Математические работы Д. П. Желобенко

Ю. А. Неретин, С. М. Хорошкин

1. Краткие биографические сведения. Основные работы Дмитрия Петровича Желобенко (Ульяновск, 1934 – Москва, 2006) посвящены теории представлений полупростых групп и алгебр Ли, а также некоммутативному гармоническому анализу.

Он окончил физический факультет МГУ (1958), и аспирантуру Математического Института им.Стеклова под руководством С. В. Фомина и М. А. Наймарка (1961). Защитил кандидатскую диссертацию "Гармонический анализ функций на группе Лоренца и некоторые вопросы теории линейных представлений" в 1962г. Докторская диссертация "Гармонический анализ функций на полупростых группах Ли и его приложения к теории представлений" была защищена в Институте им. Стеклова в 1972г (оппоненты И. М. Гельфанд, И. Р. Шафаревич, А. А. Кириллов). В 1974г. был докладчиком на Международном математическом конгрессе в Ванкувере[1].

Начиная с 1961г. и до смерти, работал в Университете Дружбы Народов им. П. Лумумбы[2]. По-видимому, данная работа давала поле для реализации его преподавательских способностей, но возможностей найти аспирантов у него было не много[3].

В 1963–1978 в Институте им.Стеклова проходил семинар М. А. Наймарка, Д. П. Желобенко и А. И. Штерна по теории представлений. Среди докладчиков, были, например, Ф. А. Березин, Н. Я. Виленкин, Р. С. Исмагилов, А. А. Кириллов, Э. В. Киссин, Г. Л. Литвинов, В. И. Манько, М. Б. Менский, В. Ф. Молчанов, М. Г. Крейн, Г. И. Ольшанский, И. Сигал (Irving Segal), В. Н. Толстой, Ч. Фояш (Ciprian Foiaş), Дж. Хаджиев, П. Халмош (Paul Halmos), А. Я. Хелемский, Э. Хьюит (Edwin Hewitt). Дмитрий Петрович многократно читал лекции для физиков, в частности в Дубне, 1965, в Матфизическом колледже Московского независимого университета в начале 90х, в Софийском университете 1973–74, а также на ряде физических конференций.

Начиная с 1959г. и до последних дней жизни Дмитрий Петрович был серьезно болен (в результате неудачного горного похода[4]).

[1] Фактически за границу его тогда "не выпустили" . Кстати, доклад М. А. Наймарка на конгрессе в Ницце 1970 по содержанию был совместным с Д. П. Желобенко.

[2] УДН; позднее переименован в Российский университет дружбы народов (РУДН)

[3] При этом ему иногда приходилось сталкиваться с административными препонами при попытке "взять" способного студента. Вот список аспирантов, защитивших диссертацию под руководством Желобенко, взятый нами из Curiculum Vitae: М. С. Аль-Натор, Виджай, А. С. Казаров, А. Г. Князев, А. В. Луцюк.

[4] Желобенко вывел туристическую туристическую группу на Алтае, когда та оказалась в критическом положении. Вот отрывок из письма В. И. Чилина. "Из бесед с Дмитрием Петровичем, я узнал, что он заболел после тяжелого горного похода. Разыскивая дорогу, он по договоренности с руководителем группы ушел вперед, затем начался сильный снегопад, и он не смог в наступающих сумерках вернуться к месту ночлега. И ему пришлось всю ночь двигаться по кругу, чтобы не замерзнуть. В результате он сильно простудился, что и привело к серьезной болезни."

Дмитрий Петрович — автор 10 книг[5] и более 70 статей (по MathSciNet и Zentralblatt). Цель нашего краткого обзора – обсудить те из работ Желобенко, которые кажутся нам наиболее значительными. По понятным причинам этот обзор не полон. Кроме того, поставив себе такую цель, мы уже не можем выйти за рамки чисто профессионального текста.

Издательство МЦНМО и Ю. Н. Торхов сейчас готовят издание новой книги Желобенко "Гауссовы алгебры". Предполагается включить туда воспоминания учеников, коллег и друзей, в частности, [1], [29]. Там же должна быть библиография его статей.

2. Книга "Компактные группы Ли и их представления" (1970). Это классическая книга, которая 37 лет спустя остается одной из лучших книг по теории представлений, причем как в жанре учебника (или вводной книги), так и в жанре монографии. Это очень своеобразный как по структуре, так и по стилю текст[6], в итоге оказался образцом "математики с человеческим лицом". Он был рассчитан на читателя с подготовкой в 2-3 курса тогдашних математических (физических) факультетов, он является и книгой для начального ознакомления или обучения, и книгой, интересной для специалистов, и справочником в определенной области.

Мы не обсуждаем ее содержания (лучше почитать саму книгу), и лишь отметим, что ее "сложные главы" (задачи спектрального анализа) во многом основаны на работах самого Д .П .Желобенко, в частности [39], [40][7].

Оригинальной находкой Желобенко является последовательное изложение большого числа классических задач теории представлений в рамках т.н. " метода Z-инвариантов". Принцип метода Z-инвариантов состоит в реализации представлений полупростых групп в виде функций на максимальной унипотентной (строго треугольной) подгруппе, удовлетворяющих определенной системе дифференциальных уравнений [39], [40]. В сущности, этот метод предвосхищает теорию D-модулей на флаговых пространствах[8], см. А. Бейлинсон, И. Бернштейн [4], Ж.-Л. Брылинский, М. Кашивара [10].

3. Книга "Гармонический анализ на комплексных полупростых группах Ли" (1974). В своей основе это оригинальная работа, основанная на статьях Желобенко [41]–[49], [58]–[59] 1963–1970гг., частично совместных с М. А. Наймарком.Основной результат – теорема Желобенко–Наймарка о классификации всех неприводимых представлений[9] комплексных полупростых групп Ли. Напомним это утверждение для случая группы $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.[10]

[5]две из них сейчас находятся в печати, [56], [57]

[6]Кажется, самого Дмитрия Петровича до конца его жизни удивляла очевидная популярность его "неправильно" написанной ("для физиков") книги.

[7]Стоит отметить, что на эти статьи большое влияние оказала работа Р. Годемана [21]

[8]Строго треугольная подгруппа является "большой клеткой" флагового пространстве

[9]в пространствах Фреше с точностью до инфинитезимальной эквивалентности модулей K-конечных векторов.

[10]Мы используем обычные обозначения, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ – группа всех обратимых матриц

Через $\mathrm{U}(n)$ мы обозначим подгруппу всех унитарных матриц. Обозначим через $T \subset G$ подгруппу верхне-треугольных матриц. Для $A \in T$ обозначим через a_{jj} ее диагональные элементы.Фиксируем набор комплексных чисел $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ Расмотрим характер $T \to \mathbb{C}^*$, заданный формулой

$$\chi_{p,q}(A) = \prod_{j=1}^{n} a_{jj}^{p_j} \overline{a}_{jj}^{q_j}$$

Чтобы комплексные степени имели смысл, нужно, чтобы все $(p_j - q_j)$ были целыми.

Рассмотрим представление $\rho_{p,q}$ группы G, индуцированное с представления $\chi_{p,q}$ группы T.[11] То, что получилось, называется представлением основной серии. Для p, q общего положения[12] представления основной серии неприводимы. При исключительных значениях параметра представление $\rho_{p,q}$ имеет конечный композиционный ряд Жордана–Гёльдера.

Далее при p, q общего положения одновременная перестановка наборов $(p_1, \dots, p_n)$ и $(q_1, \dots, q_n)$ приводит к эквивалентному представлению.[13] Для исключительных значений p, q такие представления не эквивалентны, но композиционные ряды имеют одинаковые факторы (ниже мы используем слово "подфактор").

Теперь мы формулируем теорему Желобенко–Наймарка. Неприводимые представления $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с орбитами симметрической группы S_n на множестве наборов

$$(p_1, \dots, p_n\,;\, q_1, \dots, q_n)$$

А именно, для каждой орбиты берется один из подфакторов соответствующего $\rho_{p,q}$. Опишем подфактор более точно. Без ограничения общности мы можем положить

$$p_1 - q_1 \geqslant p_2 - q_2 \geqslant \dots \geqslant p_n - q_n$$

теперь надо взять тот подфактор (он является подпредставлением), чье ограничение на подгруппу $K = \mathrm{U}(n)$ содержит представление со старшим весом $(p_1 - q_1, \dots, p_n - q_n)$.

порядка n, $\mathrm{U}(n)$ – группа унитарных матриц. Ниже также G – произвольная полупростая группа, K – ее максимальная компактная подгруппа, $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{k}$ – их алгебры Ли.

[11] Для читателя, привычного к другому языку. Мы рассматриваем представления $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ в гладких сечениях комплексных линейных расслоений над флаговым пространством.

[12] Условие исключительности $p_i - p_j \in \mathbb{Z}$, $q_i - q_j \in \mathbb{Z}$ для хотя бы одной пары i, j

[13] Для читателя чуть-чуть знакомого с группой Лоренца $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ и теорией представлений. Это почти очевидно. Во-первых, для $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ это общеизвестный и легко проверяемый факт. Далее, обозначим через T_i обобщенную верхнетреугольную подгруппу, где элементу группы $a_{(i+1)i}$, стоящему ниже диагонали, разрешено быть ненулевым. Группа Ли T_i имеет $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ в качестве полупростого множителя. Теперь наше представление можно получить последовательным индуцированием с T на T_i, а далее на G. Но теперь для $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ мы можем переставить параметры (p_i, q_i) и (p_{i+1}, q_{i+1}).

Сама эта теорема (1966) являлась частью 30-летней истории вокруг теоремы Хариш-Чандры о подфакторе. Основные серии и параболическое индуцирование были введены в книге И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [18]. Хариш-Чандра в 1954 [22] доказал, что любое неприводимое представление полупростой группы Ли реализуемо как подфактор основной серии[14]. Ф. А. Березин немедленно (1956) [6] попытался превратить этот результат в явную классификацию в случае комплексных групп.[15] Десять лет спустя (1966) была получена теорема Желобенко–Наймарка, далее в 1973 Р. Ленглендс [27] получил классификацию всех неприводимых представлений вещественных групп, а Касселман [11] в 1975г. получил теорему о подпредставлении.[16,17]

Желобенко [44] также вводит следующую структуру.[18] Обозначим через $U(\mathfrak{g})$ обертывающую алгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а через $U(\mathfrak{k})$ обертывающую алгебру подалгебры $\mathfrak{k}$. Обозначим через π_λ неприводимые представления группы K, через λ обозначен старший вес. Через $\ker\pi_\lambda \subset U(\mathfrak{k})$ мы обозначим двусторонний идеал, состоящий из элементов v, таких, что $\pi_\lambda(v) = 0$. Далее через $U_{\lambda\mu}$ мы обозначим множество всех $u \in U(\mathfrak{g})$ таких, что

$$(\ker\pi_\lambda)u \subset U(\mathfrak{g})\,(\ker\pi_\mu)$$

Легко проверить, что $U_{\lambda\mu}U_{\mu\nu} \subset U_{\lambda\nu}$. Поэтому мы получаем категорию, объектами которой являются доминантные веса λ, а морфизмами – элементы $u \in \mathrm{U}_{\lambda\mu}$.

Для представления группы G в пространстве H рассмотрим его ограничение на подгруппу K, оно разлагается в прямую сумму $H = \oplus H_\lambda$, где в H_λ действует представление K, кратное π_λ. Легко проверить, что $u \in U_{\lambda\mu}$ переводит H_μ в H_λ, т.е., мы получаем представление нашей категории.

---

[14] см. также [13], 9.4

[15] До классификации в буквальном смысле слова статья все же "не дотягивала", точнее окончательная классификационная теорема была сформулирована без доказательства. В этой работе были обнаружены серьезные пробелы, вслед за этим последовала дискуссия между Хариш-Чандрой и Березиным по поводу правильности этой статьи. Березин в следующей статье ("Письмо в редакцию") заполнил эти пробелы. Подход Березина (с доведением до классификации) изложен в дополнении к обсуждаемой книге Желобенко, Добавление А (но надо отметить, что Желобенко применяет дополнительные соображения). Кстати, в обсуждаемой работе Березина были посчитаны радиальные части операторов Лапласа на полупростых группах, что, возможно, было не менее важно, чем начавшаяся "борьба" за классификацию представлений.

[16] Любое неприводимое представление – подпредставление в основной серии.

[17] Доказательства были опубликованы в книге А. Бореля–Н. Валлаха 1980 [8] и статье В. Касселмана–Д. Миличича 1982 [12]; см. также книгу А. Кнаппа [25]. Вещественный случай принципиально сложнее комплексного, но и результаты менее прозрачны. Классификация всех представлений опирается на классификацию дискретных серий. Сами по себе представления дискретных серий – сложные объекты, известно несколько их описаний, но все они далеки от прозрачности. После появления работы М. Фленстеда-Йенсена [17] казалось, что дискретные серии вот-вот будут вполне поняты. Тридцать лет спустя работа Фленстед-Йенсена сама остается непонятой.

[18] Эта структура рассматривается также в книге Диксмье [13] 1974, глава 9, со ссылкой на работу Леповского и Макколума [28] 1973, впрочем, структура достаточно естественна и, может быть, где-то вводилась и ранее.

В этом подробно обсуждаемом в книге сюжете естественно видеть аналог классического операционного исчисления. Обертывающая алгебра есть одновременно алгебра левоинвариантных дифференциальных операторов на группе Ли, а ее действие в представлениях есть аналог преобразования Фурье полиномиальных дифференциальных операторов.

Интегральные формулы сплетающих операторов основной неунитарной серии вкупе с детальным описанием присоединенного действия алгебры Ли $\mathfrak{k}$ в $U(\mathfrak{g})$ позволяют описать алгебру $U_{\lambda\lambda}/\ker \pi_\lambda U(\mathfrak{g})$ и классифицировать ее неприводимые представления алгебры с младшим весом λ. Этот результат используется затем при классификации неприводимых представлений комплексной полупростой группы Ли.

Если видеть в обсуждаемой работе "спортивную сторону", то теорема Желобенко–Наймарка давно превзойдена. С другой стороны книга остается содержательным текстом по комплексным полупростым группам (которые вообще поняты лучше вещественных) и вместе с сопутствующими статьями может оказаться "базисом" для поступательного движения в будущем. К сожалению, книга написана в стиле, общепринятом в современной математике – она является юридически точным текстом, рассчитанным на специалистов.[19] В итоге менее известно и менее понято, чем это того бы заслуживало, "операционное исчисление". Важным текстом по этому предмету являются записки М. Дюфло [14] 1974. [20]

В настоящее время в печати находится незавершенная книга Желобенко "Операционное исчисление на комплексных полупростых группах Ли" (мы ее пока не видели). Судя по названию, она продолжает обсуждавшиеся выше сюжеты; хотелось бы надеяться, что она может способствовать вхождению данных вопросов в common knowledge.

4. Книга "Представления редуктивных алгебр Ли". 1994. Эта работа и связанный с ней цикл статей, возможно, составляют наиболее интересную в настоящее время часть оригинального научного наследия Д. П. Желобенко. Основная часть книги посвящена изложении теории т.н. редукционных алгебр, или алгебр Микельссона [31].

Пусть $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{k}$ - комплексные алгебры Ли, причем $\mathfrak{k}$ редуктивна.[21] Нас интересует задача ограничения конечномерных представлений $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{k}$.[22] Разложим $\mathfrak{k}$ в сумму понижащей, диагональной (картановской) и повышающей подалгебр, $\mathfrak{k} = \mathfrak{n}_- + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_+$. Рассмотрим идеал $U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$ и фактор $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$ по этому идеалу. Редукционная алгебра (или *алгебра Микельссона* $S(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$) определяется как подространством $\mathfrak{n}_+$-старших векторов в $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$.

[19] Впоследствии Дмитрий Петрович сожалел, что поддался влиянию "бурбакизма", тогда еще только начинавшего входить в моду.

[20] Под влиянием этих записок техника Желобенко использовалась в работе П. Торассо [36], кроме того она использовалась в одном из вариантов доказательства гипотезы Баума–Конна у Винсента Лафорга [26].

[21] Стоит обратить внимание на неожиданную степень общности, подалгебра $\mathfrak{k}$ не обязательно симметрическая.

[22] Лучше иметь в виду несколько большую общность; рассматриваются модули со старшим весом над $\mathfrak{g}$, чье ограничение на $\mathfrak{k}$ является суммой (не обязательно прямой) модулей со старшим весом

Легко убедиться, что $S(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ в самом деле является алгеброй и что она действует на пространстве $V^{\mathfrak{n}_+}$ старших векторов любого $\mathfrak{g}$-модуля V. Далее[23] $\mathfrak{g}$-модуль V восстанавливается из $S(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-модуля $V^{\mathfrak{n}_+}$.

Важнейшим инструментом изучения редукционных алгебр является "*экстремальный проектор*" Р. М. Ашеровой–Ю. Ф. Смирнова– В. Н. Толстого (1971). Для алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ со стандартным базисом e, h и f он был получен П. О. Лоудином [30] в 1964 году,

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n e^n}{\prod_{j=1}^{n}(h+j+1)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{fe}{n(h+n+1)}\right) \qquad (1)$$

Это в выражение определяет оператор в любом конечномерном $\mathfrak{sl}_2$-модуле[24], оператор P удовлетворяет соотношениям

$$eP = Pf = 0, \qquad P^2 = P$$

Иными словами P есть проектор на подпространство старших векторов.

Р. М. Ашерова, Ю. Ф. Смирнов и В. Н. Толстой нашли аналогичное выражение для произвольной полупростой алгебры $\mathfrak{k}$. А именно для произвольного положительного корня α рассматривается соответствующаяподалгебра $\mathfrak{sl}_2$ с базисом e_α, h_α, f_α, выписывается соответствующий проектор P_α, а дальше берется произведение $\prod P_\alpha$ по всем положительным корням в правильном[25] порядке.

В формуле для P присутствует деление на элементы обертывающей алгебры $U(\mathfrak{k})$, т.е. сам P в $U(\mathfrak{k})$ не содержится.

В связи с этим Желобенко вводит некоторое расширение алгебры $U(\mathfrak{k})$ (с частично разрешенным делением) и отождествляет его с локально-конечными эндоморфизмами некоторого универсального модуля, так что существование и единственность проекционного оператора становится тавтологией.

Привлечение проектора вынуждает локализовать[26] алгебру $S(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$по выражениям вида $h_\gamma + k$, гдеh_γ - кокорень, а k- целое число. В локализованной алгебре $Z(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ появляются естественные образующие $z_g = Pg$. где g пробегает ортогональное дополнение к $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{g}$. Образующие z_g удовлетворяют квадратично-линейным соотношениям с коэффициентами, являющимися рациональными выражениями от картановских элементов. Полное или частичное знание этих соотношений позволяет получать различную информацию о представлениях алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Так, описание алгебры Микельссона для пары $\mathfrak{gl}_{n+1} \supset \mathfrak{gl}_n$ позволяет в конце концов получить явные формулы действия образующих $\mathfrak{gl}_n$ в базисе Гельфанда-Цетлина ([3]), а исследование пары, связанной с симметрическим пространством, прилагается в классификации некоторых серий модулей Хариш-Чандры вещественных групп Ли.[27]

[23]при выполнении условий предыдущей сноски
[24]Он определен и в большей общности, но это требует отдельного обсуждения
[25]т.н. нормальном
[26]т.е. частично разрешить деление
[27]О других приложениях см. [33].

Определяющие свойства образующих z_g можно "транспонировать" и получить другие образующие z'_g, также удовлетворяющие квадратично-линейным соотношениям. Желобенко строит оператор Q, такой, что $z'_g = Qg$. Оператор Q (известный специалистам как "коцикл Желобенко") также факторизуется по корням и похож на P в случае sl_2:

$$Q_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Ad}(e_\alpha)^n x \cdot f_\alpha^n \frac{(-1)^n}{\prod_{j=1}^n j(h_\alpha - j + 1)}\,, \qquad (2)$$

где $\mathrm{Ad}(e_\alpha)x := [e_\alpha, x]$– оператор присоединенного представления. Позднее операторы (2) появились в математической физике под именем динамической группы Вейля, см. Г. Фельдер [16], П. Этингоф, А. Варченко [15], см. также [24]. При этом общее понимание самой формулы (2) до сих пор не является удовлетворительным.

Обсуждаемая книга Желобенко содержит довольно много мелких неточностей, кроме того последняя глава на наш взгляд неудачна. Но в целом книга является яркой и очень оригинальной работой.

5. Книга "Основные структуры теории представлений". 2004. Работа очень необычна по стилю и структуре. Это текст "лоскутной структуры", по-видимому, изначально не предназначенный для "систематического изучения" в обычном смысле этого слова. Книга состоит из отрывков, каждый из которых, однако, вполне интересен и пригоден для чтения. Они с одной стороны рассчитаны на начинающих, с другой стороны, математик-профессионал может найти в них немало интересного и неожиданного.

6. Неразложимые представления группы Лоренца (1958–1959). Бесконечномерные неунитарные предствления группы Лоренца $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ (как впрочем и полупростых групп вообще) не являются вполне приводимыми (т.е., вообще говоря, не разлагаются в прямую сумму неприводимых представлений). В частности при исключительных значениях параметров (см. выше), представление основной серии $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ расщепляется на конечномерное представление и бесконечномерный остаток[28]. Две заметки Желобенко в Докладах АН СССР посвящены задаче об описании всех неразложимых представлений группы Лоренца (с конечным композиционным рядом). Сцепляться могут лишь подпредставления, имеющие один и тот же центральный характер.

Желобенко придумал способ свести данную задачу к задаче конечномерной линейной алгебры. А именно нужно классифицировать наборы линейных операторов $d_+ : V \to W$, $d_- : W \to V$, $\delta : W \to W$ таких, что блочные матрицы

$$a := \begin{pmatrix} 0 & d_- \\ d_+ & 0 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

[28]который сам является точкой основной серии

удовлетворяют соотношениям:

$$ab = ba, \qquad a,\, b \text{ нильпотентны}$$

Эта задача линейной алгебры, в свою очередь, оказалась весьма любопытной, она была решена И. М. Гельфандом и В. А. Пономаревым [19]. (1968).

Аналогичная задача редукции к конечномерной задаче линейной алгебры была проведена для групп $\mathrm{SO}(n, 1)$ и $\mathrm{SU}(n, 1)$, см. [23]. Для произвольной вещественной полупростой группы в [7] был предложен общий метод редукции (далекий от эффективного алгоритма). Вероятно, эти результаты не являются окончательными.

7. Базисы Гельфанда–Цетлина. Конечномерные неприводимые представления полупростых групп допускают простую параметризацию (теорема Картана о старшем весе), однако индивидуальные представления устроены сложно и описание их явных реализаций является весьма замысловатой задачей. Подобная проблема еще раньше возникла для симметрических групп S_n. В начале XX века Альфред Юнг предложил способ построения моделей представлений с помощью последовательного ограничения представления на подгруппы $S_n \supset S_{n-1} \supset S_{n-2} \supset \ldots$. Данный способ был применен И. М. Гельфандом и М. Л. Цетлиным [20] , 1950, к классическим группам $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ и $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$. Напомним, что ограничивая неприводимое конечномерное представление $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ на $\mathrm{GL}(n-1, \mathbb{C})$, мы получаем однократную прямую сумму. Далее мы ограничиваем каждое из полученных представлений на $\mathrm{GL}(n-2, \mathbb{C})$ и т.д. В итоге мы получаем разложение начального пространства в прямую сумму одномерных подпространств.Выбирая в каждом из них по вектору (не канонически), мы получаем базис. Эта часть рассуждений достаточно тривиальна[29]. Однако глубоким результатом являются явные формулы для действия генераторов алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ в этом базисе. Гельфанд и Цетлин анонсировали эти формулы в двух заметках в докладах АН СССР.

Впоследствии разные авторы опубликовали несколько различных доказательств; кажется, Желобенко был первым.Важнее, что ему удалось развить на этом приемы, пригодные для решения других спектральных задач (и это было одной из отправных точек для книг [47], [54], см. также обзор [52]).[30]

8. Голоморфные семейства сплетающих операторов и "операторы дискретной симметрии". Наконец, обсудим результаты Желобенко по сплетающим операторам, частично они включены в книгу "Гармо-

[29] Можно сослаться на формулу Пьери.

[30] Отметим также, что Желобенко (1962, см. [39], [47]) получил спектр ограничения конечномерного представления $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ на $\mathrm{Sp}(2n-2, \mathbb{C})$. Он не однократен, однако похож на спектр ограничения $\mathrm{O}(k, \mathbb{C})$ на $\mathrm{O}(k-2, \mathbb{C})$; это заставляло думать, что базисы Гельфанда–Цетлина для $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ существуют.

Вопрос довольно много обсуждался, см., например, подход, предложенный А. А. Кирилловым и реализованный В. В. Штепиным [35], 1986. Задача в итоге была решена А. И. Молевым [32], 1999.

Отметим также, что заметка Желобенко на эту тему в Успехах, 42 (1987) ошибочна.

нический анализ на комплексных группах", но есть и более поздняя статья [51] о вещественных группах.

Выше (п.3) была описана конструкция сплетающих операторов для представлений основной серии $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$; для каждой перестановки $\sigma \in S_n$ параметров она дает мероморфную операторно-значную функцию от параметров представления[31] с возможными полюсами и нулями в точках приводимости. Например, для группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, это фунция от $p_1, \ldots, p_n$. Числа же $p_j - q_j$ целые, т.е., мы имеем $\mathbb{Z}^n$ мероморфных функций.

Поведение таких функций в точках приводимости – важный и сложный вопрос, которому посвящено неисчислимое количество статей. Желобенко (в случае комплексных групп) вводит неочевидную нормировку, делающую это семейство операторов голоморфным и не обращающимся в ноль всюду. В частности это дает явные формулы для сплетающих операторов и в точках приводимости.

Однако сплетающие операторы для основных серий этим не исчерпываются. Иногда (только в точках приводимости) бывают операторы, связывающие представления с разными наборами $\{p_j - q_j\}$[32]. Желобенко понял, что существование таких исключительных симметрий связано с естественным действием дубля симметрической группы $S_n \times S_n$ на множестве наборов $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$. Он также дал для этих операторов явные конструкции.

Для произвольной вещественной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ это связано с действием группы Вейля комплексификации $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ на двойственном пространстве к картановской подалгебре[33]

Насколько мы помним Москву 1970-80 годов, Д. П. Желобенко выглядел относительно обособленной фигурой. Но книгу "Компактные группы Ли" читали очень многие, математики и физики, студенты и профессионалы, в Советском Союзе и за границей. Нам еще кажется, что деятельность Желобенко повлияла на становление, интересы и вкусы целого ряда молодых тогда математиков: А. В. Зелевинский, Г. Л. Литвинов, А. И. Молев, М. Л. Назаров, Ю. А. Неретин, Г. И. Ольшанский, В. Н. Толстой, С. М. Хорошкин, И. В. Чередник,[34] хотя никто из них ни формально, ни фактически не был учеником Желобенко.

Наша статья была написана по совету Р. С. Исмагилова. Нам также помогли М. С. Аль-Натор, М.Дюфло, Тамара Ивановна Желобенко, А. В. Зе-

[31] или, согласно Брюа [9], функцию со значениями в G-инвариантных обобщенных функциях на произведении флаговых многообразий.

[32] Кажется, для группы Лоренца это заметил Наймарк, разбираясь с вырождением основной серии.

[33] Эвристическое объяснение для читателя, немного знакомого с предметом: собственные числа операторов Лапласа постоянны на таких орбитах.

[34] Разумеется, в отношении себя авторы это подтверждают.

левинский, Г. Л. Литвинов, А. С. Казаров, М. Л. Назаров, В. Р. Нигматулин, В. Ф. Молчанов, Г. И. Ольшанский, В. Н. Толстой, Н. Я. Хелемский, В. И. Чилин.

References

[1] Аль-Натор М. С., Гольдес И.В., Казаров А. С, Нигматулин В. Р., *Биография Д.П.Желобенко.* В книге [57].

[2] Ашерова Р. М., Смирнов Ю. Ф., Толстой В. Н., *Проекционные операторы для полупростых алгебр Ли.* Теор. мат. физ., 8, N2 (1971), 255-171

[3] Ашерова Р. М., Смирнов Ю. Ф., Толстой В. Н., *Проекционные операторы для полупростых алгебр Ли.* II. Теор. мат. физ., 15, N1 (1973), 107–119.

[4] A.Beilinson, J.Bernstein, *Localisation de g-modules,* C.R. Acad Sci, Paris Ser. I Math 292 (1981), 15-18,

[5] Березин Ф.А. *Операторы Лапласа на полупростых группах,* Докл. АН СССР, 107, 9-12 (1956)

[6] Березин Ф.А. *Операторы Лапласа на полупростых группах,* Труды Моск. матем. общества, 6 (1957), 371 – 463

[7] Bernstein J., Gelfand I., Gelfand S., *Structure locale de la categorie des modules de Harish-Chandra.* C.R.Acad.Sci, Paris, Ser A, 286, 495–497 (1978)

[8] Borel A., Wallach N., *Continuous cohomologies, discrete subgroups, and representations of reductive groups,* Prinston University Press, 1980

[9] Bruhat F., *Sur les representations induites des groupes de Lie.* Bull. Soc. Math. France, 84 (1956), 97–205

[10] J.-L. Brylinski, M. Kashiwara, *Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems.* Invent. Math. , 64 (1981) pp. 387-410

[11] Casselman, W., *The differential equations satisfied by matrix coefficients.* Unpublished manuscript, 1975

[12] Casselman, W., Miličić, Dr. *Asymptotic behavior of matrix coefficients of admissible representations.* Duke Math. J. 49 (1982), no. 4, 869–930.

[13] Dixmier J. *Algébres enveloppantes.* Gauthier-Villars, Paris, 1974; Русский перевод: Мир, 1978

[14] Duflo M. *Représentations irréductibles des groupes semi-simples complexes.* Analyse harmonique sur les groupes de Lie, Seminaire Nancy–Strasbourg 1973-75, Lect. Notes, 497 (1975), 26–88

[15] P. Etingof and A. Varchenko, *Dynamical Weyl groups and applications, Adv. in Math.* **167:1** (2002), 74-127.

[16] G. Felder, *Conformal field theory and integrable systems associated with elliptic curves,* Proc. of the ICM 94, 1247-1255, Birkhaeuser 1994.

[17] Flensted-Jensen M. *Discrete series for semisimple symmetric spaces,* Ann.Math., 111 (1980), 253–311

[18] Гельфанд И. М., Наймарк М. А., *Унитарные представления комплексных классических групп,* Труды МИАН им.Стеклова, т.36 (1950)

[19] Гельфанд И.М, Пономарев В.А. *Представления группы Лоренца,* Успехи мат.наук, 23, N2 (1968), 3–60.

[20] Гельфанд И.М., Цетлин М.Л. *Конечномерные представления группы унимодулярных матриц,* Докл. АН СССР, 71, N5(1950) 835–828

[21] Godement R. *Theory of spherical functions. I* Transactions Amer. Math. Soc., v.73 (1952), 496–556

[22] Harish-Chandra, *Representations of semi-simple Lie groups, II,* Transactions of Amer. Math., Soc, 76 (1953), 26-65

[23] Хорошкин С. М., *Неразложимые представления групп Лоренца.* Функц. анал. и прилож., 15, N 2, 50-60 (1981)

[24] S. Khoroshkin, M. Nazarov, *Yangians and Mickelsson Algebras I,*Transformation Groups, 11 (2006), 625- 658.

[25] Knapp A. *Representation theory of semi-simple groups.* Princeton University Press, 1986

[26] Lafforgue V., *K-theory bivariante pour les algebres de Banach et conjecture de Baum–Connes.* These de doctorat de l'universite de Paris-Sud, 15 mars 1999.

[27] Langlands R. P., *On classification of irreducible representations of real algebraic groups.* Unpublished Manuscript, 1973.

[28] Lepowsky J., MacCollum G. W., *On determination of irreducible modules by restriction to a subalgebra.* Trans. Amer. Math.Soc, 176 (1973), 223–246

[29] Литвинов Г.Л. *Вспоминая Дмитрия Петровича Желобенко,* в книге [57]

[30] Löwdin, P.O., *Angular momentum wavefunctions constructed from wave operators.* Rev. Mod. Phys., 36 (1964), 966–976

[31] Mickelsson J., *Step salgebras of semisimple subalgebras of Lie algebras,* Rept. Math. Phys., 4,4 (1973), 303–318

[32] Molev A. I. *A basis for representations of symplectic Lie algebra.* Comm. Math. Phys., 201 (1999), 591–618.

[33] Molev A.I. *Yangians and transvector algebras.* Discrete Math. 246 (2002), 231–253.

[34] Наймарк М. А. *Линейные представления группы Лоренца,* М.: Физматгиз, 1958

[35] Штепин В. В. *Разделение кратных точек спектра при редукции* $\mathrm{Sp}(2n) \downarrow \mathrm{Sp}(2n-2)$. Функц. анал. и прил., 1986, 20, N 4, 93–95

[36] Torasso P. *Le theoreme de Paley–Wiener sour l'espace des functions indefinitement differentiable et a support compact sur un espace symmetrique de type noncompact.* J. Funct. Anal., 26(1977), 201–213

[37] Желобенко Д. П., *Описание некоторого класса линейных представлений группы Лоренца.* Докл. АН СССР, 121, N 4 (1958), 585–589

[38] Желобенко Д. П., *Линейные представления группы Лоренца, Докл АН СССР,* 126 1959 935–938.

[39] Желобенко Д. П., *Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений.* Успехи мат.наук, 17 1962 no. 1 (103), 27–120.

[40] Желобенко Д. П. *К теории линейных представлений комплексных и вещественных групп Ли.* Труды Московского Мат. Общества, т.12, 1963, 53–98.

[41] Желобенко Д. П., *Гармонический анализ на полупростых группах Ли. I* Изв. АН СССР, сер. матем., 27 1963 1343–1394.

[42] Желобенко Д. П., *Симметрии в классе неприводимых представлений комплексной группы Ли.* Функц. анал. и прилож., 1 1967 no. 2, 15–38.

[43] Желобенко Д. П., *Анализ неприводимости в классе элементарных представлений полупростой комплексной группы Ли.* Изв. АН СССР, сер. матем., 32 1968 108–133.

[44] Желобенко Д. П., *Операционное исчисление на полупростых комплексных группах Ли.* Изв. АН СССР, сер. матем., 33 1969 931–973.

[45] Желобенко Д. П., *Гармонический анализ на полупростых группах Ли. II* Изв. АН СССР, сер. матем., 33 1969 1255–1295.

[46] Желобенко Д. П., *Неприводимые представления класса O комплексных полупростых групп Ли.* Функц. анализ и прилож., 4 1970 no. 2, 85–86.

[47] Желобенко Д. П., *Компактные группы Ли и их представления.* М.: Наука, 1970

[48] Желобенко Д. П., *Классификация вполне неприводимых и нормально неприводимых представлений связной комплексной полупростой группы Ли.* Изв. АН СССР, сер. матем., 35 1971 573–599

[49] Желобенко Д. П.,*Циклические модули для комплексных полупростых групп Ли.* Изв. АН СССР, сер. матем., 37 (1973), 502–515.

[50] Желобенко Д. П., *Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли.* Наука, Москва, 1974

[51] Желобенко Д. П., *Операторы дискретной симметрии для редуктивных групп Ли.* Изв. АН СССР, сер. матем.,40 (1976), no. 5, 1055–1083,

[52] Желобенко Д. П., *On Gelfand-Zetlin bases for classical Lie algebras.* Representations of Lie groups and Lie algebras (Budapest, 1971), 79–106, Akad. Kiado, Budapest, 1985.

[53] Zhelobenko D. P., *An introduction to theory of S-algebras over S-algebras.* in Vershik A. M., Zhelobenko D. P. *Representations of Lie groups and related topics,* Gordon & Breach (1990), 155–221

[54] Желобенко Д. П., *Представления редуктивных алгебр Ли.* Наука, Москва, 1994

[55] Желобенко Д. П., *Основные структуры теории представлений.* Московский центр непрерывного математического образования, 2004.

[56] Желобенко Д.П., *Операционное исчисление на комплексных полупростых группах Ли,* МЦНМО, в печати

[57] Желобенко Д.П., *Гауссовы алгебры,* МЦНМО, в печати

[58] Желобенко Д. П., Наймарк, М. А. *Описание вполне неприводимых представлений комплексных полупростых групп Ли.* Докл. АН СССР, 171 1966 25–28.

[59] Желобенко Д. П., Наймарк М. А. *Описание вполне неприводимых представлений комплексных полупростых групп Ли.* Изв. АН СССР, сер. матем., 34 1970 57–82.

Неретин Ю.А.: University of Vienna, ИТЭФ, neretin(at)mccme.ru, URL: wwwth.itep.ru/~neretin

Хорошкин С.М.: ИТЭФ, khor(at)itep.ru