Proseminar zu
Eindimensionale Analysis für Lehramtskandidatinnen und -kandidaten

Sommersemester 2025

Musterbeispiel: Löse $\frac{4x-5}{x-2} < x$.
Lösung: Beachte, dass für $c > 0$ die Ungleichung $a < b$ zu $ac < bc$ äquivalent ist, und für $c < 0$ die Ungleichung $a < b$ zu $ac > bc$ äquivalent ist.
1. Fall: Angenommen $x > 2$. Dann ist $x - 2 > 0$ und daher $\frac{4x-5}{x-2} < x$ zu

$$4x - 5 < x(x-2) = x^2 - 2x$$

äquivalent, letzteres ist zu $0 < x^2 - 6x + 5$ äquivalent. Da $x = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2 = 1, 5$ die Nullstellen von $x^2 - 6x + 5$ sind, gilt $x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1)$, also ist $\frac{4x-5}{x-2} < x$ zu $0 < (x-5)(x-1)$ äquivalent. Ein Produkt ist genau dann positiv, wenn beide Faktoren positiv (also $x > 5$ und $x > 1$, daher $x > 5$) oder beide negativ (also $x < 5$ und $x < 1$, daher $x < 1$) sind. Hier kann wegen $x > 2$ der Fall $x < 1$ nicht eintreten, und auf $x > 5$ hat die Bedingung $x > 2$ keinen Einfluss, somit ist $\frac{4x-5}{x-2} < x$ zu $x \in (5, +\infty)$ äquivalent.
2. Fall: Angenommen $x < 2$. Hier ist $x - 2 < 0$ und daher $\frac{4x-5}{x-2} < x$ zu

$$4x - 5 > x(x-2) = x^2 - 2x$$

äquivalent, und das zu $0 > x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1)$ äquivalent (Nullstellen wurden bereits im 1. Fall berechnet). Ein Produkt ist genau dann negativ, wenn einer Faktoren positiv und der andere negativ ist (also $x > 5$ und $x < 1$, was offensichtlich nicht geht, oder $x < 5$ und $x > 1$, also $x \in (1, 5)$). Wegen $x < 2$ ist $\frac{4x-5}{x-2} < x$ zu $x \in (1, 2)$ äquivalent.
Insgesamt ist also $\frac{4x-5}{x-2} < x$ zu $x \in (1, 2) \cup (5, +\infty)$ äquivalent.

1) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die $\dfrac{2x-9}{x-6} > x - 2$ gilt.

2) Finde die Lösungen der folgenden Ungleichungen (in $\mathbb{R}$).

a) $\dfrac{7x-20}{x-4} \leq x + 1\,.$ b) $\dfrac{8x+23}{x-5} < 3x + 5\,.$

Musterbeispiel: Sei $a_n := \dfrac{5n^2+17n+19}{n^2+3n+7}$. Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und führe den Beweis mit Hilfe der Definition des Grenzwerts.

Lösung: Zunächst ist $a_n = \dfrac{5n^2+17n+19}{n^2+3n+7} = \dfrac{5+\overbrace{\frac{17}{n}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{19}{n^2}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{3}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{7}{n^2}}_{\to 0}} \to 5$, also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$|a_n - 5| = \frac{|5n^2+17n+19-5n^2-15n-35|}{|n^2+3n+7|} =$$

$$= \frac{|2n-16|}{n^2+3n+7} \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \frac{2n+\overbrace{16}^{\leq 16n}}{n^2+\underbrace{3n}_{\geq 0}+\underbrace{7}_{\geq 0}} \leq \frac{2n+16n}{n^2+0+0} = \frac{18n}{n^2} = \frac{18}{n},$$

und deshalb

$$|a_n - 5| \leq \frac{18}{n}. \tag{1}$$

Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig). Wegen des Archimedischen Axioms gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{18}{\varepsilon}$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $N > \frac{18}{\varepsilon}$. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ (beliebig). Weil $n \geq N > \frac{18}{\varepsilon}$ ergibt sich $\frac{18}{n} < \varepsilon$. Daher gilt wegen (1), dass $|a_n - 5| \leq \frac{18}{n} < \varepsilon$. Damit haben wir gezeigt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$ gilt. □

3) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch $x_n := \dfrac{3n+1}{n+2}$ definiert. Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und beweise das Ergebnis mit der Definition des Grenzwerts.

4) Bestimme den Grenzwert der folgenden Folgen und beweise das Ergebnis mit Hilfe der Definition des Grenzwerts.
   a) $a_n := \dfrac{2n^2+5n+6}{n^2+n+4}$.
   b) $x_n := \dfrac{4n^2+7n-2}{n^3+6n^2+3n+8}$.
   c) $b_n := \dfrac{3n^3+9n^2+7n+8}{n^3+3n^2+2n+7}$.

5) Von den folgenden Folgen bestimme den Grenzwert und beweise das Ergebnis mit der Definition des Grenzwerts.
   a) $a_n := \dfrac{5n^3+7n^2+12n+19}{n^3+2n^2+5n+3}$.
   b) $a_n := \dfrac{2n^2+3n-1}{n^2+4}$.
   c) $x_n := \dfrac{7n^2+10n+5}{3n^2+4n+6}$.

Für Beispiel 6) c) darf der folgende Satz verwendet werden.
Satz. *Für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ und für $k \in \mathbb{Z}$ gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} n^k q^n = 0$.

6) Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch $a_n := \dfrac{n^{18}}{\left(1+\frac{6}{100}\right)^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert ist.

a) Mit Hilfe eines Computers (oder Taschenrechners) berechne a_5, a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{40}, a_{50} und a_{100}.

b) Welche Vermutung über den Grenzwert von (a_n) würde Beispiel a) nahelegen?

c) Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

7) Berechne (bzw. zeige die Divergenz) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

Achtung! Die folgende Argumentation ist falsch, wenn man $\lim_{n\to\infty} a_n$ für die durch $a_1 := 2$ und $a_n := 2a_{n-1} - 1$ für $n > 1$ definierte Folge bestimmen will.
Setze $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(2a_{n-1} - 1) = 2a - 1$, und deshalb ist $a = 1$, also $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.
Hier wurde der Fehler gemacht, dass die Konvergenz angenommen, aber nicht bewiesen wurde! Man müsste die Konvergenz der Folge beweisen. In diesem Fall ist aber $a_n = 1+2^{n-1}$ (kann man durch Induktion zeigen), und daher $a_n \to +\infty$, also es gilt sicher nicht $a_n \to 1$.
Richtig wäre bei ähnlichen Beispielen folgende Vorgangsweise (siehe auch das folgende Musterbeispiel). Zunächst ist es sinnvoll anzunehmen, dass die Folge konvergiert, und den Grenzwert zu bestimmen. Es muss dann aber die Konvergenz der Folge noch bewiesen werden. In vielen Fällen funktioniert dass, indem man beweist, dass die Folge monoton und beschränkt ist. Indem man a_2 ausrechnet und mit a_1 vergleicht, kann man einmal vermuten, dass die Folge monoton fallend oder steigend ist (falls $a_2 \le a_1$ monoton fallend, und falls $a_2 \ge a_1$ monoton steigend). Dann probiert man durch Induktion die Monotonie zu beweisen. Weiters probiert man durch Induktion zu beweisen, dass im Fall der monoton fallenden Folge diese nach unten beschränkt ist, und im Fall der monoton steigenden Folge diese nach oben beschränkt ist, wobei sich für die Schranke der vermutete Grenzwert anbietet. Bei einer monotonen und beschränkten Folge hat man die Konvergenz, und der Grenzwert muss daher der zuvor berechnete sein.

Musterbeispiel: Es sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_1 := 4$ und $a_n := \sqrt{16a_{n-1}+57}$ für $n > 1$ definiert. Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
LÖSUNG: Angenommen die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wäre konvergent (beachte, dass wegen ihrer Definition $a_n \ge 0$ für alle n gilt). Setze $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{16a_{n-1}+57} \underbrace{=}_{\text{da } x\mapsto\sqrt{16x+57} \text{ stetig ist}} \sqrt{16a+57},$$

und daher $a^2 = 16a + 57$, also $a^2 - 16a - 57 = 0$. Als Lösung erhält man $a = 8 \pm \sqrt{8^2+57} = 8 \pm 11 = -3, 19$. Da $a \ge 0$ muss dann $a = 19$ gelten.
Jetzt muss noch bewiesen werden, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
Es ist $a_2 = \sqrt{16a_1+57} = \sqrt{16\times 4+57} = 11 > 4 = a_1$. Wir beweisen durch Induktion, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend ist (monoton steigend würde genügen). Nachdem $a_1 < a_2$ gilt, ist der Induktionsanfang bereits gezeigt. Nun sei $n > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $a_{n-1} < a_n$. Deshalb ist $16a_{n-1} + 57 < 16a_n + 57$ und weil $x \mapsto \sqrt{x}$ streng monoton steigend ist gilt $a_n = \sqrt{16a_{n-1}+57} < \sqrt{16a_n+57} = a_{n+1}$. Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend.
Jetzt zeigen wir durch Induktion, dass $a_n < 19$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt ($a_n \le 19$ würde genügen). Für $n = 1$ ist $a_1 = 4 < 19$, womit der Induktionsanfang gezeigt ist. Es sei jetzt $n > 1$. Nach

Induktionsvoraussetzung ist $a_{n-1} < 19$. Also ist $16a_{n-1} + 57 < 16 \times 19 + 57 = 361$ und weil $x \mapsto \sqrt{x}$ streng monoton steigend ist erhält man $a_n = \sqrt{16a_{n-1} + 57} < 19$. Daher ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt.
Weil die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und nach oben beschränkt ist, ist sie konvergent. Ihr Grenzwert muss daher der oben berechnete Wert sein. Deshalb ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 19$. □

8) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch $a_1 := 2$ und $a_n := \sqrt{8a_{n-1} + 9}$ für $n > 1$ definiert. Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

9) Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{12^n + 9^n + 5^n}$.

10) Für die durch $a_1 := 3$ und $a_n := \sqrt{12a_{n-1} + 405}$ für $n > 1$ definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ berechne $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Man nennt $\alpha := \limsup_{n\to\infty} a_n$ den *Limes Superior* dieser Folge, falls α der größte Wert ist, sodass es eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \to \alpha$ gibt. Für nicht nach oben beschränkte Folgen wird oft der Wert $+\infty$ als Limes Superior zugelassen, und der Wert $-\infty$, falls $a_n \to -\infty$ (sonst müsste man bei der Definition des Limes Superior fordern, dass die Folge beschränkt ist). Analog dazu nennt man $\beta := \liminf_{n\to\infty} a_n$ den *Limes Inferior* dieser Folge, wenn β der kleinste Wert ist, sodass es eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \to \beta$ gibt. Bei nicht nach unten beschränkten Folgen wird oft der Wert $-\infty$ als Limes Inferior zugelassen, und der Wert $+\infty$, falls $a_n \to +\infty$. Die Menge der Grenzwerte von Teilfolgen einer Folge wird als Menge der Häufungswerte dieser Folge bezeichnet. Also ist der Limes Superior der größte Häufungswert, und der Limes Inferior der kleinste Häufungswert.
Als Beispiel dazu betrachten wir die Folge $a_n := (-1)^n$. Für gerade n ist $a_n = 1 \to 1$, und für ungerade n ist $a_n = -1 \to -1$. Hier ist die Menge der Häufungswerte gleich $\{-1, 1\}$, $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n = -1$. Im Allgemeinen kann die Menge der Häufungswerte komplizierter sein, sie kann auch abzählbar oder überabzählbar sein!
Für Reihen kann man den Wurzeltest folgendermaßen formulieren.
Satz. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$.*
(1) *Falls $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*
(2) *Wenn $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.*
Während beim Wurzeltest in beiden Fällen der Limes Superior verwendet wird, ist es beim Quotiententest im zweiten Fall der Limes Inferior. Jetzt formulieren wir den Quotiententest.
Satz. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.*
(1) *Falls $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*
(2) *Wenn $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.*

11) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei durch $a_n := \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ \left(\frac{1}{5}\right)^n, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \end{cases}$ definiert.

a) Untersuche die Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und berechne den Wert dieser Reihe.

b) Berechne $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ und $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$.

c) Jetzt berechne $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ und $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

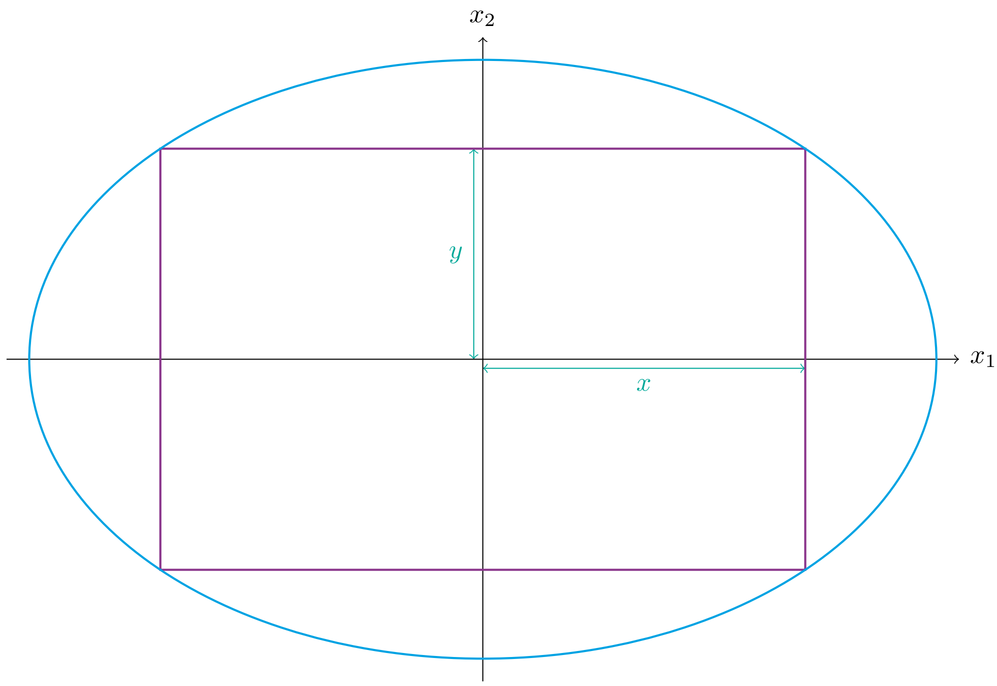
d) Kann man bei dieser Reihe die Konvergenz (bzw. Divergenz) mit Hilfe des Wurzeltests zeigen? Und kann man die Konvergenz (bzw. Divergenz) dieser Reihe mit Hilfe des Quotiententests zeigen?

Musterbeispiel: Zeige, dass $\sqrt{3}$ eine reelle Zahl ist.
LÖSUNG: Für $x \geq 0$ ist $x = \sqrt{3} \iff x^2 = 3 \iff x^2 - 3 = 0$.
Setze $f(x) := x^2 - 3$. Dann ist f stetig. Weiters ist $f(0) = -3 < 0$ und $f(2) = 1 > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x \in [0, 2]$ (also eine nichtnegative reelle Zahl) mit $f(x) = 0$ (somit $x^2 - 3 = 0$). $\square$

12) Beweise, dass $\sqrt[7]{31}$ eine reelle Zahl ist.

Um Minima oder Maxima einer Funktion zu bestimmen ist die folgende Vorgangsweise sinnvoll. Zunächst sollte ein passender Bereich bestimmt werden (falls er nicht vorgegeben ist), auf dem man die Funktion betrachtet wird. Wenn man die Funktion ändert („vereinfacht"), muss begründet werden, warum man das machen darf! Dann bestimmt man die Nullstellen der Ableitung, und eventuell auch Stellen, an denen die Funktion nicht differenzierbar ist. Jetzt berechnet man die Funktionswerte an diesen Stellen, sowie die Funktionswerte am Rand. Beim höchsten Funktionswert hat man das Maximum, beim kleinsten das Minimum. Hier sollte man den Rand durchaus allgemeiner sehen, es kann ein Grenzwert (etwa $x \to 0^+$ oder $x \to -\infty$ sein), und der „Funktionswert" am Rand kann auch $+\infty$ oder $-\infty$ sein.
Bemerkung: Gesucht ist ein (globales) Minimum oder Maximum der Funktion. Deshalb ist es nicht sinnvoll einfach nur festzustellen, dass man etwa ein lokales Maximum hat!

Musterbeispiel: Der Ellipse $\frac{{x_1}^2}{63} + \frac{{x_2}^2}{18} \leq 1$ soll ein achsenparalleles Rechteck mit größtmöglichem Umfang eingeschrieben werden. Bestimme die Abmessungen und den Umfang dieses Rechtecks.
LÖSUNG: Zunächst machen wir dazu eine Skizze und definieren dann in dieser Skizze x und y.



Es ist dann die Länge des Rechtecks gleich $2x$ und die Breite gleich $2y$. Somit ist der Umfang dieses Rechtecks gleich $2(2x+2y) = 4x+4y$. Nachdem der Punkt $\binom{x}{y}$ auf der Ellipse liegt, muss $\frac{x^2}{63} + \frac{y^2}{18} = 1$ gelten, woraus man $y = \sqrt{18 - \frac{2x^2}{7}}$ erhält. Der kleinstmögliche Wert für x ist 0, der größtmögliche ist $\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$. Wir müssen also das Maximum der durch $f(x) = 4x + 4\sqrt{18 - \frac{2x^2}{7}}$ definierten Funktion $f : \left[0, 3\sqrt{7}\right] \to \mathbb{R}$ bestimmen.
Für die Ableitung erhält man $f'(x) = 4 + \frac{4}{2\sqrt{18-\frac{2x^2}{7}}}\left(-\frac{4x}{7}\right) = 4 - \frac{8x}{7\sqrt{18-\frac{2x^2}{7}}}$. Setzt man $f'(x) = 0$, so erhält man $\frac{8x}{7\sqrt{18-\frac{2x^2}{7}}} = 4$, also $8x = 28\sqrt{18 - \frac{2x^2}{7}}$ und daher $2x = 7\sqrt{18 - \frac{2x^2}{7}}$. Durch Quadrieren ergibt sich $4x^2 = 882 - 14x^2$, also $18x^2 = 882$. Deshalb ist $x^2 = 49$ und daher $x = 7$.
Nun ist $f(7) = 36$. Einsetzen der Randwerte ergibt $f(0) = 12\sqrt{2} = \sqrt{288} < \sqrt{1296} = 36$ und $f\left(3\sqrt{7}\right) = 12\sqrt{7} = \sqrt{1008} < \sqrt{1296} = 36$. Deshalb erhält man das Maximum von f für $x = 7$. Wir erhalten daraus $y = 2$. Somit hat das achsenparallele eingeschriebene Rechteck mit maximalem Umfang die Seitenlängen 14 und 4 und den Umfang 36. $\square$

13) EinE Bauer/Bäurin möchte auf seinem/ihrem (ebenen) Grundstück eine Viehweide einrichten und mit einem Zaun umgeben. Diese Viehweide soll rechteckig sein. Es stehen 260 m Zaun zur Verfügung. Welche Abmessungen soll diese Viehweide haben, wenn die Tiere möglichst viel Weidefläche haben sollen (und wie groß ist dann die Weidefläche)?

14) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Für welche reelle Zahl x nimmt $\sum_{j=1}^{n}(x - a_j)^2$ den kleinstmöglichen Wert an?

15) Die Funktion $f : [4, 14] \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := 2x^3 - 51x^2 + 396x - 834$ definiert. Berechne das Minimum und das Maximum von f.

16) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Weiters sei $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar ist und $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ erfüllt. Zeige, dass die Funktion f ein Minimum m besitzt, und dass $m \in \{a\} \cup \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\}$ gilt.

17) Betrachte die durch $f(x) := \dfrac{192}{8 - x} - 9x^2 + 60x - 83$ definierte Funktion $f : [2, 8) \to \mathbb{R}$. Besitzt diese Funktion (mindestens) ein Minimum (exakte formale Begründung angeben!)? Falls sie Minima besitzt, bestimme diese.
Hinweis: Verwende das Beispiel 16) für die exakte formale Begründung.

18) Der Ellipse $\dfrac{{x_1}^2}{18} + \dfrac{{x_2}^2}{2} \leq 1$ soll das flächengrößte achsenparallele Rechteck eingeschrieben werden. Welche Abmessungen muss dieses Rechteck haben, und wie groß ist dann die Fläche?

19) Es sei $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$. Bestimme die Abmessungen (und die Fläche) des flächengrößten Rechtecks, das eine Diagonale der Länge d besitzt.

20) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\begin{cases} 4x + x^2 \sin \frac{1}{x}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$ definiert. Berechne $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist f' stetig.

21) Für die in Beispiel 20) definierte Funktion f beweise, dass es kein $\delta > 0$ gibt, sodass $f\big|_{(-\delta,\delta)}$ injektiv ist.