Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Jänner 2024 — Nr. 125

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

EINE INTERESSANTE ANWENDUNG KUBISCHER POLYNOME?

Die Anfangsglieder einer Folge lauten etwa

$$w_1 = 2,\ w_2 = 4 \text{ und } w_3 = 6.$$

Wie lautet nun w_4? In manchen Tests wird $w_4 = 8$ als „richtige“ Fortsetzung gesehen. Das kann man auch anders sehen: Wir wollen zeigen, dass es ein kubisches Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

gibt mit $p(1) = 2$, $p(2) = 4$, $p(3) = 6$, wo aber $w_4 = p(4)$ beliebig gewählt werden kann. Die entsprechenden Bedingungen an die noch unbekannten Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 lauten

$$\begin{aligned}
p(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 2,\\
p(2) &= a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 4,\\
p(3) &= a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 6,\\
p(4) &= a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = w_4.
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem sieht etwas kompliziert aus, aber es ist leicht zu lösen! Man bilde die Differenzen aufeinander folgender Zeilen. Dann erhält man im ersten Schritt

$$\begin{aligned}
a_1 + 3a_2 + 7a_3 &= 2,\\
a_1 + 5a_2 + 19a_3 &= 2,\\
a_1 + 7a_2 + 37a_3 &= w_4 - 6
\end{aligned}$$

und im nächsten Schritt

$$\begin{aligned}
2a_2 + 12a_3 &= 0,\\
2a_2 + 18a_3 &= w_4 - 8
\end{aligned}$$

und letztlich

$$6a_3 = w_4 - 8.$$

Dann erhält man aus den ersten Zeilen der vorangegangenen Systeme

$$a_3 = \frac{w_4 - 8}{6}, \quad a_2 = -w_4 + 8, \quad a_1 = \frac{11w_4 - 76}{6}, \quad a_0 = -w_4 + 8.$$

Setzt man als „richtige“ Lösung $w_4 = 8$, so erhält man $a_3 = a_2 = a_0 = 0$ und $a_1 = 2$. Das Polynom ist dann $p(x) = 2x$ welches die arithmetische Folge richtig fortsetzt.

Setzt man hingegen $w_4 = 2$, so kommt man zum Polynom $p(x) = 6 - 9x + 6x^2 - x^3$. Verwendet man $w_4 = 0$, so erhält man das Polynom $p(x) = 8 - \frac{38}{3}x + 8x^2 - \frac{4}{3}x^3$ mit $p(1) = 2$, $p(2) = 4$, $p(3) = 6$, aber $p(4) = 0$.

Wir wiederholen nun die obige Rechnung mit einer allgemeinen arithmetischen Folge

$$p(1) = d,\ p(2) = 2d,\ p(3) = 3d,$$

die man mit einem beliebigen Wert $w_4 = p(4)$ fortsetzen möchte. Man erhält das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} p(1) & = & a_0 & + & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & d, \\ p(2) & = & a_0 & + & 2a_1 & + & 4a_2 & + & 8a_3 & = & 2d, \\ p(3) & = & a_0 & + & 3a_1 & + & 9a_2 & + & 27a_3 & = & 3d, \\ p(4) & = & a_0 & + & 4a_1 & + & 16a_2 & + & 64a_3 & = & w_4. \end{array}$$

Wie zuvor subtrahiert man aufeinanderfolgende Zeilen und erhält schlussendlich die Lösungen

$$a_3 = \frac{w_4 - 4d}{6}, \quad a_2 = -w_4 + 4d, \quad a_1 = \frac{11w_4 - 38d}{6}, \quad a_0 = -w_4 + 4d.$$

Auch geometrische Folgen liefern interessante Aspekte. Will man

$$p(1) = 1,\ p(2) = Q,\ p(3) = Q^3$$

mit einem Wert $p(4) = w_4$ so wie oben fortsetzen, erhält man die folgenden Bedingungen für die Koeffizienten des Polynoms p:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} p(1) & = & a_0 & + & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & 1, \\ p(2) & = & a_0 & + & 2a_1 & + & 4a_2 & + & 8a_3 & = & Q, \\ p(3) & = & a_0 & + & 3a_1 & + & 9a_2 & + & 27a_3 & = & Q^2, \\ p(4) & = & a_0 & + & 4a_1 & + & 16a_2 & + & 64a_3 & = & w_4. \end{array}$$

Dieses System ist wiederum leicht mit derselben Methode wie oben zu lösen. Man erhält

$$a_3 = \frac{w_4 - 3Q^2 + 3Q - 1}{6}, \qquad a_2 = -w_4 + \frac{7Q^2 - 8Q + 3}{2},$$
$$a_1 = \frac{11w_4 - 42Q^2 + 57Q - 26}{6}, \qquad a_0 = -w_4 + 4Q^2 - 6Q + 4.$$

Nimmt man bei $Q = 3$ die „richtige“ Fortsetzung $w_4 = 27$, so ergibt sich das Polynom $p(x) = -5 + \frac{32}{3}x - 6x^2 + \frac{4}{3}x^3$. Natürlich liefert dieses Polynom die ersten vier Werte

$$p(1) = 1, \quad p(2) = 3, \quad p(3) = 9, \quad p(4) = 27,$$

aber der fünfte Wert ist nicht 81, sondern $p(5) = 65$.

Vielleicht ist jemand neugierig geworden, wieso diese Gleichungssysteme so einfach zu lösen waren. Es liegt die Struktur der Differenzenbildung der Folge von Quadraten bzw. Kuben zugrunde. Betrachtet man die Folge der Quadrate $1, 4, 9, 26, 36, \ldots$ und bildet die Differenz aufeinander folgender Glieder, so ergibt sich die Folge $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ Wiederholt man dieses Verfahren, so erhält man die konstante Folge $2, 2, 2, 2, 2, \ldots$

Für Kuben muss man dreimal iterieren: Aus $1, 8, 27, 24, 125, 216, \ldots$ wird zuerst $7, 19, 37, 61, 91, \ldots$, dann $12, 18, 24, 30, \ldots$ und letztlich die konstante Folge $6, 6, 6, \ldots$

Dies ist leicht zu sehen. Die Differenzen von aufeinanderfolgenden Quadraten n^2, $(n+1)^2$ und $(n+2)^2$ lauten $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$ und $(n+2)^2 - (n+1)^2 = 2n + 3$. Deren Differenz lautet $(2n+3) - (2n+1) = 2$. Ähnlich rechnet man mit vier auf einanderfolgenden Kuben.

F. Schweiger