Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Juni 2023 — Nr. 122

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

SCHIEBFLÄCHEN – EINE FASZINIERENDE FLÄCHENKLASSE

Die klassische Definition einer Schiebfläche. Verschiebt man eine Kurve c_1 entlang einer zweiten Kurve c_2, so erzeugt die bewegte Kurve c_1 eine Fläche $\mathcal{S}$, die wir als Schiebfläche bezeichnen. Die Fläche $\mathcal{S}$ entsteht auch, wenn die Kurven ihre Rolle vertauschen, also die bewegte Kurve c_1 festgehalten wird und die Kurve c_2 bewegt wird. Trivialerweise lässt sich eine Ebene durch Verschiebung einer Geraden längs einer zweiten, nicht parallelen erzeugen.

Die einfachsten nicht-trivialen Schiebflächen sind die Zylinder, wo eine beliebige Kurve längs einer Geraden verschoben wird. Insbesondere entsteht der Drehzylinder durch Verschiebung eines Kreises parallel zu seiner Achse.

Gut bekannt ist auch, dass Paraboloide durch Verschieben einer Parabel längs einer zweiten mit paralleler Achsenrichtung (in nicht-parallelen Ebenen) erzeugt werden können (Fig. 1): Sind die Parabeln in die gleiche Richtung gekrümmt, entsteht ein elliptisches Paraboloid, sonst ein hyperbolisches. Unter den elliptischen Paraboloiden ist das Drehparaboloid ein Spezialfall. Es wird sich zeigen, dass Drehzylinder und Drehparaboloid nicht die einzigen Drehflächen sind, die auch als Schiebfläche interpretiert werden können.

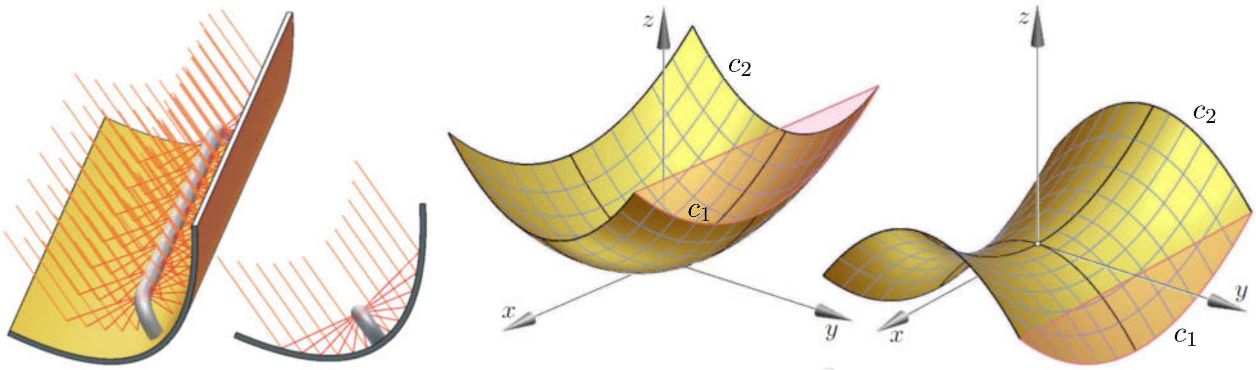

FIG. 1. Klassische Schiebflächen: Ein parabolischer Zylinder (mit ihm kann man sehr effizient Sonnenstrahlen bündeln), ein elliptisches und ein hyperbolisches Paraboloid.

Schiebflächen als Ort von Sehnenmittelpunkten (Mittenflächen). Wir wollen uns in diesem Aufsatz mit Flächen befassen, die sich durch Translation von Kurven erzeugen lassen. Manchen dieser Flächen sieht man diese Erzeugungsweise nicht sofort an, was in weiterer Folge auf durchaus überraschende Ergebnisse führt. Dazu verwenden wir folgenden anschaulich leicht einsehbaren Satz, der den Zusammenhang mit den sogenannten Mittenflächen herstellt [1]:

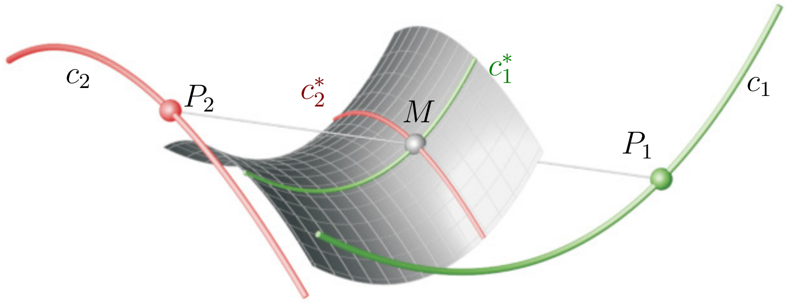

FIG. 2. Gegeben sind zwei Kurven c_1 und c_2: Der Ort der Mittelpunkte der Sehnen P_1P_2 mit $P_1 \in c_1$ und $P_2 \in c_2$ ist eine Schiebfläche.

Satz: *Wenn wir alle Punkte P_1 einer beliebigen Kurve c_1 mit allen Punkten P_2 einer beliebigen Kurve c_2 (Fig. 2) verbinden, ist der Ort aller Mittelpunkte M der Verbindungssehnen eine Schiebfläche. Die Fläche trägt zwei Scharen kongruenter Kurven. Ihre Prototypen c_1^* und c_2^* sind zu c_1 und c_2 ähnlich (Faktor $1/2$).*

Hinweis: Die Beweise der in diesem MatheBrief angeführten Sätze lassen sich elegant mittels Vektorrechnung führen und sind in [2] zu finden, ein illustratives Video zur Erzeugung des hyperbolischen Paraboloids als Mittenfläche finden Sie in [5].

Die Wendelfläche als Schiebfläche. Neben den Paraboloiden als klassisches Beispiel für eine Schiebfläche gibt es aber auch noch folgendes nicht offensichtliches Beispiel: *Die Mittenfläche einer Schraublinie ist ein Teil einer Wendelfläche. Diese ist daher nicht nur Schraubfläche, sondern auch Schiebfläche.*

Wegen $c_1 = c_2$ sind die Prototypen c_1^* und c_2^* der beiden Parameterlinienscharen kongruent. Alle Parameterlinien schneiden die Schraubachse und sind *keine* Bahnschraublinien der Wendelfläche (siehe dazu auch das entsprechende Video in [5]).

Die erzeugende Schraublinie $c = c_1 = c_2$ liegt auf der Wendelfläche Φ, die damit eindeutig bestimmt ist. Wenn wir den Radius r von c variieren, wird (bei gleichem Parameter p) dieselbe Wendelfläche erzeugt. Wieder erhält man zwei Scharen von nicht-trivialen Schraublinien auf Φ mit dem Radius $\frac{r}{2}$ (Fig. 4).

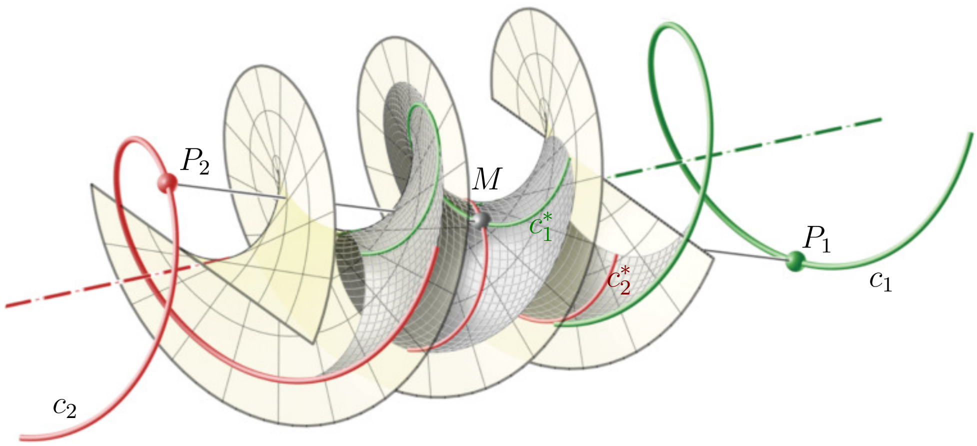

FIG. 3. Wenn $c_1 = c_2$ eine Schraublinie ist, ist die Mittenfläche eine Wendelfläche, die zwei Scharen von Schraublinien trägt.

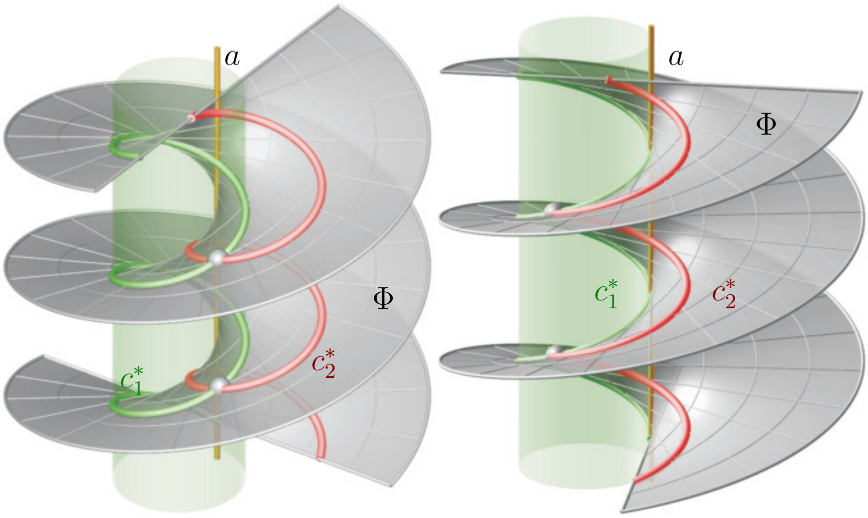

FIG. 4. Links: Zwei kongruente nicht koaxiale Schraublinien c_1^* und c_2^* mit beliebig gewähltem Radius sind auf einer Wendelfläche eingezeichnet. Rechts: Bei einer Parallelprojektion in Richtung einer Tangente einer der beiden Schraublinie wird diese zur Konturlinie der Wendelfläche.

Eine Wendelfläche (Parameter p) trägt eine zwei-parametrige Schar von kongruenten Schraublinien (Parameter $\frac{p}{2}$). Ihre Projektion in Achsenrichtung ist ein Kreis durch das Bild der Achse der Fläche.

Im Zusammenhang mit den „nicht-trivialen“ Schraublinien gibt es folgenden schönen Satz: *Die Kontur einer Wendelfläche ist für* jede *allgemeine Parallelprojektion eine Schraublinie.*

Drehflächen, die zugleich Schiebflächen sind. Wie schon einleitend gesagt, sind der Drehzylinder und das Drehparaboloid gleichzeitig Drehfläche und Schiebfläche. Aber es kommt noch besser (Beweis wieder in [2]):

Wenn wir eine Sinuskurve (Amplitude r) um ihre Achse rotieren lassen, kann die erzeugte Drehfläche auch als Schiebfläche mit zwei gegensinnig kongruenten Schraublinien, die auf Drehzylindern mit Durchmesser r verlaufen und die Achse der Drehfläche enthalten, interpretiert werden.

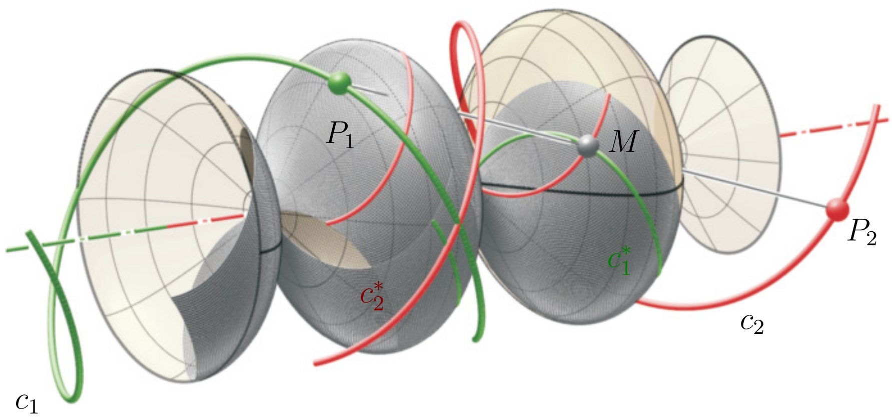

FIG. 5. Wenn zwei koaxiale Schraublinien c_1 und c_2 gegensinnig kongruent sind, ist die Mittenfläche eine Drehfläche.

FIG. 6. Eine Variation der Verbiegung einer Wendelfläche (orange) in die Kettenfläche (gelb): Man beachte die Bewegung des hervorgehobenen orthogonalen Gitters – seine Metrik wird nicht verändert!

Die Schiebkurven müssen nicht reell sein … Fig. 6 zeigt die (berühmte) Verbiegung (siehe [4] bzw. ein Video [5]) einer Wendelfläche (Helikoid) in die Ketten(dreh)fläche (Katenoid). Alle Flächen der Biegungsschar, also alle Zwischenformen, sind Minimalflächen (das heißt, ihre *Mittlere Krümmung* H ist in jedem ihrer Punkt gleich 0) und bilden eine sogenannte Schar assoziierter Minimalflächen.

Die Wendelfläche ist die einzige Regelfläche (außer der Ebene), die eine Minimalfläche ist (Eugène Charles CATALAN). Die Kettenfläche ist die einzige Minimalfläche, die auch Drehfläche ist (Leonhard EULER).

Das Katenoid ist aber nicht nur eine Drehfläche sondern auch eine Schiebfläche, was gar nicht so offensichtlich ist. Um diese Behauptung zu stützen, machen wir folgenden Kunstgriff: Wir betrachten die Schraublinie $s_1(t) = (\cos t, \sin t, \mathrm{i}t)$, wobei der Kurvenparameter t nicht nur reelle Werte annehmen darf sondern auch komplexe. Hingegen ist der Schraubparameter rein imaginär und hat den Wert i (mit $\mathrm{i}^2 = -1$). Diese Schraublinie trägt ebenso wie ihre konjugierte $\overline{s_1} = (\cos \bar{t}, \sin \bar{t}, -\mathrm{i}\bar{t})$ keine reellen Punkte. Setzt man nun für $t = u + \mathrm{i}v$ und berechnet man die Sehnenmitten von $s_1\overline{s_1}$, dann erhält man

$$k(t) = \frac{1}{2}(s_1 + \overline{s_1}) = (\cos u \cosh v, \sin u \cosh v, v),\ (u, v) \in [0{,}2\pi[\times\mathbb{R},$$

also eine Parametrisierung des Katenoids mit der (nicht algebraischen) Gleichung $x^2+y^2 = \cosh^2 z$. Damit ist das Katenoid als Ort von Sehnenmitten interpretierbar. Es ist aber auch eine Schiebfläche, da man ja auch $\frac{1}{2}s_1$ längs $\frac{1}{2}\overline{s_1}$ (oder umgekehrt) verschieben kann. Aus der obigen Parametrisierung des Katenoids erkannt man auch, dass es eine Drehfläche ist mit der z-Achse des zugrunde liegenden kartesischen Koordinatensystems als Drehachse.

Dass $k(t)$ auch eine Minimalfläche ist, kann man zeigen, indem man die Mittlere Krümmung berechnet und feststellt, dass diese für alle Paare (u, v) verschwindet. Wenn wir also den Umweg über die komplexen Zahlen erlauben, dann dürfen wir sagen: *Das Katenoid ist eine Drehfläche, die auch Schiebfläche ist.*

Wir haben nun eine weitere Drehfläche, die gleichzeitig Schiebfläche ist. Letzteres ist sie, weil sie auch noch Minimalfläche ist, denn es gilt folgendes für die Theorie der Minimalflächen zentrale Ergebnis von Sophus LIE (siehe [3]):

Satz: *Jede reelle Minimalfläche ist als Schiebfläche zweier konjugiert komplexer isotroper Kurven*[1] *erzeugbar.*

Diese Erzeugung liefert natürlich auch die Wendelfläche: Hier ist $s_2(t) = (\mathrm{i}\cos(t), \mathrm{i}\sin t, -t)$ zu setzen und $w(t) = \frac{1}{2}(s_2(t) + \overline{s_2(t)})$ ergibt dann mit $t = u + \mathrm{i}v$ (wie zuvor)

$$w(t) = (-\sin u \sinh v, -\cos u \sinh v, -u),\ (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

eine Parametrisierung einer Wendelfläche mit der (ebenfalls nicht algebraischen) Gleichung $x/y + \tan z = 0$. Bei s_2 handelt es sich ebenfalls um eine Schraublinie, diesmal mit einem reellen Schraubparameter, aber dem komplexen Radius i.

Der Übergang von s_1 zu s_2 bedeutet eigentlich nur eine Ähnlichkeit mit dem Faktor i, denn es gilt $s_2(t) = \mathrm{i} \cdot s_1(t)$. Weil $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$ gilt, könnte man hier auch $s_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} s_1(t)$ schreiben und s_1 and s_2 als orthogonal oder konjugiert bezeichnen, da auch jene Durchmesser des Einheitskreises $z(q) = \mathrm{e}^{q\mathrm{i}}$ durch die Punkte $z(q)$ und $z(q_2)$ mit $q_2 = q_1 + \frac{\pi}{2}k$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) konjugiert und orthogonal sind.

Durchläuft q in $s(q) = \mathrm{e}^{q\mathrm{i}} s_1(t)$ den Einheitskreis, dann rotiert die erzeugende Kurve in gewissem Sinne und die zugehörigen Minimalflächen durchlaufen die Schar der assoziierten Flächen, von denen in Fig. 6 einige dargestellt sind. Sie alle sind Schiebflächen im Sinn von S. LIE. Die erzeugenden Kurven sind Paare konjugiert komplexer isotroper Schraublinien. Je zwei Flächen der Schar sind isometrisch und können daher auf einander abgewickelt werden. Mathematisch ausgedrückt heißt das: Ihre ersten (metrischen) Fundamentalformen stimmen überein.

LITERATUR

[1] G. GLAESER: Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik. Springer Spektrum, Berlin-Heidelberg, 2022. *http://tethys.uni-ak.ac.at/geom317-330.pdf*

[2] G. GLAESER, P. CALVACHE: On two special classes of surfaces defined by one or more planar or spatial curves. Proc. 15th ICGG 2012, paper no. 74, Montreal, 2012. *https://tethys.uni-ak.ac.at/canada-lines.pdf*

[3] J.C.C. NITSCHE: Vorlesungen über Minimalflächen. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[4] W. WUNDERLICH: Beitrag zur Kenntnis der Minimalschraubflächen. Compos. Math. 10 (1952), 297–311. *https://tethys.uni-ak.ac.at/geom/mitarbeiter/wallner/wunderlich/pdf/50.pdf*

[5] Videos. Erzeugung eines hyperbolischen Paraboloids als Mittenfläche: *http://tethys.uni-ak.ac.at/cross-science/midsurface.mp4*.
Erzeugung einer Wendelfläche als Mittenfläche: *http://tethys.uni-ak.ac.at/cross-science/midsurface2.mp4*.
Verbiegung der Kettenfläche in die Wendelfläche: *http://tethys.uni-ak.ac.at/cross-science/catenoid-bending.mp4*

G. Glaeser und B. Odehnal

[1] Auf isotropen Kurven versagt die euklidische Längenmessung auf Grund des verschwindenden Bogenelementes. Je zwei verschiedene Punkte einer isotropen Kurve haben auf dieser den Abstand 0.