Quantendesigns

Grundzüge einer
nichtkommutativen Designtheorie

von

Gerhard Zauner

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften
an der
Formal- und Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Wien

Wien 1999

Ich möchte Hrn. Prof. Dr. Neumaier für die Betreuung der Dissertation und die anregenden Diskussionen danken, sowie Hrn. Dr. Göttfert für die Mühe der Durchsicht der Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit waren Untersuchungen von Strukturen im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie, welche der Quantentheorie zugrunde liegt. Dabei wurden Zusammenhänge zur kombinatorischen Designtheorie entdeckt. Sowie die Quantenmechanik eine nichtkommutative Verallgemeinerung der klassischen Mechanik ist, stellt die vorliegende Theorie eine nichtkommutative Verallgemeinerung der klassischen, kombinatorischen Designtheorie dar. Zugleich werden Konzepte der Theorie sphärischer Designs verallgemeinert.

Sei V ein komplexer (oder reeller), endlichdimensionaler Vektorraum mit innerem Produkt. In dieser Arbeit werden Mengen von Teilräumen von V betrachtet (sowie in der klassischen Designtheorie Mengen von Teilmengen einer endlichen Menge betrachtet werden). In Abschnitt 1.3 werden auch kurz unendlichdimensionale Hilberträume betrachtet.

Jedem linearen Teilraum von V läßt sich eine lineare Abbildung $\mathbf{P}$ zuordnen, welche alle Vektoren aus V orthogonal auf diesen Teilraum projiziert. Es wird in dieser Arbeit durchwegs angenommen, daß eine geordnete Orthonormalbasis des Vektorraumes V ausgezeichnet ist. Anstatt von linearen Abbildungen sprechen wir von Matrizen. Das heißt der Gegenstand dieser Arbeit sind Mengen von orthogonalen Projektionsmatrizen $\mathbf{P}$. Diese haben bekanntlich die folgenden zwei Eigenschaften (siehe [39] und [57]). Orthogonale Projektionen sind *idempotent*, d.h. $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. Weiters sind sie *selbstadjungiert*, d.h. es gilt $\mathbf{P} = \mathbf{P}^*$ mit der adjungierten (d.h. transponierten und komplex konjugierten) Matrix $\mathbf{P}^*$. Umgekehrt kann man zeigen, daß jede idempotente und selbstadjungierte Matrix einer orthogonalen Projektion entspricht. Die Spur orthogonaler Projektionen (d.h. die Summe der Diagonaleinträge der bezüglich einer beliebigen Orthonormalbasis zugeordneten Matrix) ist gleich der *Dimension* r des zugehörigen Teilraumes.

Quantendesigns sind Mengen von orthogonalen Projektionsmatrizen mit zusätzlichen Eigenschaften, welche im ersten Abschnitt definiert werden. In den weiteren Abschnitten des ersten Teiles werden deren Bedeutungen im Lichte dreier bekannter Theorien untersucht. Der Spezialfall paarweise kommutierender Projektionsmatrizen liefert Definitionen und Strukturen der klassischen, kombinatorischen Designtheorie. Anschließend wird eine kurze Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie, welche der Quantentheorie zugrunde liegt, gegeben und gezeigt, daß die Elemente der hier entwickelten, verallgemeinerten Designtheorie in komplexen Vektorräumen eine natürliche Interpretation in diesem Formalismus haben. Zuletzt wird das Konzept sphärischer t-Designs und diverser Verallgemeinerungen davon vorgestellt, welche mit Quantendesigns eng verwandt sind.

Im zweiten Teil werden einige Elemente der allgemeinen Theorie weiterentwickelt. Es werden diverse Schranken abgeleitet, eine Dualitätsoperation konstruiert und Automorphismengruppen untersucht. Diese Ergebnisse werden speziell auf zwei Arten von Quantendesigns angewendet, welche die bekanntesten kombinatorischen Designs verallgemeinern, nämlich *balanced incomplete block designs* und *affine Designs*.

Im dritten Teil werden für die eben erwähnten zwei Arten von Quantendesigns einige grundlegende Konstruktionen dargestellt. Insbesondere wird eine unendliche Lösungsschar von 2-Designs über komplexen, projektiven Räumen konstruiert. Die verwendeten Methoden haben eine enge Analogie zu Formalismen der Quantentheorie in unendlichdimensionalen Hilberträumen.

Im Nachwort werden schließlich einige offene Probleme und Vorschläge für weiterführende Untersuchungen aufgelistet.

Wir benützen die folgenden Notationen:

- $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ bezeichnet die Spur der Matrix $\mathbf{A}$.

- $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ ist das *Kronecker- oder Tensor-Produkt* zweier Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$. Das t-fache Tensorprodukt der Matrix $\mathbf{A}$ mit sich selbst sei mit

$$\otimes^t \mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{A} \otimes \cdots \otimes \mathbf{A}}_{t}$$

  bezeichnet.

- $U(b)$ bzw. $O(b)$ seien die Gruppen aller unitären bzw. orthogonalen $b \times b$ Matrizen. $S(b)$ sei die ($b!$-elementige) Gruppe aller $b \times b$ Permutationsmatrizen.

- Die Mengen aller komplexen bzw. reellen, orthogonalen Projektionsmatrizen mit einer festen Spur r können mit den sogenannten *komplexen bzw. reellen Grassmann-Mannigfaltigkeiten* der r-dimensionalen Unterräume des $\mathbb{C}^b$ bzw. $\mathbb{R}^b$ identifiziert werden. Wir bezeichnen sie mit $G_r(\mathbb{C}^b)$ bzw. $G_r(\mathbb{R}^b)$.

- Die Mengen aller diagonale Projektionsmatrizen mit einer festen Spur r bezeichnen wir mit $\mathbb{J}_r^b$.

1 Grundlagen

1.1 Definitionen

Definition 1.1. Ein *Quantendesign* ist eine Menge $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ von $v \geq 2$ komplexen (oder reellen), orthogonalen $b \times b$ Projektionsmatrizen.

- $\mathbf{D}$ heißt *regulär*, falls es ein $r \in \mathbb{N}$ gibt, so daß gilt

$$\mathrm{tr}(\mathbf{P}_i) = r \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq v. \tag{1.1}$$

- $\mathbf{D}$ heißt *kohärent*, falls es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt, so daß mit der Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ gilt

$$\mathbf{P}_1 + \cdots + \mathbf{P}_v = k\mathbf{I}. \tag{1.2}$$

- Sei G eine beliebige Gruppe unitärer Matrizen der Ordnung b. $\mathbf{D}$ heißt *t-kohärent bezüglich der Gruppe G*, falls für alle Matrizen $\mathbf{U} \in G$ gilt

$$\sum_{i=1}^{v} \otimes^t \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^{v} \otimes^t (\mathbf{U}\mathbf{P}_i\mathbf{U}^{-1}). \tag{1.3}$$

- Ein Quantendesign $\mathbf{D}$, welches s-kohärent bzgl. G für alle $s \leq t$ ist, heißt *t-Quantendesign bzgl. G*. Die *Stärke (strength) t bzgl. G* ist der maximale Wert von t, so daß $\mathbf{D}$ ein t-Quantendesign bzgl. G ist.

- Der *Grad s* von $\mathbf{D}$ ist die Anzahl der verschiedenen Elemente der Menge

$$\Lambda = \{\mathrm{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j) : 1 \leq i \neq j \leq v\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}. \tag{1.4}$$

  Insbesondere hat $\mathbf{D}$ genau dann Grad 1, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$\mathrm{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j) = \lambda \qquad \text{für alle } 1 \leq i \neq j \leq v. \tag{1.5}$$

- Eine Teilmenge von $\mathbf{D}$ heißt *Orthogonalklasse*, falls die Projektionen paarweise orthogonal sind. Eine Orthogonalklasse ist *vollständig*, falls die Summe ihrer Projektionsmatrizen die Einheitsmatrix ergibt. Ein Quantendesign heißt *auflösbar*, wenn es sich in disjunkte, vollständige Orthogonalklassen zerlegen läßt.

- Ein auflösbares Quantendesign mit Grad 2, d.h. $\Lambda = \{0, \lambda \neq 0\}$ soll *affines Quantendesign* heißen.

Alle diese Eigenschaften bleiben bei einem Basiswechsel mit einer Matrix $U \in G$ erhalten. Die Indizes der Projektionsmatrizen sind im allgemeinen beliebig. Wird ihre Reihenfolge berücksichtigt, so sprechen wir von einem *geordneten Quantendesign.*

Definition 1.2. Seien $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ und $\mathbf{D}' = \{\mathbf{P}'_1, \ldots, \mathbf{P}'_v\}$ zwei Quantendesigns. Sie heißen *äquivalent* oder *isomorph*, falls es eine $b \times b$ Matrix $\mathbf{U} \in U(b)$ und eine Permutation π von $\{1, \ldots, v\}$ gibt, so daß gilt

$$\mathbf{P}'_i = \mathbf{U}\mathbf{P}_{\pi(i)}\mathbf{U}^{-1} \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq v.$$

$\mathbf{U}$ kann auch gleich $\mathbf{I}$ sein, d.h. es findet nur eine Permutation statt.

Ist ein Quantendesign kohärent, so kommutiert $\sum_{i=1}^{v} \mathbf{P}_i = k\mathbf{I}$ mit jeder beliebigen Matrix, d.h. das Quantendesign ist 1-kohärent bzgl. jeder beliebigen Gruppe G. Es gilt auch die Umkehrung.

Proposition 1.3. *Sei G eine beliebige, irreduzible Gruppe (d.h. es gibt keinen invarianten Teilraum bzgl. aller Gruppenelemente). Ein Quantendesign ist genau dann kohärent, wenn es 1-kohärent bzgl. G ist.*

Beweis. Die eine Richtung haben wir bereits gezeigt. Sei umgekehrt $\sum_{i=1}^{v} \mathbf{P}_i = \mathbf{U}\left(\sum_{i=1}^{v} \mathbf{P}_i\right)\mathbf{U}^{-1}$ für alle $\mathbf{U} \in G$, dann läßt sich das bekannte *Lemma von Schur* anwenden (siehe z.B. [21, Lemma 27.3]) und es folgt $\sum_{i=1}^{v} \mathbf{P}_i = k\mathbf{I}$. □

Speziell folgt, daß ein Quantendesign genau dann 1-kohärent bzgl. der orthogonalen, unitären oder permutativen Gruppe ist, wenn das Quantendesign kohärent ist. Für $t \geq 2$ stimmen diese drei Definitionen jedoch nicht mehr überein.

Proposition 1.4. *Sei $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ ein kohärentes Quantendesign mit $\operatorname{tr}(\mathbf{P}_i) = r_i$, $1 \leq i \leq v$. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{v} r_i = bk. \tag{1.6a}$$

Dies zeigt, daß $k \in \mathbb{Q}$ sein muß. Ist $\mathbf{D}$ auch regulär, dann folgt

$$vr = bk. \tag{1.6b}$$

Beweis. Wende die Spurfunktion auf die Gleichung (1.2) an. □

Man sieht sofort, daß jedes auflösbare und damit auch jedes affine Quantendesign kohärent ist, wobei k die Anzahl der Orthogonalklassen ist. Weitere Eigenschaften werden wir im nächsten Kapitel herleiten. Nun folgen noch einige Definitionen.

Definition 1.5. Sei $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ ein beliebiges Quantendesign und

$$\overline{\mathbf{P}}_i = \mathbf{I} - \mathbf{P}_i \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq v.$$

Dann wird $\overline{\mathbf{D}} = \left\{\overline{\mathbf{P}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{P}}_v\right\}$ das zu $\mathbf{D}$ *komplementäre* Design genannt.

Das komplementäre Design $\overline{\mathbf{D}}$ hat dieselben Parameter v und b. Folgende Eigenschaften kann man leicht nachprüfen. $\overline{\mathbf{D}}$ ist genau dann regulär, wenn $\mathbf{D}$ regulär ist und es gilt $\overline{r} = b - r$. $\overline{\mathbf{D}}$ ist genau dann kohärent, wenn $\mathbf{D}$ kohärent ist und es gilt $\overline{k} = v - k$. $\overline{\mathbf{D}}$ hat für reguläre Quantendesigns denselben Grad s wie $\mathbf{D}$ mit $\overline{\lambda_i} = b - 2r + \lambda_i$ für $1 \leq i \leq s$. Ferner gilt $\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \mathbf{D}$.

Satz 1.6. $\mathbf{D}$ *ist genau dann ein t-Quantendesign bzgl. einer beliebigen Gruppe $G \subseteq U(b)$, wenn es das komplementäre Design $\overline{\mathbf{D}}$ ebenfalls ist.*

Beweis. Sei $\mathbf{U} \in G$ und $s \leq t$.

$$\sum_{i=1}^{v} \otimes^s (\mathbf{U}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_i)\mathbf{U}^{-1}) = \sum_{i=1}^{v} \otimes^s (\mathbf{I} - \mathbf{U}\mathbf{P}_i\mathbf{U}^{-1})$$

kann als die Summe von 2^s Termen geschrieben werden, wobei jeder Term jeweils mittels einer unitären $b^s \times b^s$ Matrix (welche die Tensorprodukte permutiert und mit allen Matrizen der Form $\otimes^s \mathbf{U}$ kommutiert) für ein $0 \leq j \leq s$ äquivalent ist zu

$$\sum_{i=1}^{v} \left(\otimes^{(s-j)}\mathbf{I}\right) \otimes \left(\otimes^{j}(\mathbf{U}\mathbf{P}_i\mathbf{U}^{-1})\right) = \sum_{i=1}^{v} \left(\otimes^{(s-j)}\mathbf{I}\right) \otimes \left(\otimes^{j}\mathbf{P}_i\right)$$

unter Verwendung der j-Kohärenz für $j \leq s$. Daraus folgt die s-Kohärenz von $\overline{\mathbf{D}}$ für alle $s \leq t$. Die umgekehrte Richtung ergibt sich sofort, da $\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \mathbf{D}$. □

Natürlich ist die *Vereinigung* $\mathbf{D} \cup \mathbf{D}' = \left\{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v, \mathbf{P}'_1, \ldots, \mathbf{P}'_{v'}\right\}$ zweier Quantendesigns regulär und/oder t-kohärent (bzw. ein t-Quantendesign) bzgl. G, wenn es beide Quantendesigns sind.

Definition 1.7. Seien $\mathbf{D}_1 = \{\mathbf{P}_{11}, \ldots, \mathbf{P}_{1v}\}$ und $\mathbf{D}_2 = \{\mathbf{P}_{21}, \ldots, \mathbf{P}_{2v}\}$ zwei Quantendesigns aus jeweils v orthogonalen Projektionen und seien

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{1i} \oplus \mathbf{P}_{2i} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{1i} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_{2i} \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq v. \tag{1.7}$$

Wir nennen $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ die *Summe* von $\mathbf{D}_1$ und $\mathbf{D}_2$.

Die Summe ist genau dann kohärent mit dem Parameter k, wenn es alle Summanden zum selben Parameter sind. Die Summe zweier regulärer Quantendesigns ist ebenfalls wieder regulär. Die Summe zweier Quantendesigns mit Grad 1 hat auch wiederum Grad 1.

Analog läßt sich aus zwei Quantendesigns wie oben mittels des Kronecker- (oder Tensor-) Produkts $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{1i} \otimes \mathbf{P}_{2i}$ das *Produkt* von $\mathbf{D}_1$ und $\mathbf{D}_2$ bilden.

Definition 1.8. Ein Quantendesign $\mathbf{D}$, welches unitär äquivalent ist zu einer Summe zweier nichtverschwindender Quantendesigns $\mathbf{D}_1$ und $\mathbf{D}_2$, heißt *reduzibel*, andernfalls *irreduzibel.*

$\mathbf{D}$ ist genau dann reduzibel, wenn es einen nichttrivialen Teilraum $\mathbf{T}$ des Vektorraumes $\mathbb{C}^b$ gibt, der unter allen $\mathbf{P}_i$, $1 \leq i \leq v$, *invariant* bleibt. Da die Projektionsmatrizen selbstadjungiert sind, ist dann nämlich auch das orthogonale Komplement von $\mathbf{T}$ invariant. Das ist gleichbedeutend damit, daß es eine unitäre Transformation gibt, die alle Matrizen in die Form (1.7) bringt (mit orthogonalen Projektionen der Ordnung $\dim(\mathbf{T}) \neq 0$ und $\operatorname{codim}(\mathbf{T}) \neq 0$).

Definition 1.9. Ein Quantendesign $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ heißt *kommutativ*, falls die Projektionen $\mathbf{P}_i$, $1 \leq i \leq v$, paarweise kommutieren.

Ist $\mathbf{D}$ kommutativ, dann gibt es – da die Projektionsmatrizen selbstadjungiert sind – eine unitäre Matrix $\mathbf{U}$, so daß $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{P}_i\mathbf{U}$ diagonal ist für alle $1 \leq i \leq v$ (siehe [57]). Das heißt $\mathbf{D}$ ist unitär äquivalent zu einem Quantendesign aus lauter diagonalen Matrizen, sozusagen total reduzibel. Aufgrund der Idempotenz der orthogonalen Projektionen können die Diagonaleinträge nur 1 oder 0 sein.

1.2 Klassische Designtheorie

Die grundlegende Definition der klassischen, kombinatorischen Designtheorie ist jene einer endlichen *Inzidenzstruktur* $(V, \mathbf{B}, I)$, wobei $V = \{p_1, \ldots, p_b\}$ und $\mathbf{B} = \{B_1, \ldots, B_v\}$ b- bzw. v-elementige endliche Mengen sind. $I \subseteq V \times \mathbf{B}$ ist eine binäre Relation.

Die Elemente von $\mathbf{B}$, Blöcke genannt, können auch als Teilmengen der Menge V interpretiert werden mit $p_i \in B_j \Leftrightarrow (p_i, B_j) \in I$.

Die $b \times v$ Matrix $\mathbf{M} = (m_{ij})_{1 \leq i \leq b, 1 \leq j \leq v}$, definiert durch

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } p_i \in B_j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wird die zugeordnete *Inzidenzmatrix* genannt. Durch Permutation von Spalten und/oder Zeilen der Inzidenzmatrix entstehen *isomorphe* oder *äquivalente* Inzidenzstrukturen.

Indem die Rolle der Blöcke und Punkte vertauscht wird, entsteht die *duale Inzidenzstruktur* $(\mathbf{B}, V, I^*)$ mit $(B_j, p_i) \in I^*$ genau dann, wenn $(p_i, B_j) \in I$. Der dualen Struktur ist die transponierte Inzidenzmatrix zugeordnet.

Satz 1.10. *Jedem kommutativen Quantendesign $\mathbf{D}$ läßt sich eine, bis auf Äquivalenzen eindeutige, Inzidenzstruktur $(V, \mathbf{B}, I)$ zuordnen – sowie umgekehrt – und zwar folgendermaßen. Seien alle orthogonalen Projektionen $\mathbf{P}_j$, $1 \leq j \leq v$, gleichzeitig diagonalisiert und die Spalten der Inzidenzmatrix durch die Diagonalen der Projektionsmatrizen gebildet, d.h. seien der Inzidenzmatrix $\mathbf{M} = (m_{ij})_{1 \leq i \leq b, 1 \leq j \leq v}$ die Projektionen*

$$\mathbf{P}_j = \mathrm{diag}(m_{1j}, \ldots, m_{bj}) \qquad \textit{für alle } 1 \leq j \leq v \tag{1.8}$$

zugeordnet. Dann gilt:

(i) $\mathrm{tr}(\mathbf{P}_j) = r_j$, $1 \leq j \leq v$, *entspricht der Anzahl der Einsen in der j-ten Spalte von $\mathbf{M}$, d.h. der Mächtigkeit des Blocks B_j. Insbesondere ist $\mathbf{D}$ genau dann regulär, wenn alle Blöcke gleich groß sind.*

(ii) Seien $k_i, 1 \leq i \leq b$, die i-ten Diagonaleinträge von $\mathbf{P}_1 + \cdots + \mathbf{P}_v$. Dann entspricht k_i der Anzahl der Einsen in der i-ten Zeile von $\mathbf{M}$, d.h. der Anzahl der Blöcke, die p_i enthalten. Insbesondere ist $\mathbf{D}$ genau dann kohärent, wenn alle Punkte aus V in jeweils genau gleich vielen Blöcken enthalten sind.

(iii) $\mathrm{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j) = \lambda_{ij}$, $1 \leq i \neq j \leq b$, *entspricht der Anzahl der Stellen, bei welchen in der i-ten und j-ten Spalte von $\mathbf{M}$ gleichzeitig Einsen stehen, d.h. der Mächtigkeit des Durchschnitts der Blöcke B_i und B_j.*

Wenn wir hingegen den diagonalen Projektionsmatrizen nicht die Spalten, sondern die Zeilen einer Inzidenzmatrix zuweisen (bzw. die Inzidenzmatrix anschließend an die obige Zuordnung transponieren), erhalten wir die dualen Inzidenzstrukturen zugeordnet. Für diese „duale Zuordnung“ gelten natürlich die dualen Eigenschaften, d.h. $\mathrm{tr}(\mathbf{P}_j)$ *entspricht der Anzahl der Blöcke, die* p_j *enthalten, der i-te Diagonaleintrag von* $\mathbf{P}_1 + \cdots + \mathbf{P}_v$ *entspricht der Mächtigkeit des Blocks* B_i *und* $\mathrm{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j)$ *entspricht der Anzahl der Blöcke, die* p_i *und* p_j *gleichzeitig enthalten.*

Beweis. Zur Eindeutigkeit der Zuordnung: Sind alle orthogonalen Projektionen $\mathbf{D}$ gleichzeitig diagonalisiert, so verbleiben als Äquivalenzoperationen noch Permutationen π der Indizes, was einer Permutation der Spalten der zugeordneten Inzidenzmatrix entspricht und unitäre Ähnlichkeitstransformationen mit $b \times b$ Permutationsmatrizen $\mathbf{U}$, was einer Permutation der Zeilen der Inzidenzmatrix entspricht.

Die weiteren Eigenschaften lassen sich einfach nachprüfen. □

Beispiel 1.11. Der Inzidenzmatrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

entspricht die eindeutige *projektive Ebene* der Ordnung 2. Ihr ist ein kommutatives Quantendesign zugeordnet, welches regulär mit $r = 3$ und kohärent mit $k = 3$ ist, sowie Grad 1 mit $\lambda = 1$ hat. Dasselbe gilt übrigens auch für die duale Zuordnung.

Die bekannteste Struktur der klassischen Designtheorie sind *balanced incomplete block designs*, abgekürzt BIBD (siehe z.B. [20], [76] und [34]). Das sind Inzidenzstrukturen für die jeder Block k-elementig ist, jedes Element in genau r Blöcken auftritt und je zwei verschiedene Elemente gleichzeitig in genau λ Blöcken enthalten sind. Ihnen sind über die duale Zuordnung kommutative reguläre und kohärente Quantendesigns mit Grad 1 zugeordnet. Andere Bezeichnungen für diese klassischen Designs sind $S_\lambda(2, k, v) - Designs$ (siehe [13]) bzw. $2 - (v, k, \lambda) - Designs$ (siehe [47]). Projektive Ebenen sind Spezialfälle *symmetrischer* BIBD ($b = v$).

Die Parameter (v, b, r, k, λ) in Satz 1.10 wurden übrigens entsprechend der dualen Zuordnung so gewählt, daß sie im kommutativen Spezialfall genau diesen wichtigsten klassischen Designs entsprechen.

Vollständige Orthogonalklassen eines kommutativen Quantendesigns entsprechen bei der Zuordnung von Satz 1.10 sogenannten *Parallelklassen* von Blöcken in der klassischen Designtheorie, welche die Punktmenge vollständig zerlegen. Der Begriff der Auflösbarkeit entspricht genau dem der klassischen Definition (siehe [13, Definition I.5.4]).

Kommutative, reguläre, affine Quantendesigns (wir werden in Abschnitt 2.3 sehen, daß die Regularität keine große Einschränkung ist) entsprechen nach der Zuordnung von Satz 1.10 in der klassischen Designtheorie sogenannten (g, k, λ)-*Netzen* bzw. *affinen 1-Designs* (siehe [20, II.4.1]) Äquivalent dazu ist die Definition sogenannter *Orthogonaler Anordnungen (orthogonal arrays)* der Stärke 2 (siehe [20] bzw. [13]). Der Spezialfall $\lambda = 1$ entspricht der klassischen Definition von *paarweise orthogonalen Lateinischen Quadraten* bzw. *affinen Ebenen* (siehe insbesondere [26]). Nach der dualen Zuordnung entsprechen kommutative, affine Quantendesigns genau *transversalen Designs* $\mathrm{TD}_\lambda(k, g)$.

Eine Inzidenzstruktur heißt t-weise balanciertes Design, falls jede t-elementige Teilmenge von V in einer konstanten Anzahl von jeweils genau λ Blöcken enthalten ist. Ein t-weise balanciertes Design, wo jeder Block genau r Elemente enthält, heißt *t-Design* (bzw. $t - (v, k, \lambda)$-Design oder $S_\lambda(2, k, v)$-Design). Für t-Designs gilt $t \leq r < b$ und jedes t-Design ist auch ein s-Design für alle $s \leq t$. (siehe [13, I. Theorem 3.2)] bzw. [20, IV.49]).

Satz 1.12. *Sei $\mathbf{D}$ ein Quantendesign aus lauter diagonalen Projektionsmatrizen. Dann entspricht die t-Kohärenz bzgl. der Permutationsgruppe $S(b)$ nach der Zuordnung von Satz 1.10 genau der s-weisen Balanciertheit für alle $s \leq t$. Den regulären, diagonalen t-Quantendesigns bzgl. $S(b)$ sind genau die kombinatorischen t-Designs zugeordnet.*

Beweis. Seien $\mathbf{Q}_j$, $1 \leq j \leq b$, die diagonalen $b \times b$ Matrizen mit 1 in der j-ten Diagonalstelle und sonst überall 0. Die b^t Matrizen $\mathbf{Q}_{j_1} \otimes \mathbf{Q}_{j_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{Q}_{j_t}$ mit $1 \leq j_i \leq b$ bilden eine Basis für den Raum aller diagonalen $b^t \times b^t$ Matrizen.

Sei $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ ein diagonales Quantendesign. Die Diagonalmatrix $\otimes^t \mathbf{P}_i$ hat als Koeffizient von $\mathbf{Q}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{Q}_{j_t}$ genau dann 1, wenn $\mathbf{P}_i$ an allen Diagonalstellen $j_1, j_2, \ldots, j_t$ eine 1 hat, also entsprechend der Zuordnung von Satz 1.10 genau dann, wenn die Punkte $p_{j_1}, \ldots, p_{j_t}$ alle im i-ten Block enthalten sind, sonst 0. Die Matrix $\sum_{i=1}^{v} \otimes^t \mathbf{P}_i$ hat als Koeffizienten von $\mathbf{Q}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{Q}_{j_t}$ folglich genau die Anzahl der Blöcke, die alle Punkte $p_{j_1}, \ldots, p_{j_t}$ gleichzeitig enthalten. Das zugeordnete klassische Design ist also genau dann s-weise balanciert für alle $s \leq t$, wenn die Koeffizienten von $\mathbf{Q}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{Q}_{j_t}$ für alle möglichen Indizes $j_1, j_2, \ldots, j_t$ mit s verschiedenen Werten gleich sind. Durch Ähnlichkeitstransformationen

$$\mathbf{A} \to (\otimes^t \mathbf{S}) \mathbf{A} (\otimes^t \mathbf{S}^{-1})$$

mit beliebigen $b \times b$ Permutationsmatrizen $\mathbf{S}$ werden $\mathbf{Q}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{Q}_{j_t}$ mit s verschiedenen Indizes auf ebensolche Matrizen abgebildet und zwar kann mit einer geeigneten Permutationsmatrix jede s-elementige Indizesmenge auf jede andere abgebildet werden. Folglich bleibt $\sum_{i=1}^{v} \otimes^t \mathbf{P}_i$ genau dann unter allen solchen Abbildung invariant, d.h. $\mathbf{D}$ ist t-kohärent bzgl. $S(b)$, wenn das zugeordnete klassische Design s-weise balanciert ist für alle $s \leq t$. □

Die Zuordnung ist hier nicht die duale Version von Satz 1.10, wie bei BIBD, bzw. $S_\lambda(t, k, v)$-Designs mit $t = 2$, sondern die Standardzuordnung. Somit sind hier die Parameter dual zu den üblichen Bezeichnungen. Das hat folgenden Hintergrund.

Während in der klassischen Designtheorie das *Prinzip der Dualität* gilt, d.h. daß es zu jeder Definition und jedem Satz eine duale Aussage gibt, geht diese Symmetrie für nichtkommutative Quantendesigns verloren. Der Übergang ins Nichtkommutative bringt einen *Symmetriebruch*. Es lassen sich wohl manchmal alle zwei dualen Definitionen verallgemeinern, doch haben sie dann völlig verschiedene Eigenschaften.

So ist es zwar auch möglich die Eigenschaft der t-weisen Balanciertheit entsprechend der dualen Zuordnung zu verallgemeinern (siehe Abschnitt 1.3), doch erweist sich diese Definition nicht als fruchtbar.

Es gibt noch viele weitere Definitionen klassischer Designs (siehe [4], [13], [20] und [76]). Unter Verwendung des Konzepts eines *Assoziationsschemas* (siehe z.B. [20] oder [29]) könnten als Verallgemeinerung von transversalen Designs auch sogenannte *partially balanced incomplete block designs* (PBIBD) verallgemeinert werden. Sei ein symmetrisches Assoziationsschema mit s Klassen auf einer v-elementigen Menge von Projektionsmatrizen gegeben, dann sind den PBIBD über die duale Zuordnung Quantendesigns zugeordnet, welche kohärent und regulär sind, Grad s haben und für die mit der s-elementigen Menge Λ für je zwei Projektionen $\mathbf{P}_l, \mathbf{P}_j$, die i-assoziiert sind, $\mathrm{tr}(\mathbf{P}_l\mathbf{P}_j) = \lambda_i \in \Lambda$ gilt. Wir wollen diese Strukturen hier nicht weiter untersuchen.

1.3 Quantentheoretische Interpretation

Der klassischen Physik, Wahrscheinlichkeitstheorie und auch Designtheorie liegt die Boolesche Logik zugrunde, d.h. eine Verbandsstruktur, wie sie durch Teilmengen einer vorgegebenen Menge beschrieben wird. Die Quantentheorie hingegen basiert auf einer orthokomplementären, quasimodularen Verbandsstruktur, welche durch die abgeschlossenen linearen Unterräume in komplexen, separablen Hilberträumen gebildet wird (siehe [58]). Jedem solchen Unterraum ist eindeutig eine orthogonale Projektion zugeordnet, die auf ihn projiziert. Sie korrespondieren zu den Ereignissen (oder Eigenschaften) des quantenmechanischen Systems. Zueinander orthogonale Teilräume bzw. Projektionen entsprechen dabei sich gegenseitig ausschließenden Ereignissen. Wir skizzieren nun kurz die darauf aufbauende *Quantenwahrscheinlichkeitstheorie* (siehe [12] und [32]).

Wahrscheinlichkeitsmaße werden durch positiv semidefinite, selbstadjungierte und bezüglich der Spur normierte Operatoren, sogenannten Dichteoperatoren $\mathbf{D}$, beschrieben (siehe Satz von GLEASON in [19]). Die Wahrscheinlichkeit $\mu_D(\mathbf{P})$ einer Projektion $\mathbf{P}$ ist definiert durch

$$\mu_D(\mathbf{P}) = \mathrm{tr}(\mathbf{PD}).$$

Zufallsvariablen korrespondieren zu selbstadjungierten Operatoren $\mathbf{A}$, in der Quantenmechanik *Observablen* genannt. Sei χ_B die charakteristische Funktion einer Borelmenge $B \in \mathbb{R}$ und folglich $\chi_B(\mathbf{A})$ eine Spektralprojektion von $\mathbf{A}$, dann ist die Wahrscheinlichkeit, einen Wert aus B für $\mathbf{A}$ zu messen,

$$\mu_D(\chi_B(\mathbf{A})) = \mathrm{tr}(\mathbf{D}\chi_B(\mathbf{A})).$$

Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* der Projektion $\mathbf{P}_2$ bei Vorliegen von $\mathbf{P}_1$ ist

$$\mu_D(\mathbf{P}_2 \mid \mathbf{P}_1) = \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{D}\mathbf{P}_1)}{\mathrm{tr}(\mathbf{P}_1\mathbf{D})}.$$

Siehe [12, Kap. 26] und [32, Th. 5.26]. Diese Formel ist äquivalent zur Beschreibung der Zustandsänderung durch den Meßprozeß nach LÜDERS(siehe [56] und [16]). Analog zur klassischen Theorie kann auch eine *gemeinsame Wahrscheinlichkeit* $\mu_D(\mathbf{P}_2 \sqcap \mathbf{P}_1)$, zuerst $\mathbf{P}_1$ und dann $\mathbf{P}_2$ zu messen, definiert werden durch

$$\mu_D(\mathbf{P}_2 \sqcap \mathbf{P}_1) = \mu_D(\mathbf{P}_2 \mid \mathbf{P}_1)\mu_D(\mathbf{P}_1) = \mathrm{tr}(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{D}\mathbf{P}_1).$$

Die bedingte und gemeinsame Wahrscheinlichkeit in der Quantentheorie sind – anders als in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie – im allgemeinen von der Reihenfolge abhängig. Die folgende Definition der *Unabhängigkeit* zweier Projektionen $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ ist analog zur klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie, wobei aber zusätzlich die Unabhängigkeit von der Reihenfolge gelten soll, also

$$\mu_D(\mathbf{P}_2 \sqcap \mathbf{P}_1) = \mu_D(\mathbf{P}_1 \sqcap \mathbf{P}_2) = \mu_D(\mathbf{P}_1)\mu_D(\mathbf{P}_2).$$

Wir wollen uns nun auf endlichdimensionale, komplexe Hilberträume (d.h. auf $\mathbb{C}^b$) beschränken. Sei weiters der Dichteoperator $\mathbf{D} = \frac{1}{b}\mathbf{I}$. Dem entspricht eine völlig „gleichverteilte" Wahrscheinlichkeit $\mu(\mathbf{P}) = \frac{1}{b}\operatorname{tr}(\mathbf{P})$. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeit $\mu(\mathbf{P}_2 \sqcap \mathbf{P}_1) = \frac{1}{b}\operatorname{tr}(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)$ hängt in diesem Fall nicht von der Reihenfolge ab und die zwei Projektionen sind bzgl. μ voneinander unabhängig, wenn $\operatorname{tr}(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2) = \frac{1}{b}\operatorname{tr}(\mathbf{P}_1)\operatorname{tr}(\mathbf{P}_2)$ gilt.

Die v Projektionsmatrizen $\{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ eines Quantendesigns können als v Ereignisse dieses quantenmechanischen Systems interpretiert werden. Ihre Wahrscheinlichkeiten $\mu(\mathbf{P}_i) = \frac{1}{b}\operatorname{tr}(\mathbf{P}_i)$ sind genau dann gleich, wenn das Quantendesign regulär ist. Die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten $\mu(\mathbf{P}_i \sqcap \mathbf{P}_j) = \frac{1}{b}\operatorname{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j)$ für alle $1 \leq i \neq j \leq v$ sind genau dann konstant, wenn das Quantendesign Grad 1 hat. Allgemein gibt der Grad s die Anzahl der verschiedenen gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten an.

Definition 1.13. Durch die Spektralzerlegungen

$$\mathbf{A}_i = \sum_{l=1}^{g_i} a_{il}\mathbf{P}_{il}$$

von k selbstadjungierten Matrizen $\mathbf{A}_i$, $1 \leq i \leq k$, werden k vollständige Orthogonalklassen (d.h. eine Auflösung) auf dem durch alle Projektionen gebildeten Quantendesign definiert. Wir nennen die Orthogonalklassen bzw. die Observablen $\mathbf{A}_i$ *paarweise unabhängig* (bzgl. $\frac{1}{b}\mathbf{I}$), wenn es beliebige Paare von Projektionen aus verschiedenen Orthogonalklassen sind, d.h. wenn

$$\operatorname{tr}(\mathbf{P}_{il}\mathbf{P}_{jm}) = \frac{1}{b}\operatorname{tr}(\mathbf{P}_{il})\operatorname{tr}(\mathbf{P}_{jm}) \tag{1.9}$$

für alle $1 \leq i \neq j \leq k$ und $1 \leq l \leq g_i$, $1 \leq m \leq g_j$ gilt.

Verlangen wir zusätzlich, daß das durch die Projektionen gebildete Quantendesign regulär ist, dann hat es Grad 2 mit $\Lambda = \{0, r^2/b\}$ und ist ein reguläres, affines Quantendesign. Wir werden in Abschnitt 2.3 zeigen, daß alle affinen Quantendesigns paarweise unabhängige Orthogonalklassen haben.

In der quantenmechanischen Literatur wurden bisher nur Spezialfälle betrachtet. Schwinger [68] bezeichnete die Gleichung (1.9) für eindimensionale Projektionen als *maximum degree of incompatibility* (siehe auch Accardi [1]).

Parthasarathy [65] betrachtete sogenannte *Spin-Observablen* $\mathbf{X}_i$, $1 \leq i \leq k$ mit nur zwei Eigenwerten (± 1). Er forderte bezüglich eines Dichteoperators $\mathbf{D}$, daß $\operatorname{tr}(\mathbf{X}_i\mathbf{D}) = 0$ und $\operatorname{tr}(\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\mathbf{D}) = c_{ij}$ mit einer positiv definiten Matrix $\mathbf{C} = (c_{ij})$ gilt. Der Spezialfall $\mathbf{D} = \frac{1}{b}\mathbf{I}$, $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ entspricht obiger Problemstellung. Als Spezialfall unserer Theorie werden wir in Abschnitt 2.3 zeigen, daß hierfür $k \leq n^2 - 1$ gilt (siehe auch [65, Exercise 5.8 (4)]) und wir werden die durch Satz 1.10 den kommutativen Observablen zugeordneten klassischen Strukturen darstellen, auf die auch Parthasarathy am Beispiel der Hadamard-Matrix [65, Seite 16] hinwies.

Wir skizzieren nun kurz eine weitere Definition, die sich aber bislang als nicht sehr fruchtbar erwies. Die Iteration des quantenmechanischen Meßprozesses ergibt für die Wahrscheinlichkeit nacheinander $\mathbf{P}_{i_1}, \mathbf{P}_{i_2}, \ldots, \mathbf{P}_{i_t}$ zu messen

$$\mu_d(\mathbf{P}_{i_t} \sqcap \cdots \sqcap \mathbf{P}_{i_1}) = \mathrm{tr}(\mathbf{P}_{i_t}\mathbf{P}_{i_{(t-1)}} \cdots \mathbf{P}_{i_1}\mathbf{D}\mathbf{P}_{i_1} \cdots \mathbf{P}_{i_{(t-1)}}\mathbf{P}_{i_t})$$

(siehe [72, Gleichung 5.15]). Betrachten wir nun Quantendesigns, für welche die gemeinsame Wahrscheinlichkeit von t beliebigen, verschiedenen Projektionen bzgl. $\frac{1}{b}\mathbf{I}$ konstant (und unabhängig von der Reihenfolge) ist. Seien den kommutativen Quantendesigns entsprechend der dualen Zuordnung von Satz 1.10 klassische kombinatorische Designs zugeordnet. Dann ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeit der t Projektionen proportional der Anzahl der Blöcke des Designs, in denen die t Punkte $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_t}$ gleichzeitig enthalten sind, d.h. die konstante Wahrscheinlichkeit entspricht bei der dualen Zuordnung im kommutativen Fall genau der Definition klassischer t-balancierter Designs.

Seien die Projektionen alle eindimensional, dann sieht man leicht, daß die gemeinsame Wahrscheinlichkeit von t Projektionen in diesem Fall immer von der Reihenfolge unabhängig ist und für Quantendesigns mit Grad 1 konstant gleich λ^t/b ist, d.h. auch $t \geq 2$ beliebige Projektionen eines regulären Quantendesigns mit Grad 1 und r=1 haben immer konstante gemeinsame Wahrscheinlichkeit. Im allgemeinen (z.B. für $r \geq 2$ oder im kommutativen Fall) gilt das nicht. Wir werden diese Quantendesigns für $t > 2$ hier nicht näher untersuchen.

Sei X eine lokalkompakte Menge mit Borelmaß dx und sei ψ_x für alle $x \in X$ ein normierter Vektor aus einem komplexen, separablen Hilbertraum. Es gibt verschiedene Definitionen aufgrund derer die Vektoren ψ_x, $x \in X$, als *kohärente Zustände* bezeichnet werden (siehe [22], [50] und [80]). Gemeinsam ist ihnen, daß für die orthogonalen Projektionen $\mathbf{P}_x$, welche jeweils auf die von ψ_x aufgespannten eindimensionalen Teilräume projizieren,

$$\int_X \mathbf{P}_x \, dx = \mathbf{I} \tag{1.10}$$

gilt. Sei der Hilbertraum gleich $\mathbb{C}^b$, $X = \{1, 2, \ldots, v\}$ und dx das Punktmaß, welches jedem $1 \leq i \leq v$ das Gewicht $\frac{1}{k}$ zuordnet. Dann entspricht die Gleichung (1.10) genau der Definition der Kohärenz des regulären Quantendesigns $\{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$. Die Verallgemeinerungen auf mehrdimensionale Projektionen werden in der Quantentheorie als *vektor-kohärente Zustände* bezeichnet.

Ein weitverbreiteter Zugang zur Theorie der kohärenten Zustände ist gruppentheoretischer Natur (siehe [80]). Sei G eine Lie-Gruppe, $\mathbf{U}(g)$ eine irreduzible, unitäre Darstellung von G über einem Hilbertraum und sei ψ_0 ein normierter (Anfangs-) Vektor. Sei H jene Untergruppe von G, welche ψ_0 bis auf einen beliebigen Phasenfaktor invariant läßt und sei für jedes $x \in G' \cong G/H$ ein Nebenklassenrepräsentant $g(x) \in G$ ausgewählt. Die kohärenten Zustände werden definiert durch

$$\psi_x = \mathbf{U}(g(x))\psi_0.$$

Definiert man auf G' ein geeignetes normiertes *Haar-Maß* dx, so folgt aus der Irreduzibilität der Darstellung $\mathbf{U}$ mittels des Lemmas von Schur sofort die Gleichung (1.10) (siehe [80]). Für Quantendesigns werden wir bei der Untersuchung ihrer *Automorphismengruppen* in Abschnitt 2.5 auf analoge Zusammenhänge stoßen.

Die Kohärenz läßt sich übrigens auch wahrscheinlichkeitstheoretisch motivieren. In Abschnitt 1.4 zeigen wir, daß ein reguläres Quantendesign genau dann kohärent ist, wenn der Mittelwert der Wahrscheinlichkeiten $\mu_D(\mathbf{P})$ bezüglich einer beliebigen Dichtematrix $\mathbf{D}$ über die Projektionen des Designs gleich dem Mittelwert über alle Projektionen mit derselben Spur ist.

Nicht nur die Definitionen der Quantendesigntheorie, sondern auch wichtige Konstruktionsansätze haben ein Gegenstück in der Quantentheorie, wie wir nun an zwei Beispielen zeigen. Eine zentrale Rolle spielen dabei die sogenannten *Weyl-Operatoren* bzw. die von ihnen erzeugte sogenannte *Heisenberg-Gruppe* (siehe [74]).

Als technische Voraussetzung für unser erstes Beispiel bemerken wir, daß in unendlichdimensionalen Hilberträumen für beliebige Projektionen $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ gilt $\mathrm{tr}(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1) = \mathrm{tr}(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)$. (Der Ausdruck $\mathrm{tr}(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)$ ist im allgemeinen nicht definiert, außer $\mathbf{P}_1$ oder $\mathbf{P}_2$ ist in der sogenannten Spurklasse [67]). In unendlichdimensionalen Vektorräumen ist zwar der Einheitsoperator kein Dichteoperator, da er sich nicht normieren läßt, trotzdem kann so etwas wie Unabhängigkeit bezüglich ihm definiert werden.

Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ zwei selbstadjungierte Operatoren über einem separablen Hilbertraum mit Spektrum $\sigma(\mathbf{A})$ und $\sigma(\mathbf{B})$. Wir nennen sie unabhängig (bzgl. $\mathbf{I}$), falls es Borelmaße μ_A auf $\sigma(\mathbf{A})$ und μ_B auf $\sigma(\mathbf{B})$ gibt, so daß für beliebige kompakte Teilmengen $E \in \sigma(\mathbf{A})$ und $F \in \sigma(\mathbf{B})$ gilt

$$\mathrm{tr}(\chi_E(\mathbf{A})\chi_F(\mathbf{B})\chi_E(\mathbf{A})) = \mu_A(E)\mu_B(F). \tag{1.11}$$

Falls der Hilbertraum endlichdimensional ist, stimmt diese Definition mit der Unabhängigkeit bezüglich $\frac{1}{b}\mathbf{I}$ überein. Sei $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{g} a_i\mathbf{P}_i$ und $\mathbf{B} = \sum_{j=1}^{h} b_j\mathbf{Q}_j$. Aus (1.11) folgt $\mathrm{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{Q}_j)\,\mathrm{tr}(\mathbf{P}_l\mathbf{Q}_m) = \mathrm{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{Q}_m)\,\mathrm{tr}(\mathbf{P}_l\mathbf{Q}_j)$ und durch Summation über l und m ergibt sich $\mathrm{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{Q}_j) = \frac{1}{b}\,\mathrm{tr}(\mathbf{P}_i)\,\mathrm{tr}(\mathbf{Q}_j)$. Umgekehrt sind $\mu_A(a_i) = \frac{1}{\sqrt{b}}\,\mathrm{tr}(\mathbf{P}_i)$ und $\mu_B(b_j) = \frac{1}{\sqrt{b}}\,\mathrm{tr}(\mathbf{Q}_j)$ passende Borelmaße nach obiger Definition.

Der Ortsoperator $\mathbf{X}$ und der Impulsoperator $\mathbf{P}$ sind jeweils auf einem dichten Teilraum von $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ definiert durch

$$(\mathbf{X}f)(x) = xf(x) \quad \text{und} \quad (\mathbf{P}f)(x) = -i\frac{d}{dx}f(x).$$

Man kann leicht sehen (siehe auch [3]), daß mit dem Lebesgue-Borelmaß λ auf $\mathbb{R}$ gilt $\mathrm{tr}(\chi_E(\mathbf{X})\chi_F(\mathbf{P})\chi_E(\mathbf{X})) = \frac{1}{2\pi}\lambda(E)\lambda(F)$, d.h. $\mathbf{X}$ und $\mathbf{P}$ sind unabhängig (obwohl sie durch die kanonische Vertauschungsrelation und die Heisenberg'sche Unschärferelation verknüpft sind). Den wahrscheinlichkeitstheoretischen Hintergrund der Unabhängigkeit von Orts- und Impulsobservablen in der Quantenmechanik herauszuarbeiten war der Anlaß für die Diplomarbeit [79] des Autors und damit indirekt auch für diese Arbeit.

Seien nun $\mathbf{A}_\alpha = \cos(\alpha)\mathbf{X} - \sin(\alpha)\mathbf{P}$ mit $\alpha \in [0, \pi)$. Dann sind $\mathbf{A}_\alpha$ und $\mathbf{A}_\beta$ für $\alpha \neq \beta$ ebenfalls paarweise unabhängig (da sie unitär äquivalent zu $c\mathbf{X}$ und

$d\mathbf{P}$ mit $c, d \neq 0$ sind, siehe [78]). Das heißt die $\mathbf{A}_\alpha$, $\alpha \in [0, \pi)$, bilden eine unendliche Menge paarweise unabhängiger Operatoren.

Wir ordnen nun jedem $\mathbf{A}_\alpha$ eine einparametrige, stark stetige Gruppe unitärer Operatoren zu durch $\mathbf{U}_\alpha(t) = e^{i\mathbf{A}_\alpha t}$ mit $t \in \mathbb{R}$. Die infinitesimalen Generatoren $\mathbf{A}_\alpha$ sind umgekehrt durch die Gruppen bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Mit $c = t\sin(\alpha)$ und $d = t\cos(\alpha)$ folgt

$$\mathbf{U}_\alpha(t) = \mathbf{W}(c, d) = e^{-icd/2} e^{-ic\mathbf{P}} e^{-id\mathbf{X}}. \tag{1.12}$$

Diese Operatoren sind genau die oben erwähnten Weyl-Operatoren und bilden mit $c, d \in \mathbb{R} \to \mathbf{W}(c, d)$ die eindeutige unitäre, irreduzible, projektive Darstellung der additiven Gruppe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ (siehe Thirring [74, Seite 76]). Sie lassen sich also durch Polarkoordinaten in unitäre, einparametrige Gruppen zerlegen, welche jeweils einen von unendlich vielen paarweise unabhängigen Operatoren festlegen.

Eine ähnliche Konstruktion werden wir auf die endlichdimensionalen *Weyl-Matrizen* anwenden, um in Abschnitt 3.2 maximale affine Quantendesigns zu konstruieren.

Unser zweites Beispiel sind die klassischen kohärenten Zustände, auch *Zustände minimaler Unschärfe* genannt, im Hilbertraum $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, welche Ausgangspunkt des Konzepts der Kohärenz waren und vielfältige Anwendungen in der Quantentheorie besitzen. Der Anfangsvektor ψ_0 ist der Grundzustand des harmonischen Oszillators (vacuum state). Dieser ist zugleich Eigenvektor der unendlichdimensionalen *Fourier-Transformation.* Durch Anwendung der Weyl-Operatoren entstehen die Projektionen $\mathbf{P}_x$, $x \in \mathbb{C}$. Für deren gemeinsame Wahrscheinlichkeiten oder *Übergangswahrscheinlichkeiten* gilt (siehe [80, Gleichung 2.20])

$$\lambda_{xy} = \mathrm{tr}(\mathbf{P}_x \mathbf{P}_y) = e^{-|x-y|^2} \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{C}.$$

Für die klassischen kohärenten Zustände ist also $\mathrm{tr}(\mathbf{P}_x \mathbf{P}_y)$ nur von $|x - y|$ abhängig. (Sie gehorchen sozusagen einem „unendlichen metrischen Assoziationsschema“).

Für die Konstruktion maximaler regulärer, kohärenter Quantendesigns mit Grad 1 in Abschnitt 3.4 werden wir, analog wie bei klassischen kohärenten Zuständen, die endlichdimensionalen Weyl-Matrizen verwenden und der Anfangsvektor ist ein Eigenvektor einer mit Hilfe der Fourier-Matrix gebildeten (und dieser sehr ähnlichen) Matrix.

Diese beiden Beispiele zeigen außerdem, daß es möglich ist, Teile der Quantendesigntheorie auch auf unendlichdimensionale Hilberträume zu verallgemeinern. Dieser Ansatz soll hier aber nicht weiter verfolgt werden.

1.4 Sphärische t-Designs

Zuerst müssen wir die t-Kohärenz noch etwas näher untersuchen und dazu brauchen wir wiederum noch etwas technische Vorbereitung.

Eine Menge X von (komplexen) $b \times b$ Matrizen heißt *G-Raum* bezüglich einer Gruppe $G \subseteq U(b)$, falls für alle $\mathbf{P} \in X$ und $\mathbf{U} \in G$ folgt, daß auch $\mathbf{UPU}^{-1} \in X$ ist. Falls es für alle $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in X$ ein $\mathbf{U} \in G$ gibt, so daß $\mathbf{UPU}^{-1} = \mathbf{Q}$ gilt, wird gesagt, daß G *transitiv* auf X wirkt bzw. wird X ein *homogener* G-Raum genannt (siehe [14, I.4], [49, I.2.2]).

Beispiele für homogene G-Räume sind die Mengen aller komplexen bzw. reellen orthogonalen Projektionsmatrizen mit einer festen Spur r bezüglich der Gruppe $G = U(b)$ bzw. $O(b)$. Diese Räume können auch mit $G_r(\mathbb{C}^b)$ bzw. $G_r(\mathbb{R}^b)$, den sogenannten *komplexen bzw. reellen Grassmann-Mannigfaltigkeiten* der r-dimensionalen Unterräume des $\mathbb{C}^b$ bzw. $\mathbb{R}^b$ identifiziert werden. Analog bilden die Mengen aller diagonalen Projektionsmatrizen mit einer festen Spur r bezüglich der Gruppe $G = S(b)$ jeweils homogene G-Räume.

Sei $\mathbf{P}_0$ ein beliebiger, fixer Punkt aus X. Die Menge aller Elemente von G, welche $\mathbf{P}_0$ festhalten, bilden eine Untergruppe H von G und

$$\pi : \mathbf{U} \to \mathbf{UP}_0\mathbf{U}^{-1}$$

ist die Projektion von G auf den homogenen G-Raum (bzw. die Quotientenmannigfaltigkeit) $X \cong G/H$. Das heißt übrigens auch, daß G und ein beliebiges fixes Element aus einem homogen G-Raum X diesen bereits vollständig bestimmen (erzeugen). Sei $\mathbf{P}_0$ eine Projektion der Spur r und $G = U(b)$, dann ist notwendigerweise $X = G_r(\mathbb{C}^b)$. Die Untergruppe H ist in diesem Fall äquivalent zu $U(r) \times U(b-r)$. Analog ist für $G = O(b)$ die Untergruppe $H \sim O(r) \times O(b-r)$.

Auf jeder Gruppe $G \subseteq U(b)$ ist ein eindeutiges normiertes und links-invariantes Integral, das sogenannte *Haar-Integral* definiert, das wegen der Kompaktheit von $G \subseteq U(b)$ auch rechts-invariant ist (siehe [14, I, Theorem 5.12]). Mit der Projektion π wird für beliebige stetige Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ durch

$$\int_X f(\mathbf{P})dp = \int_G f(\mathbf{UP}_0\mathbf{U}^{-1})du \tag{1.13}$$

ein eindeutiges, normiertes, bzgl. G invariantes Integral auf X definiert (siehe [49, Abschnitt II.9]). Im Beispiel des homogenen G-Raumes der diagonalen Projektionsmatrizen bzgl. $S(b)$ wir das Integral zu einer diskreten Summe.

Definition 1.14. Sei $\mathbf{P}_0$ ein fixes Element eines homogenen G-Raumes X. Wir bezeichnen für beliebige $t \geq 1$ den Tensor

$$\mathbf{K}_t(X) = \int_X \otimes^t \mathbf{P}dp = \int_G \otimes^t \mathbf{UP}_0\mathbf{U}^{-1}du$$

als *t-Kohärenztensor bezüglich des G-Raumes X*.

Ist $\mathbf{P}_0$ eine Projektion der Spur r, dann folgt, wegen der Normiertheit des Integrals, für alle homogenen G-Räume $\mathrm{tr}(\mathbf{K}_t(X)) = r^t$. Für $t = 1$ und irreduzible Gruppen G folgt speziell $\mathbf{K}_1(X) = \frac{r}{b}\mathbf{I}$.

Satz 1.15. *Sei $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ ein Quantendesign, $G \subseteq U(b)$ und seien X_i, $1 \leq i \leq v$, die durch die $\mathbf{P}_i$ erzeugten G-Räume. $\mathbf{D}$ ist genau dann t-kohärent bzgl. G, wenn gilt*

$$\sum_{i=1}^{v} \otimes^t \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^{v} \mathbf{K}_t(X_i). \tag{1.14}$$

Ist $\mathbf{D}$ auch regulär und $X_i = X$ für alle $1 \leq i \leq v$, so gilt

$$\frac{1}{v} \sum_{i=1}^{v} \otimes^t \mathbf{P}_i = \mathbf{K}_t(X). \tag{1.15}$$

Beweis. Sei $\mathbf{D}$ t-kohärent bzgl. G. Wir brauchen nur die Gleichung (1.3) über die Gruppe G zu integrieren und erhalten sofort die Gleichung (1.14).

Wird diese Gleichung umgekehrt von einem Quantendesign erfüllt, so folgt, da $\mathbf{K}_t(X_i) = \otimes^t \mathbf{U}(\mathbf{K}_t(X_i)) \otimes^t \mathbf{U}^{-1}$ für alle $\mathbf{U} \in G$ gilt, sofort die t-Kohärenz bzgl. G. $\square$

Die Menge der komplexen Polynome in b^2 Variablen (als Koordinaten im Raum der komplexen $b \times b$ Matrizen interpretiert) vom Grad kleiner gleich t bezeichnen wir eingeschränkt auf die Menge (Mannigfaltigkeit) X als den Polynomraum $\mathrm{Pol}(X, t)$. Seien $\mathbf{C}$ beliebige komplexe $b^t \times b^t$ Matrizen mit $t \geq 1$ und $\mathbf{P} \in X$. Dann sind alle $f(\mathbf{P}) = \mathrm{tr}\left((\otimes^t \mathbf{P})\mathbf{C}\right)$, welche auf X nicht verschwinden, genau die *homogenen Polynome* vom Grad t in $\mathrm{Pol}(X, t)$, welche wir als $\mathrm{Hom}(X, t)$ bezeichnen. Matrixeinträge von $\otimes^t \mathbf{P}$, welche auf X nicht verschwinden, sind genau alle Monome vom Grad t.

Satz 1.16. *Sei $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ ein Quantendesign, $G \subseteq U(b)$ und seien X_i, $1 \leq i \leq v$, die durch die $\mathbf{P}_i$ erzeugten G-Räume und sei $X = \bigcup_{i=1}^{v} X_i$. $\mathbf{D}$ ist genau dann t-kohärent bzgl. G, wenn für alle homogenen Polynome $f(\mathbf{P}) \in$ $\mathrm{Hom}(X, t)$ gilt*

$$\sum_{i=1}^{v} f(\mathbf{P}_i) = \sum_{i=1}^{v} \int_{X_i} f(\mathbf{P}) dp. \tag{1.16}$$

Ist $\mathbf{D}$ auch regulär und $X_i = X$ für alle $1 \leq i \leq v$, so gilt

$$\frac{1}{v} \sum_{i=1}^{v} f(\mathbf{P}_i) = \int_{X} f(\mathbf{P}) dp. \tag{1.17}$$

Das heißt der Mittelwert jedes homogenen Polynoms vom Grad t über alle Elemente des Designs ist gleich dem Mittelwert über den gesamten homogenen G-Raum X. Das Design ist genau dann ein t-Quantendesign, wenn dies für alle Polynome $f(\mathbf{P}) \in \mathrm{Pol}(X, t)$ gilt.

Beweis. Zum Beweis müssen nur die Gleichungen von Theorem 1.15 mit einer beliebigen komplexen $b^t \times b^t$ Matrix multipliziert und davon die Spur gebildet werden. Umgekehrt gilt es dann für jedes Monom, d.h. alle Einträge von $\otimes^t \mathbf{P}$. $\square$

Wir betrachten nun den Spezialfall regulärer Quantendesigns mit $r = 1$.

Die Vektoren der komplexen bzw. reellen Einheitssphären Ω in einen b-dimensionalen Vektorraum V werden durch die Abbildung

$$\mathbf{e} = (e_i)_{1 \le i \le b} \;\mapsto\; \mathbf{P_e} = (e_i \bar{e}_j)_{1 \le i,j \le b} \tag{1.18}$$

auf orthogonale Projektionen, d.h. Elemente der Grassmann-Mannigfaltigkeiten $G_1(\mathbb{C}^b)$ bzw. $G_1(\mathbb{R}^b)$ abgebildet. Folglich können Quantendesigns mit $r = 1$ auch durch normierte Vektoren, sogenannte *sphärischen Designs*, beschrieben werden. Diese Vektoren sind aber durch die Gleichung (1.18) nicht eindeutig festgelegt, da normierte Vektoren, die sich nur um eine komplexe Phase (bzw. reelle Phase ± 1) unterscheiden und damit denselben Teilraum aufspannen, dieselbe Projektion $\mathbf{P}$ zugeordnet erhalten. Eine Teilmenge Y der Einheitssphäre heißt *antipodal*, falls mit jedem Vektor $\mathbf{e} \in Y$ auch gilt $-\mathbf{e} \in Y$. Entsprechend können Quantendesigns mit $r = 1$ auch durch antipodale, sphärische Designs mit $2v$ normierten Vektoren beschrieben werden. Reellen Quantendesigns mit $r = 1$ sind eindeutige, antipodale, sphärische Designs zugeordnet.

Aus $\mathbf{P_e}\,\mathbf{x} = \langle \mathbf{x} | \mathbf{e} \rangle\, \mathbf{e}$ für alle $\mathbf{x} \in V$ folgt sofort

$$\operatorname{tr}(\mathbf{P_e P_f}) = |\langle \mathbf{e} | \mathbf{f} \rangle|^2 \qquad \text{für alle } \mathbf{e}, \mathbf{f} \in V. \tag{1.19}$$

In reellen Vektorräumen ist der Absolutbetrag des inneren Produkts zweier normierter Vektoren gleich dem *Cosinus* des Winkels zwischen ihnen. Folglich entsprechen reguläre Quantendesigns mit Grad 1 und $r = 1$ in reellen Vektorräumen genau *gleichwinkeligen Liniensystemen*. Diese wurden erstmals in [55] und [52] untersucht.

Später dehnten Delsarte, Goethals und Seidel [24] die Untersuchung auf komplexe Vektorräume und s-elementige Winkelmengen (Grad $s \ge 2$) aus. In [41] wurden auch Vektorräume über den Quaternionen betrachtet. In reellen Vektorräumen wurden auch manchmal die Phase des inneren Produkts zur Bestimmung des Grades berücksichtigt (siehe z.B.[25]).

In [43] findet man einen Überblick bekannter gleichwinkeliger Liniensysteme in reellen und komplexen Vektorräumen. Durch Bildung des komplementären Designs für $b \ge 2$ und durch Summation solcher Designs erhält man sofort Beispiele für Quantendesigns mit Grad 1 und mit $r \ge 2$.

Vollständige Orthogonalklassen entsprechen Orthonormalbasen. Obwohl in der Literatur auch speziell sphärische Designs mit Grad 2 und insbesondere mit $\Lambda = \{0, \lambda\}$ betrachtet wurden, sind affine Designs, d.h. die Zerlegung dieser Designs in Orthonormalbasen, nicht explizit untersucht worden. Trotzdem wurden implizit Lösungen gefunden, welche wir in Abschnitt 3.3 anführen.

Seien $\mathbf{e}_j = (e_{ij})_{1\leq i\leq b}$ für $1 \leq j \leq v$ normierte Vektoren und $\mathbf{E}$ die $b \times v$ Matrix, die durch die v Vektoren $\mathbf{e}_j$, $1 \leq j \leq v$, als Spalten erzeugt wird, d.h. $\mathbf{E} = (e_{ij})_{1\leq i\leq b, 1\leq j\leq v}$, dann folgt sofort

$$\sum_{j=1}^{v} \mathbf{P}_{\mathbf{e_j}} = \mathbf{E}\mathbf{E}^*.$$

Also ist die Kohärenz äquivalent zu $\mathbf{E}\mathbf{E}^* = k\mathbf{I}$. Vektorsysteme mit dieser Eigenschaft wurden von SEIDEL in [69] *eutaktisch* genannt. Sie wurden zuvor auch von HADWIGER unter der Bezeichnung *normierte Koordinatensterne* (siehe [33]) untersucht (und noch früher von POHLKE und SCHLÄFLI).

In Anschluß an Resultate über gleichwinkelige Liniensysteme wurden von DELSARTE, GOETHALS und SEIDEL in [25] sogenannte (reelle) *sphärische t-Designs* definiert. Eine endliche Teilmenge Y der reellen Einheitssphäre hat *Index s*, falls die Summe der Werte jedes homogenen harmonischen Polynoms vom Grad s über die Punkte von Y gleich Null ist und heißt sphärisches t-Design, falls es alle Indizes kleiner gleich t hat. Y hat Index s genau dann, wenn die Summe der Werte jedes homogenen Polynoms f vom Grad s über die Punkte von Y geteilt durch die Anzahl der Punkte gleich dem Integral des Polynoms über die Einheitssphäre ist, d.h.

$$\frac{1}{|Y|} \sum_{y\in Y} f(y) = \int_{\Omega} f(y) d\omega(y).$$

Es genügt dies für $s = t$ zu zeigen (woraus $s-2, s-4, \ldots$ folgt) und für $s = t-1$ (woraus $s-3, s-5, \ldots$ folgt) um zu zeigen, daß Y ein t-Design ist. (siehe [30, Theorem 4.4]).

Der Raum der homogenen Polynome von Grad t über der Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_1(\mathbb{C}^b)$ ist mit der Abbildung (1.18) isomorph zum Raum der Polynome über der komplexen Einheitssphäre $\Omega(\mathbb{C}^b)$, welche homogen vom Grad t in den Variablen x_i und homogen vom Grad t in den Variablen $\bar{x}_j$ sind. Analog ist der Raum der homogenen Polynome von Grad t über $G_1(\mathbb{R}^b)$ isomorph zum Raum der Polynome über $\Omega(\mathbb{R}^b)$, welche homogen vom Grad $2t$ sind (siehe auch GODSIL [29, Kapitel 14, Bsp. 15]). Das Integral über die Grassmann-Mannigfaltigkeiten ist für diese Polynome mit dem (normierten Haar-) Integral über die entsprechenden Einheitssphären identisch.

Es folgt mit Satz 1.16, daß ein reelles, sphärisches Design genau dann den Index $2t$ (und damit alle geraden Indizes kleiner gleich $2t$) besitzt, wenn das zugeordnete reguläre Quantendesign t-kohärent bzgl. $O(b)$ (und damit ein t-Quantendesign bzgl. $O(b)$) ist. Insbesondere entspricht Index 2 der Kohärenz. Die ungeraden Indizes entsprechen keiner Eigenschaft der Quantendesigns, da sie von den Phasen der Vektoren abhängen. Da aber antipodale, sphärische Designs stets alle ungeraden Indizes besitzen, können jedem regulären t-Quantendesign bzgl. $O(b)$ mit $r = 1$ auch antipodale, sphärische $(2t+1)$-Designs (mit $2v$ Vektoren) zugeordnet werden.

Siehe [31] für einen Überblick bekannter Beispiele von sphärischen t-Designs und speziell für sphärische 4-Designs [36]. Über die komplementären Designs erhalten wir damit auch erste Beispiele für t-Quantendesigns mit $r \geq 2$.

In den Arbeiten [63] und [71] wurde festgestellt, daß Y genau dann Index t hat, wenn

$$\frac{1}{|Y|}\sum_{y\in Y}\otimes^t y = \mathbf{D} \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{D} = \int_\Omega \otimes^t y \, d\omega(y) \tag{1.20}$$

gilt. Die Tensoren $\mathbf{D}$ zum Index $2t$ sind äquivalent zu den t-Kohärenztensoren bzgl. den reellen Grassmann-Mannigfaltigkeiten mit $r = 1$ (für ungerade Indizes gilt $\mathbf{D} = \mathbf{0}$). Der Zusammenhang mit der orthogonalen Invarianz, wie wir sie zur Definition der t-Kohärenz herangezogen haben, wurde auch schon früh bemerkt (siehe [30]) und wurde in [64] detailliert behandelt.

NEUMAIER [62] verallgemeinerte das Konzept der t-Designs auf sogenannte *Delsarte Räume*. Er zeigte, daß neben der reellen Einheitssphäre die projektiven Räume über den reellen und komplexen Zahlen bzw. den Quaternionen und Cayley Zahlen (d.h. die symmetrischen Räume vom Rang 1) mit der durch $d(\mathbf{PQ}) = \sqrt{1-\mathrm{tr}(\mathbf{PQ})}$ definierten Metrik Delsarte Räume bilden. In einer Reihe von Arbeiten (siehe [43], [44], [10], [45] und [46]) wurden von HOGGAR t-Designs für diese Räume untersucht. Solche t-Designs entsprechen für den reellen bzw. komplexen Fall genau regulären t-Quantendesigns mit $r = 1$ bzgl. $O(b)$ bzw. $U(b)$ (d.h. über den reellen bzw. komplexen Grassmannräumen $G_1(\mathbb{R}^b)$ bzw. $G_1(\mathbb{C}^b)$). In [43] wurden auch viele Beispiele gegeben, so daß wir über die komplementären Designs auch Beispiele für t-Quantendesigns mit $r \geq 2$ im Komplexen haben.

Eine weitere Verallgemeinerung, die sowohl sphärische t-Designs als auch t-Designs über projektiven Räumen umfaßt, ist das Konzept der t-Designs über sogenannten *Polynomialen Räumen* von GODSIL [29].

Ein Polynomialer Raum besteht aus einer Menge Ω, einer reellwertigen, sogenannten *Trennungsfunktion* ρ auf Ω und einem inneren Produkt auf der Menge $\mathrm{Pol}(\Omega)$, der Polynome über Ω.

Sei $G \subseteq U(b)$ und seien X_j, $1 \leq j \leq s$, verschiedene, homogene G-Räume von $b \times b$ Projektionsmatrizen (unter Ähnlichkeitstransformationen aus G). Seien n_j, $1 \leq j \leq s$, beliebige natürliche Zahlen, $w = n_1 + \cdots + n_s$ und sei

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{s} X_j, \tag{1.21a}$$

$$\rho(\mathbf{P},\mathbf{Q}) = \mathrm{tr}(\mathbf{PQ}) \quad \text{für alle } \mathbf{P},\mathbf{Q} \in \Omega, \tag{1.21b}$$

$$\langle f(\mathbf{P})|g(\mathbf{P})\rangle = \sum_{j=1}^{s}\frac{n_j}{w}\int_{X_j} f(\mathbf{P})g(\mathbf{P})dp \quad \text{für alle } f(\mathbf{P}), g(\mathbf{P}) \in \mathrm{Pol}(\Omega). \tag{1.21c}$$

mit den durch G definierten, eindeutigen, normierten Integralen auf den X_j, $1 \leq j \leq s$. Dann wird dadurch ein Polynomialer Raum entsprechend der Definition von [29, Kapitel 14.2] gebildet. Die darauf aufbauende Definition des Grades für endliche Teilmengen von Ω stimmt mit unseren Definitionen für Quantendesigns überein. t-Designs über Polynomialen Räumen sind endliche Teilmengen $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ von Ω, für die gilt

$$\langle 1|f(\mathbf{P})\rangle = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} f(\mathbf{P}_i) \quad \text{für alle } f(\mathbf{P}) \in \mathrm{Pol}(\Omega).$$

Das stimmt nach Gleichung (1.16) mit der Definition von t-Quantendesigns $\mathbf{D}$ überein unter der Bedingung, daß für die Anzahl m_j der Projektionen $\mathbf{P}_i \in X_j$ gilt, daß $\frac{m_j}{v} = \frac{n_j}{w}$ ist für alle $1 \leq j \leq s$. Diese Bedingung ist trivial, falls das Design regulär ist und alle X_i gleich sind (d.h. $s = 1$).

Zur Illustration wurden in [29] hauptsächlich (reelle) sphärische Designs herangezogen bzw. die sogenannten *Johnson Schemata*, welche klassischen Designs entsprechen und als kommutativer Spezialfall auch in unserem Konzept enthalten sind. In einem Beispiel [29, Kapitel 14.3 (i)] wurde nur kurz angedeutet, daß die reellen Grassmannräume mit der Spurfunktion polynomiale Räume bilden.

Grundlegende Zusammenhänge dieser Theorie gelten also unverändert für Quantendesigns (siehe Abschnitt 2.1). Im besonderen wurden in [29] sogenannte *Q-Polynomiale Räume* (welche zu Delsarte Räumen äquivalent sind) untersucht und für diese eine Reihe von Folgerungen abgeleitet. Wir werden in Abschnitt 2.4 eine dieser Folgerungen für Grad 1 (und $t = 2$) auf beliebigen Grassmannräumen beweisen. Die Verallgemeinerung dieser Ergebnisse auf beliebige (homogene) G-Räume (und $s > 1$ bzw. $t > 2$) ist aber nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Eine Teilmenge $\mathbf{D}$ eines polynomialen Raumes wird in [29, Abschnitt 16.5] *imprimitiv* genannt, falls es eine nichtriviale Partition von $\mathbf{D}$ gibt, so daß $\mathbf{P}_i$ und $\mathbf{P}_j$ genau dann in derselben sogenannten *Parallelklasse* liegen, wenn $\rho(\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j) = \mathrm{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j) \in \Lambda' \subset \Lambda$. Auflösbare Quantendesigns sind imprimitiv mit $\Lambda' = \{0\}$, wobei aber zusätzlich die Vollständigkeit der Parallel- bzw. Orthogonalklassen gefordert wird.

In der Literatur gibt es auch zwei Ansätze zu einer Verallgemeinerungen in Richtung $r > 2$ bzw. der Nichtregulariät.

Multisphärische oder Euklidische t-Designs (siehe [63], [70], [71]) sind eine Verallgemeinerung von Teilmengen der Einheitssphäre auf beliebige Vektormengen Y im $\mathbb{R}^b$. Sie können auch als Teilmengen mehrerer konzentrischer Sphären verstanden werden. Da das normierte Integral von $\otimes^t y$ über die Sphäre mit Radius r genau $r^t\mathbf{D}$ ist, wurde als Bedingung für den Index t gefordert, daß $\sum_{y\in Y} \otimes^t y = \sum_{y\in Y} \|y\|^t \mathbf{D}$ gilt. Nichtreguläre Quantendesigns können auch als Designs auf mehreren Sphären vom Radius r_i, $1 \leq i \leq v$, im b^2-dimensionalen Vektorraum aller $b \times b$ Matrizen interpretiert werden. Da zur Berechnung der Kohärenztensoren aber jeweils nur über (verschiedene) Teilmannigfaltigkeiten (bzw. Teilmengen) dieser Sphären integriert wird, sind diese für verschiedene r (und festes b sowie t) nicht proportional, so daß die Definition der t-Kohärenz für nichtreguläre Quantendesigns verschieden ist von obigem Ansatz.

Die Definition von sphärischen Designs basiert auf endlichen Teilmengen der Einheitssphäre in reellen (oder komplexen und anderen) Vektorräumen. In zwei frühen Arbeiten ([53] und [40]) wurde versucht die Theorie von solchen Vektor- (oder Linien-) Systemen auf Systeme von Unterräumen (Ebenen) zu verallgemeinern. Hierbei wurde aber eine Einschränkung auf sogenannte paarweise *isokline* Unterräume gemacht. In reellen Vektorräumen heißt dies, daß die beiden Vektorräume gleichdimensional sein müssen und der Winkel zwischen einem beliebigen Vektor in einem der Unterräume und dessen orthogonaler Projektion auf einen anderen Unterraum konstant sein muß.

Seien $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ Projektionen auf zwei gleichdimensionale Unterräume im $\mathbb{R}^n$, dann sind diese genau dann isoklin, wenn es einen Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$\mathbf{PQP} = \gamma \mathbf{P} \tag{1.22}$$

(und daher auch $\mathbf{QPQ} = \gamma \mathbf{Q}$) gilt (siehe [53], Theorem 2.3). Diese Definition kann auch problemlos auf komplexe Vektorräume übertragen werden (siehe [40]).

Angenommen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ kommutieren, dann folgt $\gamma\mathbf{P} = \mathbf{PQP} = \mathbf{QP}^2 = \mathbf{Q}^2\mathbf{P} = \mathbf{QPQ} = \gamma\mathbf{Q}$. Also ist dann entweder $\gamma = 0$ und $\mathbf{P}$ orthogonal zu $\mathbf{Q}$ oder $\gamma = 1$ und $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$. Die kommutativen paarweise isoklinen Designs sind also trivial.

Man kann nun zeigen, daß nichtkommutative Projektionen, welche Gleichung (1.22) erfüllen, gleichdimensional sein müssen, d.h., daß das zugeordnete Quantendesign regulär sein muß (während dies in den Arbeiten [53] und [40] vorausgesetzt wurde). Es folgt $\mathrm{tr}(\mathbf{PQ}) = \mathrm{tr}(\gamma\mathbf{P}) = \gamma r$ und folgender einfacher Zusammenhang.

Proposition 1.17. *Die den equiisoklinen Unterräumen, d.h. den paarweise isoklinen Unterräumen mit konstantem Parameter $\gamma \neq 0$, zugeordneten orthogonalen Projektionen bilden ein reguläres Quantendesign mit Grad* 1 *und $\lambda = \gamma r$.*

In Abschnitt 2.4 werden wir zeigen, daß die zentralen Ergebnisse von [53] und [40] aber ganz allgemein für Quantendesigns mit Grad 1 gelten, ohne die beträchtliche Einschränkung, daß die Unterräume isoklin seien.

Verschiedentlich (siehe z.B. [25], [71] und [45]) wurde auch folgendermaßen ein Zusammenhang zwischen reellen, sphärischen Designs und klassischen Designs hergestellt. Vektoren in einem v-dimensionalen Vektorraum mit Koordinaten $x_i \in \{0,1\}$ und $\sum_{i=1}^{v} x_i^2 = k$ (d.h auf der Sphäre mit Radius k) wurden mit den Spalten einer Inzidenzmatrix identifiziert. Die zugeordneten klassischen Designs haben konstante Blockgröße k. Sphärischen t-Designs werden so klassische t-Designs zugeordnet. Designs mit nichtkonstanter Blockgröße entsprechen multisphärischen Designs.

Diese Einbettung ist sehr ähnlich zur Zuordnung von Satz 1.10, welche aber sowohl sphärische als auch klassische Designs in eine umfangreichere Theorie mit mehrdimensionalen Projektionen einbettet. Außerdem ist die Charakterisierung klassischer Designs über die Kommutativität im Gegensatz zu obiger Einbettung darstellungsunabhängig (sie bleibt unter Äquivalenzabbildungen erhalten).

1.5 Gegenüberstellung

Die folgende Tabelle gibt eine Gegenüberstellung der Begriffe der klassischen Designtheorie und jener sphärischer Designs mit der Quantendesigntheorie und ihrer quantentheoretischen Interpretationen.

Klassische Designs	Sphärische Designs	Quantendesigns	Quantentheorie
Block B	normierter Vektor	Projektions-matrix $\mathbf{P}$	Ereignis
Mächtigkeit des Blocks B	1	$\mathrm{tr}(\mathbf{P})$	$\sim$ Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
konstante Blockgrösse	immer erfüllt	regulär	gleichwahrscheinliche Ereignisse
konstante Zahl von Blöcken durch alle Punkte	eutaktisch, Index 2	kohärent	kohärente Zustände
t-balanciert, t-Design	Index $2t$, antipodales $(2t+1)$- Design	t-kohärent, t-Quantendesign	Erweiterung der Kohärenz
Mächtigkeit des Durchschnitts von B_i und B_j	Winkel, inneres Produkt	$\mathrm{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j)$	$\sim$ gemeinsame Wahrscheinlichkeit
konstanter Durchschnitt zweier Blöcke	gleichwinkelig, Grad 1	Grad 1	konstante gemeinsame Wahrscheinlichkeit
s Werte für den Durchschnitt zweier Blöcke	Grad s	Grad s	s gemeinsame Wahrscheinlichkeiten
auflösbar	disjunkte Vereinigung von Orthonormalbasen	auflösbar	$\sim$ Mengen von Observablen
affines 1-Design, Netz, orthogonal array	disjunkte Vereinigung von Orthonormalbasen mit Grad 2	affines, reguläres Quantendesign	$\sim$ paarweise unabhängige Observablen

2 Eigenschaften

2.1 Schranken

Sei nun X eine Menge von $b \times b$ Matrizen mit konstanter Spur r. Sei $\mathbf{C} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{C}'$ mit der $b \times b$ Einheitsmatrix und einer $b^{(t-1)} \times b^{(t-1)}$ Matrix $\mathbf{C}'$. Dann folgt

$$\operatorname{tr}\left((\mathbf{I} \otimes \mathbf{C}')(\otimes^t \mathbf{P})\right) = r \operatorname{tr}\left(\mathbf{C}'(\otimes^{(t-1)}\mathbf{P})\right) \in \operatorname{Hom}(X, t).$$

Also folgt für die homogenen Polynome über X, daß $\operatorname{Hom}(X, t-1) \subset \operatorname{Hom}(X, t)$ gilt und durch Induktion folgt, daß $\operatorname{Hom}(X, t) = \operatorname{Pol}(X, t)$ gilt.

Proposition 2.1. *Sei das Quantendesign $\mathbf{D}$ regulär und t-kohärent bzgl. einer Gruppe G. Dann folgt, daß $\mathbf{D}$ ein t-Quantendesign bzgl. G ist.*

Beweis. Für reguläre Quantendesigns hat der G-Raum $X = \bigcup_{i=1}^{v} X_i$, wobei X_i, $1 \leq i \leq v$, die durch die $\mathbf{P}_i$ erzeugten homogenen G-Räume seien, konstante Spur. Mit $\operatorname{Hom}(X, t) = \operatorname{Pol}(X, t)$ und Satz 1.16 folgt das Ergebnis. □

Aber Achtung, selbst für reguläre Quantendesigns, ist der G-Raum $X = \bigcup_{i=1}^{v} X_i$, wobei die X_i, $1 \leq i \leq v$, die durch die $\mathbf{P}_i$ erzeugten homogenen G-Räume seien, nicht notwendigerweise selbst homogen.

Für reguläre Quantendesigns existiert ein homogener G-Raum X bzgl. einer Gruppe G genau dann, wenn G auch transitiv auf $\mathbf{D}$ wirkt. Einerseits muß G auf eine Teilmenge des G-Raumes transitiv wirken. Ist dies andererseits der Fall, so folgt sofort $X_i = X$ für alle $1 \leq i \leq v$.

Satz 2.2 (Absolute Schranke). *Sei $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ ein Quantendesign vom Grad s und $\operatorname{tr}(\mathbf{P}_i) = r_i \notin \Lambda$ für alle $1 \leq i \leq v$. Sei weiters X eine beliebige Menge von $b \times b$ Matrizen mit $\mathbf{D} \subseteq X$. Dann gilt*

$$v \leq \dim(\operatorname{Pol}(X, s)). \tag{2.1}$$

Beweis. Sei $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$. Die Polynome

$$f_i(\mathbf{P}) = \prod_{l=1}^{s} \left(\operatorname{tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}_i) - \lambda_l\right), \qquad 1 \leq i \leq v,$$

sind aus $\operatorname{Pol}(X, s)$ und es gilt auf $\mathbf{D} \subseteq X$

$$f_i(\mathbf{P}_j) = \begin{cases} 0 & \text{für alle } 1 \leq i \neq j \leq v, \\ \prod_{l=1}^{s}(r_i - \lambda_l) \neq 0 & \text{für alle } 1 \leq i = j \leq v. \end{cases}$$

Also sind die Polynome linear unabhängig. Es folgt, daß ihre Anzahl v durch $\dim(\operatorname{Pol}(X, s))$ beschränkt ist. □

Die Idee des Beweises geht für $r = 1$ auf KOORNWINDER [51] zurück und gilt speziell auch für polynomiale Räume (siehe [29, Satz 14.4.1]). Es wird aber nicht vorausgesetzt, daß X die Vereinigung von G-Räumen ist (wir brauchen auch kein Integral darauf), so daß der Satz auch für nichtpolynomiale Räume (und Mengen X) gilt. Die Bedingung $\mathrm{tr}(\mathbf{P}_i) = r_i \notin \Lambda$ für alle $1 \leq i \leq v$ erlaubt auch eine leichte Verallgemeinerung (siehe [29, Satz 14.4.1]).

Sei X der reelle Grassmannraum mit $r = 1$, dann ist $\mathrm{Pol}(G_1(\mathbb{R}^b), s)$ äquivalent zum Raum aller homogenen Polynome vom Grad $2s$ über der Einheitssphäre und es gilt bekanntlich $\dim(\mathrm{Pol}(G_1(\mathbb{R}^b), s)) = \binom{b+2s-1}{b-1}$. Ist X der komplexe Grassmannraum mit $r = 1$, dann ist $\mathrm{Pol}(G_1(\mathbb{C}^b), s)$ äquivalent zum Raum aller Polynome über der komplexen Einheitssphäre, welche homogen vom Grad s in den Variablen x_i und homogen vom Grad s in den Variablen $\bar{x}_j$ sind und es gilt $\dim(\mathrm{Pol}(G_1(\mathbb{C}^b), s)) = \binom{b+s-1}{b-1}^2$ (siehe [24]). Unter Berücksichtigung der Phasen der inneren Produkte von Vektoren wurden in [25] ähnliche weitere Schranken hergeleitet.

Ist $\mathbf{D}$ regulär, so kann X in Satz 2.2 auch als eine Menge mit konstanter Spur gewählt werden und es gilt $v \leq \dim(\mathrm{Hom}(X, t))$. In Abschnitt 2.4 werden wir für $s = 1$ zeigen, daß dies auch für nichtreguläre Designs gilt, so daß hier Satz 2.2 nicht die bestmögliche Schranke liefert.

Satz 2.3. *Sei das Quantendesign $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ $2e$-kohärent bzgl. $G \subseteq U(b)$, seien X_i, $1 \leq i \leq v$, die durch die $\mathbf{P}_i$ erzeugten G-Räume und sei $X = \bigcup_{i=1}^{v} X_i$. Dann gilt*

$$v \geq \dim(\mathrm{Hom}(X, e)). \tag{2.2}$$

Ist $\mathbf{D}$ ein $2e$-Quantendesign bzgl. G (z.B. regulär), dann gilt

$$v \geq \dim(\mathrm{Pol}(X, e)). \tag{2.3}$$

Beweis. Sei $h_1, \ldots, h_n$ eine Orthonormalbasis für $\mathrm{Hom}(X, e)$ bezüglich des inneren Produkts

$$\langle h_l | h_m \rangle = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{v} \int_{X_i} h_l(\mathbf{P}) h_m(\mathbf{P}) dp,$$

d.h. $\langle h_l | h_m \rangle = \delta_{lm}$, $1 \leq l, m \leq n$. (Durch das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren kann immer eine solche Basis gefunden werden). Die Produkte $h_l h_m$ sind homogen vom Grad $2e$. Da das Quantendesign $2e$-kohärent bzgl. G ist, folgt mit Gleichung (1.16)

$$\sum_{i=1}^{v} h_l(\mathbf{P}_i) h_m(\mathbf{P}_i) = \delta_{lm} \quad \text{für alle } 1 \leq l, m \leq n.$$

Also sind die Polynome paarweise orthogonal auf $\mathbf{D}$ und damit linear unabhängig. Es folgt, daß $n = \dim(\mathrm{Hom}(X, e))$ durch $v = |\mathbf{D}|$ beschränkt ist.

Dieselben Überlegungen gelten mit Orthonormalbasen von $\mathrm{Pol}(X, e)$ für t-Quantendesigns. $\square$

Quantendesigns, für welche die Ungleichung (2.2) zur Gleichheit wird, nennen wir *straff (tight)*.

Der Beweis folgt [29, Satz 14.5.1], doch wurde die Formulierung von t-Quantendesigns auf t-Kohärenz (für nichtreguläre Designs) verallgemeinert. Für $r = 1$ entsprechen diese Schranken genau den unteren Schranken für t-Designs über projektiven Räumen (siehe [10]). Unter Berücksichtigung der Phasen der Vektoren wurden in [25] schärfere Schranken für reelle, sphärische t-Designs abgeleitet (siehe auch [6] und [7])

Ist $\mathbf{D}$ ein $(2e+1)$-Quantendesign, so ist es auch ein $2e$-Quantendesign und es gilt wieder die Ungleichung (2.3). Diese Schranke ist aber im allgemeinen nicht die bestmögliche. Zum Beispiel liefert sie für (1-) kohärente Quantendesigns $v \geq 1$. Wir werden aber zeigen, daß z.B. für reguläre, kohärente Designs $v \geq b/r$ gilt.

Für die nun folgenden speziellen Schranken brauchen wir vorerst ein Lemma.

Lemma 2.4. *Sei $G \subseteq U(b)$ und seien $\mathbf{K}_t(X_1)$ und $\mathbf{K}_t(X_2)$ die zwei Kohärenztensoren bzgl. der homogenen G-Räume X_1 und X_2. Sei $\mathbf{P}_1$ eine beliebige Matrix aus X_1. Dann gilt*

$$\operatorname{tr}\left(\mathbf{K}_t(X_1)\mathbf{K}_t(X_2)\right) = \operatorname{tr}\left(\left(\otimes^t \mathbf{P}_1\right) \mathbf{K}_t(X_2)\right).$$

Beweis. Seien $\mathbf{P}_1 \in X_1$ und $\mathbf{P}_2 \in X_2$. Wir verwenden, daß die Spurfunktion invariant unter Ähnlichkeitstransformationen mit $U \in G \subseteq U(b)$ ist und ebenso jeder Kohärenztensor bzgl. eines G-Raumes.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\left(\mathbf{K}_t(X_1)\mathbf{K}_t(X_2)\right) &= \operatorname{tr}\left(\int_G \otimes^t(\mathbf{U}\mathbf{P}_1\mathbf{U}^{-1})du \int_G \otimes^t(\mathbf{V}\mathbf{P}_2\mathbf{V}^{-1})dv\right) \\
&= \int_G \int_G \operatorname{tr}\left(\otimes^t(\mathbf{U}\mathbf{P}_1\mathbf{U}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{P}_2\mathbf{V}^{-1})\right) dv\, du \\
&= \operatorname{tr}\left(\int_G \otimes^t \mathbf{P}_1\mathbf{U}^{-1}\left(\int_G \otimes^t(\mathbf{V}\mathbf{P}_2\mathbf{V}^{-1})dv\right)\mathbf{U}du\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\left(\otimes^t \mathbf{P}_1\right)\mathbf{K}_t(X_2)\right).
\end{aligned}$$

□

Satz 2.5 (Verallgemeinerte Ungleichung von Sidelnikov). *Seien X_i für alle $1 \leq i \leq v$ homogene G-Räume bzgl. $G \subseteq U(b)$ und sei $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ ein Quantendesign mit $\mathbf{P}_i \in X_i$. Dann folgt für alle $t \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{v}\left(\operatorname{tr}\left(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j\right)\right)^t \geq \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{v}\operatorname{tr}\left(\mathbf{K}_t(X_i)\mathbf{K}_t(X_j)\right).$$

Für reguläre Quantendesigns mit $X_i = X$ für alle $1 \leq i \leq v$ folgt

$$\frac{1}{v^2}\sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{v}\left(\operatorname{tr}\left(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j\right)\right)^t \geq \operatorname{tr}\left(\left(\mathbf{K}_t(X)\right)^2\right). \tag{2.4}$$

$\mathbf{D}$ *ist genau dann t-kohärent bzgl. G, wenn hier jeweils Gleichheit vorliegt.*

Beweis. Da $\mathbf{P} = \mathbf{P}^*$ ist, folgt auch $\mathbf{K}_t(X) = \mathbf{K}_t(X)^*$, also ist auch der Tensor

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^{v} \otimes^t \mathbf{P}_i - \sum_{i=1}^{v} \mathbf{K}_t(X_i)$$

selbstadjungiert, womit unter Verwendung von Lemma 2.4 folgt

$$\mathrm{tr}(\mathbf{CC}) = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{v} (\mathrm{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j))^t - \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{v} \mathrm{tr}\,(\mathbf{K}_t(X_i)\mathbf{K}_t(X_j)) \geq 0,$$

was zu zeigen war. Bei Gleichheit folgt $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, also die t-Kohärenz bzgl. G. $\square$

Wir untersuchen nun kurz die Grassmannräume und die Mengen der diagonalen $b \times b$ Projektionsmatrizen mit Spur r, welche wir mit $\mathbb{J}_r^b$ bezeichnen.

Das Integral über die Grassmannräume $X = G_1(\mathbb{C}^b)$ bzw. $X = G_1(\mathbb{R}^b)$ vom Rang 1 ist mit der Zuordnung (1.18) äquivalent zum Integral über die komplexe bzw. reelle Einheitssphäre Ω (siehe [43]) und es folgt mit Lemma 2.4 und einer beliebigen (o.B.d.A. reellen) Projektion $\mathbf{P}_\mathbf{e}$ auf einen vom Vektor $\mathbf{e}$ aus Ω aufgespannten eindimensionalen Teilraum, daß gilt

$$\mathrm{tr}\left((\mathbf{K}_t(X))^2\right) = \int_\Omega |\langle \mathbf{e}|\mathbf{y}\rangle|^{2t}\, d\omega(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{b}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{b-1}{2})} \int_0^1 z^{t-\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{b-3}{2}}\, dz & \text{für } \mathbb{R}, \\ (b-1)\int_0^1 z^t(1-z)^{b-2}\, dz & \text{für } \mathbb{C}, \end{cases}$$

mit der Gammafunktion Γ. Daraus folgt sofort das nächste Lemma.

Lemma 2.6.

$$\mathrm{tr}\left((\mathbf{K}_t(X))^2\right) = \begin{cases} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2t-1)}{b(b+2)\cdots(b+2t-2)} & \textit{für } X = G_1(\mathbb{R}^b), \\ \dfrac{t!}{b(b+1)\cdots(b+t-1)} & \textit{für } X = G_1(\mathbb{C}^b). \end{cases} \tag{2.5}$$

Für $X = \mathbb{J}_1^b$ sieht man leicht, daß $\mathrm{tr}(\mathbf{K}_t(X))^2 = \frac{1}{b}$ für alle t ist.

Die mit der Formel für den reellen Fall verknüpfte Ungleichung (2.4) entspricht der bekannten *Ungleichung von Sidelnikov* für sphärische Designs (siehe [30], [31], [63] und [71]).

Für G-Räume X bzgl. irreduzibler Gruppen G folgt sofort

$$\mathrm{tr}\left((\mathbf{K}_1(X))^2\right) = \mathrm{tr}\left(\left(\frac{r}{b}\mathbf{I}\right)^2\right) = \frac{r^2}{b}.$$

Für später brauchen wir noch folgende explizite Formeln.

Lemma 2.7.

$$\operatorname{tr}\left((\mathbf{K}_2(X))^2\right) = \begin{cases} \dfrac{r^2((b+1)r^2+2b-4r)}{b(b-1)(b+2)} & \textit{für } X = G_r(\mathbb{R}^b), \\ \dfrac{r^2(br^2+b-2r)}{b(b-1)(b+1)} & \textit{für } X = G_r(\mathbb{C}^b), \\ \dfrac{r^2(r^2+b-2r)}{b(b-1)} & \textit{für } X = \mathbb{J}_r^b. \end{cases} \tag{2.6}$$

Beweis. Seien $\mathbf{P}_j$, $1 \leq j \leq b$, die diagonalen $b \times b$ Matrizen mit 1 in der j-ten Diagonalstelle und sonst überall 0 und sei $\mathbf{P} = \sum_{j=1}^r \mathbf{P}_j$. Es gilt $\mathbf{P} \in X$ für $X = G_r(\mathbb{R}^b), G_r(\mathbb{C}^b)$, und $\mathbb{J}_r^b$ und

$$\operatorname{tr}\left((\mathbf{K}_2(X))^2\right) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^r \operatorname{tr} \int_G \mathbf{P}_i \mathbf{U} \mathbf{P}_l \mathbf{U}^{-1} \otimes \mathbf{P}_j \mathbf{U} \mathbf{P}_m \mathbf{U}^{-1} du. \tag{2.7}$$

Wir benützen die unitäre Invarianz der Spur und, daß es für beliebige $1 \leq i \neq j \leq r$ und $1 \leq l \neq m \leq r$ eine Permutationsmatrix $\mathbf{S} \in S(b) \subset O(b) \subset U(b)$ gibt, die das Paar $\mathbf{P}_l, \mathbf{P}_m$ durch eine unitäre Ähnlichkeitstransformation in das Paar $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j$ transformiert und erhalten

$$\operatorname{tr}\left((\mathbf{K}_2(X))^2\right) = r^2 x + 2r^2(r-1)y + r^2(r-1)^2 z,$$

wobei x der Wert jener Terme der Summe (2.7) mit $1 \leq i = j \leq r, 1 \leq l = m \leq r$ ist, y jener Terme mit $1 \leq i \neq j \leq r, 1 \leq l = m \leq r$ oder $1 \leq i = j \leq r, 1 \leq l \neq m \leq r$ und z jener Terme mit $1 \leq i \neq j \leq r, 1 \leq l \neq m \leq r$. Weiters ist

$$bx + b(b-1)y = \operatorname{tr} \int_G \left(\sum_{i=1}^b \mathbf{P}_i \mathbf{U} \mathbf{P}_l \mathbf{U}^{-1}\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^b \mathbf{P}_j \mathbf{U} \mathbf{P}_l \mathbf{U}^{-1} du\right) = 1,$$
$$by + b(b-1)z = \operatorname{tr} \int_G \left(\sum_{i=1}^b \mathbf{P}_i \mathbf{U} \mathbf{P}_l \mathbf{U}^{-1}\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^b \mathbf{P}_j \mathbf{U} \mathbf{P}_m \mathbf{U}^{-1}\right) du = 1.$$

Nun ist $x = \operatorname{tr}(\mathbf{K}_2(X'))^2$, wobei X' der homogene G-Raum ist, der durch eine der Projektionen $\mathbf{P}_i$ mit Spur 1 erzeugt wird. Wir erhalten also den Parameter x aus den Gleichungen (2.5) für $t = 2$ bzw. $x = \frac{1}{b}$ für $\mathbb{J}_r^b$ und damit können die Gleichungen (2.6) rekursiv gelöst werden. $\square$

Analoge Formeln lassen sich auch für $t \geq 2$ ableiten, doch werden sie schnell sehr kompliziert.

In den nächsten Abschnitten werden wir insbesondere affine Quantendesigns und solche mit Grad 1 untersuchen und dabei Anwendungen der hier abgeleiteten Ungleichungen kennenlernen.

2.2 Kohärente Dualität

Wir beschreiben nun allgemein Quantendesigns, ähnlich wie die sphärischen Designs, durch Vektormengen. Obwohl diese Vektormengen nicht eindeutig bestimmt sind, geben sie Anlaß zur Definition einer eindeutigen Operation auf den kohärenten Quantendesigns.

Sei $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\}$ ein Orthonormalsystem des $\mathbb{C}^b$, dann ist die orthogonale Projektion $\mathbf{P}$ auf den davon aufgespannten r-dimensionalen Teilraum von $\mathbb{C}^b$ $\mathbf{P}\,\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \langle \mathbf{x} | \mathbf{e}_i \rangle\, \mathbf{e}_i$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^b$. Sei $\mathbf{E}$ die $b \times r$ Matrix, die durch die r Vektoren $\mathbf{e}_j = (e_{1j}, \dots, e_{bj})^t$ als Spalten erzeugt wird, d.h. $(\mathbf{E})_{ij} = e_{ij}$ für alle $1 \le j \le r$ und $1 \le i \le b$. Dann gilt

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}\mathbf{E}^*, \tag{2.8a}$$

$$\mathbf{I}_r = \mathbf{E}^*\mathbf{E}. \tag{2.8b}$$

Jede orthogonale Projektion läßt sich in diese Form bringen. Die $b \times r$ Matrix $\mathbf{E}$ ist aber durch $\mathbf{P}$ nicht eindeutig festgelegt. Man kann eine andere Orthonormalbasis des r-dimensionalen Teilraumes, auf den $\mathbf{P}$ projiziert, wählen. Für eine $b \times r$ Matrix $\mathbf{E}'$ gelten genau dann auch die Gleichungen (2.8), d.h. $\mathbf{P} = \mathbf{E}'\mathbf{E}'^*$ und $\mathbf{I}_r = \mathbf{E}'^*\mathbf{E}'$, wenn mit einer unitären $r \times r$ Matrix $\mathbf{V}$ gilt $\mathbf{E}' = \mathbf{E}\mathbf{V}$.

Definition 2.8. Sei $r_1 + \dots + r_v = s$ und seien $\mathbf{E}_i$, $1 \le i \le v$, komplexe $b \times r_i$ Matrizen. Die $b \times s$ Matrix

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 & \cdots & \mathbf{E}_v \end{pmatrix}$$

soll *Quantendesign-Matrix* (kurz *QD-Matrix*) mit Partition $(r_1, \dots, r_v)$ heißen, falls gilt

$$\mathbf{E}_i^*\mathbf{E}_i = \mathbf{I}_{r_i} \qquad \text{für alle } 1 \le i \le v.$$

Sei $\mathbf{P}_i = \mathbf{E}_i\mathbf{E}_i^*$ für alle $1 \le i \le v$. Dann soll $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_v\}$ das *der QD-Matrix zugeordnete* Quantendesign heißen.

Zwei QD-Matrizen $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1 \dots \mathbf{E}_v)$ und $\mathbf{E}' = (\mathbf{E}'_1 \dots \mathbf{E}'_v)$ sollen *äquivalent* oder *isomorph* heißen, falls es unitäre $r_i \times r_i$ Matrizen $\mathbf{V}_i$, $1 \le i \le v$, eine Permutation π von $\{1, \dots, v\}$ und eine Matrix $\mathbf{U} \in U(b)$ gibt, so daß gilt

$$\mathbf{E}'_i = \mathbf{U}\mathbf{E}_{\pi(i)}\mathbf{V}_i \qquad \text{für alle } 1 \le i \le v. \tag{2.9}$$

Die Definition der Äquivalenz wurde so gewählt, daß sie mit jener für Quantendesigns übereinstimmt, d.h. die Zuordnung ist für Äquivalenzklassen eindeutig umkehrbar.

Lemma 2.9. *Seien das Quantendesign* $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_v\}$ *und die QD-Matrix* $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1 \dots \mathbf{E}_v)$ *einander zugeordnet, dann gilt:*

(i) $\mathbf{D}$ *ist genau dann kohärent, wenn die Zeilen von* $\mathbf{E}$ *alle gleiche Norm haben und paarweise orthogonal sind, d.h. wenn gilt*

$$\mathbf{E}\mathbf{E}^* = k\mathbf{I}_b. \tag{2.10}$$

(ii) Mit der Hilbert-Schmidt-Norm ($\|\mathbf{A}\| = (\mathrm{tr}(\mathbf{A}^*\mathbf{A}))^{1/2}$) gilt für alle $1 \leq i, j \leq v$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j) = \|\mathbf{E}_i^*\mathbf{E}_j\|^2. \tag{2.11}$$

Insbesondere hat $\mathbf{D}$ genau dann Grad 1, wenn für alle $1 \leq i \neq j \leq v$ gilt $\|\mathbf{E}_i^*\mathbf{E}_j\|^2 = \lambda$.

Beweis. (i) $\sum_{i=1}^{v} \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^{v} \mathbf{E}_i\mathbf{E}_i^* = \mathbf{E}\mathbf{E}^*$.

(ii) $\mathrm{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j) = \mathrm{tr}(\mathbf{E}_i\mathbf{E}_i^*\mathbf{E}_j\mathbf{E}_j^*) = \mathrm{tr}(\mathbf{E}_j^*\mathbf{E}_i\mathbf{E}_i^*\mathbf{E}_j) = \mathrm{tr}\left((\mathbf{E}_i^*\mathbf{E}_j)^*\,(\mathbf{E}_i^*\mathbf{E}_j)\right) = \|\mathbf{E}_i^*\mathbf{E}_j\|^2$ für alle $1 \leq i, j \leq v$.

□

Da also die einem kohärenten Quantendesign zugeordneten QD-Matrizen paarweise orthogonale Zeilen besitzen, folgt, daß $b \leq s$ sein muß und mit $s = kb$ (Gleichung (1.6a)) folgt für beliebige kohärente Designs

$$k \geq 1.$$

Für reguläre, kohärente Quantendesigns folgt $v \geq b/r$. Es gilt $k = 1$ genau dann, wenn die QD-Matrix quadratisch und unitär ist. Diesen trivialen Spezialfall klammern wir nun aus.

Definition 2.10. Sei das kohärente Quantendesign $\mathbf{D}$ mit $k > 1$ der $b \times s$ QD-Matrix $\mathbf{E}$ (mit $s > b$) zugeordnet. Eine $(s - b) \times s$ QD-Matrix $\mathbf{E}^-$ mit derselben Partition (von s) heißt *kohärent dual* zu $\mathbf{E}$, falls ihre Zeilen paarweise orthogonal zueinander und zu jenen von $\mathbf{E}$ sind. Entsprechend heißt dann das $\mathbf{E}^-$ zugeordnete Quantendesign $\mathbf{D}^-$ kohärent dual zu $\mathbf{D}$.

Kohärente Dualität hat nichts mit dem Dualitätsbegriff der klassischen Designtheorie zu tun (transponieren der Inzidenzmatrix). Nur ein trivialer Spezialfall ist auf klassische Designs anwendbar (siehe unten). Dafür gibt es eine Verwandtschaft mit dem Dualitätsbegriff der Kodierungstheorie.

Satz 2.11. *Zu jedem kohärenten Quantendesign $\mathbf{D}$ mit $k > 1$ gibt es ein kohärent duales Quantendesign $\mathbf{D}^-$, welches bis auf unitäre Äquivalenzen eindeutig ist. $\mathbf{D}^{--}$ ist unitär äquivalent zu $\mathbf{D}$. Es gilt:*

$$\begin{aligned} v^- &= v, & b^- &= b(k-1), \\ k^- &= \frac{k}{k-1}, & r_i^- &= r_i \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq v, \\ \mathrm{tr}(\mathbf{P}_i^-\mathbf{P}_j^-) &= \frac{1}{(k-1)^2}\,\mathrm{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j) & & \text{für alle } 1 \leq i \neq j \leq v. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathbf{D}^-$ genau dann regulär, wenn es $\mathbf{D}$ ist und hat denselben Grad s wie $\mathbf{D}$.

Beweis. Sei $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1 \ldots \mathbf{E}_v)$ die $\mathbf{D}$ zugeordnete QD-Matrix.

Wir zeigen zuerst konstruktiv die Existenz einer kohärent dualen QD-Matrix: Sei $\widetilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{\sqrt{k}}\mathbf{E} = (\widetilde{\mathbf{E}}_1 \ldots \widetilde{\mathbf{E}}_v)$. Aus der Kohärenz von $\mathbf{D}$ folgt mit Gleichung (2.10) $\widetilde{\mathbf{E}}\widetilde{\mathbf{E}}^* = \mathbf{I}_b$. Also bilden die Zeilen von $\widetilde{\mathbf{E}}$ ein Orthonormalsystem im $\mathbb{C}^s$. Dieses läßt sich immer durch $(s-b)$ weitere Zeilenvektoren zu einer Orthonormalbasis vervollständigen, z.B. mit dem Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren. Sei nun $\widetilde{\mathbf{E}}^- = (\widetilde{\mathbf{E}}_1^- \ldots \widetilde{\mathbf{E}}_v^-)$ eine $(s-b) \times s$ Matrix, welche aus diesen weiteren Zeilen gebildet und genauso wie $\widetilde{\mathbf{E}}$ partitioniert wurde. Sei

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{E}}_1 & \ldots & \widetilde{\mathbf{E}}_v \\ \widetilde{\mathbf{E}}_1^- & \ldots & \widetilde{\mathbf{E}}_v^- \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{G}$ ist eine unitäre $s \times s$ Matrix. Aus $\mathbf{G}\mathbf{G}^* = \mathbf{I}_s$ folgt $\mathbf{G}^*\mathbf{G} = \mathbf{I}_s$, d.h.

$$\widetilde{\mathbf{E}}_i^*\widetilde{\mathbf{E}}_j + \widetilde{\mathbf{E}}_i^{-*}\widetilde{\mathbf{E}}_j^- = \begin{cases} \mathbf{I}_{r_i} & \text{für alle } 1 \leq i = j \leq v, \\ \mathbf{0} & \text{für alle } 1 \leq i \neq j \leq v. \end{cases} \tag{2.12}$$

Sei nun $\mathbf{E}^- = \sqrt{\frac{k}{k-1}}\widetilde{\mathbf{E}}^- = (\mathbf{E}_1^- \ldots \mathbf{E}_v^-)$. Dann folgt mit $\widetilde{\mathbf{E}}_i^*\widetilde{\mathbf{E}}_i = \frac{1}{k}\mathbf{E}_i^*\mathbf{E}_i = \frac{1}{k}\mathbf{I}_{r_i}$ sofort

$$\mathbf{E}_i^{-*}\mathbf{E}_i^- = \mathbf{I}_{r_i} \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq v.$$

Das heißt $\mathbf{E}^-$ ist eine QD-Matrix und nach Konstruktion kohärent dual zu $\mathbf{E}$.

Zur Eindeutigkeit: Entsprechend der Konstruktion sind genau alle $\mathbf{U}^-\mathbf{E}^-$ mit einer beliebigen unitären $(s-b) \times (s-b)$ Matrix $\mathbf{U}^-$ kohärent dual zu $\mathbf{E}$ und damit auch zu allen $\mathbf{UE}$ mit einer beliebigen unitären $b \times b$ Matrix $\mathbf{U}$. Das sind aber Äquivalenzoperationen und die weiteren Äquivalenzoperationen entsprechen einander exakt: Sei $\mathbf{E}_i' = \mathbf{E}_{\pi(i)}\mathbf{V}_i$ mit einer Permutation π und unitären $r_i \times r_i$ Matrizen für alle $1 \leq i \leq v$, dann bilden $(\mathbf{E}_i^-)' = \mathbf{E}_{\pi(i)}^-\mathbf{V}_i$ eine kohärent duale QD-Matrix und umgekehrt.

Zu den Parametern: $v^- = v$ und $r_i^- = r_i$ für alle $1 \leq i \leq v$ sind trivial. $b^- = s - b = kb - b = b(k-1)$. Für $\widetilde{\mathbf{E}}^-$ gilt nach Definition $\widetilde{\mathbf{E}}^-\widetilde{\mathbf{E}}^{-*} = \mathbf{I}_{s-b}$. Daraus folgt $\mathbf{E}^-\mathbf{E}^{-*} = \frac{k}{k-1}\mathbf{I}_{s-b}$ und damit $k^- = \frac{k}{k-1}$. Zuletzt folgt aus den Gleichungen (2.12) und (2.11) für alle $1 \leq i \neq j \leq v$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i^*\mathbf{E}_j &= -(k-1)\mathbf{E}_i^{-*}\mathbf{E}_j^-, \\ \|\mathbf{E}_i^*\mathbf{E}_j\|^2 &= (k-1)^2\|\mathbf{E}_i^{-*}\mathbf{E}_j^-\|^2, \\ \operatorname{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j) &= (k-1)^2\operatorname{tr}(\mathbf{P}_i^-\mathbf{P}_j^-). \end{aligned}$$

□

Ist das Quantendesign reell, so kann auch das kohärent duale Design über den reellen Zahlen realisiert werden und ist bis auf orthogonale Äquivalenzen eindeutig.

Ist ein Quantendesign t-kohärent für $t \geq 2$ bzgl. einer Gruppe G, so ist das kohärent duale Quantendesign nicht notwendig auch t-kohärent bzgl. G. Betrachten wir z.B. das durch ein regelmäßiges Fünfeck im $\mathbb{R}^2$ gebildete sphärische 4-Design (siehe [25]), welchem ein 2-Quantendesign bzgl. $O(b)$ zugeordnet werden kann. Man kann leicht nachprüfen, daß das kohärent duale Design nicht 2-kohärent bzgl. $O(b)$ ist. (Die Parameter $v = 5$ und $b = 3$ verletzen auch die Ungleichung $v \geq b(b+3)/2$ für sphärische 4-Designs, siehe [25] bzw. [36]).

Hadwiger [33] zeigte, daß Koordinatensterne genau die orthogonalen Projektionen einer Orthonormalbasis eines $\mathbb{R}^s$ ($s \geq b$) auf einen b-dimensionalen Teilraum sind (Pohlke'sche Normalsterne). Aus unserem Beweis folgt allgemeiner, daß kohärente Quantendesigns (bis auf einen Normierungsfaktor) genau die orthogonalen Projektionen einer orthogonalen Zerlegung des $\mathbb{C}^s$ (oder $\mathbb{R}^s$) auf einen b-dimensionalen Teilraum sind.

Proposition 2.12. *Sei* $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ *ein kohärentes Quantendesign im* $\mathbb{C}^b$ *mit* $k \neq 1$ *und* $\mathrm{tr}\,(\mathbf{P}_i) = r_i$ *für alle* $1 \leq i \leq v$. *Dann gilt*

$$v \geq \frac{1}{r}(b + \max(r_1, \ldots, r_v)).$$

Das heißt für reguläre Quantendesigns, daß $v \geq 1 + \frac{b}{r}$ *gilt.*

Beweis. Es existiert ein kohärent duales Quantendesign $\mathbf{D}^-$ und dessen Parameter erfüllen die triviale Ungleichung $b^- \geq \max(r_1^-, \ldots, r_v^-)$. Somit gilt $b(k-1) \geq \max(r_1, \ldots, r_v)$ und mit $k = \frac{vr}{b}$ folgen die Ungleichungen. □

Daraus folgt zum Beispiel, daß kein kohärentes Quantendesign mit $v = 3$, $b = 5$, $r = 2$ existiert (obwohl $k = \frac{vr}{b} = \frac{6}{5} > 1$ ist). Wir werden gleich zeigen, daß es (sehr viele) Quantendesigns gibt, für die hier Gleichheit vorliegt.

Lemma 2.13. *Jedes reguläre, kohärente Quantendesign mit Grad* 1, $r = 1$ *und* $\lambda \neq 0$ *ist irreduzibel.*

Beweis. Angenommen $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{1i} \oplus \mathbf{P}_{2i}$ für alle $1 \leq i \leq v$. Aus $1 = \mathrm{tr}\,(\mathbf{P}_i) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{P}_{1i}) + \mathrm{tr}\,(\mathbf{P}_{2i})$ folgt, daß entweder $\mathbf{P}_{1i} = 0$ und $\mathbf{P}_{2i} \neq 0$ ist oder $\mathbf{P}_{1i} \neq 0$ und $\mathbf{P}_{2i} = 0$ ist für alle $1 \leq i \leq v$. Aus der Kohärenz folgt, daß es zumindest ein $\mathbf{P}_{1i} \neq 0$ (d.h. $\mathbf{P}_{2i} = 0$) und ein $\mathbf{P}_{2j} \neq 0$ (d.h. $\mathbf{P}_{1j} = 0$) existiert. Es folgt $\mathrm{tr}\,(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{P}_{1i}\mathbf{P}_{1j}) + \mathrm{tr}\,(\mathbf{P}_{2i}\mathbf{P}_{2j}) = 0$ im Widerspruch zu $\lambda \neq 0$. □

Beispiele 2.14. Zu den Parametern $b^- = r^- \in \mathbb{N}$ und $v^- \geq 2$ existieren jeweils eindeutige und triviale Quantendesigns $\mathbf{D}^- = \left\{\mathbf{P}_1^- = \mathbf{I}_{r^-}, \ldots, \mathbf{P}_v^- = \mathbf{I}_{r^-}\right\}$. Die $\mathbf{D}^-$ haben jeweils Grad 1 mit $\lambda^- = r^-$.

Also existieren jeweils bis auf (unitäre) Äquivalenzen eindeutige kohärent duale Quantendesign $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{--}$ mit den Parametern $r = r^- \in \mathbb{N}$ und $v = v^- \geq 2$ sowie

$$b = r(v-1), \quad k = \frac{v}{v-1} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{r}{(v-1)^2}.$$

$\mathbf{D}$ erfüllt die Ungleichung $v \geq 1 + b/r$ von Proposition 2.12 exakt. Für $r = 1$ ist $\mathbf{D}$ aufgrund von Lemma 2.13 irreduzibel. Die r-fache Summe identischer Kopien davon liefert genau die eindeutigen Lösungen zu den Parametern $r \geq 2$.

Die Lösungen für $r = 1$ finden sich bereits in [25, Example 5.15] und können als Vektoren zu den Ecken eines regulären Simplex sogar im $\mathbb{R}^b$ realisiert werden. Dann ist ihre Summe gleich 0 und sie bilden sogar (straffe) sphärische 2-Designs.

Bildet man von den eben konstruierten Lösungen das komplementäre Design, davon das kohärent duale, dann wieder das komplementäre, usw., so erhält man im allgemeinen unendlich viele weitere reguläre und kohärente Quantendesigns mit Grad 1. Es folgt, daß alle diese Quantendesigns ebenso eindeutige Lösungen ihrer Parameter sind wie die Ausgangslösungen.

Die Anwendung der kohärenten Dualität auf klassische (kommutative) Designs liefert nur für den trivialen Spezialfall $k = 2$ ebensolche Lösungen. Für $k > 2$ folgt $1 < k^- < 2$ und das kohärent duale Quantendesign kann nicht mehr klassisch (kommutativ) sein.

Ist das Quantendesign $\mathbf{D}$ regulär mit Grad s, dann ist auch das kohärent duale Quantendesign $\mathbf{D}^-$ regulär mit Grad s. Folglich können unter bestimmten Voraussetzungen kohärent duale Versionen der absoluten Schranken von Satz 2.2 gebildet werden. Wir werden im nächsten Abschnitt dafür ein Beispiel geben.

2.3 Affine Quantendesigns

Proposition 2.15. *Sei* $\mathbf{D}$ *ein affines Quantendesign und seien* $\{\mathbf{P}_{i1}, \ldots, \mathbf{P}_{ig_i}\}$, $1 \leq i \leq k$, *die Orthogonalklassen. Dann gilt für zwei beliebige Projektionen* $\mathbf{P}_{il}$ *und* $\mathbf{P}_{jm}$, $1 \leq i \neq j \leq k$, $1 \leq l \leq g_i$, $1 \leq m \leq g_j$, *aus verschieden Orthogonalklassen*

$$\lambda = \operatorname{tr}(\mathbf{P}_{il}\mathbf{P}_{jm}) = \frac{1}{b} \operatorname{tr}(\mathbf{P}_{il}) \operatorname{tr}(\mathbf{P}_{jm}) \,. \tag{2.13}$$

Hat das Quantendesign $k = 2$ *Orthogonalklassen, dann sind die Dimensionen der Projektionen innerhalb jeder Orthogonalklasse konstant. Hat das Quantendesign mehr als zwei Orthogonalklassen, dann muß es sogar regulär sein.*

Beweis. Da die Orthogonalklassen vollständig sind, gilt $\sum_{l=1}^{g_i} \mathbf{P}_{il} = \mathbf{I}$ für alle $1 \leq i \leq k$. Mit einem beliebigen $\mathbf{P}_{jm}$ aus der j-ten Orthogonalklasse, $j \neq i$, multipliziert und die Spur angewendet folgt $\lambda g_i = \operatorname{tr}(\mathbf{P}_{jm})$ für alle $1 \leq m \leq g_j$. Daraus folgt, daß $\operatorname{tr}(\mathbf{P}_{jm}) = r_j$ konstant auf jeder Orthogonalklasse ist und mit $g_i = b/r_i$ folgt $\lambda = r_i r_j / b$, das heißt Gleichung (2.13).

Seien nun $1 \leq i \neq j \leq k$ beliebig und $k \geq 3$. Dann existiert ein $s \neq i, j$ mit $1 \leq s \leq k$ und mit obiger Gleichung folgt $\lambda g_i = r_s = \lambda g_j$, d.h. $g_i = g_j$. Daraus folgt, daß $r_i = b/g_i$ für alle Orthogonalklasse gleich ist. □

Für affine Designs mit $k \geq 3$ Orthogonalklassen der Ordnung g gibt es nur 3 unabhängige Parameter, z.B. v, b und r. Die anderen Parameter sind damit

$$g = \frac{b}{r}, \quad k = \frac{v}{g} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{r^2}{b}.$$

Für den Spezialfall kommutativer Projektionen entspricht Proposition 2.15 der Aussage von [13, Proposition I.7.3] für transversale Designs bzw. analogen Zusammenhängen für die dazu dualen orthogonalen Anordnungen (oder affine 1-Designs, oder Netze, siehe [20, II.2]). Dort sind aber nur Parameter aus den natürlichen Zahlen zulässig. Hier ist auch $\lambda \in \mathbb{Q}$ zulässig.

Korollar 2.16. *Sei* $\mathbf{D}$ *ein affines Quantendesign, dann sind die Orthogonalklassen paarweise unabhängig. Ein auflösbares Quantendesign* $\mathbf{D}$ *mit paarweise unabhängigen Orthogonalklassen ist umgekehrt genau dann ein affines Quantendesign, wenn es entweder regulär ist oder* $k = 2$ *ist und die Dimensionen der Projektionen innerhalb jeder Orthogonalklasse konstant sind.*

Betrachten wir kurz den Fall sphärischer Designs, d.h. $r = 1$. Dann folgt $g = b$ und $\lambda = \frac{1}{b}$. Den Projektionsmatrizen einer Orthogonalklasse eines affinen Designs mit $r = 1$ ist jeweils eine Orthonormalbasis zugeordnet und weiters folgt, daß für zwei beliebige Vektoren $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ aus verschiedenen Orthonormalbasen stets $|\langle \mathbf{e}|\mathbf{f}\rangle|^2 = 1/b$ gilt. Salopp kann man sagen, daß je zwei Orthonormalbasen maximal gegeneinander verdreht sind.

Wir diskutieren nun kurz die zugeordneten QD-Matrizen.

Sei $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ ein auflösbares Quantendesign und $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1 \cdots \mathbf{E}_v)$ eine zugeordnete QD-Matrix (d.h. $\mathbf{P}_i = \mathbf{E}_i\mathbf{E}_i^*$ und $\mathbf{E}_i^*\mathbf{E}_i = \mathbf{I}_{r_i}$ für alle $1 \leq i \leq v$). Seien $\widehat{\mathbf{E}}_i = (\mathbf{E}_{i1} \ldots \mathbf{E}_{ig_i})$ für alle $1 \leq i \leq k$ jene Submatrizen von $\mathbf{E}$, die der i-ten Orthogonalklasse $\{\mathbf{P}_{i1}, \ldots, \mathbf{P}_{ig_i}\}$ von $\mathbf{D}$ zugeordneten sind. Es gilt

$$\widehat{\mathbf{E}_i}\widehat{\mathbf{E}_i^*} = \sum_{l=1}^{g_i} \mathbf{E}_{il}\mathbf{E}_{il}^* = \sum_{l=1}^{g_i} \mathbf{P}_{il} = \mathbf{I}.$$

Also ist $\widehat{\mathbf{E}}_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ eine quadratische und unitäre Matrix. Aufgrund der Äquivalenzrelationen (2.9) kann immer $\widehat{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{I}$ erreicht werden. Es folgt, daß auch

$$\widehat{\mathbf{E}}_i^{-1}\widehat{\mathbf{E}}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{i1}^*\mathbf{E}_{j1} & \mathbf{E}_{i1}^*\mathbf{E}_{j2} & \ldots & \mathbf{E}_{i1}^*\mathbf{E}_{jg_j} \\ \mathbf{E}_{i2}^*\mathbf{E}_{j1} & \mathbf{E}_{i2}^*\mathbf{E}_{j2} & \ldots & \mathbf{E}_{i2}^*\mathbf{E}_{jg_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}_{ig_i}^*\mathbf{E}_{j1} & \mathbf{E}_{ig_i}^*\mathbf{E}_{j2} & \ldots & \mathbf{E}_{ig_i}^*\mathbf{E}_{jg_j} \end{pmatrix}$$

für alle $1 \leq i \neq j \leq k$ quadratisch und unitär ist. Sei $\mathrm{tr}(\mathbf{P}_{il}) = r_{il}$ für alle $1 \leq i \leq k$, $1 \leq l \leq g_i$. Mit Lemma 2.9 folgt, daß $\mathbf{D}$ genau dann paarweise unabhängige Orthogonalklassen hat, wenn für die $r_{il} \times r_{jm}$ Submatrizen $\mathbf{E}_{il}^*\mathbf{E}_{jm}$ gilt

$$\|\mathbf{E}_{il}^*\mathbf{E}_{jm}\|^2 = \frac{r_{il}r_{jm}}{b}. \tag{2.14}$$

Wenn $\mathbf{D}$ regulär ist, dann sind diese Submatrizen quadratisch und die Hilbert-Schmidt-Norm ist darauf konstant. Der Fall $r = 1$ entspricht bekannten Klassen von Matrizen.

- Ist $r = 1$ und das Quantendesign reell, dann sind die Matrizen $\sqrt{b}\widehat{\mathbf{E}}_i^{-1}\widehat{\mathbf{E}}_j$ *Hadamard-Matrizen* (siehe [2] und [75]). Solche Matrizen können nur für $b = 2$ oder $b = 4t$, $t \in \mathbb{N}$, existieren. Ihre Existenz wird für alle solche b vermutet. Folglich kann es auch nur für diese Dimensionen zwei (oder mehr) paarweise unabhängige Orthogonalbasen geben.

- Im allgemeinen Fall für $r = 1$ hat $\sqrt{b}\widehat{\mathbf{E}}_i^{-1}\widehat{\mathbf{E}}_j$ Einträge mit Absolutbetrag 1 und ist proportional zu einer unitären Matrix. Solche *verallgemeinerte Hadamard-Matrizen* über den komplexen Zahlen wurden in [18] untersucht, speziell mit n-ten Einheitswurzeln als Einträgen. Beispiele für alle $b \in \mathbb{N}$ erhält man mittels der *Fourier-Matrizen* $\mathbf{F}$ (siehe [5]) durch $\sqrt{b}\mathbf{F}$. Folglich existieren im Komplexen auch für jede Dimension zwei unabhängige Orthonormalbasen.

Im Anschluß daran sollen unitäre Blockmatrizen, deren $r_{il} \times r_{jm}$ Submatrizen eine Hilbert-Schmidt-Norm wie in Gleichung (2.14) haben, als *verallgemeinerte Block-Hadamard-Matrizen* bezeichnet werden.

Beispiel 2.17. Seien $x, y, z \in [0, 2\pi)$,

$$\mathbf{E}_1(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & e^{ix} & -e^{ix} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -e^{ix} & e^{ix} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_2(yz) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{iy} & -e^{iy} & e^{iz} & -e^{iz} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -e^{iy} & e^{iy} & e^{iz} & -e^{iz} \end{pmatrix}.$$

Mit $w = y - x$ gilt

$$\mathbf{E}_1(x)^{-1}\mathbf{E}_2(yz) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & e^{iz} & -e^{iz} \\ 1 & 1 & -e^{iz} & e^{iz} \\ e^{iw} & -e^{iw} & 1 & 1 \\ -e^{iw} & e^{iw} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das heißt die Standardbasis und die Spalten von $\mathbf{E}_1(x)$ und $\mathbf{E}_2(yz)$ bilden für alle $x, y, z \in [0, 2\pi)$ ein reguläres, affines Quantendesign mit $r = 1$ und $k = 3$ Orthogonalklassen. Das sind bis auf Äquivalenzen alle solchen Designs im $\mathbb{C}^4$.

Satz 2.18. *Sei* $\mathbf{D}$ *ein auflösbares Quantendesign mit paarweise unabhängigen Orthogonalklassen und sei* g_i, $1 \le i \le k$, *die Anzahl der Projektionsmatrizen in der i-ten Orthogonalklasse. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{k} g_i - k \le b^2 - 1 \qquad \text{für komplexe Quantendesigns,}$$
$$\sum_{i=1}^{k} g_i - k \le \binom{b+1}{2} - 1 \qquad \text{für reelle Quantendesigns,}$$
$$\sum_{i=1}^{k} g_i - k \le b - 1 \qquad \text{für kommutative Quantendesigns.}$$

Beweis. Sei $\{\mathbf{P}_{i1}, \ldots, \mathbf{P}_{ig_i}\}$ für jedes $1 \le i \le k$ die i-te Orthogonalklasse. Die Matrizen jeder Orthogonalklasse sind paarweise orthogonal und damit unabhängig. Sie spannen einen g_i-dimensionalen Teilraum des Vektorraumes aller $b \times b$ Matrizen auf. Sei weiters $\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{P}_{ij} - \frac{1}{b}(\mathrm{tr}\,(\mathbf{P}_{ij}))\,\mathbf{I}$. Dann gilt $\sum_{j=1}^{g_i} \mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{0}$, d.h. diese Matrizen sind linear abhängig. Sie spannen jeweils also einen $(g_i - 1)$-dimensionalen Teilraum auf (orthogonal zu $\mathbf{I}$). Für zwei Matrizen $\mathbf{Q}_{ij}$, $\mathbf{Q}_{lm}$, $i \ne l$, aus verschiedenen Orthogonalklassen folgt aber sofort $\mathrm{tr}\,(\mathbf{Q}_{ij}\mathbf{Q}_{lm}) = 0$. Das heißt die $(g_i - 1)$-dimensionalen Teilräume sind orthogonal. Insgesamt spannen die Projektionsmatrizen des Designs also einen Teilraum der Dimension $1 + \sum_{i=1}^{k}(g_i - 1)$ auf. Komplexe Projektionsmatrizen spannen maximal den gesamten b^2-dimensionalen Vektorraum der $b \times b$ Matrizen auf, die reellen Projektionsmatrizen maximal den $\frac{1}{2}b(b+1)$-dimensionalen Raum aller reellen, symmetrischen Matrizen, die diagonalen Projektionsmatrizen maximal einen b-dimensionalen Teilraum. Daraus folgen die drei Ungleichung. □

Satz 2.19. *Sei* $\mathbf{D}$ *ein reguläres, affines Quantendesign mit* k *Orthogonalklassen. Dann gilt speziell*

$$k \le \frac{r(b^2-1)}{b-r} \qquad \text{für komplexe Quantendesigns,}$$
$$k \le \frac{r(b^2+b-2)}{2(b-r)} \qquad \text{für reelle Quantendesigns,}$$
$$k \le \frac{r(b-1)}{b-r} \qquad \text{für kommutative Quantendesigns.}$$

$\mathbf{D}$ *ist genau dann ein* 2*-Quantendesign bzgl.* $U(b)$, $O(b)$ *bzw.* $S(b)$, *wenn hierbei jeweils Gleichheit vorliegt.*

Beweis. Mit $g = b/r$ folgen diese Ungleichungen sofort aus Satz 2.18. Sie entsprechen aber auch genau den speziellen Schranken von Satz 2.5 für $t = 2$ und $X = G_r(\mathbb{C}^b), G_r(\mathbb{R}^b)$ bzw. $\mathbb{J}_r^b$. Wir kennen die Vielfachheit der Werte aus $\Lambda = \{0, \lambda = \frac{r^2}{b}\}$ und benützen $g = b/r$ und $v = kb/r$, so daß folgt

$$\frac{1}{v^2}\sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{v}(\operatorname{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j))^2 = \frac{1}{v}(r^2 + g(k-1)\lambda^2) = \frac{r^3}{kb^2}(b + rk - r).$$

Setzen wir in die Ungleichung (2.4) jeweils die Werte von $\operatorname{tr}(\mathbf{K}_2(X))^2$ aus den Gleichungen (2.6) ein, dann erhalten wir die drei obigen Ungleichungen. Genau bei Gleichheit folgt aus Satz 2.5 die jeweilige 2-Kohärenz bzgl. der zu den G-Räumen gehörigen Gruppen. Die (1-)Kohärenz affiner Quantendesigns ist trivial. □

Man kann die spezielle Ungleichung aus Satz 2.5 auch allgemein auf nicht-reguläre, auflösbare Quantendesigns mit paarweise unabhängigen Orthogonalklassen anwenden, doch erhält man in diesem Fall sehr komplizierte Formeln (nicht jene von Satz 2.18).

Quantendesigns, für welche die entsprechende Ungleichung von Satz 2.18, bzw. Satz 2.19 zur Gleichung wird, sollen *maximal* heißen. Beispiel 2.17 mit $x = y = z = 0$ ergibt ein maximales reelles, affines Quantendesign, also ein 2-Quantendesign bzgl. $O(b)$.

Für reguläre, kommutative Designs folgt mit $b = g^2\lambda$ als äquivalente Ungleichung

$$k \le \frac{g^2\lambda - 1}{g-1}.$$

Diese Ungleichung ist für klassische, affine Designs (speziell paarweise orthogonale Lateinische Quadrate mit $\lambda = 1$) bzw. transversale Designs als *Ungleichung von Placket und Burman* (siehe z.B. [13, Theorem II.2.12]) bzw. *Bose-Bush-Schranke* (siehe [27, Theorem II.4.5]) bekannt. Ein weiteres bekanntes klassisches Resultat besagt, daß genau dann Gleichheit gilt, wenn das affine Design ein 2-Design ist (siehe [13, Theorem II.8.8]).

Unter dem Namen *Frequency Squares* wurde in der klassischen Designtheorie eine Verallgemeinerung von orthogonalen Lateinischen Quadraten untersucht, denen nach der Zuordnung von Satz 1.10 kommutative, auflösbare Quantendesigns mit paarweise unabhängigen Orthogonalklassen entsprechen, welche nicht notwendig regulär sind (siehe [37], [28] und [27]). Satz 2.18 für den kommutativen Fall verallgemeinert auch die Ungleichungen (z.B. [27, Theorem 1.5]) für Frequency Squares.

Wir bemerken, daß beim Beweis von Satz 2.19 mittels der speziellen Ungleichung die Auflösbarkeit gar nicht benützt wurde, sondern nur die Vielfachheit der Werte aus $\Lambda = \{0, \frac{r^2}{b}\}$. Die Ungleichungen für $r = 1$ können mit Hilfe der Gegenbauer-Polynome sogar ohne Kenntnis dieser Vielfachheiten, d.h. für beliebige Designs mit Grad 2 und $\Lambda = \{0, \frac{1}{b}\}$ abgeleitet werden (siehe [43, table 2] bzw. [24, table I]) aber alle dafür bekannten Lösungen sind auflösbar (siehe Abschnitt 3.2).

Wir zeigen nun noch drei Konstruktionen wie aus Quantendesigns mit paarweise unabhängigen Orthogonalklassen andere solche Designs konstruiert werden können.

Proposition 2.20. *Seien $\mathbf{D}$ und $\mathbf{D}'$ zwei auflösbare Quantendesigns mit jeweils k paarweise unabhängigen Orthogonalklassen $K_i = \{\mathbf{P}_{i1}, \ldots, \mathbf{P}_{ig_i}\}$, $1 \leq i \leq k$, bzw. $L_i = \{\mathbf{Q}_{i1}, \ldots, \mathbf{Q}_{ih_i}\}$, $1 \leq i \leq k$. Dann werden durch $K_i \otimes L_i = \{\mathbf{P}_{ij} \otimes \mathbf{Q}_{il} : 1 \leq j \leq g_i, 1 \leq l \leq h_i\}$ für alle $1 \leq i \leq k$ Orthogonalklassen definiert, welche paarweise unabhängig sind.*

Beweis. $K_i \otimes L_i$ sind trivialerweise Orthogonalklassen. Die Unabhängigkeit folgt einfach aus $\mathrm{tr}\,(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A})\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{B})$. □

Diese Konstruktion verallgemeinert den bekannten *Satz von Mac Neish* (siehe z.B. [13, Theorem I.7.7]) für transversale Designs ins Nichtkommutative (siehe auch [26] für wichtige Anwendungen z.B. bei orthogonalen Lateinischen Quadraten).

Seien $\{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_g\}$ und $\{\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_h\}$ zwei unabhängige Orthogonalklassen. Seien $I \subseteq \{1, \ldots, g\}$ und $J \subseteq \{1, \ldots, h\}$ zwei beliebige Teilmengen der jeweiligen Indizesmengen. Dann sieht man sofort, daß auch die Projektionen $\mathbf{P} = \sum_{i \in I} \mathbf{P}_i$ und $\mathbf{Q} = \sum_{j \in J} \mathbf{Q}_j$ unabhängig sind. Dies gilt übrigens im allgemeinen nicht für die Unabhängigkeit bzgl. $\mathbf{D} \neq \frac{1}{b}\mathbf{I}$. Somit lassen sich aus jedem auflösbaren Quantendesign mit unabhängigen Orthogonalklassen durch Summenbildung von Projektionen innerhalb der Orthogonalklassen leicht weitere solche Quantendesigns bilden (aus regulären auch nichtreguläre). Es gibt aber noch eine weitere Anwendung unter Verwendung klassischer Designs. Kommutativen, auflösbaren Quantendesigns mit paarweise unabhängigen Orthogonalklassen sind auflösbare Inzidenzstrukturen zugeordnet, so daß für beliebige Blöcke B und C aus verschiedenen Parallelklassen $|B \cap C| = \frac{1}{g}|B||C|$ gilt. Der reguläre Spezialfall entspricht klassischen affinen 1-Designs.

Proposition 2.21. *Sei* $\mathbf{D}$ *ein reguläres und auflösbares Quantendesign mit* k *paarweise unabhängigen Orthogonalklasse* $\{\mathbf{P}_{i1}, \ldots, \mathbf{P}_{ig}\}$, $1 \leq i \leq k$. *Sei* $\mathbf{D}'$ *ein klassisches Design (eine Inzidenzstruktur) mit* g *Punkten (o.B.d.A.* $\{1, \ldots, g\}$*) und* s *Parallelklassen von Blöcken, dem ein kommutatives (und somit auflösbares) Quantendesign mit paarweise unabhängigen Orthogonalklassen zugeordnet ist.*

Seien nun jedem Block B *von* $\mathbf{D}'$ *die Projektionen* $\mathbf{P}^i_B = \sum_{j \in B} \mathbf{P}_{ij}$, $1 \leq i \leq k$, *zugeordnet. Dann werden dadurch* ks *Orthogonalklassen definiert, welche paarweise unabhängig sind.*

Beweis. Die den Blöcken einer Parallelklasse von $\mathbf{D}'$ zugeordneten $\mathbf{P}^i_B$ bilden für alle $1 \leq i \leq k$ jeweils eine Orthogonalklasse. Für $\mathbf{P}^i_B$ und $\mathbf{P}^j_C$ mit $1 \leq i \neq j \leq k$ und für beliebige Blöcke C und D, d.h beliebigen Summen aus verschieden Orthogonalklassen von $\mathbf{D}$, gilt die Unabhängigkeit nach obiger Bemerkung. Seien B und C aus verschiedenen Parallelklassen. Da $\operatorname{tr}(\mathbf{P}^i_B \mathbf{P}^i_C) = r|B \cap C| = \frac{r}{g}|B||C| = \frac{1}{rg} \operatorname{tr}(\mathbf{P}^i_B) \operatorname{tr}(\mathbf{P}^i_C)$ gilt, sind die s Orthogonalklassen zu einem festen i, $1 \leq i \leq k$, ebenfalls paarweise unabhängig. □

Wir werden die Propositionen 2.20 und 2.21 in Kapitel 3 anwenden.

Die Unterteilung in Orthogonalklassen bleibt für das kohärent duale Design gleich. Das kohärent duale Design hat aber (außer für $k = 2$) keine vollständigen Orthogonalklassen mehr. Hat das Quantendesign paarweise unabhängige Orthogonalklassen (speziell wenn es ein affines Quantendesign ist), dann gilt diese Eigenschaft im allgemeinen nicht für das kohärente duale Quantendesign. Bettet man dieses aber in einen $b(k-1)^2 = b^-(k-1)$-dimensionalen Raum ein, so gilt diese Eigenschaft wieder und die Orthogonalklassen können nach folgendem Lemma sogar vervollständigt werden.

Lemma 2.22. *Jedes Quantendesign mit paarweise unabhängigen (aber nicht vollständigen) Orthogonalklassen kann mit zusätzlichen Projektionsmatrizen zu einem ebensolchen Design mit vollständigen Orthogonalklassen erweitert werden (d.h. aufgelöst werden).*

Beweis. Sei $\{\mathbf{P}_{i1}, \ldots, \mathbf{P}_{ig_i}\}$ für ein $1 \leq i \leq k$ die i-te Orthogonalklasse. Angenommen es gilt noch nicht $\sum_{r=1}^{g_i} \mathbf{P}_{ir} = \mathbf{I}$. Dann wird die i-te Orthogonalklasse durch $\mathbf{Q}_i = \mathbf{I} - \sum_{r=1}^{g_i} \mathbf{P}_{ir}$ vervollständigt und $\mathbf{Q}_i$ ist – wie man leicht sieht – auch paarweise unabhängig zu allen anderen Gruppen. Analog können alle anderen Orthogonalklassen erweitert werden. □

Die folgende Proposition verallgemeinert die bekannte Konstruktion *projektiver Ebenen* aus *affinen Ebenen* (siehe [66]).

Lemma 2.23. *Angenommen es existiert ein affines Quantendesign* $\mathbf{D}$ *mit* k *Orthogonalklassen der Ordnung* g *und sei* $s \in \mathbb{N}$ *mit* $s\lambda = t \in \mathbb{N}$.

Seien $\mathbf{I}_m$ *die* $m \times m$ *Einheitsmatrizen. Seien für* $1 \leq j \leq k$ *mit dem Kronecker-Symbol* δ_{ij} $k \times k$ *Projektionsmatrizen* $\mathbf{Q}_j = \operatorname{diag}(\delta_{1j}, \ldots, \delta_{kj})$ *definiert und, falls* $\mathbf{P}_i$ *in der* j*-ten Orthogonalklasse ist,* $\mathbf{P}'_i = (\mathbf{P}_i \otimes \mathbf{I}_s) \oplus (\mathbf{Q}_j \otimes \mathbf{I}_t)$.

Dann bilden die Projektionsmatrizen $\mathbf{P}'_i$ ein Quantendesign $\mathbf{D}'$ mit Grad 1 und Parametern $v' = v$, $b' = bs + kt$ und $\lambda' = t$. $\mathbf{D}'$ ist genau dann regulär, wenn es $\mathbf{D}$ ist mit $r' = rs + t$, und genau dann kohärent, falls es $\mathbf{D}$ ist und $k = g$ gilt.

Sei $\mathbf{D}''$ das um die Projektion $\mathbf{0}_{bs} \oplus \mathbf{I}_{kt}$ erweiterte Design. $\mathbf{D}''$ hat auch Grad 1 mit $v'' = v + 1$, $b'' = bs + kt$ und $\lambda'' = t$. $\mathbf{D}''$ ist genau dann regulär, falls es $\mathbf{D}$ ist und $k = 1 + \frac{1}{\lambda}$ gilt, sowie genau dann kohärent, falls es $\mathbf{D}$ ist und $k = g + 1$ gilt.

Beweis. Der Beweis folgt sofort unter Verwendung von $\mathrm{tr}(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B})$ und $\mathrm{tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\mathrm{tr}(\mathbf{B})$. $\square$

2.4 Quantendesigns mit Grad 1

Die folgenden Ergebnisse sind weitgehend Verallgemeinerungen von Resultaten über klassische Designs, gleichwinkelige Liniensysteme und equiisokline Unterräume und Anwendungen der Methoden von Abschnitt 2.1 und 2.2.

Sei $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ ein Quantendesign mit $\Lambda = \{\lambda_k : 1 \leq k \leq s\}$. Wir nennen $\mathbf{D}$ *regulär schematisch*, wenn die Anzahl $n_j(\lambda_k)$ der verschiedenen i, $1 \leq i \leq v$, für die $\operatorname{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j) = \lambda_k$ ist, unabhängig von j ist (d.h. $n_j(\lambda_k) = n_k$). Siehe [46] für den Spezialfall dieser Definition für sphärische Designs.

Lemma 2.24. *Sei $\mathbf{D}$ ein kohärentes Quantendesign mit Grad s, welches regulär schematisch ist. Dann ist entweder $k = 1$, das Design hat Grad 1 und $\lambda = 0$, oder das Design muß auch regulär sein mit $r = \frac{1}{k-1}\sum_{k=1}^{m} n_k\lambda_k$.*

Beweis. Multiplizieren wir die Gleichung $\mathbf{P}_1 + \cdots + \mathbf{P}_v = k\mathbf{I}$ mit einem festen $\mathbf{P}_j$, $1 \leq j \leq v$, und wenden die Spurfunktion darauf an, dann folgt

$$\sum_{k=1}^{s} n_k\lambda_k = \operatorname{tr}(\mathbf{P}_j)(k-1) \qquad \text{für alle } 1 \leq j \leq v.$$

Entweder $k = 1$ und damit ist die linke Seite gleich 0, oder man kann durch $(k-1)$ dividieren. □

Der Spezialfall $k = 1$, und $\lambda = 0$ entspricht paarweise orthogonalen Projektionen (bzw. Unterräumen) und ist trivial.

Proposition 2.25. *Jedes kohärente Quantendesign mit Grad 1 und $\lambda \neq 0$ ist auch regulär. Für seine Parameter gilt*

$$vr = bk, \tag{2.15a}$$
$$r(k-1) = \lambda(v-1). \tag{2.15b}$$

Beweis. Ein Quantendesign mit Grad 1 ist trivialerweise regulär schematisch mit $n_1 = v - 1$ und mit Lemma 2.24 folgt die zweite Gleichung. Die erste Gleichung haben wir bereits im ersten Abschnitt (Gleichung (1.6b)) gezeigt. □

Das heißt für kohärente Quantendesigns mit Grad 1 (und $\lambda \neq 0$) gibt es nur 3 unabhängige Parameter. Außerdem folgt, daß $\lambda \in \mathbb{Q}$ sein muß. Das sind exakt dieselben Gleichungen wie sie auch für BIBD gelten (welche nach der dualen Zuordnung von Satz 1.10 dem kommutativen Fall entsprechen). Dort sind aber nur Parameter aus den natürlichen Zahlen zulässig. Hier sind auch $k, \lambda \in \mathbb{Q}$ zulässig. Die Gleichung (2.15b) folgt auch aus folgendem Satz.

Satz 2.26 (Spezielle Schranke). *Sei $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ ein Quantendesign mit Grad 1. Dann gilt*

$$\lambda \geq \frac{1}{v(v-1)}\left(\frac{1}{b}\left(\sum_{i=1}^{v} r_i\right)^2 - vr\right).$$

Speziell für reguläre Quantendesigns folgt

$$\lambda \geq \frac{r(vr-b)}{b(v-1)}. \tag{2.16}$$

D *ist genau dann kohärent, wenn hier jeweils Gleichheit gilt.*

Beweis. Unter Verwendung von Satz 2.5 für $t = 1$ und $\mathbf{K}_1(X) = \frac{r}{b}\mathbf{I}$ für die (komplexen) Grassmannräume der Spur r folgt

$$vr + v(v-1)\lambda = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{v} \operatorname{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j) \geq \frac{1}{b}\left(\sum_{i=1}^{v} r_i\right)^2,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn Kohärenz vorliegt. □

Die Ungleichung (2.16) ist für $\lambda < \frac{r^2}{b}$ äquivalent zu

$$v \leq \frac{b(r-\lambda)}{r^2 - b\lambda}. \tag{2.17}$$

Diese „spezielle Schranke“ entspricht in reellen Vektorräumen der Schranke in [55, Theorem 3.6] für $r = 1$. In [53, Theorem 3.6] wurde sie für den Spezialfall equiisokliner Unterräume für beliebiges r abgeleitet. Mit derselben Einschränkung wurde sie in [40] für komplexe Vektorräume angeführt.

Ein reguläres und kohärentes Quantendesign heißt *komplett*, falls $k = v$ gilt. Mit Gleichung (1.6b) gilt dann auch $r = b$, das heißt $\mathbf{P}_i = \mathbf{I}$ für alle $1 \leq i \leq v$. Andernfalls ($r < b$, $k < v$) heißt das Design *inkomplett.*

Proposition 2.27. *Sei* **D** *ein Quantendesign mit Grad* 1 *und Parametern* λ *und* $\operatorname{tr}(\mathbf{P}_i) = r_i$, $1 \leq i \leq v$. *Dann gilt*

$$0 \leq \lambda \leq r_i \leq b \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq v.$$

Ist $r_i = \lambda$ *für ein* $1 \leq i \leq v$, *dann ist* **D** *reduzibel und zerfällt in ein komplettes Quantendesign und ein Quantendesign mit* $\lambda = 0$.

Beweis. Die Matrizen $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j\mathbf{P}_i$ und $\mathbf{P}_i(\mathbf{I} - \mathbf{P}_j)\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_i\mathbf{P}_j\mathbf{P}_i$ sind für alle $1 \leq i, j \leq v$ positiv semidefinit. Also gilt $0 \leq \operatorname{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j) = \operatorname{tr}(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j\mathbf{P}_i) \leq \operatorname{tr}(\mathbf{P}_i)$.

Gleichheit in der zweiten Ungleichung gilt für ein festes $1 \leq i \leq v$ genau dann, wenn $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i\mathbf{P}_j\mathbf{P}_i$ für alle $1 \leq j \leq v$. Damit projizieren alle $\mathbf{P}_j$ auch auf den Teilraum $\mathbf{T}$ von V, auf den $\mathbf{P}_i$ projiziert und das Design ist auf $\mathbf{T}$ komplett.

Eingeschränkt auf das orthogonale Komplement von $\mathbf{T}$ verschwindet $\mathbf{P}_i$ und es folgt unschwer, daß alle anderen Projektionen orthogonal sein müssen. □

Komplette Designs sind ebenso wie Designs mit $\lambda = 0$ trivial und uninteressant. Sei also im folgenden $\lambda < r_i$ für alle $1 \leq i \leq v$ (für reguläre und kohärente Quantendesigns ist das mit den Gleichungen (2.15) einfach äquivalent dazu, daß das Quantendesign inkomplett ist).

Satz 2.28 (Absolute Schranke). *Sei* $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ *ein Quantendesign mit Grad* 1, *welches nichttrivial ist, d.h. mit* $\mathrm{tr}(\mathbf{P}_i) = r_i > \lambda$ *für alle* $1 \leq i \leq v$. *Dann sind die* v *Projektionsmatrizen* $\mathbf{P}_i$, $1 \leq i \leq v$, *linear unabhängig und es gilt die verallgemeinerte Fisher-Ungleichung*

$$\begin{aligned} &v \leq b^2 && \text{\textit{für komplexe Quantendesigns,}} \\ &v \leq \binom{b+1}{2} && \text{\textit{für reelle Quantendesigns,}} \\ &v \leq b && \text{\textit{für kommutative Quantendesigns.}} \end{aligned}$$

Beweis. Die *Gram-Matrix* $\mathbf{G}$ der inneren Produkte der v Projektionsmatrizen hat als Einträge

$$(\mathbf{G})_{ij} = \mathrm{tr}\,(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j) = \begin{cases} \lambda & \text{für alle } 1 \leq i \neq j \leq v, \\ r_i & \text{für alle } 1 \leq i = j \leq v. \end{cases}$$

Diese Matrix läßt sich also in der Form $\mathbf{G} = \mathbf{N} + \lambda\mathbf{J}$ schreiben. Dabei ist $\mathbf{N} = \mathrm{diag}(n_1, \ldots, n_v)$ mit $n_i = r_i - \lambda > 0$ für alle $1 \leq i \leq v$ und $\mathbf{J}$ ist die $v \times v$ Matrix, deren sämtliche Einträge 1 sind. $\mathbf{G}$ ist als Summe der positiv definiten Matrix $\mathbf{N}$ und der positiv semidefiniten Matrix $\lambda\mathbf{J}$ selbst positiv definit. Also gilt $\mathrm{Det}(\mathbf{G}) \neq 0$. Daraus folgt, daß $\mathbf{G}$ nichtsingulär ist und damit die v Projektionsmatrizen linear unabhängig sind. Daraus folgen die drei Ungleichungen. □

Quantendesigns, für welche die entsprechende Ungleichung von Satz 2.28 zur Gleichung wird, sollen *maximal* genannt werden.

Die Ungleichung für den reellen Fall und eingeschränkt auf $r = 1$ findet sich bereits in [55] und [52]. In [53] wurde sie für den Spezialfall equiisokliner Unterräumen mit beliebigem r abgeleitet. Die komplexe Entsprechung findet sich in [40]. Die Ungleichung $v \leq b$ für den kommutativen Fall ist in der klassischen Designtheorie als *Ungleichung von Fisher* bekannt (siehe z.B. [13, Theorem II.2.6]).

Für reguläre Quantendesigns folgen die absoluten Schranken auch als Korollar zu Satz 2.2, $v \leq \dim(\mathrm{Hom}(X, 1)) = \dim(X)$ für die Vektormengen X der komplexen, reellen bzw. diagonalen Matrizen mit Spur r. Für nichtreguläre Designs folgt aus Satz 2.2 aber nur $v \leq \dim(\mathrm{Pol}(X, 1)) = \dim(\mathrm{Hom}(X, 1)) + 1$, da hier das konstante Polynom $f(\mathbf{P}) \equiv c$ nicht in $\mathrm{Hom}(X, 1)$ liegt.

Für reelle und komplexe Designs mit $r = 1$ kann man mit Hilfe der Q-Polynomialität zeigen, daß $\mathbf{D}$ genau dann ein straffes 2-Design ist, wenn es die absolute Schranke für Grad 1 erreicht (siehe [29, Theorem 16.1.3]). Für nichtreguläre Quantendesigns kann allenfalls (straffe) 2-Kohärenz vorliegen aber nicht auch (1-)Kohärenz, da dann $v \geq \dim(\mathrm{Pol}(X, 1)) = \dim(X) + 1$ sein müßte. Es ist nicht bekannt, ob solche Strukturen existieren. Für reguläre Quantendesigns gilt der Zusammenhang von $r = 1$ für beliebige r.

Satz 2.29. *Sei* $\mathbf{D}$ *ein reguläres, komplexes, reelles oder diagonales Quantendesign mit Grad* 1 *und* $r > \lambda$. *Dann ist* $\mathbf{D}$ *genau dann maximal, wenn es ein (straffes)* 2*-Quantendesign bzgl.* $U(b)$, $O(b)$ *bzw.* $S(b)$ *ist.*

Beweis. (i) Wir zeigen zuerst, daß maximale, reguläre $\mathbf{D}$ kohärent sind.

Die komplexen, reellen bzw. diagonalen Projektionsmatrizen eines maximalen Quantendesigns sind entsprechend Satz 2.28 linear unabhängig und spannen den Raum aller komplexen, reellen symmetrischen bzw. diagonalen Matrizen auf. In allen drei Fällen enthalten sie also die Einheitsmatrix als Linearkombination, d.h. es gibt komplexe Zahlen $c_i, 1 \leq i \leq v$, so daß gilt

$$\sum_{i=1}^{v} c_i \mathbf{P}_i = \mathbf{I}.$$

Durch Multiplikation mit $\mathbf{P}_j, 1 \leq j \leq v$, und Anwendung der Spur erhalten wir v Gleichungen in den Unbekannten c_i, welche mit der $v \times v$ Matrix $\mathbf{J}$ und dem Vektor $\mathbf{j}$, dessen Einträge ebenfalls alle gleich 1 sind, sowie dem Vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_v)$ äquivalent sind zur Matrixgleichung

$$((r - \lambda)\mathbf{I} + \lambda \mathbf{J})\, \mathbf{c} = r\mathbf{j}.$$

Die Matrix $(r - \lambda)\mathbf{I} + \lambda\mathbf{J}$ ist als Summe einer positiv definiten Matrix und einer positiv semidefiniten Matrix selbst positiv definit und somit nichtsingulär. Also hat diese Matrixgleichung eine eindeutige Lösung und zwar

$$c_i \equiv c = \frac{r}{r + \lambda(v-1)} \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq v.$$

Daraus folgt die Kohärenz mit $k = 1/c$.

(ii) Aus der Kohärenz von $\mathbf{D}$ folgt mit Satz 2.26, daß $\lambda = \frac{r(vr-b)}{b(v-1)}$ ist, und

$$\frac{1}{v^2} \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{v} (\operatorname{tr}(\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j))^2 = \frac{1}{v}(r^2 + (v-1)\lambda^2) = \frac{r^2(b^2 + vr^2 - 2rb)}{b^2(v-1)}.$$

Setzen wir in die Ungleichung (2.4) jeweils die Werte von $\operatorname{tr}(\mathbf{K}_2(X))^2$ aus den Gleichungen (2.6) ein, dann erhalten wir die drei Ungleichungen von Satz 2.28. Genau bei Gleichheit folgt aus Satz 2.5 die jeweilige 2-Kohärenz bzgl. der zu den G-Räumen gehörigen Gruppen. $\square$

Der Spezialfall dieses Satzes für kommutative Quantendesigns entspricht den *Sätzen von Ryser* für klassische symmetrische Inzidenzstrukturen (siehe z.B. [13, Theorem II.3.2 und II.3.5]).

Alle bisherigen Ergebnisse waren Verallgemeinerungen von Resultaten über klassische Designs (insbesondere BIBDs), gleichwinkelige Liniensysteme und equiisokline Unterräume. Nun folgt ein Resultat, welches auch für $r = 1$ neu zu sein scheint.

Satz 2.30 (Kohärent duale absolute Schranke). *Sei* $\mathbf{D}$ *ein reguläres, kohärentes Quantendesign mit Grad* 1 *und* $v > 1 + b/r$ *(d.h.* $k \neq 1$ *und ungleich einer Lösung von Beispiel* 2.14*). Dann gilt für komplexe Quantendesigns*

$$v \geq \frac{b}{r} + \frac{1 + \sqrt{4br + 1}}{2r^2}. \tag{2.18}$$

Für reelle Quantendesigns gilt

$$v \geq \frac{b}{r} + \frac{2 - r + \sqrt{r^2 + 4r(2b-1) + 4}}{2r^2}. \tag{2.19}$$

Beweis. Aus $k > 1 + r/b$ folgt $r < b(k-1)$. Für die Parameter des kohärent dualen Quantendesigns $\mathbf{D}^-$ gilt also $r^- < b^-$ und mit den Gleichungen (2.15) folgt $k^- < v^-$ und $r^- > \lambda^-$. Damit erfüllt $\mathbf{D}^-$ die Voraussetzungen von Satz 2.28.

Für komplexe Quantendesigns gilt $v^- \leq \left(b^-\right)^2$, d.h. $v \leq b^2\left(k-1\right)^2$ und unter Verwendung von $b(k-1) = vr - b$ folgt $v \leq (vr - b)^2$. Die Auflösung dieser Ungleichung nach v ergibt unter Berücksichtigung von $v \geq 1 + b/r$ die Ungleichung (2.18).

Ist $\mathbf{D}$ reell, so kann auch $\mathbf{D}^-$ reell gewählt werden und es gilt $v^- \leq b^-(b^- + 1)/2$, d.h. $2v \leq b^2\left(k-1\right)^2 + b\left(k-1\right)$ und unter Verwendung von $b(k-1) = vr - b$ folgt $2v \leq (vr-b)^2 + (vr-b)$. Die Auflösung dieser Ungleichung nach v ergibt unter Berücksichtigung von $v \geq 1 + b/r$ die Ungleichung (2.19). □

Sei zum Beispiel $v = 5$, $b = 3$, $r = 1$ und damit $k = \frac{5}{3}$ und $\lambda = \frac{1}{6}$. Die Parameter erfüllen die Ungleichung $v \geq 1 + b/r$ von Proposition 2.12 aber nicht die Ungleichung (2.18) und es existiert somit keine Lösung.

Irrtümlicherweise wurde in [24, Example 5.7] auch für die Parameter $b = 4$, $v = 6$ und $\lambda = \frac{1}{9}$ behauptet, daß die spezielle Schranke (2.17) zur Gleichheit wird und damit das Design kohärent sei. Ein Quantendesign mit Grad 1 und solchen Parametern existiert wohl (siehe [55]) aber es erfüllt die spezielle Schranke nicht exakt, ist also auch nicht kohärent. Dazu müßte $\lambda = \frac{1}{10}$ sein. Eine solche Lösung kann aber nicht existieren, da sie Gleichung (2.18) verletzen würde.

2.5 Automorphismengruppen

Definition 2.31. Ein *Automorphismus* des Quantendesigns $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ ist eine Äquivalenzabbildung von $\mathbf{D}$ in sich selbst und wird durch ein Paar $(\mathbf{U}, \pi)$ beschrieben, bestehend aus einer Matrix $\mathbf{U} \in U(b)$ und einer Permutation π von $\{1, \ldots, v\}$, so daß gilt

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{U}\mathbf{P}_{\pi(i)}\mathbf{U}^{-1} \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq v.$$

Sei $G \subseteq U(b)$. Die Menge aller Automorphismen $(\mathbf{U}, \pi)$ mit $\mathbf{U} \in G$ eines Quantendesigns $\mathbf{D}$ bildet mit der Hintereinanderausführung $\circ$ als Verknüpfung eine Gruppe, welche *volle Automorphismengruppe bzgl.* G von $\mathbf{D}$ genannt und mit $\mathrm{Aut}_G(\mathbf{D})$ bezeichnet wird.

Wir lassen nun die Permutationen außer Acht und betrachten nur die unitären Matrizen. Durch die Abbildung

$$\varphi : (\mathbf{U}, \pi) \mapsto \mathbf{U}$$

wird ein Homomorphismus von $\mathrm{Aut}_G(\mathbf{D})$ in die Gruppe aller unitären $b \times b$ Matrizen definiert, d.h. eine *(unitäre) lineare Darstellung* von $\mathrm{Aut}_G(\mathbf{D})$. Wie man leicht sieht ist die Abbildung φ genau dann injektiv, wenn alle Projektionen $\mathbf{P}_i \in \mathbf{D}$ paarweise verschieden sind. Das setzen wir im folgenden voraus. Dann läßt sich φ eindeutig umkehren und wir sagen $\mathbf{U}$ *erzeugt* den Automorphismus $(\mathbf{U}, \pi)$.

Proposition 2.32. *Sei* $\mathrm{Aut}_G(\mathbf{D})$ *die Automorphismengruppe bzgl. einer beliebigen Gruppe* G *des Quantendesigns* $\mathbf{D}$ *und* H *die Gruppe der zugehörigen unitären Matrizen (das Bild von* φ*). Dann ist* $\mathbf{D}$ *ein* t*-Quantendesign bzgl.* H *für alle* $t \in \mathbb{N}$*. Ist* H *irreduzibel, so ist* $\mathbf{D}$ *insbesondere kohärent.*

Beweis. Die t-Kohärenz folgt sofort, wenn man für beliebige $(\mathbf{U}, \pi) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{D})$ die Gleichung $\sum_{i=1}^{v} \otimes^t \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^{v} \otimes^t \mathbf{P}_{\pi(i)}$ mit $\mathbf{U}$ ähnlichkeitstransformiert. Für irreduzible G folgt die Kohärenz aus dem Lemma von Schur. □

Aber natürlich haben wir im allgemeinen etwas größere Gruppen im Auge, wenn wir die t-Kohärenz untersuchen. Über die Irreduzibilität von H hat man aber ein schönes Kriterium für die Kohärenz.

Durch

$$\psi : (\mathbf{U}, \pi) \mapsto \pi$$

wird ein Homomorphismus von $\mathrm{Aut}_G(\mathbf{D})$ in die *symmetrische Gruppe* S_v (aller Permutationen einer v-elementigen Menge) induziert, d.h. eine *Darstellung als Permutationsgruppe*. Sei mit $\mathrm{Aut}_G^*(\mathbf{D}) \subseteq S_v$ das Bild von $\mathrm{Aut}_G(\mathbf{D})$ unter $\psi : (\mathbf{U}, \pi) \mapsto \pi$ bezeichnet.

Der Homomorphismus ψ ist im allgemeinen nicht injektiv. Der Kern von ψ ist (mit der identischen Permutation id) gegeben durch $\mathrm{Ker}(\psi) = \{(\mathbf{U}, \mathrm{id}) \in \mathrm{Aut}_G(\mathbf{D})\}$ und enthält jedenfalls die Untergruppen $G \cap N$, wobei

$$N = \{(\alpha \mathbf{I}, \mathrm{id}) : \ \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1\}.$$

Der Kern von ψ ist immer ein *Normalteiler* und es gilt

$$\mathrm{Aut}^*_G(\mathbf{D}) \cong \frac{\mathrm{Aut}_G(\mathbf{D})}{\mathrm{Ker}(\psi)}.$$

Wir können nun ψ umkehren und jeder Permutation $\pi \in \mathrm{Aut}^*_G(\mathbf{D})$ eindeutig eine Nebenklasse von $\mathrm{Ker}(\psi)$ in $\mathrm{Aut}_G(\mathbf{D})$ und speziell einen Nebenklassenrepräsentanten $(\mathbf{U}(\pi), \pi) \in \mathrm{Aut}_G(\mathbf{D})$ zuordnen. O.B.d.A kann $\mathbf{U}(\mathrm{id}) = \mathbf{I}$ gesetzt werden. Wenden wir darauf φ an, so erhalten wir eine Abbildung $\pi \mapsto \mathbf{U}(\pi)$ von $\mathrm{Aut}^*_G(\mathbf{D})$ in die unitären $b \times b$ Matrizen. Diese Abbildung ist besonders interessant, falls $\mathrm{Ker}(\psi) = G \cap N$ gilt, wofür es ein einfaches Kriterium gibt.

Lemma 2.33. *Sei* $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ *ein Quantendesign und* ψ *der Homomorphismus von* $\mathrm{Aut}(\mathbf{D})$ *in die symmetrische Gruppe. Ist* $\mathbf{D}$ *irreduzibel, dann gilt* $\mathrm{Ker}(\psi) = G \cap N$.

Beweis. Sei das Quantendesign $\mathbf{D}$ irreduzibel und $(\mathbf{U}, \mathrm{id}) \in \mathrm{Ker}(\psi)$, d.h.

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{U}\mathbf{P}_i\mathbf{U}^{-1} \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq v.$$

Sei A die von den Projektionen $\mathbf{P}_i$, $1 \leq i \leq v$, erzeugte Algebra (endliche Produkte und Linearkombinationen) aus komplexen $b \times b$ Matrizen. Auch A ist irreduzibel und die Matrix $\mathbf{U}$ kommutiert mit allen Matrizen aus A. Also läßt sich das Lemma von Schur wieder anwenden und es folgt $\mathbf{U} = \alpha\mathbf{I}$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ sowie $|\alpha| = 1$, wegen der Unitarität von $\mathbf{U}$. □

Ist G genügend groß (z.B. $G = U(b)$ oder $O(b)$), dann gilt sogar die Umkehrung von Lemma 2.33. Sei das Quantendesign $\mathbf{D}$ reduzibel und in einer geeigneten Basis des $\mathbb{C}^b$ sei $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{1i} \oplus \mathbf{P}_{2i}$ für alle $1 \leq i \leq v$ mit den $c \times c$ Projektionsmatrizen $\mathbf{P}_{1i}$ und den $d \times d$ Projektionsmatrizen $\mathbf{P}_{2i}$ und $c, d \neq 0$. Sei $\mathbf{U}_\epsilon = \mathbf{I}_c \oplus \epsilon\mathbf{I}_d$ mit $\epsilon \in \mathbb{C}, |\epsilon| = 1$. Dann folgt sofort, daß $(\mathbf{U}, \mathrm{id}) \in \mathrm{Ker}(\psi)$ ist und, falls $\mathbf{U}_\epsilon \in G$ für ein $\epsilon \neq 1$ gilt, folgt $\mathrm{Ker}(\psi) \neq N \cap G$.

Sei im folgenden $\mathrm{Ker}(\psi) = N \cap G$. Die Gruppe $N \cap G$ liegt im *Zentrum* von $\mathrm{Aut}_G(\mathbf{D})$ und damit ist $\mathrm{Aut}_G(\mathbf{D})$ eine sogenannte *zentrale Erweiterung* von $\mathrm{Aut}^*_G(\mathbf{D})$ um $N \cap G$. Es gilt dann

$$(\mathbf{U}(\pi), \pi) \circ (\mathbf{U}(\sigma), \sigma) = (\alpha(\pi, \sigma)\mathbf{I}, \mathrm{id}) \circ (\mathbf{U}(\pi \circ \sigma), \pi \circ \sigma)$$

mit $\alpha(\pi, \sigma) \in \mathbb{C}$, $|\alpha(\pi, \sigma)| = 1$. Wendet man darauf φ an, so folgt

$$\mathbf{U}(\pi)\mathbf{U}(\sigma) = \alpha(\pi, \sigma)\mathbf{U}(\pi \circ \sigma).$$

Das heißt durch die Abbildung

$$\mathbf{U} : \pi \mapsto \mathbf{U}(\pi)$$

ist eine sogenannte *projektive Darstellung (oder Strahldarstellung)* (siehe [21, Kapitel 51-53], sowie ausführlicher [48]) von $\mathrm{Aut}^*_G(\mathbf{D})$ in den Raum der unitären $b \times b$ Matrizen gegeben mit der *Faktormenge* $\{\alpha(\pi,\sigma) : \pi,\sigma \in \mathrm{Aut}^*_G(\mathbf{D})\}$. Ist $G \subseteq O(b)$, dann wird speziell eine projektive Darstellung über $\mathbb{R}$ gebildet (mit der Faktormenge $\{\pm 1\}$).

Diese projektive Darstellung ist unitär und sie ist genau dann irreduzibel, wenn die gewöhnliche Darstellung φ irreduzibel ist. Sie ist genau dann injektiv, wenn φ injektiv ist, also genau dann, wenn alle Projektionen $\mathbf{P}_i \in \mathbf{D}$ verschieden sind. Eine projektive Darstellung $\mathbf{U}'$ ist genau dann demselben Quantendesign $\mathbf{D}$ zugeordnet, wenn $\mathbf{U}$ und $\mathbf{U}'$ projektiv äquivalent sind, d.h. $\mathbf{U}'(\pi) = \rho(\pi)\mathbf{U}(\pi)$ mit $\rho(\pi) \in \mathbb{C}$, $|\rho(\pi)| = 1$ für alle $\pi \in \mathrm{Aut}^*_G(\mathbf{D})$ gilt.

Für irreduzible Quantendesigns $\mathbf{D}$ läßt sich die Untersuchung der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}_G(\mathbf{D})$ also auf jene der endlichen Gruppe $\mathrm{Aut}^*_G(\mathbf{D})$ und der ihr zugeordneten projektiven Darstellung $\mathbf{U}(\pi)$ zurückführen. $\mathrm{Aut}_G(\mathbf{D})$ besteht dann für $G = U(b)$ zum Beispiel genau aus allen $(\alpha\mathbf{U}(\pi), \pi)$ mit $\pi \in \mathrm{Aut}^*_G(\mathbf{D})$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$.

Für reduzible Quantendesigns kommt etwas mehr Gruppentheorie ins Spiel. Die Automorphismengruppe läßt sich dann im allgemeinen nicht mehr eindeutig aus den Matrizen $\mathbf{U}(\pi)$ rekonstruieren.

Eine Permutationsgruppe G über einer v-elementigen Menge $\{1,\ldots,v\}$ heißt *transitiv*, falls es für alle $1 \leq i \neq j \leq v$ ein $\pi \in G$ gibt, so daß $\pi(i) = j$ gilt.

Angenommen die Untergruppe $G \subseteq \mathrm{Aut}^*_G(\mathbf{D})$ ist transitiv und wir kennen für alle $\pi \in G$ ein $(\mathbf{U}(\pi), \pi) \in \mathrm{Aut}_G(\mathbf{D})$ (d.h. für irreduzible Quantendesigns $\mathbf{D}$ die induzierte projektive Darstellung). Dann genügt zur vollständigen Beschreibung des Quantendesigns $\mathbf{D}$ die Kenntnis einer einzigen Projektionsmatrix des Quantendesigns, z.B. die Kenntnis von $\mathbf{P}_1$. Alle anderen Projektionsmatrizen folgen einfach durch

$$\mathbf{P}_{\pi(1)} = \mathbf{U}(\pi)^{-1}\mathbf{P}_1\mathbf{U}(\pi) \qquad \text{für alle } \pi \in G.$$

Das heißt die projektive Darstellung von G erzeugt zusammen mit einer *Anfangsprojektion* $\mathbf{P}_1$ das komplette Design.

Insbesondere genügt eine sogenannte *reguläre* Untergruppe G. (Eine Permutationsgruppe heißt *regulär*, falls sie transitiv ist und alle $\pi \in G$, $\pi \neq \mathrm{id}$, *fixpunktfrei* sind). Für reguläre Permutationsgruppen gilt, daß ihre Ordnung gleich v sein muß (siehe [13, Kapitel III.3]).

In Anlehnung an die klassische Designtheorie nennen wir eine reguläre Untergruppe G von $\mathrm{Aut}^*_G(\mathbf{D})$ eine *verallgemeinerte Singer-Gruppe* des Quantendesigns $\mathbf{D}$ (siehe [13, Kapitel VI] bzw. [47, Abschnitt 2.4]).

In [29] wurden Automorphismengruppen auf polynomialen Räumen (d.h. in unserer Terminologie auf G-Räumen) untersucht. Die Resultate lassen sich entsprechend der Zuordnung durch die Gleichungen (1.21) auch auf Quantendesigns übertragen. Analoge Untersuchungen gibt es für sphärische Designs (siehe [30], [31], [8] und [9]), wobei auch die von einem Anfangsvektor erzeugten Designs für vorgegebene Gruppen untersucht wurden. Hier treten nur gewöhnliche Darstellungen auf.

Für klassische, quadratische Inzidenzstrukturen, welche nichtsingulär sind, gilt, daß für jeden Automorphismus, die Anzahl der Fixpunkte gleich der Anzahl der fixen Blöcke ist (siehe [13, I. Prop. 4.8 und II. Cor. 2.4], bzw. [47, Lemma 1.43 und Cor. 1.44]). Das bedeutet für diagonale Quantendesigns, daß für alle $(\mathbf{S}, \pi) \in \mathrm{Aut}_G(\mathbf{D})$ für die Anzahl $f(\pi)$ der Fixpunkte von π gilt, daß $f(\pi) = \mathrm{tr}(\mathbf{S})$ ist. Ein analoger Zusammenhang läßt sich auf komplexe Quantendesigns übertragen.

Satz 2.34. *Sei $\mathbf{D} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_v\}$ ein Quantendesign mit $v = b^2$ orthogonalen $b \times b$ Projektionsmatrizen, welche linear unabhängig sind. Sei $(\mathbf{U}, \pi) \in \mathrm{Aut}_G(\mathbf{D})$ und $f(\pi)$ die Anzahl der Fixpunkte der Permutation π. Dann gilt*

$$f(\pi) = |\mathrm{tr}\,(\mathbf{U})|^2 .$$

Beweis. Sei $(\mathbf{U}, \pi) \in \mathrm{Aut}_G(\mathbf{D})$. Dann gilt $\mathbf{P}_l = \mathbf{U}\mathbf{P}_{\pi(l)}\mathbf{U}^{-1}$, also $\mathbf{P}_{\pi(l)} = \mathbf{U}^*\mathbf{P}_l\mathbf{U}$ für alle $1 \leq l \leq v$. Das heißt mit $\mathbf{P}_l = (p_{ij}^{(l)})$ und $\mathbf{U} = (u_{ij})$ gilt für alle $1 \leq i, j \leq b$ und $1 \leq l \leq v$

$$p_{ij}^{(\pi(l))} = \sum_{m=1}^{b} \sum_{n=1}^{b} \bar{u}_{mi} p_{mn}^{(l)} u_{nj}.$$

Sei $\mathbf{A} = (a_{l,(ij)}) = (p_{ij}^{(l)})$ für $1 \leq i, j \leq b$ und $1 \leq l \leq v$ die Matrix mit den Projektionen als Zeilen, wobei wir annehmen, daß (ij) die b^2 Paare von Zahlen $1 \leq i, j \leq b$ in lexikographischer Ordnung $(11, 12, \ldots, 1b, 21, \ldots)$ durchläuft. Mit Hilfe der $v \times v$ Permutationsmatrix $\mathbf{Q}_\pi$, welche die Zeilenvektoren von $\mathbf{A}$ durch Multiplikation von links entsprechend π permutiert, erhält man

$$\mathbf{Q}_\pi \mathbf{A} = \mathbf{A}(\overline{\mathbf{U}} \otimes \mathbf{U}).$$

$\mathbf{A}$ hat nach Voraussetzung v linear unabhängige Zeilen und ist also invertierbar. Darum gilt

$$\mathbf{Q}_\pi = \mathbf{A}(\overline{\mathbf{U}} \otimes \mathbf{U})\mathbf{A}^{-1}$$

und mit $f(\pi) = \mathrm{tr}(\mathbf{Q}_\pi)$ folgt

$$f(\pi) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}(\overline{\mathbf{U}} \otimes \mathbf{U})\mathbf{A}^{-1}) = \mathrm{tr}(\overline{\mathbf{U}} \otimes \mathbf{U}) = \mathrm{tr}(\overline{\mathbf{U}})\,\mathrm{tr}(\mathbf{U}) = |\mathrm{tr}(\mathbf{U})|^2 .$$

□

Übrigens ist jedes Quantendesign, das die Voraussetzungen von Satz 2.34 erfüllt, irreduzibel. (Angenommen $\mathbf{D}$ wäre unitär äquivalent zu einer Summe zweier Quantendesigns mit Matrizen der Ordnung $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ und $b_1 + b_2 = b$. Dann können die linear unabhängigen Projektionsmatrizen höchstens einen $(b_1^2 + b_2^2)$-dimensionalen Teilraum aufspannen). Also ist die projektive Darstellung $\mathbf{U}(\pi)$ von $\mathrm{Aut}_G^*(\mathbf{D})$ definiert. Satz 2.34 liefert $f(\pi) = |\mathrm{tr}\,(\mathbf{U}(\pi))|^2$ für alle $\pi \in \mathrm{Aut}_G^*(\mathbf{D})$.

Satz 2.34 gilt insbesondere für maximale, komplexe Quantendesigns mit Grad 1 (siehe Satz 2.28). Wollen wir solche Quantendesigns mittels einer regulären Untergruppe G bilden, so muß die Gruppe die Ordnung b^2 haben und eine projektive Darstellung im $\mathbb{C}^b$ besitzen, für die gilt

$$|\mathrm{tr}\,(\mathbf{U}(\pi))|^2 = 0 \qquad \text{für alle } \pi \in G,\ \pi \neq \mathrm{id},$$

da alle $\pi \in G$, $\pi \neq \mathrm{id}$, fixpunktfrei sind. Damit kann die Darstellung nicht zu einer gewöhnlichen Darstellung äquivalent sein, da der Charakter nicht orthogonal zum trivialen Charakter wäre.

Spezielle Gruppen dieser Art werden wir im nächsten Abschnitt untersuchen.

3 Konstruktionen

3.1 Weyl-Matrizen und die Fourier-Matrix

Wir stellen einige Matrizen und Relationen vor, welche immer wieder benötigt werden. Seien zwei unitäre $b \times b$ Matrizen definiert durch

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/b} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{4\pi i/b} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{2(b-1)\pi i/b} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\mathbf{U}^b = \mathbf{V}^b = \mathbf{I}, \tag{3.1a}$$

$$\mathbf{V}^c\mathbf{U}^d = e^{2\pi icd/b}\mathbf{U}^d\mathbf{V}^c \qquad \text{für alle } c, d \in \mathbb{Z}. \tag{3.1b}$$

Sei $\mathbb{Z}_b = \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ die additive (zyklische) Restklassengruppe modulo b und $(c, d) \in \mathbb{Z}_b^2$. Die Zuordnung $(c, d) \mapsto \mathbf{V}^c\mathbf{U}^d$ liefert eine eindeutige, irreduzible und treue *projektive Darstellung* der abelschen, b^2-elementigen, additiven Gruppe des Vektorraumes $\mathbb{Z}_b^2$ durch die sogenannten *Weyl-Matrizen* $\mathbf{V}^c\mathbf{U}^d$ (siehe Weyl [77, Kap. 4] bzw. [48, Theorem 7.1])). Die b^3 Matrizen $e^{2\pi iq/b}\mathbf{V}^c\mathbf{U}^d$ mit $q, c, d \in \mathbb{Z}_b$ bilden eine gewöhnliche, irreduzible und treue Darstellung der (nichtabelschen) sogenannten *Heisenberg-Gruppe* (siehe [5]).

Seien nun $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)$ und $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$ zwei m-tupel von Elementen $c_i, d_i \in \mathbb{Z}_b$, $1 \le i \le m$. Dann ist durch die Zuordnung

$$(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \mapsto \mathbf{W}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \mathbf{V}^{c_1}\mathbf{U}^{d_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{V}^{c_m}\mathbf{U}^{d_m} \tag{3.2}$$

eine projektive Darstellung der n^{2m}-elementigen, additiven, abelschen Gruppe des Vektorraumes $\mathbb{Z}_b^{2m}$ gegeben. Es folgt sofort

$$\mathbf{W}(\mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{W}(\mathbf{c}', \mathbf{d}') = e^{-2\pi i\left(c_1'd_1 + \dots + c_m'd_m\right)/b}\mathbf{W}(\mathbf{c} + \mathbf{c}', \mathbf{d} + \mathbf{d}'). \tag{3.3}$$

Da $\mathrm{tr}(\mathbf{W}(\mathbf{c}, \mathbf{d}))$ für $\mathbf{c} = \mathbf{d} = (0, \dots, 0)$ gleich b ist, sonst aber gleich 0, gilt

$$\mathrm{tr}(\mathbf{W}(\mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{W}^*(\mathbf{c}', \mathbf{d}')) = \begin{cases} b & \text{falls } \mathbf{c} = \mathbf{c}' \text{ und } \mathbf{d} = \mathbf{d}', \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.4}$$

Diese Matrizen sind also orthogonal und bilden eine Basis des b^{2m}-dimensionalen Vektorraumes aller komplexen $b^m \times b^m$ Matrizen (siehe [68] für den Fall $m = 1$).

Die *Fourier-Matrix* (manchmal auch *Diskrete Fourier-Transformation* oder *Schur-Matrix* genannt) ist eine $b \times b$ Matrix $\mathbf{F} = (f_{rs})_{0 \leq r,s \leq b-1}$ mit Einträgen $f_{rs} = \frac{1}{\sqrt{b}} e^{2\pi i rs/b}$, d.h.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{b}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{2\pi i/b} & e^{2\pi i 2/b} & \dots & e^{2\pi i(b-1)/b} \\ 1 & e^{2\pi i 2/b} & e^{2\pi i 4/b} & \dots & e^{2\pi i 2(b-1)/b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{2\pi i(b-1)/b} & e^{2\pi i 2(b-1)/b} & \dots & e^{2\pi i(b-1)(b-1)/b} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

$\mathbf{F}$ ist unitär und es gilt:

$$\mathbf{F}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}^4 = \mathbf{I}, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{F} = \mathbf{U} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{F}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{F} = \mathbf{V}^{-1}. \tag{3.7}$$

Daraus folgt sofort

$$\otimes^m \mathbf{F}^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \otimes^m \mathbf{F} = e^{2\pi i(c_1 d_1 + \dots + c_m d_m)/b}\mathbf{W}(-\mathbf{d}, \mathbf{c}).$$

Über die Fourier-Matrix existieren eine Reihe von Arbeiten (siehe [5] für einen Überblick).

Diese Matrizen stellen das endlichdimensionale Gegenstück der Weyl-Operatoren und der Fourier-Transformation im Hilbertraum $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ dar, welche eine zentrale Rolle in der Quantenmechanik spielen. Sie werden sowohl bei der Konstruktion maximaler, komplexer, affiner Quantendesigns, als auch maximaler, komplexer, Quantendesigns mit Grad 1 eine Rolle spielen.

3.2 Maximale affine Quantendesigns

Für jede beliebige Primzahlpotenz $q = p^m$ und ganze Zahl $n \geq 2$ existiert ein maximales, klassisches, affines (bzw. transversales) 2-Design mit den Parametern $b = q^n$, $r = q^{n-1}$, $\lambda = q^{n-2}$, $g = q$, $k = \frac{q^n-1}{q-1}$ und $v = \frac{q(q^n-1)}{q-1}$ (siehe [13, I.7] bzw. [20, VI.7.7] – aber mit dualen Parametern). Diese Designs erhält man z.B. mit dem n-dimensionalen Vektorraum über einem endlichen Körper $\mathbb{F}$ der Ordnung q als Punktmenge und den $(n-1)$-dimensionalen *Hyperebenen* von $\mathbb{F}^n$ als Blöcken. Der kleinste Fall $n = 2$, d.h. $\lambda = 1$, entspricht der Existenz von $q-1$ paarweise orthogonalen Lateinischen $q \times q$ Quadraten bzw. affinen Ebenen und kann im $\mathbb{F}^2$ realisiert werden.

Wir wollen ein analoges Resultat für maximale affine Quantendesigns über den komplexen Zahlen beweisen und zwar mit einer verwandten Konstruktion. Dazu benötigen wir ein Konzept aus der Theorie der endlichen Körper (siehe [54, Kapitel 2.3]).

Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper der Ordnung q^m mit einem Unterkörper $\mathbb{K}$ der Ordnung q. Man kann $\mathbb{F}$ als m-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ interpretieren. Eine geordnete Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ von m Elementen $\alpha_i \in \mathbb{F}$ heißt eine Basis von $\mathbb{F}$ über $\mathbb{K}$, wenn jedes Element $\mathbf{a} \in \mathbb{F}$ eindeutig dargestellt werden kann in der Form $\mathbf{a} = a_1\alpha_1 + \cdots + a_m\alpha_m$ mit $a_i \in \mathbb{K}$ für alle $1 \leq i \leq m$. Die *Spur* $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}(\mathbf{a})$ eines Elementes $\mathbf{a} \in \mathbb{F}$ über $\mathbb{K}$ ist definiert durch $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} + \mathbf{a}^q + \cdots + \mathbf{a}^{q^{m-1}}$. Ist $\mathbb{K}$ der Primkörper von $\mathbb{F}$, dann wird $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}(\mathbf{a})$ als *absolute Spur* bezeichnet und einfach als Tr abgekürzt. Die Spur ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{F}$ auf $\mathbb{K}$. Zwei Basen $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ und $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ von $\mathbb{F}$ über $\mathbb{K}$ heißen *dual*, falls

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}(\alpha_i\beta_j) = \begin{cases} 1 & \text{für alle } 1 \leq i = j \leq m, \\ 0 & \text{für alle } 1 \leq i \neq j \leq m. \end{cases}$$

Zu jeder beliebigen Basis existiert eine duale Basis.

Satz 3.1. *Für jede beliebige Primzahlpotenz $q = p^m$ und für jede ganze Zahl $n \geq 1$ existiert ein maximales, affines 2-Quantendesign bzgl. $U(b)$ mit den Parametern $b = q^n$, $r = q^{n-1}$, $\lambda = q^{n-2}$, $g = q$, $k = \frac{q^{2n}-1}{q-1}$ und $v = \frac{q(q^{2n}-1)}{q-1}$.*

Beweis. Wir konstruieren zuerst Lösungen für $n = 1$, d.h. $r = 1$.

Sei $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ ein Punkt im $\mathbb{F}^2$. Seien $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ und $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ zwei duale Basen des endlichen Körpers $\mathbb{F}$ der Ordnung p^m über seinem Primkörper, welchen wir mit $\mathbb{Z}_p$ identifizieren und $\mathbf{c} = c_1\alpha_1 + \cdots + c_m\alpha_m$ und $\mathbf{d} = d_1\beta_1 + \cdots + c_m\beta_m$. Dann ist durch $(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \mapsto \mathbf{W}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \mathbf{V}^{c_1}\mathbf{U}^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{V}^{c_m}\mathbf{U}^{d_m}$, also entsprechend Gleichung (3.2), eine projektive Darstellung der additiven Gruppe von $\mathbb{F}^2$ gegeben.

$(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ und $(\mathbf{c}', \mathbf{d}')$ liegen genau dann in einem eindimensionalen Teilraum von $\mathbb{F}^2$, wenn $\mathbf{c}'\mathbf{d} = \mathbf{c}\mathbf{d}'$ gilt. Darauf die absolute Spur angewandt, ergibt mit der Dualität der Basen

$$c_1'd_1 + \cdots + c_m'd_m = c_1d_1' + \cdots + c_md_m'.$$

Daraus folgt mit Gleichung (3.3), daß die q Matrizen $\mathbf{W}(\mathbf{c}, \mathbf{d})$, welche zu einem eindimensionalen Teilraum von $\mathbb{F}^2$ gehören, paarweise kommutieren. Aus der Gleichung (3.4) folgt, daß sie linear unabhängig sind. Wenn sie gleichzeitig diagonalisiert sind, spannen sie also den Raum aller diagonalen $q \times q$-Matrizen auf. Mit Hilfe von Linearkombinationen läßt sich also insbesondere eine vollständige Orthorgonalklasse aus q eindimensionalen Projektionen eindeutig erzeugen.

Alle Teilräume des $\mathbb{F}^2$ haben nur den Nullpunkt gemeinsam, dem die $q \times q$ Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ zugeordnet ist. Für jede eindimensionale Projektion $\mathbf{P}$ ist $\mathbf{P} - \frac{1}{q}\mathbf{I}$ orthogonal zu $\mathbf{I}$ und damit eine Linearkombinationen von $q - 1$ Matrizen $\mathbf{W}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \neq \frac{1}{q}\mathbf{I}$. Seien $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ zwei verschiedenen linearen Teilräumen zugeordnet, dann sind diese Mengen von Weylmatrizen disjunkt, woraus mit den Orthogonalitätsrelationen (3.4) folgt

$$\operatorname{tr}\left((\mathbf{P} - \frac{1}{q}\mathbf{I})(\mathbf{Q} - \frac{1}{q}\mathbf{I})\right) = \operatorname{tr}(\mathbf{PQ}) - \frac{1}{q} = 0.$$

Also sind die Projektionen paarweise unabhängig. Die $q + 1$ eindimensionalen Unterräume von $\mathbb{F}^2$ liefern somit $q+1$ paarweise unabhängige Orthogonalklassen.

Sei nun $n \geq 2$ beliebig und $b = q^n$. Sei $\mathbf{D}$ die eben konstruierte Lösung mit $r = 1$, d.h. mit $k = q^n + 1$ Orthogonalklassen sowie $\mathbf{D}'$ das klassische, affine Design für $b = q^n$ mit $s = \frac{q^n-1}{q-1}$ Parallelklassen. Damit sind die Voraussetzungen für Proposition 2.21 erfüllt und wir erhalten ein Quantendesign mit $ks = \frac{q^{2n}-1}{q-1}$ Orthogonalklassen. Die Regularität mit $r = q^{n-1}$ kommt vom klassischen Design und die weiteren Parameter lassen sich ebenso leicht nachprüfen. □

Die Konstruktion für $n = 1$ kann verallgemeinert werden, indem man n-fache Tensorprodukte von $\mathbf{W}(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ und die Zuordnung zu eindimensionalen Teilräumen von $\mathbb{F}^{2n}$ betrachtet. Man kann so auch direkt die Lösungen für $n > 1$ konstruieren und zeigen, daß sie die klassischen Designs als Teilmengen enthalten.

Sei nun $r = 1$ und q eine *ungerade* Primzahlpotenz. Dann können wir auch explizite Vektormengen für diese Quantendesigns angeben. Ein *additiver Charakter* χ über einem endlichen Körpern $\mathbb{F}$ der Ordnung q ist ein Homomorphismus der additiven Gruppe von $\mathbb{F}$ in die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen mit Absolutbetrag 1. Ein nichttrivialer Charakter läßt sich mit der absoluten Spur durch $\chi_1(\mathbf{a}) = e^{2\pi i \operatorname{Tr}(\mathbf{a})/p}$ definieren. Seien $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q$ die Elemente von $\mathbb{F}$ in beliebiger Reihenfolge und für alle $\mathbf{a} \in \mathbb{F}$

$$\mathbf{X_a} = \frac{1}{\sqrt{q}} \begin{pmatrix} \chi_1(\mathbf{a}\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_1) & \chi_1(\mathbf{a}\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) & \ldots & \chi_1(\mathbf{a}\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_q) \\ \chi_1(\mathbf{a}\mathbf{x}_2^2 + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1) & \chi_1(\mathbf{a}\mathbf{x}_2^2 + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2) & \ldots & \chi_1(\mathbf{a}\mathbf{x}_2^2 + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_1(\mathbf{a}\mathbf{x}_q^2 + \mathbf{x}_q\mathbf{x}_1) & \chi_1(\mathbf{a}\mathbf{x}_q^2 + \mathbf{x}_q\mathbf{x}_2) & \ldots & \chi_1(\mathbf{a}\mathbf{x}_q^2 + \mathbf{x}_q\mathbf{x}_q) \end{pmatrix}.$$

Für ungerade q bilden die Standardbasis und die Spalten der q Matrizen $\mathbf{X}_a$ genau $q+1$ paarweise unabhängige Orthonormalbasen. Dies kann man direkt nachprüfen unter Verwendung der Orthogonalitätsrelationen der Charaktere und folgender Formel für nichttriviale Charaktere χ über endlichen Körpern von ungerader Ordnung q (siehe [54, Theorem 5.33]).

$$\left|\sum_{\mathbf{y}\in\mathbb{F}} \chi(\mathbf{a}\mathbf{y}^2+\mathbf{x}\mathbf{y})\right| = \sqrt{q} \qquad \text{für alle } \mathbf{a},\mathbf{x}\in\mathbb{F},\ \mathbf{a}\neq\mathbf{0}. \tag{3.8}$$

Wir skizzieren kurz den Zusammenhang zur Konstruktion in Satz 3.1 und beweisen damit auch indirekt die Formel (3.8).

Sei jedem $\mathbf{x}\in\mathbb{F}$ sein Koordinatenvektor $\{x_1,\dots,x_m\}$ bezüglich der Basis $\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$ und damit weiters ein Standardbasisvektor $\mathbf{e}_\mathbf{x} = \mathbf{e}_{x_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{x_m}$ im m-fachen Tensorprodukt des $\mathbb{C}^p$ zugeordnet. Dann läßt sich die Wirkung der Matrizen $\mathbf{W}(\mathbf{c},\mathbf{d})$ beschreiben durch $\mathbf{W}(\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{e}_\mathbf{x} = e^{2\pi i \mathrm{Tr}(dx)/b}\mathbf{e}_{\mathbf{x}-\mathbf{c}} = \chi_1(\mathbf{d}\mathbf{x})\mathbf{e}_{\mathbf{x}-\mathbf{c}}$. Das heißt die Tensorprodukte der $\mathbf{U}$ wirken wie die Multiplikation mit einem additivem Charakter und die Tensorprodukte der $\mathbf{V}$ wie eine Verschiebung auf den Basisvektoren. Indem man durch die Darstellung $\mathbf{X}_\mathbf{a}\mathbf{e}_\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{\mathbf{y}\in\mathbb{F}}\chi_1(\mathbf{a}\mathbf{y}^2+\mathbf{x}\mathbf{y})\mathbf{e}_\mathbf{y}$ auch $\mathbf{X}_\mathbf{a}$ als Matrizen in dieser Basis interpretiert, läßt sich leicht nachprüfen, daß gilt

$$\mathbf{X}_\mathbf{a}^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{X}_\mathbf{a} = \chi_1(\mathbf{a}\mathbf{c}^2+\mathbf{d}\mathbf{c})\mathbf{W}(-(\mathbf{d}+2\mathbf{a}\mathbf{c}),\mathbf{c}).$$

Die Matrizen $\mathbf{W}(\mathbf{0},\mathbf{d})$ sind diagonal. Für ungerade q werden mit $\mathbf{a}\in\mathbb{F}$ durch die Gleichungen $\mathbf{d}=-2\mathbf{a}\mathbf{c}$ alle linearen Teilräume im $\mathbb{F}^2$ ungleich $(\mathbf{0},\mathbf{d}),\mathbf{d}\in\mathbb{F}$ beschrieben und alle einem solchen Teilraum zugehörigen Matrizen $\mathbf{W}(\mathbf{c},\mathbf{d})$ werden also durch $\mathbf{X}_\mathbf{a}$ gleichzeitig diagonalisiert. Die Spalten dieser Matrizen sind also die gemeinsamen Eigenvektoren. Für gerade q gilt das nicht.

Die Matrizen $\mathbf{W}(\mathbf{c},\mathbf{d})$ erzeugen für alle $\mathbf{c},\mathbf{d}\in\mathbb{F}$ Automorphismen des jeweiligen Designs. Um eine transitive Untergruppe zu erhalten müssen aber noch weitere Automorphismen hinzugenommen werden, z.B. in der eben erwähnten Basis $\mathbf{F}_m\mathbf{e}_\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{\mathbf{y}\in\mathbb{F}}\chi_1(\mathbf{x}\mathbf{y})\mathbf{e}_\mathbf{y}$ bzw. $\mathbf{G}_\mathbf{a}\mathbf{e}_\mathbf{x} = \chi_1(\mathbf{a}\mathbf{x}^2)\mathbf{e}_\mathbf{x}$ für ungerade q. $\mathbf{F}_m$ entspricht übrigens genau dem m-fachen Tensorprodukt der Fourier-Matrix $\otimes^m\mathbf{F}$ und $\mathbf{X}_\mathbf{a} = \mathbf{G}_\mathbf{a}\mathbf{F}_m$.

In der Literatur sind nur endlich viele 2-Designs in komplexen, projektiven Räumen (das entspricht dem Fall $r=1$) bekannt (siehe [43]). Die Auflösbarkeit wurde nie explizit betrachtet. Implizit wurden aber einige Lösungen unter den 2-Designs mit Grad 2 gefunden, nämlich jene für $b=2,3,4$ (siehe [43, Beispiel 2,16,17]) und $b=9$ (siehe [24, Beispiel 5.9] und [43, Beispiel 19]). Sie wurden aus stark reguläre Graphen [15] konstruiert. Alle diese Designs sind Spezialfälle der obigen Konstruktion.

Für den reellen Fall ist weniger bekannt. Wie wir zeigten, können reelle, affine Quantendesigns mit $r=1$ und $k=2$ Orthogonalklassen nur für $b=2$ oder $b=4t$, $t\in\mathbb{N}$, existieren und entsprechen Hadamard-Matrizen. Dasselbe gilt somit für maximale reelle, affine Designs mit $k=(b+2)/2$ Orthogonalklassen. Für $b=2$ bilden z.B. die 4 Vektoren $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,\pm1)$ eine maximale

Lösung (siehe auch [43, Beispiel 1]). Beispiel 2.17 liefert für $x = y = z = 0$ ein maximales, reelles, affines Quantendesign mit $b = 4$.

Es folgt noch eine kurze Bemerkung zur Quantenmechanik.

Die maximalen affinen Quantendesigns von Satz 3.1 liefern auch Beispiele für das sogenannte *Pauli Problem* der Bestimmung von Quantenzuständen durch Messungen (siehe [73] für einen Überblick bzw. [17]). Ein maximales, reguläres, affines Quantendesign mit $r = 1$ hat $q + 1$ paarweise unabhängige Orthogonalklassen. Seien q von ihnen jeweils als Spektralprojektionen von quantenmechanischen Observablen $\mathbf{A}_i$, $1 \leq i \leq q$, interpretiert und die q eindimensionalen Projektionen der übriggebliebenen Orthogonalklasse als *reine Zustände*. Die Messung ihrer Wahrscheinlichkeit bzgl. der Spektralprojektionen der Observablen $\mathbf{A}_i$ ergibt jeweils den gleichen Wert $\frac{1}{q}$. Das heißt die Zustände sind durch die Messungen der q Observablen nicht unterscheidbar. Die Anzahl der bzgl. reiner Zustände nicht *informationsvollständigen* [17] Observablen $\mathbf{A}_i$, welche sogar nichtentartet sind (d.h. nur eindimensionale Spektralprojektionen haben), kann also mit der Dimension q des Vektorraumes beliebig groß werden. Das widerlegt z.B. eine Vermutung von Moroz [59] auch im Endlichdimensionalen. (Im unendlichdimensionalen Hilbertraum $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ wurden in [78] Gegenbeispiele konstruiert).

3.3 Weitere affine Quantendesigns

Korollar 3.2. *Sei $b = q_1^{s_1} \cdots q_n^{s_n}$ mit paarweise teilerfremden Primzahlpotenzen q_i und $s_i \in \mathbb{N}$ für alle $1 \leq i \leq n$. Dann gibt es im $\mathbb{C}^b$ ein reguläres, affines Quantendesign mit*

$$r = q_1^{(s_1-1)} \cdots q_n^{(s_n-1)} \qquad \text{und} \qquad k = \min\left(\frac{q_1^{2s_1}-1}{q_1-1}, \ldots, \frac{q_1^{2s_n}-1}{q_n-1}\right).$$

Beweis. Das Resultat folgt direkt aus Satz 3.1 und Proposition 2.20. □

Auch dieser Satz hat für kommutative Designs ein Gegenstück in der klassischen Designtheorie (siehe [13, Korollar 7.8]). Analog lassen sich auch weitere Konstruktionsmethoden aus der Theorie der transversalen Designs verallgemeinern.

Es ist bekannt, daß für paarweise orthogonale Lateinische $n \times n$ Quadrate (d.h. für affine oder transversale Designs mit $\lambda = 1$) die Ungleichung $N(n) \leq n-1$ für die Anzahl $N(n)$ der Quadrate (d.h. die Ungleichung von Placket und Burman) nicht immer erfüllt werden kann. Es wird vermutet, daß Gleicheit nur dann erreicht werden kann, wenn n eine Primzahlpotenzen ist. Dasselbe scheint für komplexe, affine Quantendesigns mit $r = 1$ zu gelten. (Vermutlich kann auch ein analoges Ergebnis zum Satz von Bruck-Ryser-Chowla [13, II.4.8] bewiesen werden).

Die Parallelität scheint sogar noch weiter zu gehen. Zum Beispiel hat schon Euler vermutet, daß keine zwei orthogonale Lateinische Quadrate der Ordnung 6 existieren. Dies wurde von Tarry um 1900 bewiesen und entspricht der Nichtexistenz eines transversalen bzw. affinen Designs mit $b = 36$, $r = g = 6$, $\lambda = 1$ und $k = 4$. Vermutlich gibt es auch kein komplexes, affines Quantendesign mit $b = g = 6$, $r = 1$, $\lambda = \frac{1}{6}$ und $k = 4$.

Bevor wir Beispiele für $b = 6$ und $k = 3$ bringen, wollen wir noch eine allgemeine Konstruktionsmethode für geradzahlige b und $k = 3$ vorstellen.

Zirkulante Matrizen sind Matrizen, bei denen jede Reihe identisch ist mit der vorhergehenden aber um eine Stelle nach rechts verschoben ist. Zu jeder zirkulanten Matrix $\mathbf{A}$ existiert eine Diagonalmatrix $\bar{\mathbf{A}}$, so daß mit der Fourier-Matrix $\mathbf{F}$ gilt $\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-1}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{F}$ (siehe [22]). Sei

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

eine $2m \times 2m$ Matrix mit zirkulanten $m \times m$ Submatrizen $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{F}^{-1}\bar{\mathbf{A}}_{ij}\mathbf{F}$ und $\bar{\mathbf{A}}_{ij} = \mathrm{diag}(a_{ij}^1, \ldots, a_{ij}^m)$ für alle $1 \leq i, j \leq 2$. Angenommen $\mathbf{T}$ ist unitär, dann sind die 2×2 Matrizen $\mathbf{S}_k = (a_{ij}^k)_{1 \leq i,j \leq 2}$ auch unitär für alle $1 \leq k \leq m$. Man kann leicht zeigen, daß es zu jeder unitären 2×2 Matrix $\mathbf{S}_k$ Parameter $b_l^k \in [0, 2\pi)$, $1 \leq l \leq 4$, gibt, so daß gilt

$$\mathbf{S}^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (e^{ib_1^k} + e^{ib_2^k}) & e^{ib_4^k}(e^{ib_1^k} - e^{ib_2^k}) \\ e^{-ib_3^k}(e^{ib_1^k} - e^{ib_2^k}) & e^{-ib_3^k}e^{ib_4^k}(e^{ib_1^k} + e^{ib_2^k}) \end{pmatrix}.$$

Sei nun $\mathbf{U}_l = \operatorname{diag}(e^{ib_l^1}, \ldots, e^{ib_l^m})$, $1 \leq l \leq 4$. Dann folgt sofort $\mathbf{T} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2$ mit

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{U}_3\mathbf{F} \\ \mathbf{F} & -\mathbf{U}_3\mathbf{F} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1\mathbf{F} & \mathbf{U}_1\mathbf{U}_4\mathbf{F} \\ \mathbf{U}_2\mathbf{F} & -\mathbf{U}_2\mathbf{U}_4\mathbf{F} \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen $\mathbf{E}_1$ und $\mathbf{E}_2$ sind unitär und haben Einträge mit konstantem Absolutbetrag $\frac{1}{\sqrt{2m}}$. Hat also auch $\mathbf{T}$ Einträge mit konstantem Absolutbetrag, so bilden die Standardbasis und die Spalten von $\mathbf{E}_1$ und $\mathbf{E}_2$ ein affines Quantendesign mit $b = 2m$, $r = 1$ und $k = 3$. Beispiel 2.17 ist eine Anwendung dieser Konstruktion für $m = 2$.

Beispiel 3.3. Sei für alle $x \in [0, 2\pi)$

$$\mathbf{T}(x) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-ix} & e^{ix} & -1 & ie^{-ix} & ie^{ix} \\ e^{ix} & 1 & -e^{-ix} & ie^{ix} & -1 & ie^{-ix} \\ -e^{-ix} & e^{ix} & 1 & ie^{-ix} & ie^{ix} & -1 \\ 1 & ie^{-ix} & ie^{ix} & 1 & e^{-ix} & -e^{ix} \\ ie^{ix} & 1 & ie^{-ix} & -e^{ix} & 1 & e^{-ix} \\ ie^{-ix} & ie^{ix} & 1 & e^{-ix} & -e^{ix} & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen $\mathbf{T}(x)$ sind für alle $x \in [0, 2\pi)$ unitär, haben zirkulante 3×3 Submatrizen und Einträge mit konstantem Absolutbetrag $\frac{1}{\sqrt{6}}$. Also bilden die Standardbasis und die Spalten der zugeordneten Matrizen $\mathbf{E}_1(x)$ und $\mathbf{E}_2(x)$ ein affines Quantendesign mit $b = 6$, $r = 1$ und $k = 3$. Sie enthalten als Spezialfall auch die Lösungen, die sich mit Proposition 3.2 aus affinen Designs für $b = 2$ und $b = 3$ und jeweils $k = 3$ konstruieren lassen. Weitere affine Designs zu denselben Parametern sind nicht bekannt. Es konnte (selbst mittels Computersuche) keine weitere Orthogonalbasis gefunden werden, so daß sich die Designs auf $k = 4$ erweitern hätten lassen.

3.4 Maximale Quantendesigns mit Grad 1

Equianguläre Liniensysteme, welche die absolute Schranke erreichen (d.h. straffe 2-Designs mit Grad 1 über den projektiven Räumen) sind für folgende Fälle bekannt:

Im Reellen gibt es Lösungen für $b = 2, 3, 7$ und 27 (siehe [55, 6.6]) und [52]). Es kann für $b = 4, 5, 6$ und weitere Werte von b gezeigt werden, daß die absolute Schranke nicht erreicht werden kann (siehe [52]).

Im Komplexen sind Beispiele für $b = 2, 3$ und 8 bekannt (siehe [24, Beispiel 6.4] und [43, Beispiel 5 und 8]).

Wir werden uns hier auf den komplexen Fall beschränken und weitere (nichtäquivalente) Beispiele für $b = 3$ und Lösungen für $b = 4$ und 5 konstruieren sowie numerische Lösungen für $b = 6$ und 7 angeben. Über die komplementären Designs erhält man auch maximale (straffe) 2-Quantendesigns bzgl. $U(b)$ für $r \geq 2$.

Das liefert Anlaß zur Vermutung, daß im Komplexen Lösungen für alle $b \in \mathbb{N}$ existieren. Der kommutative Spezialfall entspricht symmetrischen BIBDs (wovon wiederum projektive Ebenen ein Spezialfall sind). Für diese klassischen Designs schließt wiederum der Satz von Bruck-Ryser-Chowla bestimmte Lösungen aus. Dieses Verhalten scheint sich, anders als bei affinen Designs, nicht in das Nichtkommutative zu übertragen.

Alle diese Designs haben eine reguläre Untergruppe der Automorphismengruppe, welche von den Weyl-Matrizen erzeugt wird (was im Hinblick auf die Überlegungen am Ende von Abschnitt 2.5 auch nicht überrascht). Die Lösungen für $2 \leq b \leq 7$ verwenden dabei die $b \times b$ Weyl-Matrizen. Bei der Lösung für $b = 8$ erzeugen die 3-fachen Tensorprodukt der 2×2 Weyl-Matrizen eine reguläre Automorphismengruppe (es wurde hier aber noch nicht versucht auch eine Lösung mit den 8×8 Weyl-Matrizen zu finden). Für $2 \leq b \leq 7$ gibt es auch jeweils noch einen Automorphismus der Ordnung 3, welchen man, da die Designs irreduzibel sind, durch eine Matrix $\mathbf{Z}$ der Ordnung 3 erzeugen kann. Für $b = 2, 4, 5, 7$ ist damit die Automorphismengruppe komplett ($\mathrm{Aut}^*(\mathbf{D})$ ist $3b^2$-elementig). Da in diesem Fall $3 \nmid b^2$ ist, muß der von $\mathbf{Z}$ erzeugte Automorphismus einen Fixpunkt in der Permutation haben. Für $3|b$, d.h. $b = 3, 6$ kommen noch weitere Automorphismen hinzu. Hier hat der $\mathbf{Z}$ zugeordnete Automorphismus 3 Fixpunkte. Daraus folgt, daß man in allen Fällen den Anfangsvektor als Eigenvektor von $\mathbf{Z}$ wählen kann.

Sei $\mathbf{Z} = (z_{rs})_{0 \leq r,s \leq b-1}$ eine $b \times b$ Matrix mit Einträge

$$z_{rs} = \frac{e^{i\pi(b-1)/12}}{\sqrt{b}} e^{\pi i(2rs+(b+1)s^2)/b}. \tag{3.9}$$

Diese Matrix läßt sich als $\mathbf{Z} = e^{i\pi(b-1)/12}\mathbf{FG}$ schreiben mit der Fourier-Matrix $\mathbf{F}$ und einer Diagonalmatrix $\mathbf{G} = (g_{rs})_{0 \leq r,s \leq b-1}$ mit Diagonaleinträgen

$g_{ss} = e^{\pi i(b+1)s^2/b}$, $0 \le s \le b-1$. Die Matrix $\mathbf{Z}$ hat ähnliche Eigenschaften wie die Fourier-Matrix. Sie ist unitär und es gilt

$$\mathbf{Z}^3 = \mathbf{I}, \tag{3.10a}$$

$$\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{Z} = \mathbf{U} \quad \text{und} \quad \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{Z} = e^{\pi i(b-1)/b}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{U}^{-1}. \tag{3.10b}$$

Die möglichen Eigenwerte von $\mathbf{Z}$ sind genau die 3-ten Einheitswurzeln: 1, $\alpha = e^{i2\pi/3}$ und $\alpha^2 = e^{i4\pi/3}$. Die Vielfachheiten der Eigenwerte in Abhängigkeit von der Ordnung b sind durch folgende Tabelle gegeben:

b	1	$e^{i2\pi/3}$	$e^{i4\pi/3}$
$3m$	$m+1$	m	$m-1$
$3m+1$	$m+1$	m	m
$3m+2$	$m+1$	$m+1$	m

(3.11)

Die Gleichungen (3.10b) lassen sich leicht nachprüfen. Daraus folgt, daß $\mathbf{Z}^3$ mit allen Weyl-Matrizen kommutiert und, da diese den Raum aller $b \times b$ Matrizen aufspannen, daß $\mathbf{Z}^3 = \varepsilon\mathbf{I}$ ist mit $|\varepsilon| = 1$. Um zu zeigen, daß $\varepsilon = 1$ ist und die Tabelle (3.11) zu beweisen, muß man Resultate über *Gauß-Summen* benützen. Das ist ähnlich wie bei der Fourier-Matrix (siehe [5]). Wir skizzieren den Beweis. Seien p und q teilerfremde ganze Zahlen, dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{r=0}^{q-1} e^{-i\pi r^2 p/q} = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{p}}\sum_{r=0}^{p-1} e^{i\pi r^2 q/p}. \tag{3.12}$$

Diese Gleichung kann aus der Transformationsformel $f(t) = (\frac{\pi}{t})^{1/2} f(\frac{\pi^2}{t})$ der *Theta-Funktion* $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t}$ abgeleitet werden (siehe [11, Kapitel 6, Gleichung (13)]). Mit den zueinander teilerfremden ganzen Zahlen $q = b$ und $p = b-1$ und mit vollständiger Induktion folgt

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{r=0}^{b-1} e^{i\pi(b+1)r^2/b} = e^{-i\pi(b-1)/4}.$$

Durch Vergleich dieser Gleichung mit $\mathbf{Z}^2 = \varepsilon\mathbf{Z}^{-1} = \varepsilon\mathbf{Z}^*$ an der Position $(0,0)$ ausgewertet ergibt sich $\varepsilon = 1$. Mit derselben Gleichung erhält man für $b = 3m$ sofort $\operatorname{tr}(\mathbf{Z}) = e^{i\pi/6}\sqrt{3}$. Für $b = 3m+1$ oder $b = 3m+2$ erhält man, unter Anwendung von Gleichung (3.12) auf die teilerfremden ganzen Zahlen $q = b$ und $p = b-3$, für die $b \times b$ Matrizen $\mathbf{Z}_b$, daß $\operatorname{tr}(\mathbf{Z}_b) = \operatorname{tr}(\mathbf{Z}_{(b-3)})$ gilt. Durch Induktion, $\operatorname{tr}(\mathbf{Z}_1) = 1$, sowie $\operatorname{tr}(\mathbf{Z}_2) = \frac{e^{i\pi/12}}{\sqrt{2}}(1 + e^{i5\pi/2}) = e^{i\pi/3}$ folgt zusammenfassend

$$\operatorname{tr}(\mathbf{Z}) = \begin{cases} e^{i\pi/6}\sqrt{3} = 2 + e^{i2\pi/3} & \text{falls } b \equiv 0 \pmod 3, \\ 1 & \text{falls } b \equiv 1 \pmod 3, \\ e^{i\pi/3} = 1 + e^{i2\pi/3} & \text{falls } b \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Da $\mathbf{Z}^3 = \mathbf{I}$ ist, hat $\mathbf{Z}$ genau die 3-ten Einheitswurzeln 1, $e^{i2\pi/3}$ und $e^{i4\pi/3}$ als mögliche Eigenwerte, woraus insgesamt die Tabelle (3.11) folgt.

Die Weyl-Matrizen mit beliebigen Phasen multipliziert ergeben die Gruppe $W = \{e^{ix}\mathbf{V}^c\mathbf{U}^d\colon c,d \in \mathbb{Z}_b,\, x \in \mathbb{R}\}$. Wir betrachten nun die Gruppe $\mathrm{Aut}(W)$ der (äußeren) Automorphismen von W in $U(b)$, d.h. die Menge aller unitären $b \times b$ Matrizen $\mathbf{A}$ für die es $x, y \in \mathbb{R}$ und $j,k,l,m \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß gilt

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{A} = e^{ix}\mathbf{V}^j\mathbf{U}^k, \tag{3.13a}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{A} = e^{iy}\mathbf{V}^l\mathbf{U}^m. \tag{3.13b}$$

Es gilt $W \subset \mathrm{Aut}(W)$. Mit den Gleichungen (3.7) bzw. (3.10b) folgt auch $\mathbf{F}, \mathbf{Z} \in \mathrm{Aut}(W)$. Es gibt noch weitere Elemente in $\mathrm{Aut}(W)$ (z.B. die oben erwähnte Matrix $\mathbf{G}$). Angenommen die Weyl-Matrizen erzeugen eine reguläre Untergruppe der Automorphismengruppe eines Quantendesigns $\mathbf{D}$, d.h. sei

$$\mathbf{D} = \{\mathbf{V}^c\mathbf{U}^d\mathbf{P}_1\mathbf{U}^{-d}\mathbf{V}^{-c} : c,d \in \mathbb{Z}_b\} \tag{3.14}$$

mit einer beliebigen orthogonale $b \times b$ Projektionsmatrix $\mathbf{P}_1$. Jede Ähnlichkeitstransformation von $\mathbf{D}$ mit einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathrm{Aut}(W)$ liefert wieder ein Design von der Gestalt (3.14) mit einer neuen Anfangsprojektion $\mathbf{P}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{A}$. Ist $\mathbf{P}_1$ eine Projektion auf einen Eigenvektor von $\mathbf{Z} \in \mathrm{Aut}(W)$, dann folgt, daß $\mathbf{Z}$ einen Automorphismus erzeugt. Das mit einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathrm{Aut}(W)$ ähnlichkeitstransformatierte Design hat eine Anfangsprojektion $\mathbf{P}'$, die auf einen Eigenvektor der zu $\mathbf{Z}$ äquivalenten Matrix $\mathbf{Z}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{A}$ projiziert.

Beispiel: $\mathbf{b = 2}$ (siehe auch [24, Beispiel 6.4]).

Nach Tabelle (3.11) hat $\mathbf{Z}$ die zwei Eigenwerte 1 und $\alpha = e^{i2\pi/3}$ und die zugehörigen normierten Eigenvektoren sind

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} Y \\ e^{i\pi/4}X \end{pmatrix}, \qquad \psi_\alpha = \begin{pmatrix} X \\ e^{i5\pi/4}Y \end{pmatrix},$$

mit $X = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})}$ und $Y = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})}$. Die zum Quantendesign $\mathbf{D}_2 = \{\mathbf{V}^c\mathbf{U}^d\psi_1 : c,d \in \mathbb{Z}_2\}$ gehörige QD-Matrix $\mathbf{E}_2$ ist

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} Y & Y & e^{i\pi/4}X & -e^{i\pi/4}X \\ e^{i\pi/4}X & -e^{i\pi/4}X & Y & Y \end{pmatrix}.$$

Mit $X^2 - Y^2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\sqrt{2}XY = \frac{1}{\sqrt{3}}$ folgt sofort, daß $\mathbf{D}_2$ Grad 1 hat. Man kann mit etwas Rechenarbeit nachprüfen, daß dieses Design (bis auf Äquivalenzen) das einzige maximale Quantendesign mit Grad 1 im $\mathbb{C}^2$ ist und $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ und $\mathbf{Z}$ die komplette Automorphismengruppe erzeugen. Analog wird mit ψ_α das komplementäre Quantendesign mit Grad 1 erzeugt.

Beispiel: $\mathbf{b = 3}$.

Nach Tabelle (3.11) hat $\mathbf{Z}$ die Eigenwerte 1 (zweimal) und $\alpha = e^{i2\pi/3}$ (einmal). Der Eigenvektor zum Eigenwert α liefert kein Quantendesign mit Grad

1. Orthonormierte Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind z.B.

$$\psi_{1a} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -\alpha^2 \\ -\alpha^2 \end{pmatrix}, \qquad \psi_{1b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

In dem von ψ_{1a} und ψ_{1b} aufgespannten Eigenraum von $\mathbf{Z}$ zum Eigenwert 1 liegt eine einparametrige Lösungsschar. Für beliebige $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\psi_x = (\cos x)\psi_{1a} + (\alpha^2 \sin x)\psi_{1b}.$$

Wir werden gleich zeigen, daß die Quantendesigns $\mathbf{D}_{3,x} = \{\mathbf{V}^c\mathbf{U}^d\psi_x : c, d \in \mathbb{Z}_3\}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ Grad 1 haben. Das Besondere für $b = 3$ ist, daß es eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathrm{Aut}(W)$ gibt, welche $\mathbf{Z}$ diagonalisiert, nämlich $\mathbf{A} = \mathbf{ZG}$ mit $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1, \alpha^2, \alpha^2)$. Es gilt $\mathbf{AZA}^{-1} = \alpha\mathbf{G}$. Die transformierten Quantendesigns $\mathbf{D}'_{3,x} = \mathbf{AD}_{3,x}$ werden von $\psi'_x = \mathbf{A}\psi_x$ erzeugt und man sieht sofort, daß $\psi'_x = e^{i\pi/6}(0, e^{-ix}, e^{ix})^t$ ist. Multiplizieren wir ψ'_x mit der komplexen Phase $e^{i(x-\pi/6)}$, so folgt mit $y = 2x$ die QD-Matrix

$$\mathbf{E}'_{3,y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{iy} & e^{iy}\alpha & e^{iy}\alpha^2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & e^{iy} & e^{iy}\alpha & e^{iy}\alpha^2 \\ e^{iy} & e^{iy}\alpha & e^{iy}\alpha^2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In dieser Form sieht man sofort, daß das Quantendesign $\mathbf{D}'_{3,y}$ für alle $y \in \mathbb{R}$ den Grad 1 hat. Durch Vertauschen der Spalten sieht man, daß $y \in [0, \frac{2\pi}{3})$ angenommen werden kann (es gibt aber noch mehrere solcher Identifizierungen).

Die Lösung für $y = \pi$ findet sich in [24, Beispiel 6.4] und [43, Beispiel 5]. Sie hat eine komplette Automorphismengruppe mit 216-elementiger Permutationsgruppe $\mathrm{Aut}^*(\mathbf{D})$, welche durch $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{G}$ und $\mathbf{Z}$ erzeugt wird. Für $y = 0$ wird die komplette Automorphismengruppe durch $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{G}$ und $\mathbf{F}^2$ erzeugt (und $\mathrm{Aut}^*(\mathbf{D})$ ist 54-elementig), für $y \not\approx 0, \pi$ wird sie nur durch $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ und $\mathbf{G}$ erzeugt (und $\mathrm{Aut}^*(\mathbf{D})$ ist 27-elementig).

Beispiel: $\mathbf{b = 4}$.

Nach Tabelle (3.11) hat $\mathbf{Z}$ die Eigenwerte 1 (zweimal), α (einmal) und α^2 (einmal). Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten α und α^2 ergeben kein Quantendesign mit Grad 1. Sei $\varrho = e^{i\pi/4}$. Orthonormierte Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind, wie man leicht nachprüfen kann, z.B.

$$\psi_{1a} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \varrho + 1 \\ i \\ \varrho - 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \psi_{1b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $\quad X = \frac{1}{2}\sqrt{3 - \frac{3}{\sqrt{5}}} \quad$ und $\quad Y = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{3}{\sqrt{5}}}, \quad$ sowie

$$\psi_k = X\psi_{1a} + \varrho^k Y\psi_{1b} \qquad \text{für } k = 1, 3, 5, 7.$$

Die Quantendesigns $\mathbf{D}_{4,k} = \{\mathbf{V}^c\mathbf{U}^d\psi_k : c, d \in \mathbb{Z}_4\}$ haben für alle k=1,3,5,7 den Grad 1. Unter Verwendung von $\langle\psi_{1a}|\mathbf{U}\psi_{1a}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\langle\psi_{1b}|\mathbf{U}\psi_{1b}\rangle = 0$, $\langle\psi_{1a}|\mathbf{U}\psi_{1b}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\langle\psi_{1b}|\mathbf{U}\psi_{1a}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ folgt sofort

$$|\langle\psi_k|\mathbf{U}\psi_k\rangle|^2 = 2\left|\frac{X^2}{3} \pm i\frac{XY}{\sqrt{3}}\right|^2 = \frac{1}{5}.$$

Analog kann man zeigen

$$\left|\langle\psi_k|\mathbf{U}^2\psi_k\rangle\right|^2 = \left|\frac{X^2}{3} - Y^2\right|^2 = \frac{1}{5},$$

$$\left|\langle\psi_k|\mathbf{V}\mathbf{U}^2\psi_k\rangle\right|^2 = 2\left|\frac{-iX^2}{3} \pm \frac{XY}{\sqrt{3}}\right|^2 = \frac{1}{5}.$$

Wegen der Invarianz des inneren Produkts unter Ähnlichkeitstransformationen mit **U**, **V** und **Z** folgen sofort alle anderen Gleichungen für Grad 1. **U**, **V** und **Z** erzeugen eine Automorphismengruppe mit zugehöriger 48-elementiger Permutationsgruppe Aut*(**D**). Mit Hilfe eines Computers konnte nachgewiesen werden, daß dies die komplette Automorphismengruppe ist.

Beispiel: b = 5.

Nach Tabelle (3.11) hat **Z** die Eigenwerte 1 (zweimal), α (zweimal) und α^2 (einmal). Sei $\varepsilon = e^{i2\pi/5}$. Zwei orthonormierte Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind z.B.

$$\psi_{1a} = \frac{e^{i\pi/10}}{2\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)} \\ \left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\sqrt{15}\right)\varepsilon \\ \left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}-\sqrt{15}\right)\varepsilon^4 \\ \left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}-\sqrt{15}\right)\varepsilon^4 \\ \left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}+\sqrt{15}\right)\varepsilon \end{pmatrix},$$

$$\psi_{1b} = \frac{1}{2\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{15+\sqrt{15\left(5+2\sqrt{5}\right)}} \\ -\left(\sqrt{15-\sqrt{15\left(5+2\sqrt{5}\right)}}\right)\varepsilon^3 \\ \left(\sqrt{15-\sqrt{15\left(5+2\sqrt{5}\right)}}\right)\varepsilon^3 \\ -\sqrt{15+\sqrt{15\left(5+2\sqrt{5}\right)}} \end{pmatrix}.$$

Sei nun $X = \frac{1}{2}\sqrt{3-\sqrt{3}}$ und $Y = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{3}}$, sowie $\beta = \sqrt{\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{5}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{5}\right)}$. Wir definieren vier Vektoren durch

$$\psi_{(j,k)} = X\psi_{1a} + j\beta^k Y\psi_{1b} \qquad \text{mit } j,k = \pm 1.$$

Die Quantendesigns $\mathbf{D}_{5,j,k} = \{\mathbf{V}^c\mathbf{U}^d\psi_{(j,k)} : c,d \in \mathbb{Z}_5\}$ haben für alle $j,k = \pm 1$ den Grad 1. Der Beweis erfordert aufwendige Rechnungen, die hier nicht wiedergegeben werden sollen. Wir weisen nur darauf hin, daß es aufgrund von Symmetrien z.B. genügt die vier Relationen $\left|\langle\psi_{(j,k)}|\mathbf{V}^r\mathbf{U}^s\psi_{(j,k)}\rangle\right|^2 = \frac{1}{6}$ mit $r = 0,-1$ und $s = 1,2$ zu verifizieren. Außerdem genügt es, die Relationen für nur einen der vier Anfangsvektoren nachzuprüfen, da die vier Lösungen äquivalent sind. Man kann leicht nachprüfen, daß mit $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(1,\varepsilon^3,\varepsilon^2,\varepsilon^2,\varepsilon^3)$ ($\mathbf{G} \in \mathrm{Aut}(W)$) gilt $\mathbf{G}^{-1}\bar{\psi}_{(1,1)} = -\varepsilon^2 X\psi_{1a} + \bar{\beta} Y\varepsilon^2\psi_{1b} = -\varepsilon^2\psi_{(-1,-1)}$ und man sieht sofort, daß $\psi_{(-1,k)} = \mathbf{F}^2\psi_{(1,k)}$ gilt.

Es gibt aber auch genau vier (äquivalente) Eigenvektoren im 2-dimensionalen Eigenraum von $\mathbf{Z}$ zum Eigenwert α, welche Quantendesigns mit dem Grad 1 erzeugen, wie wir nun kurz zeigen. Sei

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{T} = \mathbf{V}^2$ und $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{T} = \mathbf{U}^3$. Also ist $\mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(W)$ und damit auch $\mathbf{TG}$. Außerdem kann man leicht zeigen, daß $(\mathbf{TG})^{-1}\mathbf{ZTG} = \alpha\mathbf{Z}^{-1}$ gilt. Sei nun ψ ein Eigenvektor von $\mathbf{Z}$ und damit auch $\mathbf{Z}^{-1}$ zum Eigenwert 1. Aus den obigen Relationen folgt $\mathbf{Z}(\mathbf{TG}\psi) = \alpha(\mathbf{TG}\psi)$. Das heißt, daß $\mathbf{TG}$ Eigenvektoren von $\mathbf{Z}$ zum Eigenwert 1 in solche zum Eigenwert α transformiert (und umgekehrt). Da $\mathbf{TG} \in \mathrm{Aut}(W)$ ist, erzeugen die vier Vektoren $\mathbf{TG}\psi_{(j,k)}$ mit $j,k = \pm 1$ ebenfalls Quantendesigns mit dem Grad 1.

$\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ und $\mathbf{Z}$ erzeugen eine Automorphismengruppe mit 75-elementiger Permutationsgruppe $\mathrm{Aut}^*(\mathbf{D})$. Durch ein Computerprogramm konnte nachgewiesen werden, daß dies die komplette Automorphismengruppe ist.

Beispiel: $\mathbf{b = 6}$.

Es gibt folgende numerische Lösung.

$$\psi = \begin{pmatrix} 0.618729 \\ 0.154397 + i \cdot 0.063793 \\ 0.319614 + i \cdot 0.373905 \\ 0.089576 + i \cdot 0.006425 \\ -0.242374 - i \cdot 0.073843 \\ 0.523986 + i \cdot 0.021978 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{U}\mathbf{V}^{-1}\bar{\psi}$ ist Eigenvektor von $\mathbf{Z}$ zum Eigenwert 1. $\mathbf{D}_6 = \{\psi_{c,d} = \mathbf{V}^c\mathbf{U}^d\psi : c,d \in \mathbb{Z}_6\}$ hat Grad 1 mit einer Abweichung $\left||\langle\psi_{c,d}|\psi_{e,f}\rangle|^2 - \frac{1}{7}\right| \leq 10^{-6}$ für alle $(c,d) \neq (e,f)$.

Aus $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ und $\mathbf{Z}$ im $\mathbb{C}^2$ und $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{R}$ und $\mathbf{Z}$ im $\mathbb{C}^3$ ergibt sich durch Tensorproduktbildung und Anwendung einer geeigneten Permutation eine 5184

-elementige äußere Automorphismengruppe, welche die 6×6 Matrix $\mathbf{Z}$ enthält.

Beispiel: $\mathbf{b} = 7$.

Es gibt folgende numerische Lösung.

$$\psi = \begin{pmatrix} 0.196001 \\ -0.032164 + i \cdot 0.465343 \\ -0.618610 + i \cdot 0.010962 \\ 0.012587 + i \cdot 0.204539 \\ 0.177171 + i \cdot 0.243931 \\ -0.081634 - i \cdot 0.105666 \\ 0.346649 - i \cdot 0.300538 \end{pmatrix}.$$

ψ ist Eigenvektor von $\mathbf{Z}$ zum Eigenwert 1. $\mathbf{D}_7 = \{\psi_{c,d} = \mathbf{V}^c\mathbf{U}^d\psi : c, d \in \mathbb{Z}_7\}$ hat Grad 1 mit einer Abweichung $\left| |\langle\psi_{c,d}|\psi_{e,f}\rangle|^2 - \frac{1}{8} \right| \leq 10^{-6}$ für alle $(c,d) \neq (e,f)$.

Die Beispiele für $b = 2,3,4,5,6,7$ legen folgende Vermutung nahe. Für alle $b \geq 2$ gibt es im $\left(\left[\frac{b}{3}\right]+1\right)$-dimensionalen Eigenraum zum Eigenwert 1 der $b \times b$ Matrix $\mathbf{Z}$ Vektoren, welche mit dem Ansatz (3.14) maximale Quantendesigns mit Grad 1 erzeugen. Für $b = 3m+2$ gibt es im gleichdimensionalen Eigenraum zum Eigenwert α ebensolche Vektoren. Dagegen gehorcht die folgende Lösung einem anderen Bildungsgesetz.

Beispiel: $\mathbf{b} = 8$.

Hoggar konstruierte in [41] und [42] 64 Einheitsvektoren im $\mathbb{H}^4$ (dem 4-dimensionalen Vektorraum über den Quaternionen) mit paarweisem Winkelquadrat $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{9}$, d.h. mit $\Lambda = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\}$. Er wies auch darauf hin, daß durch Komplexifizieren 64 Einheitsvektoren im $\mathbb{C}^8$ mit $\lambda = \frac{1}{9}$ entstehen. Diese lassen sich mit dem Anfangsvektor

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{6}}(1+i, 0, -1, 1, -i, -1, 0, 0)^t$$

und Anwendung des 3-fachen Tensorprodukts der 2×2 Weylmatrizen, d.h. durch die Matrizen $\mathbf{W}(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ mit $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{Z}^3$ (als Generatoren einer regulären Automorphismengruppe) erzeugen.

3.5 Weitere Quantendesigns mit Grad 1

Kommutative, reguläre und kohärente Quantendesigns mit Grad 1 (d.h. nach Satz 2.26 reguläre Quantendesigns mit Grad 1, für welche die spezielle Schranke $\lambda \geq \frac{r(vr-b)}{b(v-1)}$ zur Gleichheit wird) entsprechen über die duale Zuordnung von Satz 1.10 *balanced incomplete block designs*. Diese Designs sind Gegenstand einer enormen Anzahl von Arbeiten (siehe [20, Kapitel I] für einen Überblick). Wir wollen einige bekannte Ergebnisse für den nichtkommutativen Fall zusammenstellen.

Für $r = 1$ wurden insbesondere unendliche Lösungsscharen für $k = 2$ (d.h. $v = 2b$ und $\lambda = \frac{1}{2b-1}$) konstruiert.

Für gerade b gibt es folgende Konstruktion, unter Rekurs auf die Theorie der Hadamard-Matrizen (siehe [24, Beispiel 5.8] und [43, Beispiel 14]). Sei $\mathbf{H}$ eine schiefsymmetrische Hadamard-Matrix der Ordnung $n = 4m$, d.h. $\mathbf{H} = \mathbf{I} + \mathbf{A}$ mit einer schiefsymmetrischen (Konferenz-) Matrix $\mathbf{A}$. Da $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = (n-1)\mathbf{I}$ und $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 0$ ist, folgt, daß $\mathbf{A}$ die 2 Eigenwerte $\pm i\sqrt{n-1}$ jeweils mit der Vielfachheit $2m$ hat. Sei $\mathbf{G} = \mathbf{I} + \frac{i}{\sqrt{n-1}}\mathbf{A}$. Die Matrix $\mathbf{G}$ hat Rang $2m$. Man sieht leicht, daß

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{G}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{G}^*\right) = \mathbf{I} + \frac{i}{\sqrt{n-1}}\mathbf{A}$$

gilt. Das heißt die $4m$ Spalten von $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{G}$ sind normiert und das innere Produkt von je zwei verschiedenen Spalten von $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{G}$ beträgt $\pm\frac{i}{\sqrt{n-1}}$. Das heißt es existiert eine Lösung für $b = 2m$. Es wird vermutet, daß eine schiefsymmetrische Hadamard-Matrix für alle $m \in \mathbb{N}$ existiert. Das würde eine Lösung für alle geraden b liefern. Explizite Lösungen erhält man leicht für alle $n = 2^k$. Bekannt ist auch die Konstruktion von Paley (siehe [13, Theorem I.9.11]) für Primzahlpotenzen $q \equiv 3 \pmod 4$ mit $n = q + 1$. Das ergibt Lösungen für gerade $b = (q+1)/2$.

Für ungerade b gibt es eine Konstruktion für $b = (q+1)/2$ mit beliebigen Primzahlpotenzen $q \equiv 1 \pmod 4$. Dafür wurden in [55, Satz 6.3] mittels symmetrischer C-Matrizen und der Konstruktion von Paley sogar Lösungen in den reellen Zahlen konstruiert. Lösungen für andere ungerade b sind nicht bekannt.

Wir können für (sowohl gerade, als auch ungerade) $b = (q+1)/2$ mit beliebigen ungeraden Primzahlpotenzen q Lösungen im $\mathbb{C}^b$ auch folgendermaßen angeben.

Sei χ ein nichttrivialer additiver Charakter eines endlichen Körpers $\mathbb{F}$ von ungerader Ordnung q. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_q$ die Elemente von $\mathbb{F}$. In $\mathbb{F}$ gibt es genau $\frac{q-1}{2}$ Quadrate außer $a = 0$. Seien diese $b_1, b_2, \ldots, b_{\frac{q-1}{2}}$. Dann ist folgende $(\frac{q+1}{2}) \times (q+1)$ Matrix $\mathbf{E}$ eine QD-Matrix, der sich ein reguläres, kohärentes Quantendesign mit Grad 1 zuordnen läßt mit $r = 1$, $v = q + 1$, $b = \frac{q+1}{2}$, $k = 2$ und $\lambda = \frac{1}{q}$.

$$
\mathbf{E} = \begin{pmatrix}
1 & \frac{1}{\sqrt{q}} & \frac{1}{\sqrt{q}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{q}} \\
0 & \sqrt{\frac{2}{q}}\chi(b_1a_1) & \sqrt{\frac{2}{q}}\chi(b_1a_2) & \cdots & \sqrt{\frac{2}{q}}\chi(b_1a_q) \\
0 & \sqrt{\frac{2}{q}}\chi(b_2a_1) & \sqrt{\frac{2}{q}}\chi(b_2a_2) & \cdots & \sqrt{\frac{2}{q}}\chi(b_2a_q) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \sqrt{\frac{2}{q}}\chi(b_{\frac{q-1}{2}}a_1) & \sqrt{\frac{2}{q}}\chi(b_{\frac{q-1}{2}}a_2) & \cdots & \sqrt{\frac{2}{q}}\chi(b_{\frac{q-1}{2}}a_q)
\end{pmatrix}. \tag{3.15}
$$

Aus $|\chi| = 1$ folgt, daß jede Spalte von $\mathbf{E}$ normiert ist. Die Kohärenz folgt aus der speziellen Ungleichung. Das innere Produkt der ersten mit der j-ten Spalte, $2 \leq j \leq q+1$, ist offensichtlich $\frac{1}{\sqrt{q}}$. Für den Absolutbetrag des inneren Produkts zweier anderer verschiedener Spalten folgt dies aus der Gleichung 3.8 für Gauß-Summen. Man kann leicht sehen, daß diese Designs zu sich selbst kohärent dual sind.

Mittels *regulärer Zwei-Graphen* [15] konnten in [55] und [52] zusätzlich einzelne reguläre, kohärente Designs mit Grad 1 im $\mathbb{R}^b$ konstruiert werden, auch für $k \neq 2$ (siehe auch [24, Beispiel 5.7], z.B. für $b = 6$ und $v = 16$). Weitere Beispiele stellen die Lösungen von Beispiel 2.14 dar, sowie die maximalen Designs von Abschnitt 3.4.

Die folgende Tabelle gibt die möglichen Parameter für reguläre, kohärente Quantendesigns mit Grad 1 und $r = 1$ in Abhängigkeit von v und b an. Eingetragen ist $\lambda = \frac{v-b}{b(v-1)}$. Berücksichtigt wurden die Ungleichungen von Abschnitt 2.4 für komplexe Designs. Für Parameter, für die wir eben Lösungen angegeben haben, ist λ fettgedruckt ($k = 2$ entspricht z.B. den Einträgen mit $v = 2b$).

b\v	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	0	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$												
3		0	$\mathbf{\frac{1}{9}}$		$\mathbf{\frac{1}{5}}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{21}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	← Absolute Schranke						
4			0	$\mathbf{\frac{1}{16}}$		$\frac{1}{8}$	$\mathbf{\frac{1}{7}}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{11}{56}$	$\mathbf{\frac{1}{5}}$
5				0	$\mathbf{\frac{1}{25}}$		$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{10}$	$\mathbf{\frac{1}{9}}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{7}{55}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{9}{65}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{11}{75}$
6					0	$\mathbf{\frac{1}{36}}$		$\mathbf{\frac{1}{16}}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{12}$	$\mathbf{\frac{1}{11}}$	$\frac{7}{72}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{3}{28}$	$\mathbf{\frac{1}{9}}$
7						0	$\mathbf{\frac{1}{49}}$			$\frac{2}{35}$	$\frac{5}{77}$	$\frac{1}{14}$	$\mathbf{\frac{1}{13}}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{3}{35}$
8							0	$\mathbf{\frac{1}{64}}$			$\frac{1}{22}$	$\frac{5}{96}$	$\frac{3}{52}$	$\frac{1}{16}$	$\mathbf{\frac{1}{15}}$

↖ Orthonormalbasen ↖ Bsp. 2.14 ↖ Kohärent duale absolute Schranke

Für reelle Designs gelten stärkere obere (und kohärent duale untere) Schranken und es kann gezeigt werden, daß es nicht für alle zulässigen Parameter innerhalb dieser Schranken Lösungen gibt. Zum Beispiel gibt es keine Lösungen für $b = 4$ und $v > 6$ (siehe [52]). Mit der kohärenten Dualität folgt daraus, daß es im Reellen gar keine Lösung für $b = 4$ gibt, außer jener in Beispiel 2.14. Für den komplexen Fall sind keine solchen Nichtexistenzbeweise bekannt. Es bestehen aber selbst bei den kleinen Werten noch große Lücken, so daß es eine große Herausforderung darstellt weitere komplexe Lösungen zu finden. Aufgrund der kohärenten Dualität kann man sich auf $k \leq 2$, d.h. $v \leq 2b$ beschränken.

Die r-fachen Summen, die komplementären Designs und die kohärent dualen Designs von kohärenten Designs mit Grad 1 haben auch Grad 1, so daß wir auch viele Lösungen für $r \geq 2$ haben.

Nachwort

In dieser Arbeit wurden eine Reihe offener Probleme und Vermutungen genannt. Hier sind einige davon aufgelistet und Vorschläge für weiterführende Untersuchungen.

(i) Verallgemeinere weitere Konzepte der Theorie sphärischer Designs, wie jenes zonaler orthogonaler Polynome (siehe [29]). Entwickle damit die Theorie der t-Kohärenz bzw. der t-Quantendesigns speziell über homogenen G-Räumen weiter.

(ii) Übertrage die Konzepte auf Vektorräume und Projektionen über den Quaternionen und Cayley-Zahlen.

(iii) Verallgemeinere Nichtexistenzbeweise der klassischen Designtheorie (wie etwa den Satz von Bruck-Ryser-Chowla [13, II.4.8] für affine Designs) und Nichtexistenzbeweise über straffe t-Designs mit $r = 1$ (siehe [6], [7], [10]).

(iv) Zeige, daß kein affines Quantendesign für $b = 6$, $r = 1$ und $k = 4$ existiert.

(v) Konstruiere (mit dem Ansatz aus Abschnitt 3.4) für alle $b \in \mathbb{N}$ maximale, reguläre Quantendesigns mit Grad 1 (d.h. straffe, reguläre 2-Quantendesigns) über den komplexen Zahlen.

(vi) Konstruiere weitere reguläre, kohärente Quantendesigns mit Grad 1, insbesondere für kleine Parameterwerte. Gibt es, außer den Schranken von Abschnitt 2.4, für komplexe Quantendesigns weitere EinschränkungenΓ

(vii) Untersuche und konstruiere Quantendesigns mit Assoziationsschemata als eine Verallgemeinerung von *partially balanced incomplete block designs*.

(viii) Interpretiere quantenmechanische Systeme in endlichdimensionalen Hilberträumen (z.B. Spin-Observablen) als Mengen von Projektionsmatrizen (Spektralprojektionen bzw. Zustände) und damit als Quantendesigns. Können bestimmte Systeme als Quantendesigns (wahrscheinlichkeitstheoretisch) eindeutig charakterisiert werdenΓ

(ix) Entwickle das Konzept für unendlichdimensionale Hilberträume und/oder unendliche (kontinuierliche) Mengen von orthogonalen Projektionen, wie in Abschnitt 1.3 kurz skizziert, weiter.

Literatur

[1] Accardi, L.: Some trends and problems in quantum probability, in: Accardi, L. et. al. (eds.), *Quantum Probability and Applications to the Quantum Theory of Irreversible Processes*, LNM. 1055, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.

[2] Agaian, S.S.: *Hadamard Matrices and their Applications*, LNM. 1168, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1985.

[3] Amrein, W.O. und Berthier, A.M.: On support properties of L^p-funktions and their Fourier transforms, *J. Funct. Anal.* **24** (1977), 258–267.

[4] Anderson, I.: *Combinatorial Designs: Construction Methods*, Ellis Horwood, Chichester, 1990.

[5] Auslander, L. und Tolimieri, R.: Is computing with the finite Fourier Transform pure or applied mathematicsΓ, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **1** (1979), no. 6, 847–897.

[6] Bannai, E. und Damerell, R.M.: Tight spherical designs, I, *J. Math. Soc. Japan*, **31** (1979), 199–207.

[7] Bannai, E. und Damerell, R.M.: Tight spherical designs, II, *J. London Math. Soc. (2)*, **21** (1980), 13–30.

[8] Bannai, E.: Spherical t-designs which are orbits of finite groups, *J. Math. Soc. Japan* **36** (1984), 341–354.

[9] Bannai, E.: Spherical designs and group representation, *AMS Contemp. Math.* **34** (1984), 95–107.

[10] Bannai, E. und Hoggar, S.G.: On tight t-designs in compact symmetric spaces of rank one, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **61** (1985), 78–82.

[11] Bellman, R.: *Analytic Number Theory*, Benjamin/Cummings, Reading, MA, 1980.

[12] Beltrametti, E.G. und Cassinelli, G.: *The Logic of Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1981.

[13] Beth, Th., Jungnickel, D. und Lenz, H.: *Design Theory*, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1985.

[14] Bröcker Th. und tom Dieck, T.: *Representation of Compact Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics 98, Springer, New York, 1985.

[15] Brouwer, A.E., Cohen, A.M. und Neumaier, A.: *Distance-Regular Graphs*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 18, Springer, Berlin, 1989.

[16] Bub, J.: Conditional probabilities in non-Boolean possibility structures, in: Hooker, C.A. (ed.), *The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics II*, Reidel, Dodrecht, 1979.

[17] Busch, P. und Lahti, P.J.: The Determination of the Past and the Future of a Physical System in Quantum Mechanics, *Found. Phys.* **19** (1989), 633–678.

[18] Butson, A.T.: Generalized Hadamard Matrices, *Proc. Amer. Math. Soc.* **13** (1962), 894–898.

[19] Cohen, D.W.: *An Introduction to Hilbert Space and Quantum Logic*, Springer, New York, 1989.

[20] Colburn, C.J. und Dinitz, J.H.: *The CRC Handbook of Combinatorial Designs*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

[21] Curtis, C.W. und Reiner, I.: *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, John Wiley & Sons, New York, 1962.

[22] Davis, E.B.: *Quantum Theory of Open Systems*, Academic Press, London, 1976.

[23] Davis, Ph.J.: *Circulant Matrices*, John Wiley & Sons, New York, 1979.

[24] Delsarte, P. Goethals, J.M. und Seidel, J.J.: Bounds for systems of lines and Jacobi polynomials, *Philips Res. Rep.* **30** (1975), Bouwkamp volume, 91–105.

[25] Delsarte, P. Goethals, J.M. und Seidel, J.J.: Spherical Codes and Designs, *Geom. Dedicata* **6** (1977), 363–388.

[26] Dénes, J. und Keedwell, A.D.: *Latin Squares and their Application*, Academic Press, New York, 1974.

[27] Dénes, J. und Keedwell, A.D.: *Latin Squares: New Developements in the Theory and Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1991.

[28] Federer, W.T. und Mandeli, J.P.: Orthogonal F-rectangles, orthogonal arrays and codes, *J. Comb. Theory Ser. A* **43** (1986), 149–164.

[29] Godsil, C.D.: *Algebraic Combinatorics*, Chapman & Hall, New York, London, 1993.

[30] Goethals, J.M. und Seidel, J.J.: Spherical designs, in: Ray Chaudhuri, D.K. (ed.), *Relations Between Combinatorics and Other Parts of Mathematics*, Proc. Symp. Pure Math. **34**, AMS, Providence, 1979, pp. 255–272.

[31] Goethals, J.M. und Seidel, J.J.: Cubatur formulae, polytopes and spherical designs, in: Davis, C. (ed.), *The Geometric Vein, Coxeter Festschrift*, Springer, Berlin, 1981, pp. 203–218.

[32] Gudder, S.P.: *Quantum Probability*, Academic Press, San Diego, 1988.

[33] Hadwiger, H.: Über ausgezeichnete Vektorsteren und reguläre Polytope, *Comment. Math. Helv.* **13** (1940), 90–107.

[34] Hall, M. Jr.: *Combinatorial Theory*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1986.

[35] Halmos, P.R.: Two subspaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **144** (1969), 381–389.

[36] Hardin, R.H. und Sloane, N.J.A.: New spherical 4-designs, *Discrete Math.* **106/107** (1992), 255–264.

[37] Hedayat, A. und Seiden, E.: F-square and orthogonal F-squares designs: A generalization of Latin square and orthogonal Latin squares designs, *Ann. Math. Stat.* **41** (1970), 2035–2044.

[38] Helgason, S.: *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1962.

[39] Hoffman, K. und Kunze, R.: *Linear Algebra*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.

[40] Hoggar, S.G.: Quaternionic equi-isoclinic n-planes, *Ars Combin.* **2** (1976), 11–13.

[41] Hoggar, S.G.: Bounds for quaternionic line systems and reflection groups, *Math. Scand.* **43** (1978), 241–249.

[42] Hoggar, S.G.: Two quaternionic 4-polytopes, in: Davis, C. (ed.), *The Geometric Vein, Coxeter Festschrift*, Springer, Berlin (1981), 219–230.

[43] Hoggar, S.G.: t-Designs in Projective Spaces, *European J. Combin.* **3** (1982), 233–254.

[44] Hoggar, S.G.: Parameters of t-designs in $\mathbb{F}P^{d-1}$, *European J. Combin.* **5** (1984), 29–36.

[45] Hoggar, S.G.: t-designs in Delsarte spaces, in: Ray Chaudhuri, D.K. (ed.), *Coding Theory and Designs Theory*, Part II, IMA Vol. 21, Springer, Berlin (1990) 144–165.

[46] Hoggar, S.G.: t-Designs with General Angel Set, *European J. Combin.* **13** (1992), 257–271.

[47] Hughes, D.R. und Piper, F.C.: *Design Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[48] Karpilovsky, G.: *Projective Representations of Finite Groups*, Marcel Dekker, New York, 1985.

[49] Kirillov, A.A.: *Elements of the Theory of Representations*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

[50] Klauder, J.R. und Skagerstam, B.S.: *Coherent States*, World Scientific, Singapore, 1985.

[51] Koornwinder, T.H.: A Note on the Absolute Bound for Systems of Lines, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **79** (= *Indag. Math.* **38**), (1976), 152–153.

[52] Lemmens, P.W.H. und Seidel, J.J.: Equiangular lines, *J. Algebra* **24** (1973), 494–512.

[53] Lemmens, P.W.H. und Seidel, J.J.: Equi-isoclinic subspaces of Euclidian spaces, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **76** (= *Indag. Math.* **35**), (1973), 98–107.

[54] Lidl, R. und Niederreiter, H.: *Finite Fields - Encyclopedia of mathematics and its applications 20*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[55] van Lint, J.H. und Seidel, J.J. Equilateral point sets in elliptic geometry, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **69** (= *Indag. Math.* **28**), (1966), 335–348.

[56] Lüders, G.: Über die Zustandsänderung durch den Meßprozeß, *Ann. Physik* **8** (1951) 322–328.

[57] Marcus, M. und Minc, H.: *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*, Allyn & Bacon, Boston, 1964.

[58] Mittelstaedt, P.: *Quantum Logic*, D. Reidel, Dordrecht, 1978.

[59] Moroz, B.Z.: Reflections on Quantum Logic, *Internat. J. Theoret. Phys.* **22** (1983), 329–340, Erratum, *Internat. J. Theoret. Phys.* **23** (1984), 497–498.

[60] Morton, P.: On the Eigenvectors of Schur's Matrix, *J. Number Theory* **12** (1980), 122–127.

[61] Neumaier, A.: Distances, graphs and designs, *European J. Combin.* **1** (1980), 163–174.

[62] Neumaier, A.: Combinatorial Configurations in terms of distances, Memorandum 81-09, Eindhoven University of Technology, 1981.

[63] Neumaier, A. und Seidel, J.J.: Discrete measures for spherical designs, eutactic stars and lattices, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **91** (= *Indag. Math.* **50**), (1988), 321–334.

[64] Neumaier, A. und Seidel, J.J.: Measures of strength $2e$ and optimal designs of degree e, *Sankhyā* **54** (1992), 299–309.

[65] Parthasarathy, K. R.: *An introduction to quantum stochastic calculus*, Birkhäuser, Basel, 1992.

[66] Raghavarao, D.: *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments*, John Wiley & Sons, New York, 1971.

[67] Reed, M. und Simon, B.: *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis*, 2nd. ed., Academic Press, New York, 1980.

[68] Schwinger, J.: Unitary Operator Bases, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **46** (1960), 570–579.

[69] Seidel, J.J.: Eutactic stars, in: Hajnal, A. und Sos, V.T. (ed.), *Combinatorics*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **18**, North Holland, Amsterdam, (1978), 983–999:

[70] Seidel, J.J.: Isometric embeddings and geometric designs, *Discrete Math.* **136** (1994), 281–293.

[71] Seidel, J.J.: Spherical Designs and Tensors, *Adv. Studies Pure Math.* **24** (1996), 309–321.

[72] Srinivas, M.D.: Foundations of Quantum Probability Theory, *J. Math. Phys.* **16** (1975), 1672–1685.

[73] Stulpe, W. und Singer M.: Some remarks on the determination of Quantum States by Measurement, *Found. Phys. Lett.* **3** (1990), 153–166.

[74] Thirring, W.: *Lehrbuch der Mathematischen Physik, Bd.3*, Springer, Wien, New York, 1979.

[75] Wallis, J.S.: Hadamard Matrices, in: Wallis, W.D., Street, A.P. und Wallis, J.S., *Combinatorics: Room Squares, Sum-free Sets, Hadamard Matrices*, LNM. 292, Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1972.

[76] Wallis, W.D.: *Combinatorial Designs*, Marcel Dekker, New York, 1988.

[77] Weyl, H.: *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Nachdruck der 2. Auflage 1931, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1981.

[78] Wiesbrock, H.W.: Born's postulate and reconstruction of ψ-functions in nonrelativistic quantum mechanics, *Internat. J. Theoret. Phys.* **26** (1987), 1175–1184.

[79] Zauner, G.: *Orthogonale Lateinische Quadrate und Anordnungen, Verallgemeinerte Hadamard-Matrizen und Unabhängigkeit in der Quanten-Wahrscheinlichkeitstheorie*, Diplomarbeit, Wien, 1991.

[80] Zhang, W.M., Feng, D.H. und Gilmore, R.: Coherent states: Theory and some applications, *Rev. Modern Phys.* **62** (1990), no. 4, 867–927.