$$\text{Sei } a_n := \frac{5n^2+17n+19}{n^2+3n+7}\ .$$

Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und

führe den Beweis mit Hilfe der Definition des Grenzwerts.

Mit Hilfe der Definition des Grenzwerts zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq \frac{5001}{1000} = 5.001 \text{ gilt.}$$

Zunächst ist $a_n = \dfrac{5n^2+17n+19}{n^2+3n+7} = \dfrac{5+\frac{17}{n}+\frac{19}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}}$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{17}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{19}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n^2} = 0$ ist daher $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$|a_n - 5| = \frac{|5n^2+17n+19-5n^2-15n-35|}{|n^2+3n+7|} =$$

$$= \frac{|2n-16|}{n^2+3n+7} \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \frac{2n+\overbrace{16}^{\leq 16n}}{n^2+\underbrace{3n}_{\geq 0}+\underbrace{7}_{\geq 0}} \leq \frac{2n+16n}{n^2+0+0} = \frac{18n}{n^2} = \frac{18}{n}\ ,$$

und deshalb

$$|a_n - 5| \leq \frac{18}{n}\ . \tag{1}$$

Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig). Wegen des Archimedischen Axioms gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{18}{\varepsilon}$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $N > \frac{18}{\varepsilon}$. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ (beliebig). Weil $n \geq N > \frac{18}{\varepsilon}$ ergibt sich $\frac{18}{n} < \varepsilon$. Daher gilt wegen (1), dass $|a_n - 5| \leq \frac{18}{n} < \varepsilon$. Damit haben wir gezeigt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$ gilt.

Um zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \frac{5001}{1000}$, muss man ein $\varepsilon_0 > 0$ wählen. Dieses sollte sinnvollerweise (sonst funktioniert der Beweis nicht) kleiner als der Abstand von $\frac{5001}{1000}$ zum tatsächlichen Grenzwert sein, hier können wir geschickterweise die Hälfte dieses Abstands wählen.

Setze $\varepsilon_0 := \frac{1}{2000}$. Sei $N \in \mathbb{N}$ (beliebig). Definiere $n := \max\{N, 36001\}$. Dann ist $n \geq N$. Wegen $n \geq 36001 > 36000$ folgt aus (1), dass $|a_n - 5| \leq \frac{18}{n} < \frac{18}{36000} = \frac{1}{2000}$. Daher ist

$$\frac{1}{1000} = \left|\frac{5001}{1000} - 5\right| = \left|\frac{5001}{1000} - a_n + a_n - 5\right| \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq}$$

$$\leq \underbrace{\left|\frac{5001}{1000} - a_n\right|}_{=\left|a_n - \frac{5001}{1000}\right|} + \underbrace{|a_n - 5|}_{<\frac{1}{2000}} < \left|a_n - \frac{5001}{1000}\right| + \frac{1}{2000}\ .$$

Daraus ergibt sich

$$\left|a_n - \frac{5001}{1000}\right| > \frac{1}{1000} - \frac{1}{2000} = \frac{1}{2000} = \varepsilon_0\ ,$$

womit $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \frac{5001}{1000}$ gezeigt ist.