Diskrete Fouriertransformation – Reelle Version

Für $N \in \mathbb{N}$ definiere ein *trigonometrisches Polynom vom Grad* $\leq \frac{N-1}{2}$ als $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} a_k \cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} b_k \sin(2\pi kx)$, falls N ungerade ist, und $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} a_k \cos(2\pi kx) + a_{\frac{N}{2}} \cos(\pi Nx) + \sum_{k=1}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} b_k \sin(2\pi kx)$, falls N gerade ist. Das folgende Resultat ergibt sich als einfache Folgerung der komplexen Version. Man kann es auch unter Verwendung der reellen Orthogonalbasis beweisen.

Proposition 1. *Es sei $N \in \mathbb{N}$, und es seien $y_0, y_1, \ldots, y_{N-1} \in \mathbb{C}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq \frac{N-1}{2}$ mit $p\left(\frac{k}{N}\right) = y_k$ für $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Weiters gilt für ungerade N, dass*

$$p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} a_k \cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} b_k \sin(2\pi kx) \ ,$$

und für gerade N, dass

$$p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} a_k \cos(2\pi kx) + a_{\frac{N}{2}} \cos(\pi Nx) + \sum_{k=1}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} b_k \sin(2\pi kx) \ ,$$

wobei

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \ , \\
a_k &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cos\left(\tfrac{2\pi}{N} kj\right) \ , \quad \textit{für } k \in \left\{1, 2, \ldots, \left[\tfrac{N-1}{2}\right]\right\}, \\
b_k &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \sin\left(\tfrac{2\pi}{N} kj\right) \ , \quad \textit{für } k \in \left\{1, 2, \ldots, \left[\tfrac{N-1}{2}\right]\right\}, \textit{ und} \\
a_{\frac{N}{2}} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cos(\pi j) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j y_j \ , \quad \textit{falls } N \textit{ gerade ist.}
\end{aligned}$$