Лосик;

— формальная дифференциальная геометрия И. М. Гельфанда и Д. А. Каждана;

— работы И. Л. Кантора и В. Г. Каца по аффинным алгебрам Ли

[21]Чтобы отвлечься от москвоцентризма, стоит отметить, что работы [**7**], [**45**] повлекли и «цепную реакцию» на Западе. В качестве отдельного «явления природы» возникла загадочная фигура Хариш-Чандры, скорее «одинокого танка», чем «одинокого волка». Он всю жизнь двигался в одном направлении, сминая все препятствия на своем пути, и оставил после себя «просеку», поражающей воображение величины. Напомню, что его достойным научным соперником Березин выступал в 1956–1957 до своего поворота. В связи с грустными вопросами, обсуждаемыми несколько ниже (и для сравнения), отмечу, что Хариш-Чандра изобрел технику «броневой защиты» своих научных работ, делая почти невозможным их действительное понимание для постороннего глаза. Этим он обеспечил себе «неуязвимость» и возможность работы вне «гоночной атмосферы», но, с другой стороны, внес этим свой личный вклад в непонятность современной математики.

[22]Из всех упомянутых в этом списке работ эти наименее цитируемы. Однако в них было обнаружено умножениедвойных классов смежности в бесконечномерных группах.

— работы А. М. Вершика, И. М. Гельфанда и М. И. Граева, а также Р. С. Исмагилова на грани теории представлений и случайных процессов.[23]

Все это – яркие новаторские работы.

Но ясно, что в 1965-67гг. что-то изменилось (при том, что полупростые группы тогда отнюдь не исчерпали себя, никакого кризиса еще не было).

Попытаемся представить себе математическую Москву 1960г. Тогдашнему человеку, возможно, могло прийти в голову, что бывают чудовищно большие группы. Но объект этот мало привлекателен. Ну, можно поиграть в определения. Что дальше? Кое-кто (мало кто) знал, что есть какое-то странное действие бесконечномерной ортогональной группы на пространстве с мерой, построенное Ирвингом Сигалом и не очень понятно им описанное[24].

А в 1960-62 году Березин сообщил (а в 1965г. его пришлось услышать), что бесконечномерные группы (пока еще немногие) – это не обобщение ради обобщения, что это новая содержательная сущность. Он показал, что это не монстры, а осязаемые объекты. Что в связи с ними можно писать формулы. И, наконец, интерес, проявленный «физиками» говорил сам за себя. Это был момент, когда у серьезных и «интеллектуально мобильных» людей были основания задуматься и в этот момент сообразить, что эти, возможно уже и не монстры, нужны и им самим.

Но, как ни рассуждай, 1965 год был годом смены вкусов. И повод к смене вкусов тоже был. И как ни рассуждай, с книги Березина начиналось крупное «научно-общественное движение». Во всяком случае, в размерах одного города. Но города в то время в математике важного.

Это существенно меняло точки зрения. Это ставило новые задачи, которых раньше просто не видели. «Рабочие руки» были. А дальше

[23]Для точности следует указать еще работу А. И. Кострикина и И. Р. Шафаревича [**77**] (1965), очевидно, находившуюся в стороне от данного движения. Они обнаружили, что многочисленные странные примеры простых алгебры Ли над конечным полем, являются просто алгебрами Ли векторных полей, имитированных в конечной характеристике. Т.е.,итоговые содержательные объекты конечномерны. Но идейный источник (который сам по себе не использовался) – «бесконечномерная » теорема Эли Картана о примитивных псевдогруппах [**30**], интерес к которой оживился в начале 60х годов. Я думаю, что эта теорема была важной отправной точкой и для И. Л. Кантора.

[24]Издалека видно, что серьезные работы, относящиеся к представлениям бесконечномерным групп уже были, например статьи И. Шонберга [**111**], [**110**] и статья М. Г. Крейна [**78**] (скорее всего написанная не без влияниея Шонберга или/и К. Менгера) уже были. Издалека видно, что чуть-чуть иначе взглянув на Шонберга-1938 можно было бы сразу «оказаться»в году 1962. Только это – одно из невероятных «чуть-чуть».

было «новое Эльдорадо» с его новой (уже самораскручивающейся) идеологией.[25]

А вот сам Березин бесконечномерными группами больше не занимался...

1.12. Березин после «Вторичного квантования». В 1965г он оказался в положении человека, поднявшегося на высокую вершину. Возможно, что часть им увиденного тогда была миражом. Это тоже плата за восхождение, виды в далекой дымке не всегда можно истолковать правильно (но Березину это в целом удавалось, и это одна из загадок данной личности). Но надо заметить, что представления человека, наблюдающего мир из предписанной долины или из середины бегущей на месте (и не лишенной агрессивности) толпы, однако, будучи социально бесспорными, с какой-то иной (разумеется, извращенной) точки зрения все же не лишены экстравагантности.

Основные группы работ Березина последующих 15 лет – это суперанализ, общая теория символов операторов и общие концепции квантования[26], гильбертовы пространства голоморфных функций. Выше уже было сказано, что суперанализ был «вынужденым ходом». Два других сюжета тоже возникли как продолжение «Вторичного квантования».

В этом перечне я скорее всего что-то пропустил, многих работ я никогда не читал и даже не видел[27]. Но я читал довольно много и, должен сказать, что Березин всегда оставался человеком, способным видеть то, что ни кто другой на его месте бы не увидел. Думаю, что встав на нетривиальную общую точку зрения в 1960 году, он уже никогда с нее не сходил и, собственно, это было источником его мощи.

Скажу о предмете, мне по роду деятельности, хорошо знакомом. Работа Березина «Квантование в симметрических областях» (1975) открывала новый сюжет в теории представлений вещественных полупростых

[25] Около 1970 года А. А. Кириллов начал «пропаганду» теории представлений бесконечномерных групп (например, в книге 1972 года бесконечномерные группы указывались как вероятное будущее теории представлений). В тот момент ничего, кроме книги Березина (и, по-видимому, уже проведенных «разведочных» работ самого Кириллова), еще не было. Но появилось очень скоро.

[26] Здесь нет возможности обсуждать эти работы; надеюсь, что другие авторы этого сборника сделают это лучше, чем мог бы сделать я, см., например, статью А. С. Шварца. Напомню, что Березин более всего известен именно как основатель суперматематики. См. также статью А. С. Лосева о недавно открывшихся возможностях суперанализа.

[27] См. обзор работ Березина, сделанный Р. А. Минлосом, а также удивляющую разнообразием библиографию статей в конце книги [**20**] (MathSciNet не все из нее видит, с другой стороны, некоторых работ, видимых по MathSciNet'у в библиографии нет). В некрологе в Успехах Физических наук [**101**] подчеркиваются работы по квантовой задаче многих тел.

групп – гильбертовы пространства голоморфных функций в симметрических областях.[28]

Те же объекты были вскоре получены другим способом Мишель Верне и Хуго Росси [**125**], а также Ноланом Валлахом [**136**]. Дальше, всем было очевидно, что нужно было заниматься пространствами векторнозначных голоморфных функций в тех же областях. Этому предстояло стать местом очередных «гонок» на следующие 10 лет; эти содержательные интересные работы (см. М. Кашивара, М. Верне [**72**] Т. Энрайт, Р. Хау, Н. Валлах [**35**][29]) в итоге, к сожалению, так нигде понятно не были переизложены.

Но Березин в короткой заметке 1978г [**19**][30] сделал шаг в совершенно другую сторону, это внезапно «аукнулось» в 1994г у Гаральда Упмайера и Андрэ Унтерберже и в итоге привел к восстановлению (боюсь, что временному) уже входившего в состояние коллапса некоммутативного гармонического анализа.

1.13. Книга Березина. 15 лет спустя. Хотя многое, происшедшее из этой книги, быстро вошло в обиход, две самых сложных (и на мой взгляд, основных) конструкции долго оставались в математике без применения. Они сработали в 1979-80 (а публикации были уже позже) в работах Г. И. Ольшанского, Р. С. Исмагилова, Грэма Сигала и автора настоящих заметок. Перечисленные работы были посвящены разным вещам, в первых трех случаях они напрямую использовали конструкции из «Вторичного квантования»; я, как

[28] Немножко об истории предмета. Хариш-Чандра в 1955, [**54**] ввел т.н. голоморфные дискретные серии (забавно, что в его конструкции были «задействованы» объекты, названные много позже «модулями Верма», они использовались Хариш-Чандрой и в других работах). Тогда эти «серии» выглядели лишь элементами большого «зоопарка» унитарных представлений и в таком качестве периодически изучались специалистами (например, М. И. Граевым [**48**]). Березин обнаружил, что эти «серии» допускают аналитическое продолжение по параметру, и картина быстро стала интересной, потому что появилось много дополнительных явлений, начали обнаруживаться связи с другими областями математики и т.д. (в этот момент «осознания» значительную роль сыграли также работы сотрудничавшего с Березиным Е. А. Гуткина). В итоге возникла область, где есть, что делать, эта деятельность началась и пока еще продолжается, хотя многое иное, казавшееся важным в 1975, забывается (и наблюдать это грустно).

[29] См. также статью Г. И. Ольшанского [**104**], написанную для «поддержки» теории представлений бесконечномерных групп.

[30] В дате я не уверен. Согласно воспоминаниям Е. Г. Карпель, 06.09.1973 Березин подал в Известия АН СССР большую статью. Редакция попросила разделить статью на 3 части, вторая часть – это упомянутая работа-1975, третья часть была в итоге отклонена. Ее содержание не известно, и ничего, соответствующего данному предмету, кроме заметки-1978 в публикациях Березина не было. Кстати, я не вижу причин видеть «злой умысел» в действиях редакции Известий; больших статей тогда почему-то не любили, все три части, скорее всего, должны были рецензироваться по отдельности.

ни странно, тогда еще ничего не знал, кроме книги Шилова–Фан Дык Тиня и статьи Шейла.

1.14. 40 лет спустя. Взгляд из настоящего на прошлое и из прошлого на настоящее. Ситуация в математике и математической физике последних 10-15 лет быстро становится все более зловещей. Эта точка зрения уже не очень оригинальна, см., например, статьи В. И. Арнольда и С. П. Новикова по этому поводу. В частности, наступил кризис способности (и желания!) математиков понимать друг друга. Эта «частность», в свою очередь, должна повлечь много иного, не столь частного. Вопрос Арнольда «Выживет ли математика?», не есть риторика. Разумные реакции уже сильно запоздали, и выйти из тупика нельзя без тяжелых потерь. Уже началось необратимое омертвение больших массивов содержательных текстов. Они уже никогда и никем не смогут быть прочитаны.

Сложность современной математики (математика, вообще-то, наука[31] простая, но сейчас правда стала несколько сложноватой) является лишь поверхностным объяснением. В действительности, современные математические тексты значительно сложнее, чем их содержание. Силы людей кончаются на уровне попыток прочтения текстов, до содержания дело просто не доходит[32]. Кстати, и голова теперь забита своей «родной» терминологией настолько, что никакой иной уже понимать не хочется.[33].

[31]Не совсем правда, что математика – «наука» в старом смысле слова, теперь это скорее род деятельности, вне деятельности она не может существовать, что создает проблемы в поисках контактов с нематематиками.

[32]Удивительно сколь многое изменилось за последние 25 лет. Тогда я, будучи аспирантом, купивши в магазине (супер-новейшую) переводную книгу издательства «Мир», мог сесть в электричку и там спокойно ее читать. Интересно представить себе современного аспиранта-математика, читающего в электричке монографию совсем не по своей тематике.

Статьи, которые невозможно прочесть, тогда уже появились, но некоторое время, пока все не привыкли, это вызывало удивление. Доклады на конференциях, где у рассказчика нет ни малейшего желания быть понятым, а у зрителей нет даже идеи чего-либо понять, начали появляться на моей памяти и постепенно стали преобладающим зрелищем.

[33]Одним из источников сложности являются иногда упоминаемые в статье «гонки». Это слово относится к широко распространенному явлению (см. пример, ставший символом, в [**86**] и обсуждение одной хрестоматийной дискуссии в [**67**]). Я попытаюсь дать определение. Это ситуация, когда многие пытаются как можно скорее решить задачу, рассматриваемую частью общества как важную, но фактической целью является фиксация социумом факта решения задачи первым. Отчасти это может рассматриваться как концентрация сил на «важном направлении».

С другой стороны, одновремено хотелось бы, чтобы достигалась прозрачность, но это требует серьезных дополнительных усилий, т.е., с одной стороны, отвлекает от цели, с другой, упрощает ее достижение другими. Наконец, по окончании могут потребоваться большие усилия по упрощению материала. «Истина, как вы знаете, это то, что делает мир проще, а отнюдь не

Другое объяснение – усиливающаяся социоцентризация науки. С одной стороны, математики объективно обладают большими возможностями для индивидуальной работы, чем другие исследователи. Но с другой стороны, внешних сил, сдерживающий эту социоцентризацию в чистой математике нет. Наконец, в условиях непонятности текстов индивидуальная оценка чужой деятельности становится невозможной.Т.е., формирование общественного мнения становится чисто социальным процессом, оторванным от собственно научного профессионализма.[34] По нынешним временам, точнее уже сказать, что математический смысл становится «кажимостью», оторванной от настоящей (социальной) реальности. Математика решительно идет к своим собственным «зияющим высотам» [**142**].

Сам Березин жил в «добрые старые времена», когда до всего этого было еще далеко. Но вот с «зарей научного (математического) социализма» ему познакомиться пришлось.

Математическая Москва 1945-1990 была выдающимся явлением, возможно необычным в истории науки вообще. Но, из-за замкнутости и сравнительной многолюдности этого мира, процессы социоцентризации там протекали относительно быстро. И, во многом благодаря инерции этих процессов (превратившихся в фарс) сейчас, 17 лет спустя, Москва больше не является математическим центром.

Березин оказался одиночкой «под огнем» нескольких научных группировок. Но, я думаю, что Березин смог стать тем, кем он стал, и совершить то, что он совершил, не только вопреки происходившему противостоянию, но и, во многом, благодаря ему. «Так тяжкий млат, дробя стекло, кует булат». Кажется, ему лично это стоило

то, что обращает его в хаос.» (Mais la vérité, vous le savez, c'est ce qui simplifie et non ce qui crée le chaos, [**113**]) Но усилия в этом направлении энергетически не выгодны, потому что «призов» в среднем не влекут (и как устанавливать их – неясно). Все это сейчас работает само собой как слепой социальный механизм.

Внутренняя атмосфера гонок и гонки как средство социального отбора – вопросы отдельные.

[34]Стоит заметить, что и то, и другое сцеплено также с процессом «умножения сущностей сверх меры».

дорого. Нам, как раз, сожалеть о том, что Березин стал Березиным, не приходится.[35,36]

[35]Я хотел ограничиться данным «оптимистическим» абзацем, но по рекомендации одного из рецензентов расширил текст.

Недавно издательством World Scientific был издан сборник работ о Березине [**120**]. Человек, прочитавший несколько статей из него, перестает что-либо понимать, кроме того, что жизнь Березина была клубком трудностей непонятной природы.

Я всегда воспринимал Березина как «интеллектуального героя» и никогда не пытался узнать «подробности» его конфликта с математическим сообществом. Это событие я с удивлением «вычислил», читая математические статьи (благо, что тогда люди умели читать между строк). Данный конфликт включал в себя цепочку видимых личных столкновений, но по типологии не мог к ним сводиться (и вообще, мало ли кто с кем когда ссорился, не в этом дело). Я лишь отмечу некоторые детали, которые не бросаются сразу в глаза читателю этого сборника.

Во-первых, «Вторичное квантование», будучи книгой по теории представлений, полностью находилось за пределами круга идей Советской школы теории представлений (в том числе и ранних работ Березина) с одной стороны и ее соперника — Хариш-Чандры лично с другой. Это поразительно, но это так.

Во-вторых, наша сегодняшняя оценка многих работ Березина (например, первых работ по суперанализу или [**18**]) содержит существенную аберрацию зрения. С точки зрения математика-современника, никаких «актуальных задач»в них не решалось, это были просто непонятные работы «неизвестно о чем» (статьи о символах, в этом отношении, были благополучнее).

Мы можем восхищаться этими работами, критиковать их или никак к ним не относиться. Но любой человек, знакомый с современными научно-социальными нравами, заметит, что ничего хорошего для человека с недостаточно высоким положением в научной иерархии такой «расклад» не предвещал (причем угрозы достаточно разнообразны). Подобная ситуация тем опаснее, чем выше уровень социоцентризации. А это была замкнутая Москва, разделенная на соперничающие научные партии, с их «позиционной войной» (где правила обязана соблюдать лишь противная сторона), и проблемами удержания внутрипартийной дисциплины.

Взрывоопасная ситуация не обязательно влечет взрыв. Но может и повлечь.

Люди, в той или иной степени, участвовавшие в дальнейших событиях, не были худшими из людей, вовсе наоборот. Выше я сделал несколько нелестных замечаний о московском математическом сообществе. Но оно не было худшим из миров – достаточно посмотреть на его научные достижения, в чем-то оно было самонаилучшим. Оно, кстати, было сообществом свободным в степени, какой представителям других наук (да и нынешним математикам) не понять. К сожалению, наряду с этим есть обычные законы социальности, которым все группы людей, в большей или меньшей степени, подвержены. Реакции общественных структур, подавляющих возможность асоциального поведения своих членов, поразительно однотипны (см. обсуждение этой проблемы в [**83**], см. также описательно-феноменологическую работу [**142**]).

Мне кажется, что Березин «прорвался» и «на социальном фронте» тоже, и к 1980г конфликт подходил к естественному исчерпанию.

[36]Конфликт выдающейся личности с окружением – не такое уж редкое явление. В истории русской математики была непростая судьба

Вернемся к сегодняшнему кризису. В нем сыграли свою роль и некоторые старые «идеологические установки». Мы воспринимаем математику как объединение «теорий». Каждая теория направлена на описание подотчетной ей местности. Человеку, решившему куда-либо прогуляться, предлагается «выучить теорию». Но эта «теория» есть лишь человеческое творение, которое (даже в «досоциоцентрическую эпоху») создавалось лишь для удобства людей, в данной местности сидящих.

Один из возможных способов, которыми нынешние люди пытаются восстановить общематематическую картину – создание жанра «командных высот». Их описание должно делаться на общечеловеческом (общематематическом) языке, и сами «высоты» (высоты, а не низины) каждой «теории» должны быть доступны для внешнего понимания.

Возвращаюсь к книге Березина. В математике она повлекла за собой два крупных «водоворота»– «бесконечномерные группы» и «суперанализ» – а также и иные последствия, о которых отчасти упоминалось выше. Как я выше отмечал, она не являлась образцом понятно написанной *математической* книги. Это было вынуждено ее высокой оригинальностью в момент ее создания, и усугублено побочными проблемами. Но сложной книгой в современном понимании этого она не была. Кроме того, такого рода недостатки книг не фатальны, они, очевидно, могут быть исправлены в «следующем поколении» литературы.

С другой стороны в тогдашней *теоретико-полевой физике* она, по-видимому, сыграла роль не только «плацдарма для будущего наступления», но и «влиятельного» упрощающего текста (см. цитату из Уайтмана выше).

Ну и, наконец, книга Березина – интересный образец «нетеоретической» книги. В ней не было никаких общих построений, а просто описывались две конкретные «командных высоты».[37]

Н. И. Лобачевского (см. [**82**]); не столь яркий и менее известный случай – Ф. Э. Молин (см. [**92**]). Последний столкнулся с обструкцией в связи с занятиями не существовавшими (и возникшими не без его участия) теорией представлений и теорией ассоциативных алгебр. Мне лично кажется, что эти конфликты имели менее жесткие формы.

Коснувшись данной темы, оставим ее, и, как Василий Тёркин, вернемся с того света, [**123**].

[37]С проблемой «теоретичности/нетеоретичности» теории представлений бесконечномерных групп столкнулась следующая «волна» исследователей (А. А. Кириллов, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, А. М. Вершик, Р. С. Исмагилов) в начале 70-х годов. Начинать рассуждение словами «возьмем произвольную группу Ли» можно. Но после слов «возьмем произвольную бесконечномерную группу» слово «тогда» повисает в воздухе (дальше сказать ничего нельзя, как ни уточняй определение). Можно сказать, «возьмем группу петель» или «возьмем (G, K)-пару Ольшанского» (но и те и другие, по-существу, являются элементами списков). Вообще говоря (но не всегда), рискована фраза «возьмем произвольное представление такой-то (названной) группы G». Возможности

Нет, автор с Феликсом Александровичем знаком не был. Весной 80 года я – студент-пятикурсник – сидел на последней парте на спецкурсе по «квантовой механике». В июне 80 года я зашел на кафедру ТФФА[38], чтобы задать Березину один математический вопрос. Секретарша сказала, что он два дня назад уехал и будет лишь в сентябре... В ноябре, разглядывая статью с «физической абракадаброй», я сообразил, что (инфинитезимальным) квадратичным операторам Вирасоро соответствуют групповые операторы и что сами формулы Вирасоро деформируются. [39]

сказать «тогда» опять может не оказаться. В 70-80х годах постепенно вырабатывались подходы к преодолению этих кажущихся странностей.

Оказалось, что представления бесконечномерных групп образуют вполне связную картину, что одни и те же методы и явления связаны с внешне совершенно разными группами, что разные классы групп напрямую связаны между собой и рассматривать их естественнее вместе. Но эта объективно связная картина «организована» не как «аксиоматическая теория» в духе Н. Бурбаки. Соответственно и «вход» в представления бесконечномерных групп мог быть лишь нетеоретическим (т.е. основанным на попытке решить удачно угаданную конкретную задачу). Как мы уже обсуждали, ровно так это и произошло.

Любопытно, что в Советской школе классической теории представлений переплетались две тенденции, «нетеоретическая» и «теоретическая», родоначальниками которых были, как мне кажется, И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, с одной стороны (когда ставка делалась на написание понятных и пригодных для чтения текстов, работе в по возможности конкретизированных ситуациях и действиях по аналогии), и Е. Б. Дынкин (с разработкой общих подходов и унифицирующей техники) с другой. Но тенденции действительно переплетались, те же «основатели» могли иногда выступать и в противоположном качестве, никакого «противоречия» в этом нет.

Кстати, в 1964г произошел еще один «вход» в представления бесконечномерных групп, а именно появилась работа Эльмара Тома, описывавшая все центральные положительно определенные функции на бесконечной симметрической группе (т. е., «заход» тоже «не теоретический»). Впоследствии эта теорема оказалась важной и сама по себе, и как предмет для подражания (см. [**128**], [**129**], [**28**]). Кажется, первой серьезной реакцией на нее были работы С. Стратилы и Д. Войкулеску 1975-1976гг, см. [**131**].

[38]Теории функций и функционального анализа.

[39]Так случилось, что много позже [**97**] я оказался «продолжателем» вышеупомянутой заметки [**19**] 1978 года. Это забавно с точки зрения вопроса о «нечетких зависимостях», обсуждавшемся выше. На сюжет заметки [**19**] вторично «вышли» Г.И.Ольшанский и я в 1984, реального пересечения с Березиным у нас не было (но зависимость от статьи Березина [**18**] была прямая), внешне все выглядело не похоже; так что мы даже не заметили близости этих работ. В 1995 году мы наконец собрались эту работу «по-человечески» написать, и в процессе этого я вернулся к данному предмету. Я продвинулся насколько мог, но дальние цели выглядели недостижимыми. Это была «развилка», и я наверняка пошел бы в другую сторону.. Но В. Ф. Молчанов сказал мне, что Березин «посчитал формулу Планшереля» в такой-то и такой-то ситуации. Я понял из этого, что некоторый интеграл считается, и, собственно, факт вычислимости интеграла

2. «Группа автоморфизмов канонических коммутационных соотношений»

Здесь описывается конструкция Березина для группы автоморфизмов канонических коммутационных соотношений. Я не привожу доказательств, но мне кажется, что этот раздел можно рассматривать как набор упражнений по фунциональному анализу.

2.1. Бозонное пространство Фока с конечным числом степеней свободы. Обозначим через $\lambda(z)$ меру Лебега на $\mathbb{C}^n$, нормированную следующим образом

$$d\lambda(z) = \pi^{-n} \prod dx_j\, dy_j, \qquad \text{где } x_j = \operatorname{Re} z_j,\ y_j = \operatorname{Im} z_j.$$

Бозонное пространство Фока $\mathbf{F}_n$ это пространство голоморфных функций $f(z)$ на $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-|z|^2}\, d\lambda(z) < \infty.$$

Введем в $\mathbf{F}_n$ скалярное произведение по формуле

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{C}^n} f(z)\overline{g(z)} e^{-|z|^2}\, d\lambda(z).$$

2.1.1. Предложение. *Функции вида*

$$z^{\mathbf{k}} := z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n},$$

где $k_j = 0, 1, 2, \dots,$ образуют ортогональный базис в $\mathbf{F}_n$, причем

$$\|z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}\|^2 = k_1! \dots k_n!..$$

2.1.2. Теорема. *Пространство $\mathbf{F}_n$ является гильбертовым пространством (т.е, оно полно). Иными словами, пересечение пространства голоморфных функций с L^2 замкнуто в L^2.*

2.2. Пример. Гауссовы векторы. Возьмем функцию

$$\mathbf{b}_T(z) := \exp\Bigl\{\frac{1}{2} zTz^t\Bigr\}$$

где T – симметричная матрица.

2.2.3. Наблюдение. *Вектор $\mathbf{b}_T$ содержится в $\mathbf{F}_n$ тогда и только тогда когда $\|T\| < 1$*

Простое вычисление дает

$$\langle \mathbf{b}_T, \mathbf{b}_S\rangle = \det\Bigl[(1 - TS^*)^{-1/2}\Bigr],$$

(а не окончательная формула) был для меня решающей информацией. Меня при этом позабавило наличие старых человеческих следов в данной местности.

С точки зрения lawyer'а мои последующие статьи по «ядрам Березина» от Березина не зависили. Но непонятно, что может значить слово «независимость», когда все может решать обрывок фразы (в иных ситуациях я это много раз наблюдал и на себе, и на других).

поэтому

$$\|\mathbf{b}_T\| = \det(1 - TT^*)^{-1/4} \tag{2.1}$$

2.3. Так называемые «когерентные состояния». Для $a \in \mathbb{C}^n$ определим функцию

$$\varphi_a(z) := \exp\Bigl\{\sum_j z_j \overline{a}_j\Bigr\}.$$

2.3.4. Теорема. *Для любой функции $f \in \mathbf{F}_n$ выполнено следующее «воспроизводящее свойство»*

$$f(a) = \langle f, \varphi_a \rangle. \tag{2.2}$$

В частности,

$$\langle \varphi_a, \varphi_b \rangle = \exp\Bigl\{\sum b_j \overline{a}_j\Bigr\} = \varphi_a(b) = \overline{\varphi_b(a)}..$$

2.4. Как записывать операторы?

2.4.5. Теорема. *Любой ограниченный оператор A в пространстве $\mathbf{F}_n$ может быть записан в виде*

$$Af(z) = \int_{\mathbb{C}^n} K(z, \overline{u})\, f(u)\, e^{-|u|^2}\, d\lambda(u), \tag{2.3}$$

где $K(z,\overline{u})$ – функция, голоморфная по z и антиголоморфная по u. Более того, этот интеграл является абсолютно сходящимся для всех $f \in \mathbf{F}_n$.

Иными словами, любой ограниченный оператор в $\mathbf{F}_n$ является интегральным оператором в буквальном смысле этого слова.

Для данного оператора A обозначим через $c_{\mathbf{kl}}$ его матричные коэффициенты в стандартном базисе

$$c_{\mathbf{kl}} := \langle Az^{\mathbf{k}}, z^{\mathbf{l}} \rangle..$$

Тогда ядро K записывается в виде

$$K(z, \overline{u}) = \sum_{\mathbf{kl}} c_{\mathbf{kl}} \frac{z^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} \frac{\overline{u}^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}.$$

После этого теорема легко проверяется (хотя «перестановка»несобствнного интегрирования и суммирования ряда требует определенного обоснования).

Возможна другая точка зрения, а, именно, ядро может быть также записано формулой

$$K(a, b) = \langle A\varphi_b, \varphi_a \rangle = A\varphi_b(a).. \tag{2.4}$$

Теперь мы получаем объяснение сходимости интеграла (2.3). В самом деле,

$$\int_{\mathbb{C}^n} K(z, \overline{u})\, f(u)\, e^{-|u|^2}\, d\lambda(u) = \langle f, A\varphi_z \rangle, \tag{2.5}$$

т.е., наш интеграл является скалярным произведением функций f, $A\varphi_z \in \mathbf{F}_n$, а потому он сходится (в силу ограниченности оператора A, мы имеем $\varphi_z \in \mathbf{F}_n$.

2.5. Как перемножать операторы? Пусть A, B – операторы в $\mathbf{F}_n$, пусть K, L их ядра,

$$Af(z) = \int_{\mathbb{C}^n} K(z,\overline{u})\, f(u)\, e^{-|u|^2} du\, d\overline{u},$$
$$Bf(u) = \int_{\mathbb{C}^n} L(u,\overline{w})\, f(w)\, e^{-|w|^2} dw\, d\overline{w}..$$

Тогда ядро M их произведения AB вычисляется по обычной формуле

$$M(z,\overline{w}) = \int_{\mathbb{C}^n} K(z,\overline{u})\, L(u,\overline{w})\, e^{-|u|^2}\, d\lambda(u).. \tag{2.6}$$

Это понятно, но встает вопрос о перестановке пределов интегрирования и сходимости интеграла. От этого вопроса можно уйти, заметив, что последний интеграл (2.6) опять является скалярным произведением функций

$$L(u,\overline{w}) = B^*\varphi_w(u), \qquad \overline{K(z,\overline{u})} = A\varphi_z(u),$$

а поэтому интеграл сходится.

2.6. Вещественная симплектическая группа. Вещественная симплектическая группа $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ есть группа вещественных $(n+n)\times(n+n)$-матриц $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,удовлетворяющих условию

$$h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} h^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

(знак ^{t} означает транспонирование). Иными словами, эти матрицы сохраняют кососимметричную билинейную форму $\{\cdot,\cdot\}$ в $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Нам удобно перейти к комплексной реализации данной группы, а именно вместо матрицы h рассмотреть

$$JhJ^{-1}, \qquad \text{где} \quad J := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Мы получим группу матриц, имеющих блочную структуру

$$g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

где черта обозначает поэлементное комплексное сопряжение.

Они, по-прежнему, удовлетворяют условию симплектичности (2.7), с другой стороны, они удовлетворяют также и условию

$$g\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}g^*=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.. \tag{2.10}$$

Для читателя, немного знакомого с вещественными классическими группами, замечу, что

$$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) =$$
$$=\mathrm{U}(n,n)\cap\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})=\mathrm{U}(n,n)\cap\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})=\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})\cap\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R}).$$

2.7. Формула Березина. «Представление Вейля». По симплектической матрице (2.9) мы определим оператор в пространстве Фока $\mathbf{F}_n$ по формуле

$$W\begin{pmatrix}\Phi&\Psi\\\overline{\Psi}&\overline{\Phi}\end{pmatrix}f(z)= \tag{2.11}$$
$$=\int_{\mathbb{C}^n}\exp\Big\{\frac12\begin{pmatrix}z&\overline{u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\Psi}\Phi^{-1}&\Phi^{t-1}\\\Phi^{-1}&-\Phi^{-1}\Psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z^t\\\overline{u}^t\end{pmatrix}\Big\}f(u)\,e^{-|u|^2}\,d\overline{u}\,du..$$

Здесь z, $\overline{u}$ – матрицы-строки,

$$z=\begin{pmatrix}z_1&\dots&z_n\end{pmatrix},\qquad \overline{u}=\begin{pmatrix}\overline{u}_1&\dots&\overline{u}_n\end{pmatrix}..$$

Соответственно в показателе экспоненты стоит квадратичное выражение от z, $\overline{u}$.

Отметим также, что Φ всегда обратим, это легко выводится из (2.10).

2.7.6. Теорема. *a) Операторы $W(\cdot)$ унитарны с точностью до скалярного множителя, точнее унитарны операторы*

$$\det(\Phi^*\Phi)^{-1/4}W\begin{pmatrix}\Phi&\Psi\\\overline{\Psi}&\overline{\Phi}\end{pmatrix}..$$

a) Операторы $W(\cdot)$ образуют проективное представление группы $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, *точнее*

$$W\begin{pmatrix}\Phi_1&\Psi_1\\\overline{\Psi}_1&\overline{\Phi}_1\end{pmatrix}W\begin{pmatrix}\Phi_2&\Psi_2\\\overline{\Psi}_2&\overline{\Phi}_2\end{pmatrix}= \tag{2.12}$$
$$=\det(1+\Phi_1^{-1}\Psi_1\overline{\Psi}_2\Phi_2^{-1})^{-1/2}W\left(\begin{pmatrix}\Phi_1&\Psi_1\\\overline{\Psi}_1&\overline{\Phi}_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Phi_2&\Psi_2\\\overline{\Psi}_2&\overline{\Phi}_2\end{pmatrix}\right)..$$

Коль скоро теорема сформулирована, она легко проверяется "в лоб"перемножением операторов.

2.8. Центральные расширения. Пусть G – некоторая группа, A – абелева группа. Попробуем ввести на множестве $G\times A$ групповой закон по формуле

$$(g_1,a_1)\circ(g_2,a_2)=\big(g_1g_2,a_1\cdot a_2\cdot c(g_1,g_2)\big),$$

где c – функция $G\times G \to A$. Чтобы это умножение было ассоциативно, нужно выполнение тождества

$$c(g_1, g_2) \cdot c(g_1g_2, g_3) = c(g_1, g_2g_3) \cdot c(g_2, g_3).. \tag{2.13}$$

Полученная таким образом группа называется *центральным расширением* группы G, а функция $c(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющая (2.13) *2-коциклом* (подробнее см.[**73**]).

Например, функция[40]

$$c : \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \times \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \to \mathbb{C}^*,$$

заданная формулой

$$c(g_1, g_2) = \det(1 + \Phi_1^{-1}\Psi_1\overline{\Psi}_2\Phi_2^{-1})^{-1/2} \tag{2.14}$$

(она появлялась выше в формуле (2.12) является 2-коциклом. Тонкость формулы состоит в том, что

$$\|\Phi_1^{-1}\Psi_1\| < 1, \qquad \|\overline{\Psi}_2\Phi_2^{-1}\| < 1..$$

Это несложно проверить с помощью (2.10). Следовательно,

$$\|\Phi_1^{-1}\Psi_1\overline{\Psi}_2\Phi_2^{-1}\| < 1,$$

поэтому мы можем извлечь квадратный корень в (2.14), разлагая в степенной ряд,

$$(1 + A)^{-1/2} := 1 - \frac{A}{2} + \frac{A^2}{8} - \dots,$$

а затем уже посчитать определитель.[41]

Отмечу, что (2.14) можно записать в следующем виде

$$c(g_1, g_2) = \det\bigl(\Phi_1^{-1}\Phi_3\Phi_2^{-1}\bigr)^{-1/2},$$

где Φ_3 – соответствующий блок матрицы $g_3 := g_1g_2$. В такой форме тождество (2.13) становится очевидным. В самом деле, для g_1, g_2, лежащих вблизи единицы, мы можем записать

$$\det\Bigl(\Phi_1^{-1}\Phi_3\Phi_2^{-1}\Bigr)^{-1/2} = \det\Phi_1^{1/2} \cdot \det\Phi_3^{-1/2} \cdot \det\Phi_2^{1/2}$$

Далее в (2.13) все сомножители сокращаются.

Чтобы «уйти»из окрестности единицы, мы ссылаемся на аналитическое продолжение.

Замечание. В более общем контексте [**18**] естественно написать следующий «аддитивный» коцикл (т.е., группа A из определения теперь является аддитивной группой $\mathbb{C}$)

$$c^*(g_1, g_2) = \mathrm{tr}\,\ln\Bigl(\Phi_1^{-1}\Phi_3\Phi_2^{-1}\Bigr)$$

[40] Ниже $\mathbb{C}^*$ обозначает мультипликативную группу комплексных чисел.

[41] Если же мы сначала посчитаем определитель, то мы не сможем выбрать правильный знак при извлечении корня.

Тогда наш прежний «мулитипликативеый» коцикл c выражается через c^* по формуле

$$c(g_1, g_2) = \exp\Big\{-\frac{1}{2}c^*(g_1, g_2)\Big\}$$

2.9. Пространство Фока. Переход к пределу при $n \to \infty$. Рассмотрим вложение $J_n : \mathbf{F}_n \to \mathbf{F}_{n+1}$, которое каждой функции$f(z_1, \dots, z_n)$ ставит в соответствие ее саму

$$J_n f(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = f(z_1, \dots, z_n)..$$

2.9.7. Предложение. *Вложение $\mathbf{F}_n$ является изометрией.*

Теперь мы можем рассмотреть бесконечную цепочку вложений

$$\dots \to \mathbf{F}_{n-1} \to \mathbf{F}_n \to \mathbf{F}_{n+1} \to \dots,$$

рассмотреть объединение всех пространств $\mathbf{F}_n$ и пополнить его. Полученное таким способом гильбертово пространство $\mathbf{F}_\infty$ и есть пространство Фока.

Наша следующая цель – сделать пространство $\mathbf{F}_\infty$«осязаемым». Мы подойдем к этому вопросу с двух сторон.

Обозначим через $\mathbf{k}$ произвольную последовательность

$$\mathbf{k} := (k_1,\, k_2,\, k_3, \dots),$$

где k_i-неотрицательные целые числа, причем $k_j = 0$ при достаточно больших j. Обозначим через $z^{\mathbf{k}}$ одночлен

$$z^{\mathbf{k}} := \prod_i z_i^{k_i}.$$

Каждый такой одночлен лежит в некотором пространстве $\mathbf{F}_n$, а поэтому и в $\mathbf{F}_\infty$, содержащем все $\mathbf{F}_n$.

В итоге мы получаем, что векторы $z^{\mathbf{k}}$ образуют ортогональный (ненормированный) базис в $\mathbf{F}_\infty$. Соответственно любой вектор $h \in \mathbf{F}_\infty$ разлагается в ряд по этому базису

$$h = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} z^{\mathbf{k}} \tag{2.15}$$

2.9.8. Предложение. *Ряд (2.15) сходится для всех $z \in \ell_2$. Более того, он сходится абсолютно и равномерно на любом шаре конечного радиуса в ℓ_2*

То есть, мы получаем, что пространство $\mathbf{F}_\infty$ может быть проинтерпретировано как пространство голоморфных функций от бесконечного числа переменных.

Чтобы лучше понять это, взглянем на вопрос с другой стороны. Рассмотрим вектор $a = (a_1, a_2, \dots)$ из пространства ℓ_2 (т.е., $\sum |a_j|^2 < \infty$). Обозначим $a^{[N]} := (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^N$. Рассмотрим векторы

$$\varphi_{a^{[N]}} \in \mathbf{F}_N..$$

Легко видеть, что эта последовательность фундаментальна в $\mathbf{F}_\infty$, а поэтому сходится к некоторому вектору $\varphi_a \in \mathbf{F}_\infty$. Теперь для произвольного вектора $h \in \mathbf{F}_\infty$ определим функцию на ℓ_2 по формуле

$$f_h(z) = \langle h, \varphi_z \rangle_{\mathbf{F}_\infty}..$$

Эта функция и есть сумма ряда (2.15).

2.9.9. Наблюдение. *Мы можем рассматривать функции из пространства $\mathbf{F}_\infty$ как «голоморфные» функции на ℓ_2. Воспроизводящее свойство (2.2) остается в силе.*

2.10. Пример. Гауссовы векторы.

2.10.10. Предложение. *Функция*

$$\mathbf{b}_T(z) := \exp\Bigl\{\frac{1}{2} z T z^t\Bigr\}$$

содержится в $\mathbf{F}_\infty$ тогда и только тогда, когда $\|T\| < 1$ и T – оператор Гильберта–Шмидта.

Напомним, что оператор A в гильбертовом пространстве является оператором Гильберта–Шмидта, если он удовлетворяет следующим эквивалентным условиям

— сумма квадратов матричных элементов сходится, $\sum |a_{ij}|^2 < \infty$;

— A компактен и сумма собственных чисел A^*A сходится.

Чтобы проверить последнее предложение, достаточно применить формулу (2.1) и, если нужно, посмотреть учебник функционального анализа.

2.11. Как теперь работать с операторами? Так же. Об интегралах в формулах (2.6), (2.5) проще забыть[42] и понимать их как символы. Ядро оператора вводится теперь как (2.4). Формулы (2.6) и (2.5) понимаются как скалярные произведения.

2.12. «Группа автоморфизмов канонических коммутационных соотношений» SpU. Наша следующая цель – построить аналог представления Вейля.

Теперь мы рассматриваем матрицы размера $(\infty+\infty)\times(\infty+\infty)$, имеющих блочную структуру $g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ которые ограничены и обратимы в обычном смысле (как операторы в $\ell_2 \oplus \ell_2$), удовлетворяют тому же соотношению симплектичности (2.7). Но такая группа слишком велика, представление Вейля на ней не определено, и вообще унитарных представлений у нее нет.

Мы рассмотрим меньшую группу $\mathrm{SpU}(\infty)$ матриц того же вида, удовлетворяющих дополнительному условию

– блок Ψ является оператором Гильберта–Шмидта.

[42] Хотя их можно проинтерпретировать как настоящие интегралы.

2.13. Формула Березина еще раз. На группе SpU мы определим представление Вейля той же формулой, что и выше.

2.13.11. Теорема. *Теорема 2.7.6 остается в силе.*

Для этого нужно вычислить скалярные произведения гауссовых векторов. Это хорошее упражнение по функциональному анализу для третьего курса.

2.14. Зачем нужно гильберт–шмидтовское условие. Нужно посмотреть на формулу, задающую представление Вейля и интерпретацию интегральных операторов в виде (2.5). Пусть $K(z,\overline{u})$ – ядро ограниченного интегрального оператора. Тогда функция $\overline{K(z,\overline{u})}$ при любом фиксированном z должна быть элементом пространства $\mathbf{F}_\infty$. В нашем случае все такие функции имеют вид

$$\exp\big\{-\frac{1}{2}u\Phi^{-1}\Psi u^t+ua^t\big\}$$

Отсюда следует, что $\Phi^{-1}\Psi$ является оператором Гильберта–Шмидта, а дальше из условия (2.10) легко выводится, что Ψ – тоже оператор Гильберта–Шмидта.

2.15. Почему $\mathbf{F}_\infty$ – пространство Фока? Я надеюсь, что все сказанное очень просто, но простота обманчива, потому что под нее все было "подогнано". Отмечу, что с научно-исторической точки зрения это был странный случай, когда сначала появились бесконечномерные конструкции, а потом стало ясно, что они содержательны и в конечномерном случае тоже.[43,44]

Пространство Фока изначально определялось им самим как прямая сумма всех симметрических степеней $\mathsf{S}^m(H)$ некоторого гильбертова пространства H.

$$\mathbf{F}(H):=\bigoplus_{m\geqslant 0}\mathsf{S}^m(H)$$

В обсуждаемой нами модели пространство S^m просто состоит из однородных многочленов степени m. Т.е. наше пространство $\mathbf{F}_\infty$ действительно совпадает с пространством Фока.

Интересно, что обсуждаемая голоморфная модель при всей ее простоте была обнаружена лишь через 30 лет после статей В. А. Фока.

[43]Приведенный выше подход не проясняет происхождение самой формулы (2.11), по этому поводу проще всего посмотреть саму книжку. Но уже зная формулу Березина, можно посмотреть на дело по-другому и (как когда-то давно предложили Г. И. Ольшанский и Р. Хау) рассмотреть полугруппу произвольных операторов с гауссовыми ядрами, в которой собственно симплектическая группа составляет небольшую часть, см. [**96**], [**107**].

[44]Еще одно любопытное обстоятельство, видимое издалека. Параболическое индуцирование не «работает» для бесконечномерных классических групп. Обычное унитарное индуцированние в духе Макки (см. [**73**]) полезно, но его возможности ограничены.

3. «Группа автоморфизмов канонических антикоммутационных соотношений»

Этот раздел представляет из себя упражнение по линейной алгебре, постепенно переходящей в функциональный анализ. Теорема 3.10.16 (см. [**96**]), однако, не очевидна (или я не умею ее делать очевидной). В последнем разделе мы предполагаем некоторое знакомство с суперматематикой.

3.1. Грассманова алгебра. Мы рассматриваем алгебру Λ_n с образующими ξ_1, ξ_2, …, ξ_n и соотношениями

$$\xi_i\xi_j = -\xi_j\xi_i.$$

В частности, $\xi_j^2 = 0$. Легко видеть, что $\dim\Lambda_n = 2^n$, а одночлены

$$\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k}, \qquad \text{где } i_1 < i_2 < \dots < i_k.. \tag{3.1}$$

образуют базис в Λ_n.

Мы введем скалярное произведение в Λ_n положив, что эти одночлены составляют ортонормированный базис в Λ_n.

3.2. Интеграл Березина. Интеграл Березина

$$\int f(\xi)\,d\xi = \int f(\xi_1,\dots,\xi_n)\,d\xi_n\,d\xi_{n-1}\dots d\xi_1$$

определяется как линейный функционал на Λ_n, заданный как

$$\int \xi_1\xi_2\dots\xi_n\,d\xi_1\,d\xi_2\,\dots\,d\xi_n = 1..$$

Интеграл от остальных одночленов (3.1) равен 0.

3.3. Интеграл Березина по гауссовой мере. Введем дополнительный набор антикоммутирующих переменных $\overline{\xi}_1$, …, $\overline{\xi}_n$,

$$\overline{\xi}_i\overline{\xi}_j = -\overline{\xi}_j\overline{\xi}_i, \qquad \overline{\xi}_i\xi_j = -\xi_j\overline{\xi}_i..$$

Мы обозначим

$$d\xi\,d\overline{\xi} := d\xi_1\,d\overline{\xi}_1\,\dots\,d\xi_n\,d\overline{\xi}_n..$$

Нам интересны интегралы вида

$$\int f(\overline{\xi})\,g(\xi)\,e^{-\sum\xi_j\overline{\xi}_j}\,d\xi\,d\overline{\xi}..$$

Легко видеть, что

$$\int \left(\prod_i \overline{\xi}_{k_i}\xi_{k_i}\right)\,e^{-\sum\xi_j\overline{\xi}_j}\,d\xi\,d\overline{\xi} = 1..$$

Интеграл от остальных мономов равен 0. Например,

$$\int \xi_{29}\overline{\xi}_{29}\xi_{31}\overline{\xi}_{31}\,d\xi\,d\overline{\xi} = 1, \qquad \int \xi_{29}\overline{\xi}_{29}\xi_{31}\,d\xi\,d\overline{\xi} = 0$$

3.4. Как писать операторы? Пусть η, $\overline{\eta}$ – еще один набор антикоммутирующих переменных.

3.4.12. Наблюдение. *Любой оператор A в Λ_n может быть записан в виде*

$$Af(\xi) = \int K(\xi, \overline{\eta})\, f(\eta)\, e^{-\eta\overline{\eta}^t} d\eta\, d\overline{\eta}..$$

Просто коэффициенты многочлена $K(\xi, \eta)$ являются матричными элементами оператора A в стандартном базисе.

3.5. Ортогональная группа. Мы обозначим через $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$ группу комплексных $(n+n)\times(n+n)$-матриц $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, удовлетворяющих условию

$$g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Через $\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$ мы обозначаем подгруппу в группе $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$, состоящую из матриц с определителем 1. Мы также рассматриваем группу $\mathrm{O}(2n, \mathbb{R})$, которую мы реализуем как группу матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющих тому же условию (3.2).

3.6. Спинорное представление группы $\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$. Для ортогональной матрицы

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$$

мы определим оператор в Λ_n по формуле

$$\mathrm{spin}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} f(\xi) =$$
$$= \int \exp\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi & \overline{\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} BD^{-1} & -D^{t-1} \\ D^{-1} & D^{-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \overline{\eta} \end{pmatrix}\right\} f(\eta)\, e^{-\eta\overline{\eta}^t}\, d\eta\, d\overline{\eta}^t..$$

Эта формула определена лишь на открытом плотном множестве $\det D \neq 0$ в $\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$.[45]

3.6.13. Теорема. *Операторы* $\mathrm{spin}(g)$ *образуют проективное представление группы* $\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$. *Точнее*

$$\mathrm{spin}(g_1)\,\mathrm{spin}(g_2) = \det(1 + D_1^{-1}C_1B_2D_2^{-1})^{1/2}\mathrm{spin}(g_1g_2)..$$

3.6.14. Теорема. *Операторы*

$$\widetilde{\mathrm{spin}}\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix} := \det(\Phi)^{1/2} \cdot \mathrm{spin}\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$$

образуют унитарное проективное представление группы $\mathrm{SO}(2n, \mathbb{R})$.

---

[45] На другой компоненте группы $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$ блок D всегда не обратим. В симплектическом случае (см. выше), блок Φ обратим всегда.

3.7. Фермионное пространство Фока. Две топологии. Рассмотрим бесконечный набор грассмановых переменных $\xi_1, \xi_2, \dots$. Рассмотрим линейное пространство, в котором одночлены

$$\xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_k}, \qquad \text{где } i_1 < i_2 < \dots < i_k \tag{3.3}$$

образуют базис.

Определим гильбертово пространство Λ_∞ как пространство, в котором одночлены (3.3) образуют ортонормированный базис. Это пространство называется *фермионным пространством Фока.*

Через Λ_∞^k мы обозначим подпространство в Λ_∞, порожденное базисными векторами (3.3) степени k. Любой вектор f из Λ_∞ раскладывается в сумму

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\xi), \qquad \text{где } f_k \in \Lambda_\infty^k.. \tag{3.4}$$

Мы обозначим через $\mathfrak{L}_\infty$ пространство, состоящее из всех векторов $f \in \Lambda_\infty$, удовлетворяющих условию

Для любого C существует постоянная A, такая что$\|f_k\| \leqslant A{\cdot}e^{-Ck}$..

Это пространство снабжено семейством полунорм

$$|\!|\!| f |\!|\!|_C := \sup_k e^{Ck}\|f_k\|..$$

Важный (кажется, не совсем очевидный) пример функции $f \in \mathfrak{L}_\infty$, это

$$\exp\Bigl\{\sum a_j \xi_{2j}\xi_{2j+1}\Bigr\}, \qquad \text{где } \sum |a_j|^2 < \infty..$$

3.8. Группа автоморфизмов канонических антикоммутационных соотношений. Теперь мы хотим построить бесконечномерный аналог спинорного представления.

Сначала рассмотрим полную бесконечномерную вещественную ортогональную группу. Она состоит из блочных матриц g размера $(\infty + \infty) \times (\infty + \infty)$, которые

— имеют структуру $g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$;

— удовлетворяют условию ортогональности (3.2);

— ограничены и обратимы в $\ell_2 \oplus \ell_2$;

Спинорное представление на этой группе не определено.

Снова (как и в бозонном случае) мы рассмотрим меньшую подгруппу, – обозначим ее через $\mathrm{OU}(\infty)$ – состоящую из матриц, для которых Ψ является оператором Гильберта–Шмидта.

3.9. Комплексификация группы $\mathrm{OU}(\infty)$. Кроме того, введем бесконечномерный аналог комплексной ортогональной группы.

Обозначим через $\mathrm{OGL}(\infty)$ группу матриц

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

которые ортогональны в смысле (3.2), ограниченны и обратимы в $\ell_2 \oplus \ell_2$ и удовлетворяют условию:

— B, C – операторы Гильберта–Шмидта.

3.10. Спинорное представление.

3.10.15. Теорема. *Операторы*

$$\widetilde{\mathrm{spin}}(g) := \det(\Phi\Phi^*)^{1/4}\mathrm{spin}(g)$$

задают унитарное проективное представление группы $\mathrm{OU}(\infty)$ *в гильбертовом фермионном пространстве Фока* Λ_∞.

3.10.16. Теорема. *Операторы* $\mathrm{spin}(g)$ *задают проективное представление группы* $\mathrm{OGL}(\infty)$ *в фермионном полинормированном пространстве Фока* $\mathfrak{L}_\infty$

Замечание. Строго говоря, в обоих случаях наши формулы дают возможность задать представление лишь на связной компоненте группы. Продолжение же на всю группу стоит небольших усилий, но многих слов.

4. Некоторые теоретико-представленческие приложения

Здесь мы обсуждаем некоторые приложения представления Вейля и бесконечномерного спринорного представления к теории представлений.

Впрочем, называть ли это словом «теория представлений» или как-нибудь еще – вопрос вкусовой. Например, конструкции пп. 4.1 и 4.3 вполне популярны в матфизике, конструкция 4.4 отчасти относится к тэта-функциям и автоморфным формам, 4.5 – очевидный суперанализ, а 4.6 – способ построения конформных теорий поля.

В первых трех пунктах мы также покажем важность Гильберт–Шмидтовского условия, за которое «шла борьба» в 1959–65гг

4.1. Пример представления группы диффеоморфизмов окружности со старшим весом. Обозначим через Diff группу диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию. Наша цель – вложить Diff в группу SpU.

Рассмотрим гильбертово пространство H, состоящее из функций f на окружности с нулевым средним,

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = 0$$

со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln\Bigl|\sin\Bigl(\frac{\varphi-\psi}{2}\Bigr)\Bigr|\, f(\varphi)\, g(\psi)\, d\varphi\, d\psi..$$

Может, приятнее записать его в форме

$$\langle e^{in\varphi}, e^{im\varphi}\rangle = \frac{1}{|n|}\cdot\delta_{m,n}..$$

Далее мы разбиваем наше гильбертово пространство в прямую сумму двух, одно, H_+, состоит функций $\sum_{k>0} c_k e^{ik\varphi}$, голоморфно продолжимых внутрь единичного круга, а другое, H_- – из функций $\sum_{k>0} c_k e^{ik\varphi}$, голоморфно продолжимых во внешность единичного круга.

Наконец, мы введем билинейную кососимметрическую (симплектическую) форму на H как

$$\{f, g\} = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\left[\int_0^{\varphi} f(\psi)\,d\psi\right]\,d\varphi..$$

Таким образом, мы получили структуру, описанную выше в п.2.12, а именно гильбертово пространство снабженное кососимметричной билинейной формой и разложением в прямую сумму двух подпространств. Соответственно, мы имеем и группу $\mathrm{SpU}(H)$ этого гильбертова пространства H.

Пусть $q \in \mathrm{Diff}$ – диффеоморфизм окружности. Рассмотрим оператор $T(q)$ в пространстве H, заданной формулой

$$T(q)\,f(\varphi) = f\left(q(\varphi)\right)\,q'(\varphi)..$$

4.1.17. Теорема. $T(q) \in \mathrm{SpU}(H)$.

Здесь место, в самом деле требующее проверки, – «условие Гильберта–Шмидта».

Проще всего рассмотреть преобразование Гильберта

$$If\varphi) = \int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\Big(\frac{\varphi-\psi}{2}\Big)\,f(\varphi)\,d\varphi,$$

которое имеет собственные значения $\pm i$ на подпространствах $H_\pm$. Далее надо убедиться, что коммутатор $[T(q), I]$ является интегральным оператором с бесконечномерным гладким ядром.

Теперь мы можем ограничить представление Вейля группы $\mathrm{SpU}(H)$ на подгруппу Diff и получить унитарное проективное представление группы Diff.

Это и есть конструкция многих авторов осени 1980 года, о которой я писал в п.1.13. На уровне алгебры Ли – это конструкция Вирасоро 1970 (точнее, эта констукция была понята уже как «реакция» на статью Вирасоро).

4.2. Пример. Использование кватернионной структуры. Сначала мы перескажем другими словами реализацию вещественной ортогональной группы $\mathrm{O}(2n,\mathbb{R})$ в виде комплексных матриц $\begin{pmatrix}\Phi & \Psi\\ -\overline{\Psi} & \overline{\Phi}\end{pmatrix}$.

Мы рассмотрим стандартное комплексное евклидово пространство $\mathbb{C}^n$ со стандартным базисом $e_1, \dots, e_n$, и группу $\mathrm{O}(2n, \mathbb{R})$ вещественно-линейных ортогональных операторов в нем.

Далее рассмотрим вещественный базис $e_1, \dots, e_n$, $f_1 := ie_1, \dots, f_n := ie_n$ в $\mathbb{C}^n$ и перейдем к новому базису

$$e_1 + if_1, \dots, e_n + if_n, e_1 - if_1, \dots, e_n - if_n.$$

Тогда мы и получим матрицы вида $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\overline{\Psi} & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$.

Теперь мы рассмотрим пространство L^2 функций на окружности и подпространство L^2- в нем, состоящее из из нечетных функций f,

$$f(\varphi + \pi) = -f(\varphi)..$$

Далее, фиксируем вещественное s и рассмотрим интегральный оператор в L_2^-, заданный формулой

$$J_s f(\varphi) := \frac{1}{\Gamma(1+is)} \int_0^{2\pi} \Big|\sin(\varphi - \psi)\Big|^{-1-is} \operatorname{sgn}\sin(\varphi - \psi) \overline{f(\psi)}\, d\psi$$

4.2.18. Теорема. *a) Оператор J_s антилинеен, т.е.*

$$J_s i f = -i J_s f$$

b) Оператор J_s – унитарный,

c) $J_s^2 = -1$.

Неочевидны высказывания b), c); чтобы их проверить нужно вычислить $J_s f$ для $f(\varphi) = e^{(2n+1)i\varphi}$.

Сформулированная теорема означает, что L^2_- превращено нами в кватернионное гильбертово пространство, умножения на кватернионы суть (вещественно-линейные) операторы

$$\alpha + \beta i + \gamma J_s + \delta i J_s, \qquad \text{где } \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}..$$

Мы скажем, что оператор является кватернионно унитарным, если он перестановочен с умножениями на кватернионы.

Теперь мы определим группу USp как группу всех комплексно-линейных унитарных операторов A, представимых в виде $A = B(1+T)$, где B – кватернионно унитарный оператор, а B – оператор Гильберта–Шмидта[46].

Теперь рассмотрим группу $\mathrm{Diff}^{(2)}$, состоящую из «четных» диффеоморфизмов окружности q, т.е., диффеоморфизмов, удовлетворяющих условию[47]

$$q(\varphi + \pi) = q(\varphi) + \pi..$$

[46]Автор использует обозначения SpU, OU, USp для групп, чтобы сократить обозначения Ольшанского $\big[G(\infty), K(\infty)\big] = \big[\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \mathrm{U}(\infty)\big]$, $\big[\mathrm{O}(2\infty, \mathrm{U}(\infty)\big]$, $\big[\mathrm{U}(2\infty), \mathrm{Sp}(\infty)\big]$. Во всех случаях рассматриваются подгруппы в $G(\infty)$, состоящие из операторов, отличающихся на оператор Гильберта–Шмидта от оператора из $K(\infty)$.

[47]Это двулистное накрытие группы Diff.

Определим ее действие в L^2_- по формуле

$$T_s(q)f(\varphi) = f\big(q(\varphi)\big)\, q'(\varphi)^{(1+is)/2}$$

4.2.19. Теорема. $T_s(q) \in \mathrm{USp}(H)$.

Для доказательства достаточно вычислить ядро коммутатора в $[T_s(q), J_s]$ и убедиться, что оно лежит в L^2 На произведении окружности на себя.

Теперь мы фиксируем произвольный кватернион $R := \alpha + \beta i + \gamma j + \delta_k$, такой, что $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$, тогда $R^2 = -1$. Далее рассматриваем L^2_- как вещественное гильбертово пространство и вводим новое умножение на мнимую единицу как оператор R. В итоге мы получаем новое комплексное гильбертово пространство и группа $\mathrm{Diff}^{(2)}$ содержится в группе OU этого пространства.

Теперь мы можем ограничить спинорное представление OU на $\mathrm{Diff}^{(2)}$ и получить в итоге проективное унитарное представление группы Diff.

4.3. Пример: представление группы петель со старшим весом. Теперь рассмотрим группу петель $C^\infty(S^1, \mathrm{O}(n,\mathbb{C}))$, состоящую из гладких функций на окружности со значениями в группе $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$. Нам удобнее ее реализовать как группу функций $\gamma : S^1 \to \mathrm{O}(n,\mathbb{C})$, удовлетворяющих

$$\gamma(\varphi + \pi) = \gamma(\varphi).$$

Далее рассмотрим, состоящее из функций $f : S^1 \to \mathbb{C}^{2n}$, удовлетворяющих условию

$$F(\varphi + \pi) = F(\varphi),$$

здесь $F := (f_1, \dots, f_{2n})$ – вектор, составленный из функций. Введем в этом пространстве обычное L^2-скалярное произведение,

$$\langle F, G\rangle = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{2\pi} f_j(\varphi)\, \overline{g_j(\varphi)}\, d\varphi.$$

Полученное гильбертово пространство мы обозначим через H. Далее, введем в H билинейную форму

$$\{F, G\} = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{2\pi} f_j(\varphi)\, g_j(\varphi)\, d\varphi.$$

Наконец, рассмотрим подпространство H_+, состоящее из функций, допускающих голоморфное продолжение внутрь круга $|z| < 1$ и его ортогональное дополнение H_-. Теперь у нас есть все структуры, описанные в параграфе 3.

Теорема. *Группа* $C^\infty(S^1), \mathrm{O}(n,\mathbb{C}))$ *содержится в группе* OGL *пространства* H.

Теперь мы можем ограничить спинорное представление на группу петель.

В списке литературы см. [**38**], [**96**].

4.4. Объект конечномерного гармонического анализа: двойственные пары Хау.

Наблюдение. *Существует естественное вложение*

$$\mathrm{Sp}(2k,\mathbb{R})\times \mathrm{O}(p,q)\to \mathrm{Sp}(2k(p+q),\mathbb{R})$$

Напомним, что $\mathrm{Sp}(2k,\mathbb{R})$ – это группа линейных преобразований протстранства $\mathbb{R}^{2k}$, сохраняющих невырожденную кососимметричную билинейную форму. Далее, через $\mathbb{R}^{p,q}$ мы обозначим псевдоевклидово пространство сигнатуры (p,q), а через $\mathrm{O}(p,q)$ – группу операторов, сохраняющих эту форму.

Тензорное произведение $\mathbb{R}^{2k}\otimes\mathbb{R}^{p,q}$ снабжено кососимметрической билинейной формой, и искомое вложение построено.

Следующую теорему «двойственности Хау» мы формулируем чуть-чуть неаккуратно.

Теорема. *Ограничим представление Вейля* $\mathrm{Sp}(2k(p+q),\mathbb{R})$ *на подгруппу* $\mathrm{Sp}(2k,\mathbb{R})\times\mathrm{O}(p,q)$. *Спектр полученного ограничения является однократным, и, более того, если представления* $\rho_1\otimes\pi_1$ *и* $\rho_2\otimes\pi_2$ *входят в спектр, то либо они совпадают, либо* $\rho_1\neq\rho_2$, $\pi_1\neq\pi_2$.

Оказывается, что такого рода задачи ограничения (их довольно много) очень любопытны. В частности, спектры содержат представления $\mathrm{Sp}(2k,\mathbb{R})$ и $\mathrm{O}(p,q)$, которые «увидеть» каким-либо иным способом очень трудно.

В списке литературы см. [**59**], [**72**], [**5**].

4.5. Супер-гибрид спинорного представления и представления Вейля. На уровне супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(2p|2q)$ он был в посмертных записках Березина в [**20**], на уровне группы $\mathrm{OSp}(2p|2q)$ он был построен в [**98**]. Опишем примерную конструкцию. Теперь мы рассматриваем «фунции», зависящие от бозонных переменных $z_1,\dots,z_p$, фермионных переменных $\xi_1,\dots,\xi_q$ и от элементов суперкоммутативной алгебры $\mathcal{A}$. Оказывается, что представления супергруппы $\mathrm{OSp}(2p|2q)$ записываются явными интегральными операторами вида

$$\mathfrak{B}f(z,\xi)=\int\!\!\int \exp\left\{\begin{pmatrix} z & \overline{u} & \xi & \overline{\eta}\end{pmatrix} S \begin{pmatrix} z^t\\ \overline{u}^t\\ \xi^t\\ \overline{\eta}^t\end{pmatrix}\right\} f(u,\eta)\, e^{-z\overline{z}-\xi\overline{\xi}}\, du\, d\overline{u}\, d\eta\, d\overline{\eta},$$

где S – матрица, составленная из элементов алгебры $\mathcal{A}$, она может быть явно выписана по элементу супергруппы $\mathrm{OSp}(2p|2q)$.

4.6. Дальнейшая глобализация. Во всех трех случаях – представление Вейля, спинорное представление и суперспиноры – естественно рассмотреть полугруппу всех ограниченных гауссовых операторов, она существенно больше, чем начальные группы (например, в случае симплектической группы у полугруппы будет вдвое большая размерность). Соответствующие алгебраические структуры опмсаны в [**96**], [**98**]. Через них, например, «пропускаются» конформные теории поля.

Список литературы[48]

[48]Список идет в соответствии с латинским алфавитом.

Найти сейчас старые статьи и книги (особенно русские) не совсем просто, поэтому я стараюсь перечислять переиздания. «Автоматические» английские переводы статей из Успехов, Сборника, Известий, Фунционального анализа, Докладов, Заметок, Семинаров ЛОМИ и Писем ЖЭТФ с середины 60х годов ниже не указываются.

Некоторые работы (по тем или иным причинам) процитированы ниже в подстрочных сносках.

Литература

[1] Арнольд В.И. *Выживет ли математика?*, 1994; перепечатано в *Владимир Игоревич Арнольд. Избранное,* Фазис, 1997;

[2] Арнольд В.И. *Антинаучная революция и математика.* Вестник Российской Академии Наук, том 69, номер 6, с. 553-558, 1999 г. Доступно по `http://www.mccme.ru/edu/index.php?ikey=articles`

[3] Arnold V.I. *Sur la corbure de Riemann des groupes de difféomorphismes,* C.R.Acad.Sci, 260(22), 1965, 5668-5671; перепечатано в *Владимир Игоревич Арнольд. Избранное,* Фазис, 1997.

[4] Arnold, V. *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications l'hydrodynamique des fluides parfaits.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 16 1966 fasc. 1, 319–361.

[5] Adams J. D., *Discrete spectrum of reductive dual pair* $(O(p,q)$, $\mathrm{Sp}\,(2m))$, Inv. Math., **74**, 449–475 (1983).

[6] Araki H. *Factorizable representations of current algebra.* Publ. RIMS, A5 (1970), 361–422.

[7] Bargmann, V. *Irreducible unitary representations of the Lorentz group.* Ann. of Math. (2) 48, (1947). 568–640

[8] Bargmann, V.*On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform.* Comm. Pure Appl. Math. 14 1961 187–214.

[9] Березин Ф. А. *Операторы Лапласа на полупростых группах Ли.* Доклады АН СССР, 107, 9-12 (1956).

[10] Березин Ф. А. *Представления комплексных полупростых групп в банаховых пространствах.* Доклады АН СССР, 110, 897-900 (1956).

[11] Березин Ф. А. *Операторы Лапласа на полупростых группах Ли.* Труды Моск. Мат. Общ., 6, 371-463 (1957). Английский перевод в Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc. 21, 239-339 (1962).

[12] Березин Ф. А.*Операторы Лапласа на полупростых группах Ли и некоторых симметрических пространствах.* Английский перевод в Am. Math. Soc., Transl., II. Ser. 16, 364-369 (1960).

[13] Березин Ф. А. *Письмо в редакцию.* Труды Моск. матем. общества 12, 453-466 (1963). Английский перевод в Transactions of Moscow Math. Society, v.12

[14] Березин Ф. А. *Канонические преобразования в представлениях вторичного квантования.* Докл. АН СССР, 150, 959-962 (1963).

[15] Березин Ф. А. *Об операторах в представлении вторичного квантования,* ДАН СССР, 154, 5, 1063–1065.

[16] Березин Ф. А. *Метод вторичного квантования,* Москва, Наука, 1965. Англ.издание: Academic Press.,1966; Второе дополненное русское издание, (ред. М.К.Поливанов)[49] Москва, Наука, 1986.

[49]Включены статьи Ф.А.Березина по символам операторов и общим концепциям квантования *Невинеровские континуальные интегралы* (ТМФ, 1971), *Виковские и антивиковские символы операторов* (Мат. Сборник, 1971), *Контравариантные и ковариантные символы операторов* (Известия

[17] Березин Ф. А. *Автоморфизмы грассмановой алгебры,* Мат. заметки, 1967, 1, 269–276.

[18] Березин Ф. А. *Квантование в комплексных симметрических областях,* Изв. АН СССР, сер. матем., 39, 363-402 (1975)

[19] Березин Ф. А. *Связь между ко- и контравариантными символами на классических комплексных симметрических пространствах.* Докл. АН СССР, 241, 15-17 (1978).

[20] Березин Ф. А. *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными,* под. ред. А. А. Кириллова и В. П. Паламодова. Изд-во МГУ, 1983; Дополненное английское издание: *Introduction to superanalysis*, edited and with foreword A. A. Kirillov, with an appendix of V. I. Ogievetsky, Translated by J. Niderle and R. Kotecky, translation edited by D. Leites, D. Reidel Publishing Co., Dodericht, 1987.

[21] Березин Ф. А., Гельфанд И. М. *Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях.* Труды Моск. мат. общ., 5, 311-351 (1956); Английский перевод в Amer. Math. Soc. Transl., 21(1962), 193–238. Перепечатано в Gelfand I.M. *Collected papers*, v.2, Springer, 1988.

[22] Березин Ф. А., Кац Г. И. *Группы Ли с коммутирующими и антикоммутирующими переменными.* Мат. Сборник, 82(124), 343-359 (1970).

[23] Березин Ф. А., Карпелевич Ф. И., *Зональные сферические функции и операторы Лапласа на некоторых симметрических пространствах.* Докл. АН СССР, 118 (1958), 9–12

[24] Березин Ф. А., Лейтес Д. А. *Супермногообразия,* ДАН СССР, 224, N3 (1975), 505–508

[25] Березин Ф.А., Минлос Р.А., Фаддеев Л.Д., *Некоторые математические вопросы квантовой механики систем с большим числом степеней свободы.* Труды 4-го Всесоюзного матем. съезда, 1961, Т.2, Москва 1964, 532–541

[26] Bergman S. *Sur les functions orthogonales de plusiers variables complexes avec les applications a la theorie des fonctions analytiques.* Paris, Gauthier-Villars, 1947.

[27] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. *Введение в теорию квантованных полей.* Москва, Гостехиздат, 1957. Английский перевод: Interscience, 1959.

[28] Borodin, A.; Olshanski, G. *Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes.* Ann. of Math. (2) 161 (2005), no. 3, 1319–1422. Доступно по: `http://arxiv.org/abs/math/0109194`.

[29] Bott, R. *On the characteristic classes of groups of diffeomorphisms,* Enseign. Math. (2) 23 (1977), 209–220. Перепечатано в Raoul Bott, *Collected papers,* v.3, Birkhauser, 1995.

[30] Cartan E. *Les groupes de transformation continués, infinis, simples.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 26(1909), 93–161. Русский перевод – ???

[31] Cartan E., *Leçons sur la théorie des spineurs,* Hermann, Paris, 1938. Русский перевод: Иностранная литература, 1947

[32] Cherednik I. *Double affine Hecke algebras.* Cambridge University Press, 2005.

АН СССР, 1972), *Выпуклые функции от операторов* (Мат. Сборник, 1972), *Общая концепция квантования,* (Comm. Math. Phys., 1975), *Модели типа Гросса–Невё как квантование классической механики с нелинейным фазовым пространством,* (Comm. Math. Phys., 1978).

[33] Chevalley, C. C. *The algebraic theory of spinors.* Columbia University Press, New York, 1954. Перепечатано в Claude Chevaley, *Collected works*, v.2.

[34] Drinfeld V. *Quantum groups.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 798–820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[35] Enright, Th., Howe, R., Wallach, N. *A classification of unitary highest weight modules. Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982)*, 97–143, 40, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[36] Fock V. A. *Konfigurationsraum und Zweite Quantelung.* Z. Physics, 75 (1932), 622-47. Русский перевод в В. А. Фок *Работы по квантовой теории поля,* Изд-во Ленинградского Университета, 1957.

[37] Fock V. A. *Zur Quantenelectrodznamik.* Soviet Phys., 6 (1934), 425–. Русский перевод в В. А. Фок *Работы по квантовой теории поля.* Изд-во Ленинградского Университета, 1957.

[38] Frenkel, I. B. *Two constructions of affine Lie algebra representations and boson-fermion correspondence in quantum field theory.* J. Funct. Anal. 44 (1981), no. 3, 259–327.

[39] Friedrichs, K. O. *Mathematical aspects of the quantum theory of fields.* Interscience Publishers, Inc., New York, 1953.

[40] Фукс Д. Б. *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли.* Наука, Москва, 1984. 272 pp. Английский перевод: Consultants Bureau, New York, 1986

[41] Гельфанд И. М. *Сферические функции на симметрических римановых пространствах,* Докл. АН СССР, 70 (1950), 5–8. Перевод в Transl. Amer. Math. Soc., 37 (1964), 39–43. Перепечатано в I. M. Gelfand *Selected papers.* v.2.

[42] Гельфанд И. М., Фукс Д. Б. *Когомологии алг5ебры Ли векторных полей на окружности.* Функц. анализ и прилож., 2 1968 no. 4, 92–93. Перепечатано в Gelfand I.M. *Collected papers*, v.3, Springer, 1988.

[43] Гельфанд И. М., Каждан Д. А. *Некоторые проблемы дифференциальной геометрии и вычисление когомологий алгебры Ли векторных полей,* ДАН СССР, 200 (1971), 269–272

[44] Гельфанд И. М., Наймарк М. А. *Унитарные предствления группы Лоренца.* J. Phys. Acad. Sci USSR, 10 (1946), 93–94; Перепечатано в Gelfand I.M. *Collected papers*, v.2, Springer, 1988.

[45] Гельфанд И. М., Наймарк М. И., *Унитарные представления классических групп.* Труды Мат. Инст. АН СССР, 36, Москва-Ленинград, 1950. Есть немецкий перевод, Akademie-Verlag, Berlin, 1957. Английский перевод предисловия и §9, §18 есть в Gelfand I.M. *Collected papers*, v.2, Springer, 1988.

[46] Ю. А. Гольфанд, Е. П. Лихтман, *Расширение алгебры генераторов группы Пуанкаре и нарушение P- инвариантности.* Письма в ЖЭТФ 13, 452 (1971); Перепечатано в Shifman M.(ed.) *The many faces of the superworld. Yuri Golfand memorial volume.* World Scientific.

[47] Гончарова Л. В. *Когомологии формальных векторных полей прямой,* Функц. анализ и прил., 7 (1973), 2, 6–14

[48] Граев М. И., *Унитарные представления вешественных полупростых групп.* Труды Моск. Мат. Общ., т.7., 1958, 335–389. Английский перевод в Transl. Amer. Math. Soc., 66 (1968), 1–62.

[49] Guichardet, A.; Wigner, D. *Sur la cohomologie réelle des groupes de Lie simples réels.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 11 (1978), no. 2, 277–292.

[50] Гуткин Е.А. *Переполненные системы подпространств и символы операторов.* Функц. Анал. и прил., 9 (1975), no. 3, 89–90.

[51] Gutkin E. *Coefficients of Clebsch-Gordan for holomorphic discrete series.* Lett.Math.Phys. 3(1979), 185–192

[52] Халатников И. М. *Представление функций Грина в квантовой электродинамике континуальным интегралом.* ЖЭТФ, 28 (1954), 635–638

[53] Harish-Chandra, *Representations of semi-simple Lie groups, II,* Transactions of Amer. Math., Soc, 76 (1953), 26-65 Перепечатано в Harish-Chandra, *Collected papers,* v.1.

[54] Harish-Chandra, *Representations of semisimple Lie groups IV,* Amer. J. Math., 743–777 (1955). Перепечатано в Harish-Chandra *Collected papers,* v.2.

[55] Harish-Chandra, *The characters of semisimple Lie groups,* Trans. Amer.Math. Soc., 83 (1956), 98–163. Перепечатано в Harish-Chandra *Collected papers*, v.2.

[56] Helmke U., Rosenthal J. *Eigenvalue inequalities and Schubert calculus,* Math. Nachr., 171 (1995), 207–225.

[57] Hoogenboom, B., *Spherical functions and invariant differential operators on complex Grassmann manifolds.* Ark. Math., 20(1982), 69–58.

[58] Horn A., *Eigenvalues of sums of Hermitian matrices.* Pacif. J. Math., 12 (1962), 225–241

[59] Howe, R. *Transcending classical invariant theory.* J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), no. 3, 535–552.

[60] Howe, R. *The oscillator semigroup.* The mathematical heritage of Hermann Weyl (Durham, NC, 1987), 61–132, Proc. Sympos. Pure Math., 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[61] Исмагилов Р.С. *Элементарные сферические функции на группе* SL(2, P) *над полем, не являющимся локально компактным, по отношению к группе матриц с целыми элементами.* Известия АН СССР, матем., 31 1967 361–390

[62] Исмагилов Р.С. *Унитарные представления группы* $C^\infty(SU_2)$. Матем. Сборник, 100(142) (1976), no. 1, 117–131

[63] Исмагилов Р.С. *Представления группы диффеоморфизмов окружности.* Неопубликовано, 1980

[64] Ismagilov, R. S. *Representations of infinite-dimensional groups.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[65] Кац В. Г. *Простые градуированные алгебры Ли конечного роста.* Известия АН СССР, 32 1968 1323–1367.

[66] Kac, V. G. *Infinite-dimensional Lie algebras. An introduction.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1983. Третье издание, 1990; Русский перевод: Москва, Мир, 1993.

[67] Каневский З. М. *Загадки и трагедии Арктики.* Знание, 1991.[50]

[68] Кантор И. Л. *Бесконечномерные простые градуированные алгебры Ли.* Доклады АН СССР, 179 1968 534–537

[50]В книге, в частности, обсуждается хрестоматийная постгоночная дискуссия Р. Пири–Ф. Кук с точки зрения профессионала-полярника. Дискуссия также обсуждалась во многих работах, в частности, Арикайнен А. И. *Центр притяжения – Северный полюс.* Москва, Наука, 1988. и Brycе R. M. *Cook and Peary. The polar controversary, Resolved,* 1996, которые сами являются элементами дискуссии. Приоритетные вопросы 1909–1911 года (см. также работу [**86**]) дают дополнительную точку зрения на многие более поздние проблемы науки.

[69] Кантор И. Л. *Градуированные алгебры Ли.* Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 15 (1970), 227–266

[70] Karasev, M., Kozlov, M., *Quantum and semiclassical representations over Lagrangian submanifolds in* $\mathrm{su}(2)^*$, $\mathrm{so}(4)^*$, *and* $\mathrm{su}(1,1)^*$ J.Math.Phys., 34, 11 (1993) 4986–5006

[71] Карпель Е.Г. *Последний путь.* МЦНМО. Есть английский перевод в **[120]**

[72] Kashiwara, M.; Vergne, M. *On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials.* Invent. Math. 44 (1978), no. 1, 1–47

[73] Кириллов А.А. *Элементы теории представлений,* Москва, Наука, 1972, второе издание, 1978[51]. Есть английский (Springer, 1976) и французский (Mir, 1974) переводы.

[74] Klauder I. M., Sudarashan E. C. G. *Fundamentals of quantum optics.* W. A. Benjamin, 1968.

[75] Klyachko A. A. *Stable bundles, representation theory and hermitian operators*, Preprint, Mittag-Leffler Institute, 1996

[76] Klyachko A. A. *Vector bundles, linear representations, and spectral problems.* Proceedings of the International Congress of Mathematicans, vol.2 (Beijing), 599-613. Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

[77] Кострикин А. И., Шафаревич И. Р. *Градуированные алгебры конечной характеристики.* Изв. АН СССР, 33 (1969) 251–322; перепечатано в Igor R. Shafarevich, *Collected mathematical papers,* Springer, 1989; Также в Шафаревич И.Р. *Собрание сочинений,* т. 3, Москва, 1996.

[78] Крейн М.Г. *Эрмитовы положительно определенные ядра на однородных пространствах, I, II.* Укр. мат. журнал, 1 (1949), 4, 64–98; 2(1950), 1, 10-59; Английский перевод в Transl. Amer. Math. Soc., 34 (1963), 69–108, 109–164.

[79] Лейтес Д. А. *Спектры градуированно-коммутативных колец.* Успехи мат. наук, 29, 3 (1974), 209–210

[80] Лидский В. Б. *О характеристических числах сумм и произведений симметрических матриц.* Докл. АН СССР, 75 (1950), 769–772; Английский перевод: U.S. Department of Commerce, National Bureau of standards, Washigton, D.C.(1953), 8pp.

[81] Lipschitz, R. *Correspondence.* Ann. Math. (2) 69, 247-251 (1959).

[82] Лобачевский Н. И. *Полное собрание сочинений,* тт.1-5. Ред. Каган В. Ф., Котельников А. П., Степанов В. В., Чеботарев Н. Г., Широков А. П. Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1946–1951.

[83] Lorenz, K. *Das sogenannte Böse.* Wien: Borotha-Schoeler (1963). Есть английский (Agression) и русский (Агрессия. Так называемое зло.) переводы. Русский перевод доступен по `http://www.lib.ru//PSIHO/LORENC/agressiya.txt`.[52]

[84] Лосев А. С. *От интеграла Березина к формализму Баталина–Вилковиского. Точка зрения матфизика.* В этом сборнике.

[85] Лосик М.В. *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли векторных полей.* Функц. анал и прилож., 4, 2 (1970), 43–53

[51] Одна из двух прямых ссылок в тексте на первое издание.

[52] Уже компилируя библиографию, я обнаружил ссылку на работу K. Lorenz. *The Natural Science of Human Species. An introduction to comparative behavior Research* (Russian manuscript, 1944–1948), мне недоступную. Возможно, что Конрад Лоренц многие из своих открытий сделал в России (так же как и Жан-Виктóр Понселе в 1812–1814гг). Эта гипотеза, на мой взгляд, подтверждается другими (широко известными) работами Лоренца.

[86] Ludlam H. *Captain Scott.The full story.* W. Foulsham: New York, Toronto, Cape Town, Sydney, 1965. Русский перевод (второе издание), Ладлем Г. *Капитан Скотт,* Гидрометеоиздат, 1989; Доступно по *http://www.skitalets.ru/books/captain_ scott/index.html.*

[87] Малышев В. А., Минлос Р. А. *Линейные многочастичные операторы.* Москва, 1994; Английский перевод: Amer. Math. Soc., 1995.

[88] Marinov M. *Revealing the path to the Superworld*, in Shifman, M. (ed.) *The many faces of the superworld. Yuri Golfand memorial volume,* World Scientific.

[89] Maslov V. P. *Remembering Alik Berezin* in Shifman, M. (ed.), *Felix Berezin The Life and Death of the Mastermind of Supermathematics.* 149-150, 2007

[90] Menger K. *Einige Überdeckungssätze der Punctmengenlehre,* Akademie de Wissenschaften zu Wien, Sitzungsberichte 133 (1924), 421–444; Перепечатано в Karl Menger *Selecta Mathematica,* v.1. Springer, 2003

[91] Minlos, R. A. *Felix Alexandrovich Berezin (a brief scientific biography).* Lett. Math. Phys. 74, No. 1, 5-19 (2005)

[92] Молин Ф. Э. *Числовые системы.* ред. А. И. Кострикин; Добавления Л. А. Бокутя, Н. Н. Круликовского, и И. В. Львова. Новосибирск, Наука, 1985[53]

[93] Молчанов В. Ф. *Аналог формулы Планшереля для гиперболоидов.* Доклады АН СССР, 171(1966).

[94] Неретин Ю. А., *Дополнительная серия представлений группы диффеоморфизмов окружности,* Успехи мат. наук, 37, 2 (1982), 213–214

[95] Неретин Ю. А. *Почти инвариантные структуры и конструкции унитарныхпредставлений группы диффеоморфизмов окружности.* Докл. АН СССР, 294 (1987), 37-41; Доступно по `http://www.mat.univie.ac.at/~neretin/almost.pdf`

[96] Neretin Yu. A. *Categories of symmetries and infinite-dimensional groups.* Oxford University Press, 1996 Русский вариант: УРСС, 1998

[97] Neretin, Yu. A. *Plancherel formula for Berezin deformationof* L^2 *on Riemannian symmetric space.* J. Funct. Anal. 189, No.2, 336-408 (2002). Доступно по `http://arxiv.org/abs/math/9911020`

[98] Neretin Yu.A. *Gauss–Berezin integral operators, spinors over supergroup* $\mathrm{OSp}(2p|2q)$*, and Lagragian super-Grassmannians,* Preprint ESI-1986 (2007)

[99] Неретин Ю.А., Ольшанский Г.И., *Граничные значения голоморфных функций, особые унитарные представления групп* $\mathrm{O}(p,q)$ *и их пределы при* $q \to \infty$. Записки научн. семинаров ПОМИ РАН, 223 (1995), 9–91(1995); Доступно по `http://www.mat.univie.ac.at/~neretin/NO.ps`.

[100] S.P. Novikov. *The second half of the 20th century and its conclusion: crisis in the physics and mathematics community in Russia and in the West.* Buchstaber, V. M. (ed.) et al., Geometry, topology, and mathematical physics. Providence, 1-24 (2004).

[101] В. И. Огиевецкий, В. Я. Файнберг, Е. С. Фрадкин, М. А. Марков, С. П. Новиков, Ю. И. Манин *Памяти Феликса Александровича Березина.* Успехи физ. наук, 1981, 2, 357–358; Открыто по адресу `http://www.ufn.ru/ufn81/ufn816/Russian/r816g.pdf`

[102] Onsager L., *Crystal statistics. I. One-dimensional model with an order-disorder transitions.* Phys. Rev. 65 (1944), 117-149

[103] Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. *Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras.* Inv. Math., 37 (1976), 93 –108

[53]Есть также (недоступная мне) книга Канунов В. Ф. *Федор Эдуардович Молин.* Москва, Наука, 1986.

[104] Ольшанский Г. И. *Описание унитарных представлений со старшим весом для групп* $U(p,q)^{\sim}$. Функц. анализ и прилож., 14, No. 3, 32–44 (1980).

[105] Ольшанский Г. И. *Унитарные представления бесконечномерных пар* (G,K) *и формализм Р. Хау*, Доклады АН СССР, 269 (1983), no. 1, 33–36.

[106] Olshanski, G. I. *Unitary representations of infinite-dimensional pairs* (G,K) *and the formalism of R. Howe.* in D. P. Zhelobenko, A. M. Vershik (eds) *Representation of Lie groups and related topics,* 269–463, Gordon and Breach, New York, 1990

[107] Ольшанский Г.И. *Представление Вейля и нормы гауссовых операторов*, Функц. анал. и прилож., 28 (1994), no. 1, 51–67, 96;

[108] Переломов А. М. *Обобщенные когерентные состояния и их применения.* Москва, Наука, 1987. Английский вариант: Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[109] Pressley, A., Segal, G., *Loop groups.* Oxford University Press, New York, 1986. Второе издание, 1988; Русский перевод: Москва, Мир, 1986.

[110] Schoenberg I. J. *On certain metric spaces arising from Euclidean spaces by a change of metric and their embedding to Hilbert space.* Ann. Math., 38 (1937), 787–793

[111] Schoenberg I. J. *Metric spaces and positive definite functions.* Trans. Amer. Math. Soc., 44 (1938), 522-536.

[112] Шварц А. С. *Суперматематика и физика.* В этом сборнике.

[113] de Saint-Exupéry, *Terre des hommes,* 1939; Многократно переиздавалась, переводилась на аглийский (Wind, Sand, and Stars) и русский («Земля людей» или «Планета людей»). Русский перевод доступен по `http://lib.ru/koi/Ekzupery/planeta.txt`

[114] Segal, Gr. *Unitary representations of some infinite-dimensional groups.* Comm. Math. Phys. 80 (1981), no. 3, 301–342.

[115] Segal, I. E. *Tensor algebras over Hilbert spaces.* I. Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), 106–134.

[116] Segal, I. E. *Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom.* I. Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 31 1959 no. 12, 39 pp. (1959).

[117] Shale, D. *Linear symmetries of free boson fields.* Trans. Amer. Math. Soc. 103 1962 149–167

[118] Shale, D., Stinespring, W. F. *Spinor representations of infinite orthogonal groups.* J. Math. Mech. 14 1965 315–322.

[119] Shifman M. *Introduction*, in Shifman M.(ed.) *The many faces of the superworld. Yuri Golfand memorial volume.* World Scientific. Доступно по `http://arxiv.org/abs/hep-th/9909016`

[120] Shifman, M. (ed.), *Felix Berezin. The Life and Death of the Mastermind of Supermathematics.* World Scientific, 2007

[121] Шилов Г. Е., Фан Дык Тинь, *Интеграл, мера, производая на линейном пространстве.* Наука, Москва, 1967

[122] Thoma E. *Der Unzerlegbaren, positiv-definitien Klassenfunktionen de unendlichen symmetrischen Gruppe.* Math. Z., 85, 40–61.

[123] Твардовский И. Т. *Тёркин на том свете.* Москва, 1963. Доступно по `http://lib.ru/koi/POEZIQ/TWARDOWSKIJ/terkin2.tex`

[124] Unterberger, A., Upmeier, H., *The Berezin transform and invariant differential operators.* Comm.Math.Phys.,164, 563–597(1994)

[125] Vergne, M., Rossi, H, *Analytic continuations of holomorphic discrete series of semisimple Lie groups.* Acta Math., 136, N1-2, 1-59 (1976)

[126] Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И. *Представления* SL(2, R), *где R – кольцо функций,* Успехи мат. наук, 28 (1973), no. 5(173), 83–128. Перепечатано в Gelfand I.M. *Collected papers*, v.2, Springer, 1988.

[127] Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И. *Представления групп диффеоморфизмов,* Успехи мат. наук,30 (1975), no. 6(186), 1–50; перепечатано в Gelfand I.M. *Collected papers*, v.2, Springer, 1988.

[128] Вершик А. М., Керов С. М. *Асимптотическая теория характеров бесконечной симметрической группы.* Функц. анализ и прилож., 15, 4(1981) 15–27

[129] Вершик А. М., Керов С. В. *Характеры и фактор-представления бесконечномерной унитарной группы.* Докл. АН СССР, 267 (1982), 272–276

[130] M. A. Virasoro, *Subsidiary conditions and ghosts in dual-resonance models.* Phys. Rev. , D1 (1970) pp. 2933–2936

[131] Voiculescu D. *Représentations facorielles de type II_2.* J. Math. Pure Appl., 55 (1976), 1-20

[132] Volkov D. V., Akulov V. P. *Is the neutrino a Goldstone particle?* Phys. Lett. - 1973. - V. B46. - P. 109–112.

[133] Волков Д. В., Сорока В.А. *Эффект Хиггса для Гольдстоновских частиц со спином 1/2.* Письма в ЖЭТФ, 18 (1973), 529–

[134] Voltaire F. *Micromegas.* 1752 (French) Есть русский и английский переводы. Доступно по `http://lib.ru/INOOLD/WOLTER/mikromegas.txt`.

[135] Высоцкий В.С. *Сочинения в двух томах.* Москва, Художественная литература, 1991. См., в частности, сайты http://vysocki.ouc.ru, http://www.bards.ru,

[136] Wallach, N. R., *Analytic continuation of discrete series.* Trans. Amer. Math. Soc., 251, 19-37 (1979)

[137] Weil, A. *Sur certains groupes d'operateurs unitaires.* Acta Math. 111 1964 143–211. Перепечатано в André Weil *Oeuvres scientifique. Collected papers.* v.3, Springer, 1979. Русский перевод в Математика (сборник переводов), 13, 5, 33–44, 1969

[138] Wielandt H. *On extremum property of sums of eigenvalues,* Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955), 106–110; Перепечатоно в Helmut Wielandt, *Mathematische werke. Mathematical works.* v.2, Walter de Gruyter, 1996.

[139] J. Wess and B. Zumino, *A Lagrangian model invariant under supergauge transformations.* Phys. Lett. B 49B, 52 (1974).

[140] Желобенко Д. П. *Гармонический анализ на комплексных полупростых группах Ли.* Москва, Наука, 1974. Английскмй перевод: Mir, Moscow, 1974

[141] Желобенко Д. П., Наймарк, М. А. *Описание вполне неприводимых представлений комплексных полупростых групп Ли.* Докл. АН СССР, 171 1966 25–28.

[142] Зиновьев А. А. *Зияющие высоты.* Ибанск, 1974

ИТЭФ & University of Vienna,
neretin(at)mccme.ru,
URL: wwwth.itep.ru/∼neretin