Молчанов Владимир Федорович
(к семидесятипятилетию со дня рождения)

27 февраля 2014 года исполняется 75 лет доктору физико-математических наук профессору Владимиру Федоровичу Молчанову, специалисту по теории представлений и некоммутативному гармоническому анализу. Он - автор 48 научных статей, а также, совместно с А. У. Климыком, выпуска «Некоммутативный гармонический анализ - II», Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 59.

Владимир Федорович родился в 1939 году в Красноярске. Осенью 1945 года после демобилизации отца – офицера Советской армии – семья переехала в Тамбов. По окончании Средней школы N 1 г.Тамбова в 1955 году В. Ф. Молчанов поступил на мехмат МГУ, далее он учился там же в аспирантуре под руководством Ф. А. Березина. С 1965 года работает на кафедре математического анализа (с 1966 года - заведующий) Тамбовского государственного педагогического института (в настоящее время - Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина). Обсудим вкратце наиболее известные его результаты.

1. Анализ на гиперболоидах. Кандидатская диссертация (ее результаты анонсированы в двух заметках в Докладах АН СССР 1966 и 1968, подробное изложение содержалось в позднейших статьях) была посвящена гармоническому анализу на многомерных гиперболоидах. Рассмотрим псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{p,q}$ с индефинитным скалярным произведением $\{x, y\}$. В нем рассматривается гиперболоид

$$H_{p,q}: \ -x_1^2 - \cdots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2 = 1,$$

на $H_{p,q}$ действует транзитивно псевдоортогональная группа $\mathrm{SO}_0(p,q)$, стабилизатор базисного вектора e_{p+1} - подгруппа $\mathrm{SO}_0(p, q-1)$. В. Ф. Молчанов получает явное спектральное разложение (псевдориманова) оператора Бельтрами-Лапласа Δ на $H_{p,q}$ и описывает представления группы $\mathrm{SO}_0(p,q)$, реализуемые в собственных подпространствах Δ. Двуполостный гиперболоид ($q = 1$) является моделью p-мерного пространства Лобачевского, к тому времени этот случай много исследовался. Кроме того, спектральное разложение было известно для $H_{2,2} \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (Хариш-Чандра, 1952) и $H_{1,3}$ (И. М. Гельфанд, М. И. Граев, 1962).

Напомним стандартный подход к задаче в случае пространств Лобачевского $H_{p,1}$. Оператор Лапласа ограничивается на пространство $\mathrm{SO}(p)$-инвариантных функций, т.е., функций, зависящих от $\{x, e_{p+1}\}$. Получается дифференциальный оператор Лежандра на полупрямой. Далее проводится разложение этого оператора по собственным функциям, спектральная мера и оказывается мерой Планшереля для нашего представления.

В.Ф.Молчанов распространяет этот подход на случай гиперболоидов. Здесь однако встречается ряд существенных трудностей, их видно уже на примере однополостного гиперболоида $H_{1,2}$ в $\mathbb{R}^3$. Стабилизатор $\mathrm{SO}(1,1)$ точки e_3 не компактен. Гладких собственных функций, зависящих от $\{x, e_3\}$, теперь нет, $\mathrm{SO}(1,1)$-инвариантные решения уравнения $\Delta f = \lambda f$ являются обобщенными функциями с сингулярным носителем на линиях уровня $\{x, e_3\} = \pm 1$. Это 4 линейных образующих гиперболоида, разделяющих его на куски. На каждом куске собственная функция является одним из двух решений уравнения Лежандра, их надо подобрать так, чтобы склеить собственное распределение. Далее нужно разложить δ-функцию в e_3 по собственным распределениям. Это было проделано для произвольных гиперболоидов в технически тяжелой работе, однако окончательный результат - разложение L^2 на гиперболоиде в прямой интеграл унитарных представлений - дается элементарными формулами (естественно, с участием Г-функций в спектральной мере). Важнее, что результат оказался в разных отношениях любопытным и неожиданным.

Сначала о представлениях группы $\mathrm{SO}_0(p,q)$, которые появляются в спектре. Рассмотрим изотропный конус в $\mathbb{R}^{p,q}$. Рассмотрим пространство однородных функций на этом конусе, т.е., функций, удовлетворяющих $f(tx) = |t|^\sigma \mathrm{sign}(t)^\varepsilon f(x)$, где $\sigma \in \mathbb{C}$ и

$\varepsilon = 0, 1$. Псевдоортогональная группа естественным образом действует на изотропном конусе и, тем самым, в однородных функциях. Легко видеть, что однородная функция f однозначно определяется своим ограничением на произведение сфер

$$S^{p-1} \times S^{q-1} : \qquad x_1^2 + \cdots + x_p^2 = 1 = x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2$$

(при этом $f(x) = (-1)^\varepsilon f(-x)$). Группа $\mathrm{SO}(p,q)$ действует на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ конформными преобразованиями (мы снабжаем $S^{p-1} \times S^{q-1}$ *разностью* римановых метрик), она же действует в пространстве функций на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ по формуле

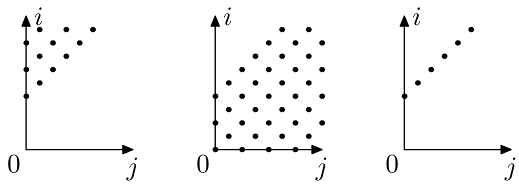
$$T_{\sigma,\varepsilon}(g)f(x) = f(xg)k(g,x)^\sigma,$$

где $k(g,x)$ - коэффициент растяжения преобразования g в точке x. Пространство функций на сфере S^{p-1} обычным образом раскладывается в сумму сферических гармоник $\oplus_{i\geqslant 0}\mathcal{H}_i^{p-1}$. Соответственно, пространство функций на произведении сфер разлагается в прямую сумму $\mathcal{H}_i^{p-1} \otimes \mathcal{H}_j^{q-1}$. Это дает нам ограничение представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ на максимальную компактную подгруппу $K := \mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(q) \subset \mathrm{SO}_0(p,q)$. Мы видим, что представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ очень «маленькие», а именно K-спектр является однократным, что само по себе случается не часто, и он состоит из очень специальных представлений группы K.

Несложно проверить, что при $\mathrm{Re}\,\sigma = -(p+q)/2 + 1$ представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ унитарны в $L^2(S^{p-1} \times S^{q-1})$ («основная вырожденная серия» представлений). Пусть, для простоты обозначений, $\varepsilon = 0$ (тем самым мы рассмотриваем «четные функции», $f(x) = f(-x)$), $p > 2$, $q > 2$, а $p + q$ четно. Рассмотрим полуторалинейную форму на пространстве гладких четных функций, заданную формулой

$$\langle f, g\rangle_\sigma = \int_{S^{p-1}\times S^{q-1}} \int_{S^{p-1}\times S^{q-1}} \{x,y\}_+^{2-p-q-\sigma} f(x)\,\overline{g(y)} d\mu(x)\, d\mu(y),$$

где μ – стандартная мера на произведении сфер[1]. Это выражение определено при $\sigma < 3 - p - q$ (когда интеграл сходится) и дальше продолжается аналитически на $\mathbb{C}$ с полюсами в $\sigma = 3 - p - q + k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. При вещественных нецелых σ мы получаем $T_{\sigma,1}$-инвариантную эрмитову форму. Оказывается, что она положительно определена при $|\sigma - (p+q)/2 + 1| < 1$ (это дает « вырожденную дополнительную серию представлений»). Кроме того, форме $\langle\cdot,\cdot\rangle_\sigma$ можно придать значения и в полюсах, что позволяет построить «дискретную серию представлений». Эти представления еще более вырождены, в них уже участвуют лишь часть сферических гармоник, возможные структуры K-спектров примерно такие:



Построенный класс представлений $\mathrm{SO}_0(p,q)$ (а также похожие представления $\mathrm{U}(p,q)$, $\mathrm{Sp}(p,q)$) является каплей в море унитарных представлений полупростых групп. Однако они в разных отношениях интересны и были предметом работ Н. Лимича, И. Нидерле, Р. Рончки (обнаруживших их одновременно с Молчановым), Р. Стришарца, В. Россмана, А. У. Климыка, А.М. Гаврилика, Р. Хау, Енг-Ши-Тана, Т. Брансона, Б. Шпе, Б. Костанта, Т. Кобаяши и других авторов (статьи на эту тему продолжают появляться). Среди этих работ стоит отметить работу самого В. Ф. Молчанова (1977) об ограничениях представлений $T_{\sigma,\varepsilon}$ на подгруппу $\mathrm{SO}(p, q-1)$.

Вернемся к гиперболоиду. В. Ф. показал, что L^2 разлагается в прямой интеграл по основной серии плюс счетная прямая сумма (не всех) представлений дискретной серии. Была также явно вычислена спектральная мера. Стоит заметить, что спектральное

[1] Обозначение x_+^λ, см.например, Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. «Обобщенные функции», вып.1, 1959

разложение есть у любого унитарного представления локально-компактной группы, и в частности, у любого представления в пространстве L^2, однако явно вычисленных спектральных разложений («формула Планшереля») известно не так уж много.

Мы видим, что спектр L^2 на гиперболоиде является разнородным. В таких случаях возникает вопрос в духе «программы Гельфанда-Гиндикина», 1977) о разложении L^2 на слагаемые с однотипным спектром. Хотя есть определенная уверенность, что в конкретных случаях это можно проделать, результатов здесь немного (и они, в основном, относятся к отделению голоморфных серий). В. Ф. Молчанов (1997, случай $H_{1,2}$ в 1980) получил явные формулы для проекторов, разделяющих спектры, для гиперболоидов.

2. Псевдо-римановы симметрические пространства. Гиперболоиды являются частными случаями (полупростых) псевдоримановых симметрических пространств. Задача разложения L^2 на подобных пространствах привлекла широкий интерес после работы М. Фленстед-Йенсена (1980) о дискретных сериях. Сейчас, по прошествии многих лет полная ясность в этом вопросе пока еще не достигнута. Для некоторых семейств пространств – сами полупростые группы, пространства $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ (комплексная группа по ее вещественной форме) и пространства ранга 1 – явные формулы Планшереля были получены. Случай пространств ранга 1 исследовался многими авторами с 60х годов. Окончательный результат был получен Молчановым (1986, это наиболее часто упоминаемый результат В.Ф., он же составил содержание его докторской диссертации, 1987). Здесь и подход, и структура ответов похожи на случай гиперболоидов. Задача сводится к анализу гипергеометрического дифференциального оператора, определенного на наборе из нескольких контуров в $\mathbb{C}$, с краевыми условиями на асимптотики собственных функций в особых точках.

3. Тензорные произведения, ограничения на подгруппу, непсевдолокальные скалярные произведения, квантование. Задачу о тензорных произведениях унитарных представлений $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ впервые рассматривал Л. Пуканский в 1961 году. Он получил описание спектров. Явные спектральные меры были вычислены В. Ф. Молчановым в 1979 году. Заметим, что эта задача может трактоваться в рамках анализа на однополостном гиперболоиде в $\mathbb{R}^3$. Например, основные серии представлений индуцированы с верхнетреугольной подгруппы, их тензорные произведения - с диагональной подгруппы D. Однородное пространство $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/D$ эквивалентно однополостному гиперболоиду, только действие группы в пространстве функций теперь «подкручено». Если же мы перемножаем два представления дополнительной серии, то в пространстве функций на гиперболоиде возникает нестандартное скалярное произведение.

Молчанов рассмотрел еще несколько задач разложения тензорных произведений и ограничений на подгруппу и в связи с этим занялся исследованием задачи о разложении «канонических представлений». Например, в случае гиперболоидов рассматривается обычное или подкрученное действие группы $\mathrm{SO}_0(p,q)$ на функциях, а скалярное произведение (возможно, индефинитное) задается формулой

$$\langle f,g\rangle = \int_{H_{p,q}} \int_{H_{p,q}} (1-\{x,y\})_+^{-\sigma} f(x)\overline{g(y)}\, d\nu(x)\, d\nu(y). \tag{1}$$

По существу, это задача об ограничении представлений $T_{\sigma,\varepsilon}$ дополнительных серий $\mathrm{SO}_0(p,q+1)$ на $\mathrm{SO}_0(p,q)$. Но тут возникает два дополнительных нюанса. Во-первых, естественный аналог скалярного произведения (1) существует и для других симметрических пространств ранга 1, и он не всегда получается из задачи ограничения на подгруппу. Во-вторых, спектральные разложения удается писать и для индефинитных скалярных произведений в следующем смысле: есть интегральный оператор, сплетающий действие группы и приводящий эрмитову форму к диагональному виду. Тут возникает странная и недопонятая ситуация. Индефинитные скалярные произведения сами по себе не определяют топологию, а стандартный подход с пространствами Крейна здесь не работает. В итоге непонятно, как определять спектр представления, однако спектральные разложения в природе существуют и во многих случаях написаны.

В. Ф. Молчанов распространил квантование Березина на кэлеровых многообразиях на пара-эрмитовы симметрические пространства G/H. Функциям на G/H ставятся в соответствие операторы в функциях на некотором грассманиане, а интегральное ядро сплетающего оператора основных серий играет роль переполненной системы векторов в квантовании Березина.

4. Действия надалгебр. Вопрос такой. Ограничим унитарное представление группы G на подгруппу M, и разложим явно полученное представление в прямой интеграл неприводимых. Можно ли явно написать действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в этом разложении? Стоит иметь в виду, что все классические римановы и псевдоримановы симметрические пространства G/H допускают, по крайней мере, локальное, действие некоторой надгруппы $\widetilde{G} \supset G$. Ответ на такой вопрос был получен Ю. А. Неретиным (2001) для тензорного произведения голоморфного и антиголоморфного представлений $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. В прямом интеграле должна действовать алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$. Это действие пишется дифференциально-разностными операторами вида

$$f(x,s) \mapsto D_- f(x,s+i) + D_0 f(x,s) + D_+ f(x,s-i), \tag{2}$$

где $f(s) \mapsto f(s+i)$ - оператор сдвига в мнимом направлении в пространстве функций вещественной переменной, а D_-, D_0, D_+ - явные дифференциальные операторы порядка 2 по x.

В. Ф. Молчанов (2003–2007) решил несколько такого рода задач для многомерных групп, его результаты отчасти проясняют структуру общей задачи. Рассмотрим, например, действие $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$ в L^2 на проективном пространстве $\mathbb{RP}^n$. Ограничим его на подгруппу $\mathrm{SO}_0(n,1)$. Группа $\mathrm{SO}_0(n,1)$ имеет на $\mathbb{RP}^n$ две открытых орбиты. Одна орбита - пространство Лобачевского, другая - фактор-пространство однополостного гиперболоида по центральной симметрии. Таким образом в прямой сумме двух L^2 на орбитах $\mathrm{SO}_0(n,1)$ действует бóльшая группа $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$. Оператор, осуществляющий спектральное разложение, переводит L^2 на пространстве Лобачевского в L^2 на произведении сферы S^{n-1} и полупрямой $\mathbb{R}^+$ с координатой σ и спектральной мерой $c(\sigma)\,d\sigma$. Алгебра $\mathfrak{so}(n,1)$ теперь действует послойно на сферах дифференциальными операторами первого порядка, зависящими от σ. В. Ф. Молчанов продолжает это действие до действия надалгебры $\mathfrak{sl}(n)$. Построенные операторы имеют форму (2) но коэффициенты D_-, D_0, D_+ теперь оказываются дифференциальными операторами четвертого порядка, причем они выражаются через генераторы алгебры Ли $\mathfrak{so}(n,1)$ и оператор Лапласа на сфере.

Отметим «конференционную» деятельность Владимира Федоровича. Он был одним из организаторов «XII школы по теории операторов в функциональных пространствах», 1987, многие участники которой потом вспоминали ее как одну из лучших конференций, в которых они когда-либо участвовали. Впоследствии он вместе с возглавляемой им кафедрой организовывал конференции по теории представлений и гармоническому анализу в Тамбове в 1989, 1996, 2005, 2007, 2008, 2009 с участием математиков России, Украины, ряда европейских стран и Японии.

С. Г. Гиндикин, Р. С. Исмагилов, А. В. Карабегов, Ю. А. Неретин,
Н. И. Нессонов, Г. И. Ольшанский