$$\text{Berechne} \quad \int \frac{16x^3+60x^2+88x+108}{x^4+4x^3+14x^2+20x+25}\,dx\ .$$

Wir versuchen zuerst mit dem Horner-Schema die Nullstellen des Polynoms $x^4+4x^3+14x^2+20x+25$ zu berechnen. Leider hat dieses Polynom keine ganzzahligen Nullstellen. Falls man auch Nullstellen der Form $a+bi$ mit $a,b\in\mathbb{Z}$, $b\neq 0$ und a^2+b^2 teilt 25 sucht, erhält man, dass $-1+2i$ und $-1-2i$ jeweils zweifache Nullstellen sind. Das kann man auch mit Maxima durch den Befehl

```
solve(x^4+4*x^3+14*x^2+20*x+25=0,x);
multiplicities;
```

erhalten, in Mathematica durch den Befehl

```
Solve[x^4+4 x^3+14 x^2+20 x+25==0,x]
```

erhalten, und in Maple durch den Befehl

```
solve(x^4+4*x^3+14*x^2+20*x+25=0,x);
```

erhalten. Daher ist

$$\begin{aligned} x^4+4x^3+14x^2+20x+25 &= \big(x-(-1+2i)\big)^2\big(x-(-1-2i)\big)^2 = \\ &= \big((x-(-1+2i))(x-(-1-2i))\big)^2 = (x^2+2x+5)^2\ . \end{aligned}$$

Auch mit dem Befehl

```
factor(x^4+4*x^3+14*x^2+20*x+25);
```

mit Maxima, bzw.

```
Factor[x^4+4 x^3+14 x^2+20 x+25]
```

mit Mathematica, bzw.

```
factor(x^4+4*x^3+14*x^2+20*x+25);
```

mit Maple erhält man dieses Ergebnis. Daher ist der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{16x^3+60x^2+88x+108}{x^4+4x^3+14x^2+20x+25} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+5} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+5)^2}\ .$$

Wenn man mit Maxima den Befehl

```
partfrac((16*x^3+60*x^2+88*x+108)/(x^4+4*x^3+
14*x^2+20*x+25),x);
```

verwendet, mit Mathematica den Befehl

```
Apart[(16 x^3+60 x^2+88 x+108)/(x^4+4 x^3+14 x^2+20 x+25)]
```

verwendet, oder mit Maple den Befehl

```
convert((16*x^3+60*x^2+88*x+108)/(x^4+4*x^3+
14*x^2+20*x+25),parfrac);
```

verwendet, so erhält man
$$\frac{16x^3+60x^2+88x+108}{x^4+4x^3+14x^2+20x+25}=\frac{16x+28}{x^2+2x+5}+\frac{-48x-32}{(x^2+2x+5)^2}\ .$$

Um diese Integrale zu berechnen, kann man zunächst die Substitution $u = x^2+2x+5$ probieren. Dann wäre $du=(2x+2)dx$, und wir erhalten
$$\frac{16x+28}{x^2+2x+5}=8\frac{2x+2}{x^2+2x+5}+12\frac{1}{x^2+2x+5}\quad\text{und}$$
$$\frac{-48x-32}{(x^2+2x+5)^2}=(-24)\frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2}+16\frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\ .$$
Es ist
$$\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx=\int\frac{1}{u}\,du=\log|u|=\log(x^2+2x+5)\quad\text{und}$$
$$\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2}\,dx=\int\frac{1}{u^2}\,du=-\frac{1}{u}=-\frac{1}{x^2+2x+5}\ .$$
Weiters ist $x^2+2x+5=(x+1)^2+4=4\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)$. Daher ist
$$12\frac{1}{x^2+2x+5}=3\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\quad\text{und}\quad 16\frac{1}{(x^2+2x+5)^2}=\frac{1}{\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)^2}\ .$$
Wenn man hier $t=\frac{x+1}{2}$ substituiert, dann ist $dx=2\,dt$,
$$\int\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx=2\int\frac{1}{t^2+1}\,dt=2\arctan t=2\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)$$
und unter Verwendung der Formel
$$\int\frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt=\frac{1}{2n-2}\frac{t}{(t^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{1}{(t^2+1)^{n-1}}\,dt$$
für $n=2$
$$\int\frac{1}{\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)^2}\,dx=2\int\frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt=2\left(\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt\right)=$$
$$=\frac{t}{t^2+1}+\arctan t=\frac{2x+2}{x^2+2x+5}+\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\ .$$

Setzen wir diese Ergebnisse zusammen, so erhalten wir, dass
$$\int\frac{16x^3+60x^2+88x+108}{x^4+4x^3+14x^2+20x+25}\,dx=$$
$$=8\log(x^2+2x+5)+\frac{2x+26}{x^2+2x+5}+7\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\ .$$