Proseminar zu
Lineare Algebra und Mehrdimensionale Analysis für Lehramtskandidatinnen und -kandidaten

Wintersemester 2023/2024

1) Betrachte die durch die Gleichung
$$160\,{x_1}^2 - 27\,{x_2}^2 - 84\,x_1x_2 - 1632\,x_1 - 180\,x_2 - 4356 = 0$$
gegebene Kurve 2. Ordnung. Bestimme die 1. Hauptlage dieser Kurve 2. Ordnung. Weiters gib die Brennpunkte (bzw. Brennpunkt und Leitlinie) dieser Kurve 2. Ordnung (in der ursprünglichen Lage) an.

Musterbeispiel: Betrachte die durch $f(x) := \begin{cases} \frac{4{x_1}^6 x_2}{({x_1}^4+{x_2}^2)^2}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$ für $x := \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ definierte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Berechne für alle $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Richtungsableitung von f an der Stelle 0 in Richtung v und untersuche die Differenzierbarkeit der Funktion f an der Stelle 0.
LÖSUNG: Sei $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$. Es ist die Richtungsableitung $\partial_v f(0)$ von f an der Stelle 0 in Richtung v dann

$$\begin{aligned} \partial_v f(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{4(tv_1)^6(tv_2)}{t((tv_1)^4+(tv_2)^2)^2} = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{4t^7{v_1}^6 v_2}{t^5(t^2{v_1}^4+{v_2}^2)^2} = \lim_{t\to 0} t^2 \frac{4{v_1}^6 v_2}{(t^2{v_1}^4+{v_2}^2)^2} = 0\ , \end{aligned}$$

falls $v_2 \neq 0$. Im Fall $v_2 = 0$ ist $\partial_v f(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^9 {v_1}^8} = 0$. Somit ist $\partial_v f(0) = 0$ für alle $v \neq 0$.
Jetzt untersuchen wir die Stetigkeit von f an der Stelle 0, indem wir uns entlang der Kurve $\left(\begin{smallmatrix} t \\ t^2 \end{smallmatrix}\right)$ dem Punkt 0 nähern. Es ist

$$\lim_{t\to 0} f\left(\begin{smallmatrix} t \\ t^2 \end{smallmatrix}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{4(t)^6(t^2)}{((t)^4+(t^2)^2)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{4t^8}{(2t^4)^2} = \lim_{t\to 0} 1 = 1 \neq 0 = f(0)\ ,$$

und daher ist f nicht stetig an der Stelle 0. Weil f an der Stelle 0 nicht stetig ist, kann f an der Stelle 0 auch nicht differenzierbar sein.

2) Für $x := \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$ sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \begin{cases} \frac{32{x_1}^7{x_2}^3}{({x_1}^2+{x_2}^6)^4}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$ definiert.

a) Bestimme für alle $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Richtungsableitung von f an der Stelle 0 in Richtung v.

b) Untersuche die Differenzierbarkeit der Funktion f an der Stelle 0.
Hinweis: Durch Betrachten geeigneter Kurven untersuche die Stetigkeit von f.