Der Existenzsatz von Giuseppe Peano

Vorraussetzung für den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard und Lindelöf ist die Stetigkeit und die lokale Lipschitz-Stetigkeit in x der Funktion f. Unter der einfacheren, aber schwächeren Annahme, dass f stetig ist, erhält man immer noch die Existenz von lokalen Lösungen. Allerdings muss diese Lösung nicht mehr eindeutig sein. Dies zeigt das Beispiel der Differenzialgleichung $\dot{x}(t) = 3x(t)^{\frac{2}{3}}$, $x(0) = 0$. Hier ist die Funktion $3x^{\frac{2}{3}}$ stetig, und sowohl $x(t) := 0$, als auch $x(t) := t^3$ sind Lösungen dieser Differenzialgleichung. Jetzt formulieren und beweisen wir den *Existenzsatz von Peano.*

Satz 1. *Es seien $r \in \mathbb{N}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^r$ und $a, b, M \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $M > 0$. Weiters sei $f : \overline{B}(x_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^r$ eine stetige Funktion, die $\big|f(x,t)\big| \leq M$ für alle $(x,t) \in \overline{B}(x_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a]$ erfüllt. Setze $\alpha := \min\big\{a, \frac{b}{M}\big\}$. Dann gibt es eine stetige Funktion $x : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^r$ mit $x(t_0) = x_0$, die $\dot{x}(t) = f\big(x(t), t\big)$ für alle $t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ erfüllt. Außerdem gilt $\big|x(t) - x_0\big| \leq M|t - t_0|$ für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, insbesondere ist $x(t) \in \overline{B}(x_0, b)$ für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.*

Beweis. Wegen einer Folgerung aus dem Satz von Stone-Weierstraß gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Lipschitz-stetige Funktion $f_n : \overline{B}(x_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^r$ mit $\big|f_n(x,t)\big| \leq M$ für alle $(x,t) \in \overline{B}(x_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a]$, sodass $\|f_n - f\|_\infty < \frac{1}{n}$ gilt. Da f_n Lipschitz-stetig ist, ist f_n stetig und lokal Lipschitz-stetig in x. Deshalb gibt es nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard und Lindelöf eine eindeutig bestimmte stetige Funktion $x_n : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^r$ mit $x_n(t_0) = x_0$ und $\dot{x}_n(t) = f_n\big(x_n(t), t\big)$ für alle $t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, und diese Funktion erfüllt $|x_n(t) - x_0| \leq M|t - t_0|$ für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Nachdem $\dot{x}_n(t) = f_n\big(x_n(t), t\big)$ gilt, folgt aus einer Proposition (die mit Hilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung bewiesen wurde), dass $x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_n\big(x_n(s), s\big)\, ds$ für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ gilt.

Definiere $\mathcal{F}$ als den Abschluss von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ in $\Big(C\big([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^r\big), \|.\|\Big)$, also $\mathcal{F} := \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Da $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, ist $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ kompakt. Offensichtlich ist $\mathcal{F}$ abgeschlossen. Wir werden jetzt zeigen, dass $\mathcal{F}$ auch beschränkt und gleichgradig stetig ist. Es sei $y \in \mathcal{F}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein n mit $\|y - x_n\|_\infty < \varepsilon$. Wegen $|y(t)| - |x_n(t)| \leq |y(t) - x_n(t)| \leq \|y - x_n\|_\infty < \varepsilon$ und

$$|x_n(t)| - |x_0| \leq |x_n(t) - x_0| \leq M\underbrace{|t - t_0|}_{\leq \alpha} \leq M\alpha$$

erhält man $|y(t)| \leq |x_n(t)| + \varepsilon \leq |x_0| + M\alpha + \varepsilon$ für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Somit ist auch $\|y\|_\infty \leq |x_0| + M\alpha + \varepsilon$, und weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist

$\|y\|_\infty \leq |x_0| + M\alpha$. Es gilt also $\|y\|_\infty \leq |x_0| + M\alpha$ für jedes $y \in \mathcal{F}$, wodurch die Beschränktheit von $\mathcal{F}$ gezeigt ist.

Jetzt sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \frac{\varepsilon}{3M}$. Dann ist $\delta > 0$. Es seien $t_1, t_2 \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ so, dass $|t_1 - t_2| < \delta$. Weiters sei $y \in \mathcal{F}$ beliebig. Dann gibt es ein n mit $\|y - x_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Wir erhalten

$$\Big| \underbrace{x_n(t_1)}_{=x_0+\int_{t_0}^{t_1} f_n\left(x_n(s),s\right)\,ds} - \underbrace{x_n(t_2)}_{=x_0+\int_{t_0}^{t_2} f_n\left(x_n(s),s\right)\,ds} \Big| = \left| \int_{t_2}^{t_1} f_n\big(x_n(s), s\big)\, ds \right| \leq$$
$$\leq \left| \int_{t_2}^{t_1} \underbrace{|f_n(x_n(s),s)|}_{\leq M} ds \right| \leq M \underbrace{|t_1 - t_2|}_{<\delta=\frac{\varepsilon}{3M}} < M\frac{\varepsilon}{3M} = \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Deswegen ist

$$\big|y(t_1) - y(t_2)\big| \leq \underbrace{\big|y(t_1) - x_n(t_1)\big|}_{\leq \|y-x_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\big|x_n(t_1) - x_n(t_2)\big|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\big|x_n(t_2) - y(t_2)\big|}_{\leq \|y-x_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}} <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Daher ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig.

Die Menge $\mathcal{F}$ ist somit eine beschränkte, abgeschlossene und gleichgradig stetige Teilmenge von $\big(C\big([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^r\big), \|.\|\big)$, wobei $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ ein kompakter metrischer Raum ist. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist $\mathcal{F}$ daher kompakt, und auch folgenkompakt. Nachdem (x_n) eine Folge in $\mathcal{F}$ ist und $\mathcal{F}$ folgenkompakt ist, gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und ein $x \in \mathcal{F}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - x\|_\infty = 0$ (weil es eine andere Teilfolge geben könnte, die gegen ein anderes Element von $\mathcal{F}$ konvergiert, erhält man nicht mehr die Eindeutigkeit der Lösung).

Sei $\varepsilon > 0$. Es ist $\overline{B}(x_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a]$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^{r+1}$, und deshalb ist sie kompakt. Daher ist die stetige Funktion f auch gleichmäßig stetig. Somit gibt es ein $\delta > 0$, sodass $\big|f(y_1, t) - f(y_2, t)\big| < \frac{\varepsilon}{2\alpha+1}$ für alle $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ und alle $y_1, y_2 \in \overline{B}(x_0, b)$ mit $|y_1 - y_2| < \delta$. Dann gibt es ein k, sodass $\|x_{n_k} - x\|_\infty < \min\big\{\delta, \frac{\varepsilon}{2\alpha+1}\big\}$ und $\|f_{n_k} - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\alpha+1}$. Für jedes $s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ ist dann wegen $\big|x_{n_k}(s) - x(s)\big| \leq \|x_{n_k} - x\|_\infty < \delta$ die Eigenschaft $\big|f\big(x_{n_k}(s), s\big) - f(x(s), s)\big| < \frac{\varepsilon}{2\alpha+1}$ erfüllt. Jetzt sei $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ beliebig. Man erhält somit

$$\left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{\big|f\big(x(s), s\big) - f\big(x_{n_k}(s), s\big)\big|}_{<\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}} ds \right| \leq \underbrace{\left| \int_{t_0}^{t} \frac{\varepsilon}{2\alpha+1}\, ds \right|}_{=\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}\underbrace{|t-t_0|}_{\leq\alpha}} \leq \alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}\,.$$

Weiters gilt auch

$$\left|\int_{t_0}^{t} \underbrace{\left|f_{n_k}\big(x_{n_k}(s),s\big)-f\big(x_{n_k}(s),s\big)\right|}_{\le \|f_{n_k}-f\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}} ds\right| \le \underbrace{\left|\int_{t_0}^{t} \frac{\varepsilon}{2\alpha+1}\,ds\right|}_{=\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}\underbrace{|t-t_0|}_{\le\alpha}} \le \alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}\,,$$

woraus wir

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{t_0}^{t}\Big(f_{n_k}\big(x_{n_k}(s),s\big)-f\big(x(s),s\big)\Big)\,ds\right| \le \\
&\le \underbrace{\left|\int_{t_0}^{t}\Big(f_{n_k}\big(x_{n_k}(s),s\big)-f\big(x_{n_k}(s),s\big)\Big)\,ds\right|}_{\le|\int_{t_0}^{t}|f_{n_k}(x_{n_k}(s),s)-f(x_{n_k}(s),s)|\,ds|\le\alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}} + \\
&+\underbrace{\left|\int_{t_0}^{t}\Big(f\big(x_{n_k}(s),s\big)-f\big(x(s),s\big)\Big)\,ds\right|}_{\le|\int_{t_0}^{t}|f(x_{n_k}(s),s)-f(x(s),s)|\,ds|\le\alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}} \le \alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}+\alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}=2\alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}
\end{aligned}$$

erhalten. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\left|x(t)-\left(x_0+\int_{t_0}^{t} f\big(x(s),s\big)\,ds\right)\right| \le \\
&\le \underbrace{\left|x(t)-x_{n_k}(t)\right|}_{\le\|x_{n_k}-x\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}} + \left|\underbrace{x_{n_k}(t)}_{=x_0+\int_{t_0}^{t} f_{n_k}(x_{n_k}(s),s)\,ds} - \left(x_0+\int_{t_0}^{t} f\big(x(s),s\big)\,ds\right)\right| < \\
&< \frac{\varepsilon}{2\alpha+1} + \underbrace{\left|\int_{t_0}^{t}\Big(f_{n_k}\big(x_{n_k}(s),s\big)-f\big(x(s),s\big)\Big)\,ds\right|}_{\le 2\alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}} \le \\
&\le \frac{\varepsilon}{2\alpha+1}+2\alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha+1}=\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(x(s),s\big)\,ds$ für jedes $t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ gelten. Aus einer Proposition (die mit Hilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung bewiesen wurde) folgt, dass $\dot{x}(t) = f\big(x(t),t\big)$ für alle $t \in (t_0-\alpha, t_0+\alpha)$ gilt. Weiters ist $x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f\big(x(s),s\big)\,ds = x_0$.

Damit ist die Existenz einer Lösung gezeigt. Für ein beliebiges $t \in [t_0 - \alpha, t_0+\alpha]$ gilt $x(t)-x_0 = \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,ds$ wegen $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,ds$, und daher

$$|x(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)\, ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(x(s), s)|}_{\leq M} ds \right| \leq M|t - t_0|\,.$$

Somit haben wir auch die gewünschte Abschätzung für diese Lösung gezeigt. Wegen

$$|x(t) - x_0| \leq M \underbrace{|t - t_0|}_{\leq \alpha \leq \frac{b}{M}} \leq M \frac{b}{M} = b$$

erhalten wir schließlich auch $x(t) \in \overline{B}(x_0, b)$ für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, womit der Beweis beendet ist. $\square$