## Gleichmäßige Stetigkeit

**Definition.** Sei $A \subseteq \mathbb{R}^s$ nichtleer und sei $f : A \to \mathbb{R}^r$ eine Funktion. Dann heißt $f$ gleichmäßig stetig, wenn $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta$ : $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Es hängt $\delta$ also nur von $f$ und $\varepsilon$ ab, während es bei der Stetigkeit noch zusätzlich von $x$ abhängt.

*Beispiel.* Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := ax + b$ ist gleichmäßig stetig.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{|a|+1}$. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ so, dass $|x - y| < \delta$. Dann ist

$$|f(x) - f(y)| = |(ax + b) - (ay + b)| = |a(x - y)| = |a|\underbrace{|x - y|}_{<\delta} \le \underbrace{\frac{|a|}{|a| + 1}}_{\le 1}\varepsilon < \varepsilon.$$

*Beispiel.* Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^2$. Dann ist $f$ nicht gleichmäßig stetig.

Setze $\varepsilon_0 := 1$. Sei $\delta > 0$. Wähle $x := \frac{2}{\delta}$ und $y := \frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Dann gelten $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$ und $|\underbrace{f(x)}_{=\frac{4}{\delta^2}} - \underbrace{f(y)}_{=\frac{4}{\delta^2}+2+\frac{\delta^2}{4}}| = 2 + \frac{\delta^2}{4} \ge 1 = \varepsilon_0$.

*Beispiel.* Es sei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \sin\frac{1}{x}$ definiert. Dann ist $f$ nicht gleichmäßig stetig.

Setze $\varepsilon_0 := 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $a_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ und $b_n := \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi n}$. Dann gilt $a_n - b_n \to 0 - 0 = 0$. Sei $\delta > 0$. Es gibt dann ein $n$ mit $|a_n - b_n| < \delta$. Wegen $f(a_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1$ und $f(b_n) = \sin(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n) = -1$ ist $|f(a_n) - f(b_n)| = |1 - (-1)| = 2 > 1 = \varepsilon_0$.

**Proposition 1.** *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^s$ nichtleer, $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}^r$ seien gleichmäßig stetige Funktionen, und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$|f_1(x) - f_1(y)| < \frac{\varepsilon}{|\alpha_1| + |\alpha_2| + 1} \quad \text{und} \quad |f_2(x) - f_2(y)| < \frac{\varepsilon}{|\alpha_1| + |\alpha_2| + 1}$$

für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta$ gelten. Seien $x, y \in A$ so, dass $|x - y| < \delta$. Dann gilt

$$|(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x) - (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(y)| \le$$
$$\le |\alpha_1|\underbrace{|f_1(x) - f_1(y)|}_{<\frac{\varepsilon}{|\alpha_1|+|\alpha_2|+1}} + |\alpha_2|\underbrace{|f_2(x) - f_2(y)|}_{<\frac{\varepsilon}{|\alpha_1|+|\alpha_2|+1}} \le \underbrace{\frac{|\alpha_1| + |\alpha_2|}{|\alpha_1| + |\alpha_2| + 1}}_{<1}\varepsilon < \varepsilon\ .$$

Deshalb ist $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ gleichmäßig stetig. □

**Proposition 2.** *Es sei* $A \subseteq \mathbb{R}^{s_1}$ *und* $B \subseteq \mathbb{R}^{s_2}$. *Weiters seien* $f : A \to B$ *und* $g : B \to \mathbb{R}^{s_3}$ *gleichmäßig stetig. Dann ist* $g \circ f$ *gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\eta > 0$, sodass für $u_1, u_2 \in B$ mit $|u_1 - u_2| < \eta$ die Eigenschaft $|g(u_1) - g(u_2)| < \varepsilon$ gilt. Außerdem gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f(v_1) - f(v_2)| < \eta$ für alle $v_1, v_2 \in A$ mit $|v_1 - v_2| < \eta$ gilt. Seien $x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta$. Dann ist $|f(x) - f(y)| < \eta$. Deshalb ist $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| = |g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon$. □

**Proposition 3.** *Seien* $I, J \subseteq \mathbb{R}$ *Intervalle mit* $I \cap J \neq \emptyset$. *Weiters sei* $f : I \cup J \to \mathbb{R}^s$ *eine Funktion. Wenn* $f\big|_I$ *und* $f\big|_J$ *gleichmäßig stetig sind, dann ist* $f$ *gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta_1, \delta_2 > 0$, sodass $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta_1$ und $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x, y \in J$ mit $|x - y| < \delta_2$ gelten. Setze $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Seien $x, y \in I \cup J$ so, dass $|x - y| < \delta$.

1. *Fall*: $x, y \in I$. Dann ist $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
2. *Fall*: $x, y \in J$. Dann ist $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
3. *Fall*: $x \in I$ und $y \in J$, bzw. $x \in J$ und $y \in I$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x \in I$, $y \in J$ und $x \leq y$ annehmen. Dann gibt es ein $u \in I \cap J$ mit $x \leq u \leq y$. Es ist $x, u \in I$, $|x - u| \leq |x - y| < \delta$, und daher $|f(x) - f(u)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ebenso ist $u, y \in I$, $|u - y| \leq |x - y| < \delta$, und deshalb $|f(u) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Somit ist $|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f(u)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(u) - f(y)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$. □